Федеральное государственное образовательное
бюджетное учреждение
высшего образования

«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ»

(Финансовый университет)

Факультет
информационных технологий и анализа больших данных
Кафедра «Прикладная математика и информатика »

Домашнее задание № 1

«Поиск экстремумов функции двух переменных с ограничениями и без»

Студенты группы ПМ19-3:
Филимонова Ю.М.
Корнева Т.А.
Косовская Т.П.
Дубровская А.А.
Кривоносова Д.В.

Руководитель:
Аксенов Дмитрий Андреевич

Москва 2022

Оглавление.

1. Постановка задачи

“Оптимизировать прибыль фирмы монополиста”

Необходимо в среде программирования Python реализовать функцию, которая находит:

- локальные экстремумы двух функций
- локальные экстремумов с ограничением при помощи метода Лагранжа

Обеспечить визуализацию с помощью 3-D графика функции с отмеченными точками локальных экстремумов.

2. Математическая модель

В разделе описывается формульные зависимости в общем виде необходимые для решения класса подобных задач.

2.1.1. Локальные экстремумы функций двух переменных

Точкой максимума называется точка M (x_0, y_0) функции двух переменных $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки M такая, что для всех точек (x, y) из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$.

Точкой минимума называется точка M (x_0, y_0) функции двух переменных $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки M такая, что для всех точек (x, y) из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$.

Точками экстремума функции двух переменных называются точки минимума и максимума этой функции. Значения самой функции в точках экстремума называются экстремумами функции двух переменных. Точка экстремума функции лежит внутри области определения функции. Функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

Необходимое условие экстремума функции двух переменных. Пусть дифференцируемая функция z = f (x, y) имеет в точке M (x_0 , y_0) экстремум. Тогда частные производные первого порядка в этой точке $\frac{\partial z(M)}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z(M)}{\partial y} = 0$.

Точки, в которой первые частные производные функции двух переменных равны нулю или не существуют, называются стационарными точками или критическими точками.

Достаточные условия существования экстремума. Пусть функция z = f (x, y) : а) определена в некоторой окрестности критической точки (x, y) в которой $\frac{\partial z(M)}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z(M)}{\partial y} = 0$; б) имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x^2} = A, \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = B, \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial y^2} = C.$

Тогда, если:

1) $\Delta = AC - B^2 > 0$, то в точке (x_0 , y_0) функция z=f (x,y) имеет экстремум, причем если A < 0 - максимум, если A > 0 - минимум;

2) $\Delta = AC - B^2 < 0$, то функция z=f (x,y) экстремума не имеет;

3) $\Delta = AC - B^2 = 0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.

2.1.2. Алгоритм нахождения локального экстремума функции двух переменных:

1) Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$;

2) Составить систему уравнений из равенств этих производных нулю

$\{\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \;\; \frac{\partial z}{\partial y} = 0$;

3) Решить полученную систему уравнений и найти критические точки функции;

4) Найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C$;

5) Вычислить значения частных производных второго порядка в каждой критической точке;

6) Найти определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ и проверить достаточные условия существования экстремума;

7) Подставить значения критической точки, в которой найден экстремум, в исходную функцию двух переменных $z = f\,(x, y)$ и получить значение экстремума функции.

2.2.1. Поиск локальных экстремумов функции двух переменных с ограничениями (метод Лагранжа)

Метод множителей Лагранжа состоит в том, что для отыскания условного экстремума составляют функцию Лагранжа:

F(x,y) = f(x, y) + λφ(x,y) (параметр λ называют множителем Лагранжа).

Необходимые условия экстремума задаются системой уравнений, из которой определяются стационарные точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0; \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Достаточным условием, из которого можно выяснить характер экстремума, служит знак $d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2$.

Если в стационарной точке $d^2F > 0$, то функция z = f(x, y) имеет в данной точке условный минимум, если же $d^2F < 0$, то условный максимум.

Есть и другой способ для определения характера экстремума. Из уравнения связи получаем: $\varphi`_x dx + \varphi`_y dy = 0$, $dy = -\varphi`_x / \varphi`_y\, dx$, поэтому в любой стационарной точке имеем:

$$d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2 = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dx\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}dx\right) + F''_{yy}\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}dx\right)^2 =$$

$$= -\frac{dx^2}{\left(\varphi'_y\right)^2} \cdot \left(-(\varphi'_y)^2F''_{xx} + 2\varphi'_x\varphi'_yF''_{xy} - (\varphi'_x)^2F''_{yy}\right)$$

Второй сомножитель (расположенный в скобке) можно представить в такой форме:

$$H = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \boxed{F''_{xx}} & \boxed{F''_{xy}} \\ \varphi'_y & \boxed{F''_{xy}} & \boxed{F''_{yy}} \end{vmatrix}$$

Красным цветом выделены элементы определителя $\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}$, который является гессианом функции Лагранжа.

Если H > 0, то $d^2F < 0$, что указывает на условный максимум. Аналогично, при H < 0 имеем $d^2F > 0$, т.е. имеем условный минимум функции z = f(x, y).

2.2.2 Алгоритм исследования функции двух переменных на условный экстремум

1. Составить функцию Лагранжа F(x,y) = f(x, y) + λφ(x,y)

2. Решить систему $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0; \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$

3. Определить характер экстремума в каждой из найденных в предыдущем пункте стационарных точек. Для этого применить любой из указанных способов:

- Составить определитель H и выяснить его знак
- С учетом уравнения связи вычислить знак d^2F

4. Если H > 0, то условный максимум. Если H < 0, то минимум. Если H = 0, то требуются дополнительные исследования.

Пример 1.

Найти условный экстремум функции $z(x, y) = x + 3y$ при условии $x^2 + y^2 = 0$.

Решение

Геометрическая интерпретация данной задачи такова: требуется найти наибольшее и наименьшее значение аппликаты плоскости $z = x + 3y$ для точек ее пересечения с цилиндром $x^2 + y^2 = 10$.

Выразить одну переменную через другую из уравнения связи и подставить ее в функцию $z(x, y) = x + 3y$ несколько затруднительно, поэтому будем использовать метод Лагранжа.

Обозначив $\varphi(x, y)=x^2 + y^2 - 10$, составим функцию Лагранжа:

$F(x, y)=z(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x + 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 10)$;

$\partial F/\partial x = 1 + 2\lambda x$; $\partial F/\partial y = 3 + 2\lambda y$.

Запишем систему уравнений для определения стационарных точек функции Лагранжа:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0; \\ 3 + 2\lambda y = 0; \\ x^2 + y^2 - 10 = 0. \end{cases}$$

Если предположить $\lambda = 0$, то первое уравнение станет таким: $1 = 0$. Полученное противоречие говорит о том, что $\lambda \neq 0$. При условии $\lambda \neq 0$ из первого и второго уравнений имеем: $x = -1/2\lambda$, $y = -3/2\lambda$. Подставляя полученные значения в третье уравнение, получим:

$$\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2 - 10 = 0;$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 10;\ \lambda^2 = \frac{1}{4};\ \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -\frac{1}{2}; \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2};\ x_1 = -\frac{1}{2\lambda_1} = 1;\ y_1 = -\frac{3}{2\lambda_1} = 3;$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2};\ x_2 = -\frac{1}{2\lambda_2} = -1;\ y_2 = -\frac{3}{2\lambda_2} = -3.$$

Итак, система имеет два решения: $x_1 = 1$; $y_1 = 3$; $\lambda_1 = -12$ и $x_2 = -1$; $y_2 = -3$; $\lambda_2 = 12$. Выясним характер экстремума в каждой стационарной точке: $M_1(1;\ 3)$ и $M_2(-1;\ -3)$. Для этого вычислим определитель H в каждой из точек.

В точке M1(1; 3) получим:

$$\varphi'_x = 2x;\ \varphi'_y = 2y;\ F''_{xx} = 2\lambda;\ F''_{xy} = 0;\ F''_{yy} = 2\lambda.$$

$$H = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ x & \lambda & 0 \\ y & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

Следовательно, в точке $M_1(1; 3)$ функция $z(x, y)= x + 3y$ имеет условный максимум, $z_{max}=z(1; 3)=10$.

Аналогично, в точке $M_2(-1; -3)$ найдем:

$$H = 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ x & \lambda & 0 \\ y & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 3 & 0 & -1/2 \end{vmatrix} = 40 > 0.$$

Так как $H < 0$, то в точке $M_{2(-1;\,-3)}$ имеем условный минимум функции

$z(x, y) = x + 3y$, а именно: $z_{min}=z(-1; -3) = -10$.

Отметим, что вместо вычисления значения определителя H в каждой точке, гораздо удобнее раскрыть его в общем виде. Дабы не загромождать текст подробностями, этот способ скрою под примечание.

Вопрос о характере экстремума в стационарных точках $M_1(1;3)$ и $M_2(-1; -3)$ можно решить и без использования определителя H. Найдем знак d^2F в каждой стационарной точке:

$$d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2 = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$$

Отмечу, что запись dx^2 означает именно dx, возведённый во вторую степень, т.е. $(dx)^2$. Отсюда имеем: $dx^2 + dy^2 > 0$, посему при $\lambda 1 = -12$ получим $d^2F < 0$. Следовательно, функция имеет в точке $M_1(1; 3)$ условный максимум.

Аналогично, в точке $M_2(-1; -3)$ получим условный минимум функции $z(x,y) = x + 3y$. Отметим, что для определения знака d^2F не пришлось учитывать связь между dx и dy, ибо знак d^2F очевиден без дополнительных преобразований. В следующем примере для определения знака d^2F уже будет необходимо учесть связь между dx и dy.

Ответ: в точке (−1; −3) функция имеет условный минимум, $z_{min} = -10$. В точке (1; 3) функция имеет условный максимум, $z_{max} = 10$.

3. Алгоритмы

В разделе описываются различные алгоритмы, выбранные для воплощения математической модели в виде законченного продукта.

3.1. Алгоритм 1

Алгоритм нахождения экстремумов с помощью частных производных.

3.1.1. Описание входных данных

На вход подается названия переменных, функция, ограничения на значения аргументов, если такие имеются.

3.1.2. Описание алгоритма решения

Для начала находятся частные производные по аргументам, после чего они приравниваются к нулю. При решении полученной системы находятся точки в виде координат. Следующим шагом находятся вторые частные производные, составляется матрица и находится её определитель, по знаку которого делается вывод о типе экстремума.

3.1.3. Описание выходных данных

Выходные данные представляют собой список из экстремумов, которые удовлетворяют всем условиям.

3.2. Алгоритм 2

Данный алгоритм является адаптированным под формат Python методом Лагранжа.

3.2.1. Описание входных данных

На вход подается названия аргументов, функция, ограничивающая функция и ограничения на значения аргументов, если такие имеются.

3.2.2. Описание алгоритма решения

Составляется функция Лагранжа, после чего находятся первые частные производные, которые приравниваются к нулю. При решении системы получаем координаты, которые удовлетворяют ограничивающей функции, и являются экстремумами. Далее с помощью вторых частных производных составляется матрица и считается определитель, на основе которого делается вывод о типе экстремума.

3.2.3. Описание выходных данных

На выходе получаем точки локальных экстремумов, которые удовлетворяют всем условиям.

4. Варианты использования системы

В разделе перечисляются названия предусматриваемых вариантов использования системы пользователем.

4.1. ВИ 1

Пользователь вводит названия переменных, функцию, ограничивающую функцию, если рассматривается метод Лагранжа, и не указывает ограничений для значений переменных. Пример:

```
Введите названия переменных. Пример: x y. Ввод:x y
Введите функцию z=f(x,y). Пример: x**2+sin(y). Ввод:exp(x+y)*(x**2-2*y**2)
Есть ли ограничения ? 1-да/ 0 – нет. Ввод:0
```

В данном случае программа выведет все точки экстремума и значение функции в них.

4.2. ВИ 2

Пользователь вводит названия переменных, функцию, ограничивающую функцию, если рассматривается метод Лагранжа, и указывает ограничения для значений переменных. Пример:

```
Введите названия переменных. Пример: x y. Ввод:x y
Введите функцию z=f(x,y). Пример: x**2+sin(y). Ввод:x**2+sin(y)
Есть ли ограничения ? 1-да/ 0 – нет. Ввод:1
Введите допустимые интервалы по x в виде интервала. Пример: (-1,1). Ввод:(-10,10)
Введите ограничения по y в виде интервала. Пример: (-1,1). Ввод:(-10,10)
```

В данном случае программа выведет экстремумы, которые удовлетворяют интервалам, а также значения функции в полученных точках.

5. Архитектура решения

В разделе описываются создаваемые для решения задачи методы (функции), разделенные по 3-м принципиальным блокам.

5.1. Функции считывания информации

Функции, считывания информации: f_input()

```
def f_input():
  '''
  Функция для вводы данных
  '''
  name_of_var=input('Введите названия переменных. Пример: x y. Ввод:')
  f=input('Введите функцию z=f(x,y). Пример: x**2+sin(y). Ввод:')
  ogr=input('Есть ли ограничения ? 1-да/ 0 - нет. Ввод:')
  if int(ogr)==1:
    ogr_x=input('Введите допустимые интервалы по x в виде интервала. Пример: (-1,1). Ввод:')
    ogr_y=input('Введите ограничения по y в виде интервала. Пример: (-1,1). Ввод:')
  else:
    ogr_x=None
    ogr_y=None
  return [name_of_var,f,ogr_x,ogr_y]
```

Входные данные не предусмотрены. Выходные параметры представляют собой список введенных пользователем данных.

5.2. Функции обработки информации

Функции, отвечающие за обработку информации:

- extr(name_of_var,f,ogr_x=None,ogr_y=None)
- check_x_y(c,ogr_x,ogr_y)

```python
def extr(name_of_var,f,ogr_x=None,ogr_y=None):
    '''
    Функция нахождения экстремумов
    name_of_var - названия переменных
    f - функция в виде строкового типа
    ogr_x - интервал ограничений для x
    ogr_y - интервал ограничений для y
    '''
    x,y=symbols(name_of_var)
    f=parsing.sympy_parser.parse_expr(f)
    dfdx=diff(f,x)
    dfdy=diff(f,y)
    c=solve([dfdx,dfdy])
```

```python
def check_x_y(c,ogr_x,ogr_y):
    '''
    Функция проверки полученных экстремумов на вхождение в интервал ограничений
    c - список полученных решений
    ogr_x - интервал ограничений для x
    ogr_y - интервал ограничений для y
    '''
    c_new=[]
    x=list(c[0].keys())[0]
    y=list(c[0].keys())[1]
```

1. **extr(name_of_var,f,ogr_x=None,ogr_y=None)**

   Входные переменные:

   name_of_var - названия переменных

   f - функция

   ogr_x,ogr_y - ограничения переменных, если были введены пользователем

   Выходные переменные:

   Найденные экстремумы, которые проверены с помощью функции check_x_y()

2. **check_x_y(c,ogr_x,ogr_y)**

   Входные переменные:

   c - список экстремумов, которые не прошли обработка на ограничение

   ogr_x,ogr_y - ограничения переменных

   Выходные переменные:

   Экстремумы, которые удовлетворяют экстремумам.

5.3. Функции вывода информации

Функции, отвечающие за вывод информации:

- extr(name_of_var,f,ogr_x=None,ogr_y=None)
- graph(f,d)

```
def graph(f,d):
  '''
  Функция построения графика и экстремумов
  f - функция в строковом формате
  d - список полученных экстремумов и седловых точек
  '''
  fig = plt.figure()
  ax = plt.axes(projection='3d')
  k=0
```

1. **extr(name_of_var,f,ogr_x=None,ogr_y=None)**

   Входные переменные:

   name_of_var - названия переменных

   f - функция

   ogr_x,ogr_y - ограничения переменных, если были введены пользователем

   Выходные переменные:

   Вывод экстремумов, которые удовлетворяют всем условиям, в том числе и комплексные.

2. **graph(f,d)**

   Входные переменные:

   f - функция

   d - список полученных экстремумов

   Выходные переменные:

   График с изображением функции и точками с обозначениями типа экстремума, комплексные числа не выводятся на рисунок.

5.4 Вспомогательные функции

Функции, помогающие в реализации алгоритма:

- f_new(f,x1,y1)
- all_f()

```
def f_new(f,x1,y1):
  '''
  Функция для создания массива Z  с помощью подсчета значения функции в точках
  f - функция в строковом формате
  x1 - массив значений x
  y1 - массив значений y
  '''
  s=[]
  for i in range(len(x1)):
```

```
def all_f():
  '''
  Функция, объединяющая все функции выше
  '''
  s=f_input()
  d=extr(*s)
  graph(s[1],d)
```

1. **f_new(f,x1,y1)**

   Входные данные:

   f - функция

   x1 - значения переменной x

   y1 - значения переменной y

   Выходные данные:

   Значение функции в заданной точке.

2. **all_f()**

   Функция, которая объединяет вызов всех функций.

6. Тестирование

В разделе приводится тестирование работы программы. Оптимальный способ представления результатов тестирования – это следующие таблицы:

Таблица 1. Результаты тестирования и сравнение алгоритма 1

Входные данные	Алгоритм 1	WolframAlpha
Функция №1: $y*x^2+x*y^3-x*y$	Локальный максимум = 4*sqrt(5)/125 = 0.072 в точке (0.4; -0.447) Локальный минимум = -4*sqrt(5)/125 = -0.072 в точке (0.4; 0.447)	Локальный максимум = 4/(25*sqrt(5)) = 0.072 в точке (0.4; -0.447) Локальный минимум = -4/(25*sqrt(5)) = -0.072 в точке (0.4; 0.447)
Функция №2: $x^3+3*x*y^2-15*x-12*y+1$	Локальный максимум = 29 в точке (-2; -1) Локальный минимум = -27 в точке (2; 1)	Локальный максимум = 29 в точке (-2; -1) Локальный минимум = -27 в точке (2; 1)
Функция №3: x/y	Локальные минимумы и максимумы отсутствуют	Локальные минимумы и максимумы отсутствуют
Функция №4: $x^2+\sin(y)$	Локальный минимум = -1 в точке (0; 4.712)	Локальный минимум = -1 в точке (0; 2*pi*n - pi/2) for integer n
Функция №5: $\exp(x+y)*(x^2-2*y^2)$	Локальный максимум = 1.083 в точке (-4; 2)	Локальный максимум = $8/e^2$ = 1.083 в точке (-4; 2)
Функция №6: atan(x*y)	Локальные минимумы и максимумы отсутствуют	Локальные минимумы и максимумы отсутствуют

Таблица 2. Результаты тестирования и сравнение алгоритма 2

Входные данные	Алгоритм 2	WolframAlpha
Функция №1: $y*x^2+x*y^3-x*y$ Ограничение: $x^2+y^2-1=0$	Локальный максимум = 0 в точке (0; -1) Локальный минимум = 0 в точке (0; 1) Локальный максимум = 0.705 в точке (-0.843; 0.538) Локальный минимум = -0.705 в точке (-0.843; -0.538) Локальный максимум = 0.115 в точке (0.593; 0.805) Локальный минимум = -0.115 в точке (0.593; -0.805)	Локальный максимум = 0.704519 в точке (-0.84307; 0.537803) Локальный минимум = -0.704519 в точке (-0.84307; -0.537803) Остальные точки показаны на графиках
Функция №2: $x+3*y$ Ограничение: $x^2+y^2-10=0$	Локальный максимум = 10 в точке (1; 3) Локальный минимум = -10 в точке (-1; -3)	Локальный максимум = 10 в точке (1; 3) Локальный минимум = -10 в точке (-1; -3)

Функция №3: x/y Ограничение: $x^2+y^2-10=0$	Локальные минимумы и максимумы отсутствуют	Локальные минимумы и максимумы отсутствуют
Функция №4: $3*x+4*y-5$ Ограничение: $x^2+y^2-1=0$	Локальный максимум = 0 в точке (0.6; 0.8) Локальный минимум = -10 в точке (-0.6; -0.8)	Локальный максимум = 0 в точке (0.6; 0.8) Локальный минимум = -10 в точке (-0.6; -0.8)
Функция №5: $3*y^3+4*x^2-x*y$ Ограничение: $x+y=0$	Локальный максимум = 2.058 в точке (1.111; -1.111) Локальный минимум = 0 в точке (0; 0)	Точки отмечены на графиках (числовые значения не выведены)
Функция №6: $5*x*y-4$ Ограничение: $x^2/8+y^2/2-1=0$	Локальный максимум = 6 в точке (-2; -1) Локальный максимум = 6 в точке (2; 1) Локальный минимум = -14 в точке (-2; 1) Локальный минимум = -14	Локальный максимум = 6 в точке (-2; -1) Локальный максимум = 6 в точке (2; 1) Локальный минимум = -14 в точке (-2; 1) Локальный минимум = -14

	в точке (2; -1)	в точке (2; -1)

В Приложении представлены графики и результаты работы алгоритмов 1, 2 и WolframAlpha.

Также возможно сравнение различных способов решения функций, используя интересующие нас критерии (например, время выполнения алгоритма).

Ниже будут представлены сравнительная таблица по трём способам решения функций и вывод о выборе предпочтительного алгоритма.

7.Заключение

Итак, подводя итоги, можно констатировать следующее: согласно требованиям заказчика в среде программирования Python были реализованы функции, одна из которых находила локальные экстремумы двух функций без ограничений с помощью частных производных, другая же находила локальные экстремумы с ограничением при помощи метода Лагранжа. А также обеспечили решение визуализацией с помощью 3-D графиков функции, на которых отмечены точки локальных экстремумов.

Произведем сравнение выбранных алгоритмов по разным критериям. Оптимальный вид сравнения приведен в следующей таблице:

Таблица 3. Сравнение алгоритмов.

Критерий	Алгоритм 1	Алгоритм 2	WolframAlpha
Возможные параметры для ввода	Названия переменных, функция, ограничения	Названия переменных, функция, ограничивающая функция, ограничения	Функция, ограничения
Точность выводимых значений	До трёх знаков после запятой	До трёх знаков после запятой	В некоторых случаях до шести знаков после запятой
Полнота вывода ответа	Выводятся в печатном и графическом виде все локальные минимумы и максимумы, а также пишутся седловые точки. Выводятся координаты точек экстремума.	Выводятся в печатном и графическом виде все локальные минимумы и максимумы, а также пишутся седловые точки. Выводятся координаты точек экстремума.	Выводятся в графическом виде все локальные минимумы и максимумы (без седловых точек), но в печатном формате не всегда пишутся все точки экстремума. Выводятся

	Дроби и корни переводятся в десятичные числа.	Дроби и корни переводятся в десятичные числа.	координаты точек экстремума. Сами точки не всегда представлены в виде десятичных значений.
Формат вывода ответа	Все значения экстремумов выводятся в форме десятичного числа (возможны преобразования из дробей и корней)	Все значения экстремумов выводятся в форме десятичного числа (возможны преобразования из дробей и корней)	Некоторые значения выводятся в формате дробей (в том числе с корнями), остальные в форме десятичного числа
Время выполнения	Время выполнения для разных функций: 8.34 s 5.93 s 6.31 s 5.27 s	Время выполнения для разных функций: 12.7 s 14.7 s 7.54 s 12 s	Время выполнения не выводится

	7.43 s 13.4 s	16.1 s 12.9 s	
Количество графиков	Один	Один	Два или ноль

Для того, чтобы выбрать оптимальный алгоритм для заказчика, необходимо знать, какие критерии являются для него приоритетными. Мы бы предложили в качестве оптимального решения алгоритм 2, так как он по многим характеристикам схож с алгоритмом 1 и всегда выводит ответ в одном формате (в отличие от WolframAlpha).

8.Приложение

```
Ввод [186]: all_f()

Введите названия переменных. Пример: x y. Ввод:x y
Введите функцию z=f(x,y). Пример: x**2+sin(y). Ввод:y*x**2+x*y**3-x*y
Есть ли ограничения ? 1-да/ 0 - нет. Ввод:0
В точке x = 0 = 0.000 y = -1 = -1.000 функция не обладает экстремумом, то есть седловая точка
В точке x = 0 = 0.000 y = 0 = 0.000 функция не обладает экстремумом, то есть седловая точка
В точке x = 0 = 0.000 y = 1 = 1.000 функция не обладает экстремумом, то есть седловая точка
В точке x = 2/5 = 0.400 y = -sqrt(5)/5 = -0.447  функция имеет локальный максимум равный 4*sqrt(5)/125 = 0.072
В точке x = 2/5 = 0.400 y = sqrt(5)/5 = 0.447  функция имеет локальный минимум равный -4*sqrt(5)/125 = -0.072
В точке x = 1 = 1.000 y = 0 = 0.000 функция не обладает экстремумом, то есть седловая точка
```

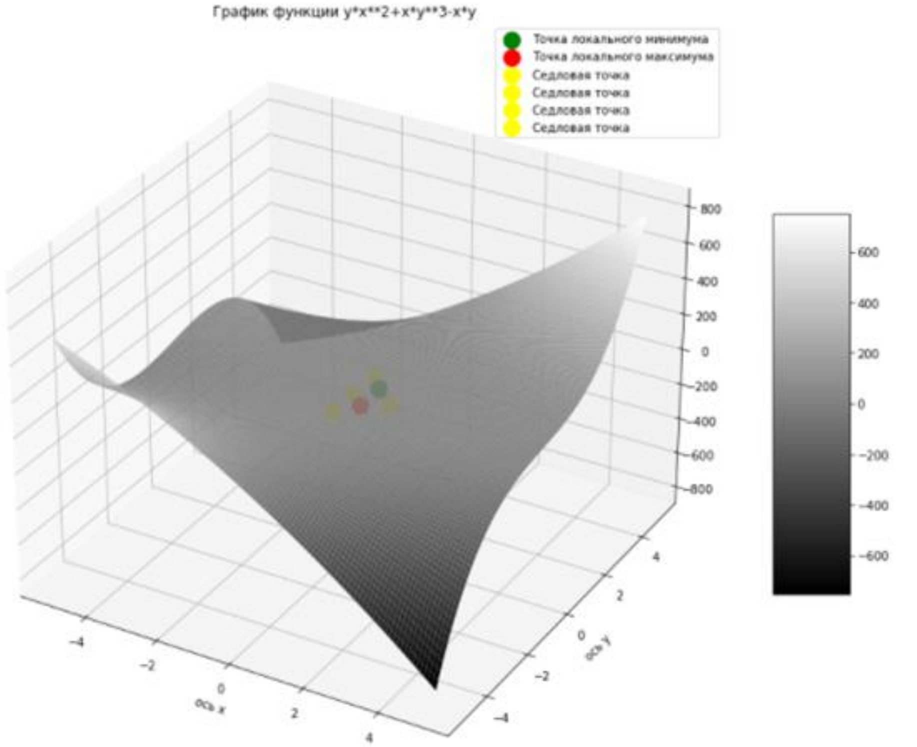


Рис. 1 Функция №1, Алгоритм 1

Input interpretation:

local extrema	$y\,x^2 + x\,y^3 - x\,y$

Local maximum:

Approximate form

$$\max\{y\,x^2 + x\,y^3 - x\,y\} = \frac{4}{25\sqrt{5}} \text{ at } (x,\,y) = \left(\frac{2}{5},\, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Local minimum:

Approximate form

$$\min\{y\,x^2 + x\,y^3 - x\,y\} = -\frac{4}{25\sqrt{5}} \text{ at } (x,\,y) = \left(\frac{2}{5},\, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Рис. 2 Функция №1, WolframAlpha

```
Введите названия переменных. Пример: x y. Ввод:x y
Введите функцию z=f(x,y). Пример: x**2+sin(y). Ввод:y*x**2+x*y**3-x*y
Введите ограничивающую функцию z=f(x,y)=0. Пример: x**2+y**2-1. Ввод:x**2+y**2-1
Есть ли ограничения ? 1-да/ 0 - нет. Ввод:0
В точке x = 0 = 0.000 y = -1 = -1.000  функция имеет локальный максимум равный 0 = 0.000
В точке x = 0 = 0.000 y = 1 = 1.000  функция имеет локальный минимум равный 0 = 0.000
В точке x = 1 = 1.000 y = 0 = 0.000 функция не обладает экстремумом
В точке x = -1/8 + sqrt(33)/8 = 0.593 y = (sqrt(66) + 111*sqrt(2))/(8*sqrt(927 - 47*sqrt(33))) = 0.805  функция имеет локальный
максимум равный -(-1/8 + sqrt(33)/8)*(sqrt(66) + 111*sqrt(2))/(8*sqrt(927 - 47*sqrt(33))) + (-1/8 + sqrt(33)/8)**2*(sqrt(66) +
111*sqrt(2))/(8*sqrt(927 - 47*sqrt(33))) + (-1/8 + sqrt(33)/8)*(sqrt(66) + 111*sqrt(2))**3/(512*(927 - 47*sqrt(33))**(3/2)) =
0.115
В точке x = -1/8 + sqrt(33)/8 = 0.593 y = -(sqrt(66) + 111*sqrt(2))/(8*sqrt(927 - 47*sqrt(33))) = -0.805  функция имеет локальн
ый минимум равный -(-1/8 + sqrt(33)/8)*(sqrt(66) + 111*sqrt(2))**3/(512*(927 - 47*sqrt(33))**(3/2)) - (-1/8 + sqrt(33)/8)**2*(s
qrt(66) + 111*sqrt(2))/(8*sqrt(927 - 47*sqrt(33))) + (-1/8 + sqrt(33)/8)*(sqrt(66) + 111*sqrt(2))/(8*sqrt(927 - 47*sqrt(33))) =
-0.115
В точке x = -sqrt(33)/8 - 1/8 = -0.843 y = (-sqrt(66) + 111*sqrt(2))/(8*sqrt(47*sqrt(33) + 927)) = 0.538  функция имеет локальн
ый максимум равный (-sqrt(33)/8 - 1/8)*(-sqrt(66) + 111*sqrt(2))**3/(512*(47*sqrt(33) + 927)**(3/2)) + (-sqrt(33)/8 - 1/8)**2*
(-sqrt(66) + 111*sqrt(2))/(8*sqrt(47*sqrt(33) + 927)) - (-sqrt(33)/8 - 1/8)*(-sqrt(66) + 111*sqrt(2))/(8*sqrt(47*sqrt(33) + 92
7)) = 0.705
В точке x = -sqrt(33)/8 - 1/8 = -0.843 y = (-111*sqrt(2) + sqrt(66))/(8*sqrt(47*sqrt(33) + 927)) = -0.538  функция имеет локаль
ный минимум равный -(-111*sqrt(2) + sqrt(66))*(-sqrt(33)/8 - 1/8)/(8*sqrt(47*sqrt(33) + 927)) + (-111*sqrt(2) + sqrt(66))*(-sqr
t(33)/8 - 1/8)**2/(8*sqrt(47*sqrt(33) + 927)) + (-111*sqrt(2) + sqrt(66))**3*(-sqrt(33)/8 - 1/8)/(512*(47*sqrt(33) + 927)**(3/
2)) = -0.705
```

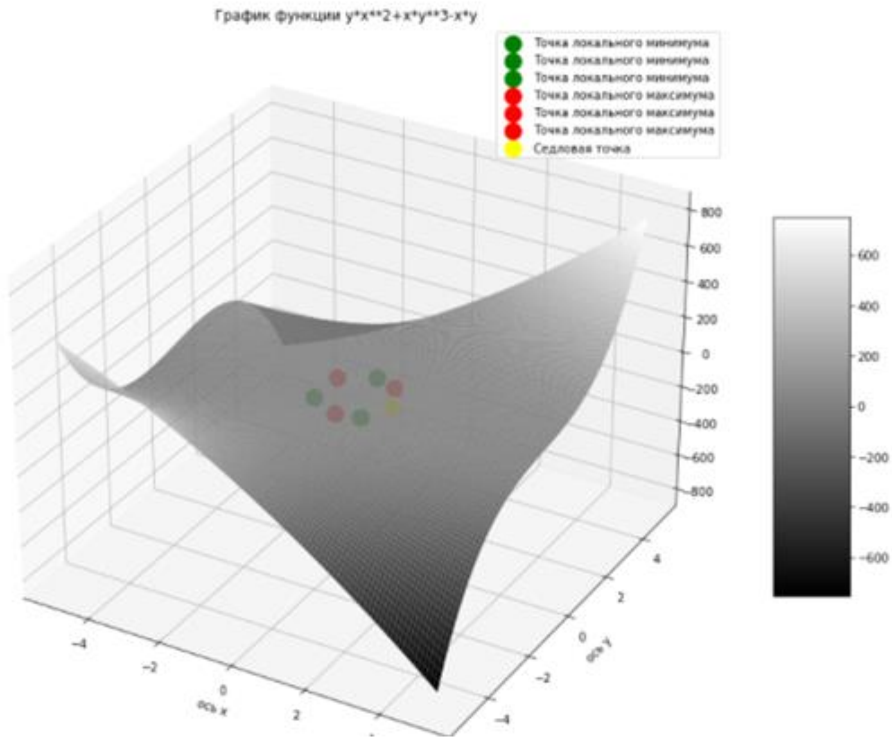


Рис. 3 Функция №1, Алгоритм 2

Input interpretation:

extrema	function	$y\,x^2 + x\,y^3 - x\,y$
	domain	$-1 + x^2 + y^2 = 0$

Global maximum:

More digits

$\max\{y\,x^2 + x\,y^3 - x\,y \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\} \approx 0.704519$ at $(x, y) \approx (-0.84307, 0.537803)$

Global minimum:

More digits

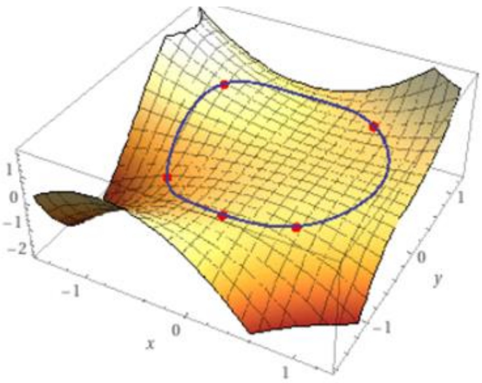
$\min\{y\,x^2 + x\,y^3 - x\,y \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\} \approx -0.704519$ at $(x, y) \approx$ $(-0.84307, -0.537803)$

Global minimum:

Approximate form

$$\min\{y\,x^2 + x\,y^3 - x\,y \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\} = -\sqrt{\frac{33399}{131072} + \frac{5511\sqrt{33}}{131072}} \text{ at } (x, y) = \left(-\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{33}}{8}, -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}(15 - \sqrt{33})}\right)$$

Рис. 4 Функция №1, WolframAlpha



Contour plot:

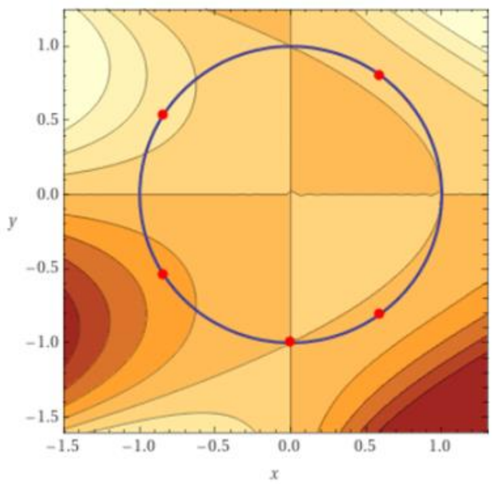


Рис. 5 Функция №1, WolframAlpha

```
Ввод [187]: all_f()

Введите названия переменных. Пример: x y. Ввод:x y
Введите функцию z=f(x,y). Пример: x**2+sin(y). Ввод:x**3+3*x*y**2-15*x-12*y+1
Есть ли ограничения ? 1-да/ 0 - нет. Ввод:0
В точке x = -2 = -2.000 y = -1 = -1.000  функция имеет локальный максимум равный 29 = 29.000
В точке x = -1 = -1.000 y = -2 = -2.000 функция не обладает экстремумом, то есть седловая точка
В точке x = 1 = 1.000 y = 2 = 2.000 функция не обладает экстремумом, то есть седловая точка
В точке x = 2 = 2.000 y = 1 = 1.000  функция имеет локальный минимум равный -27 = -27.000
```

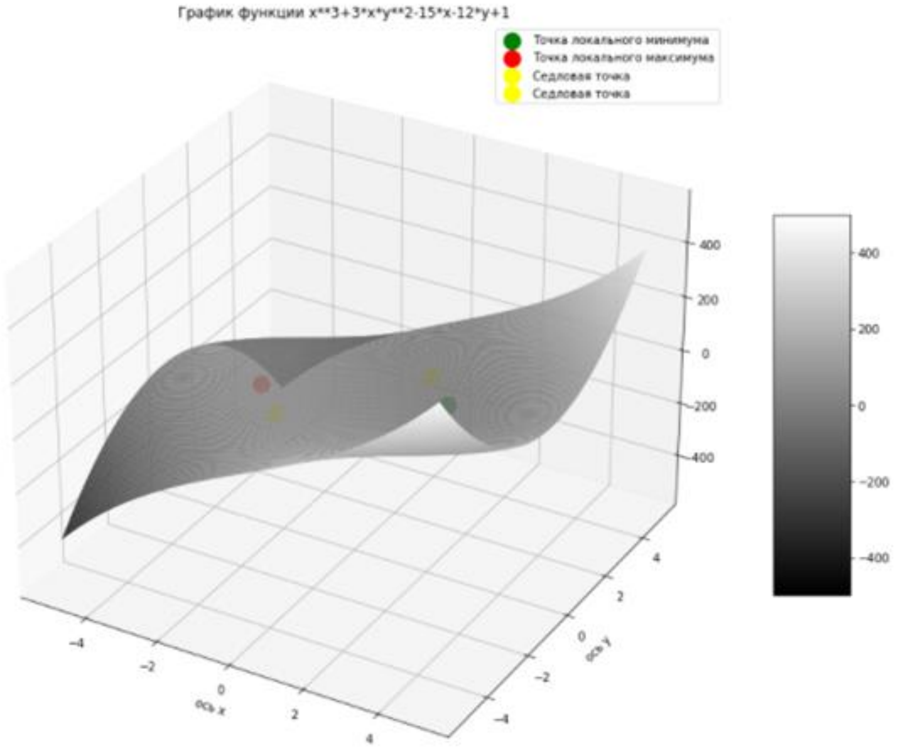


Рис. 6 Функция №2, Алгоритм 1

Input interpretation:

local extrema	$x^3 + 3\,x\,y^2 - 15\,x - 12\,y + 1$

Local maximum:

$$\max\{x^3 + 3\,x\,y^2 - 15\,x - 12\,y + 1\} = 29 \text{ at } (x,\,y) = (-2,\,-1)$$

Local minimum:

$$\min\{x^3 + 3\,x\,y^2 - 15\,x - 12\,y + 1\} = -27 \text{ at } (x,\,y) = (2,\,1)$$

Рис. 7 Функция №2, WolframAlpha

```
Ввод [194]: all_f_with_limit()

Введите названия переменных. Пример: x y. Ввод:x y
Введите функцию z=f(x,y). Пример: x**2+sin(y). Ввод:x+3*y
Введите ограничивающую функцию z=f(x,y)=0. Пример: x**2+y**2-1. Ввод:x**2+y**2-10
Есть ли ограничения ? 1-да/ 0 - нет. Ввод:0
В точке x = 1 = 1.000 y = 3 = 3.000  функция имеет локальный максимум равный 10 = 10.000
В точке x = -1 = -1.000 y = -3 = -3.000  функция имеет локальный минимум равный -10 = -10.000
```

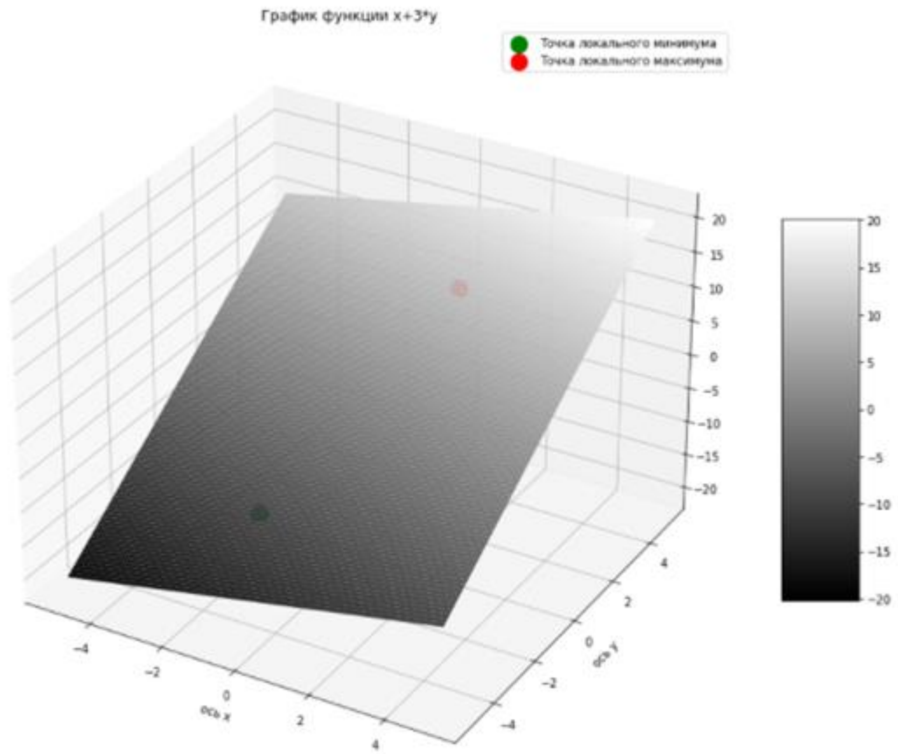


Рис. 8 Функция №2, Алгоритм 2

Input interpretation:

extrema	function	$x + 3y$
	domain	$-10 + x^2 + y^2 = 0$

Global maximum:

$$\max\{x + 3y \mid x^2 + y^2 - 10 = 0\} = 10 \text{ at } (x, y) = (1, 3)$$

Global minimum:

$$\min\{x + 3y \mid x^2 + y^2 - 10 = 0\} = -10 \text{ at } (x, y) = (-1, -3)$$

3D plot:

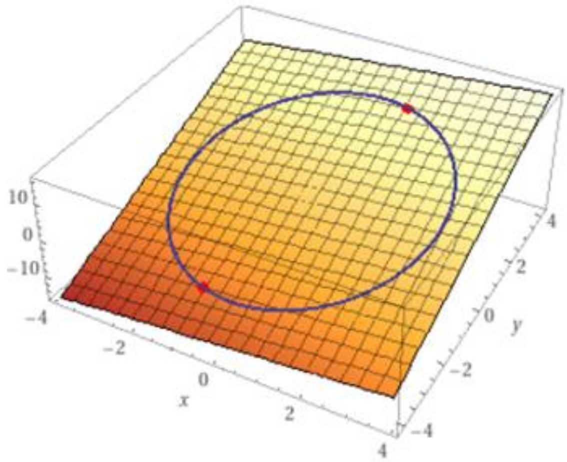


Рис. 9 Функция №2, WolframAlpha

Contour plot:

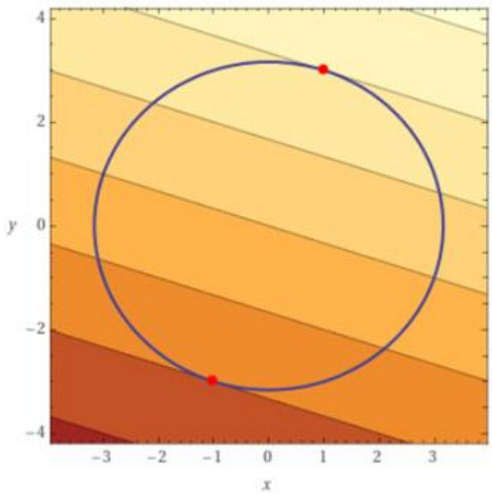


Рис. 10 Функция №2, WolframAlpha

```
Ввод [188]: all_f()

Введите названия переменных. Пример: x y. Ввод:x y
Введите функцию z=f(x,y). Пример: x**2+sin(y). Ввод:x/y
Есть ли ограничения ? 1-да/ 0 - нет. Ввод:0

No handles with labels found to put in legend.

Решения нет
```

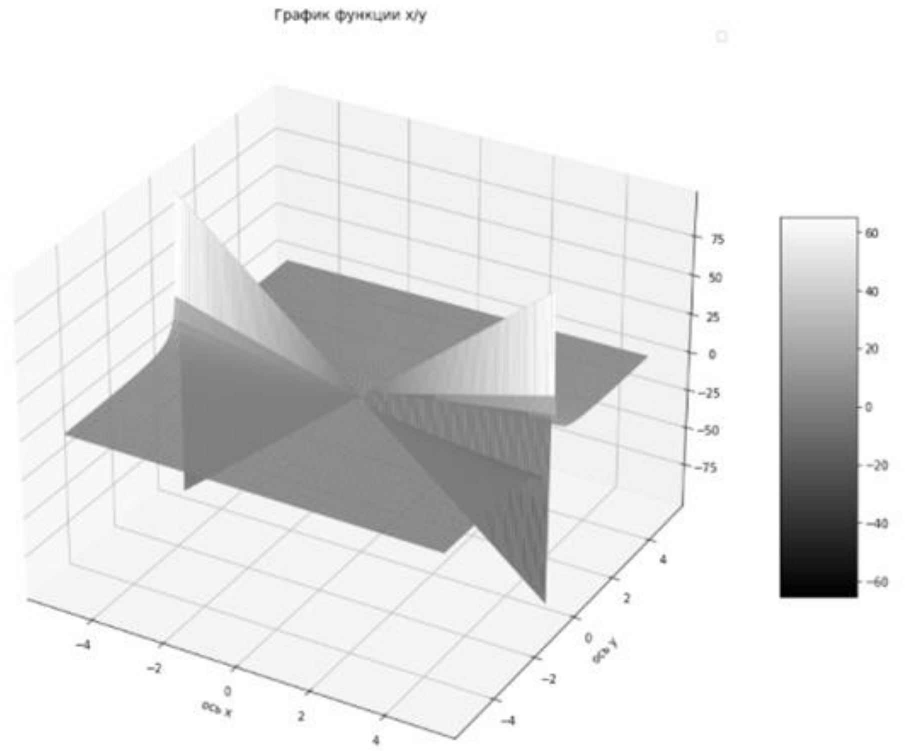


Рис. 11 Функция №3, Алгоритм 1

Input interpretation:

local extrema	$\frac{x}{y}$

Local maxima:

(no local maxima found)

Local minima:

(no local minima found)

Рис. 12 Функция №3, WolframAlpha

```
Ввод [195]: all_f_with_limit()

Введите названия переменных. Пример: x y. Ввод:x y
Введите функцию z=f(x,y). Пример: x**2+sin(y). Ввод:x/y
Введите ограничивающую функцию z=f(x,y)=0. Пример: x**2+y**2-1. Ввод:x**2+y**2-10
Есть ли ограничения ? 1-да/ 0 - нет. Ввод:0

No handles with labels found to put in legend.

Решения нет
```

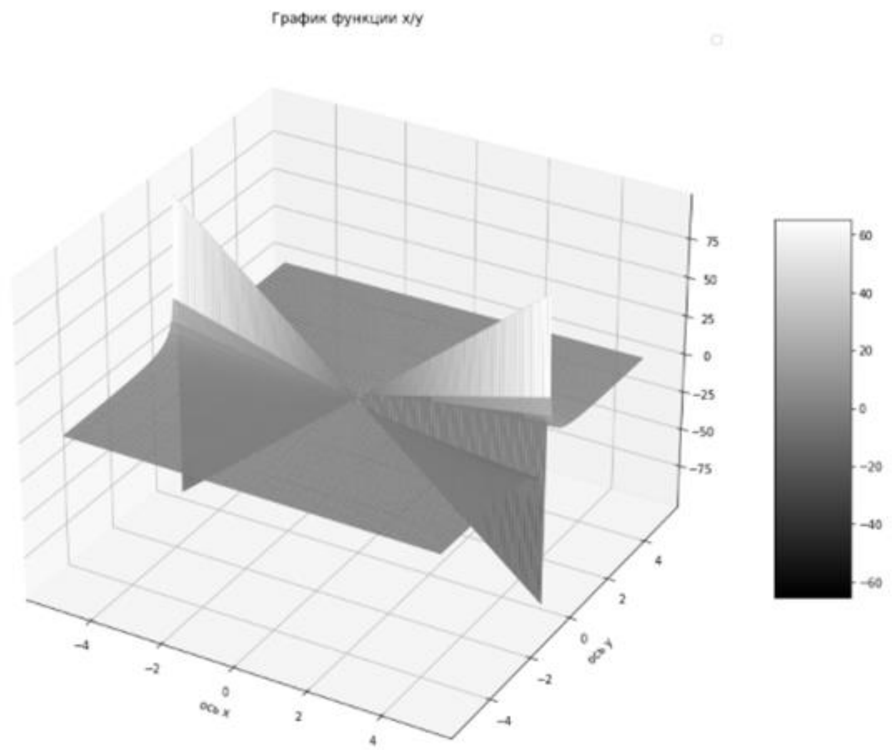


Рис. 13 Функция №3, Алгоритм 2

Input interpretation:

extrema	function	$\frac{x}{y}$
	domain	$-10 + x^2 + y^2 = 0$

Global maxima:

(no global maxima found)

Global minima:

(no global minima found)

Рис. 14 Функция №3, WolframAlpha

```
Ввод [191]: all_f()

Введите названия переменных. Пример: x y. Ввод:x y
Введите функцию z=f(x,y). Пример: x**2+sin(y). Ввод:x**2+sin(y)
Есть ли ограничения ? 1-да/ 0 - нет. Ввод:0
В точке x = 0 = 0.000 y = pi/2 = 1.571 функция не обладает экстремумом, то есть седловая точка
В точке x = 0 = 0.000 y = 3*pi/2 = 4.712  функция имеет локальный минимум равный -1 = -1.000
```

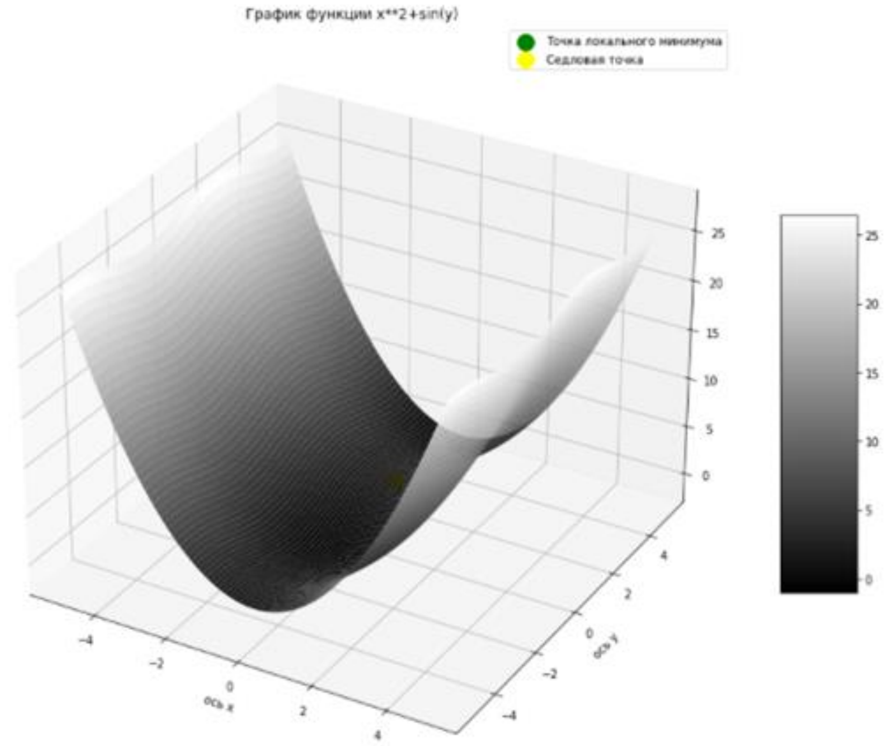


Рис. 15 Функция №4, Алгоритм 1

Input interpretation:

local extrema	$x^2 + \sin(y)$

Local maxima:

(no local maxima found)

Local minima:

Approximate form

$$\min\{x^2 + \sin(y)\} = -1 \text{ at } (x, y) = \left(0, 2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) \text{ for integer } n$$

Рис. 16 Функция №4, WolframAlpha

```
Ввод [196]: all_f_with_limit()

Введите названия переменных. Пример: x y. Ввод:x y
Введите функцию z=f(x,y). Пример: x**2+sin(y). Ввод:3*x+4*y-5
Введите ограничивающую функцию z=f(x,y)=0. Пример: x**2+y**2-1. Ввод:x**2+y**2-1
Есть ли ограничения ? 1-да/ 0 - нет. Ввод:0
В точке x = 3/5 = 0.600 y = 4/5 = 0.800  функция имеет локальный максимум равный 0 = 0.000
В точке x = -3/5 = -0.600 y = -4/5 = -0.800  функция имеет локальный минимум равный -10 = -10.000
```

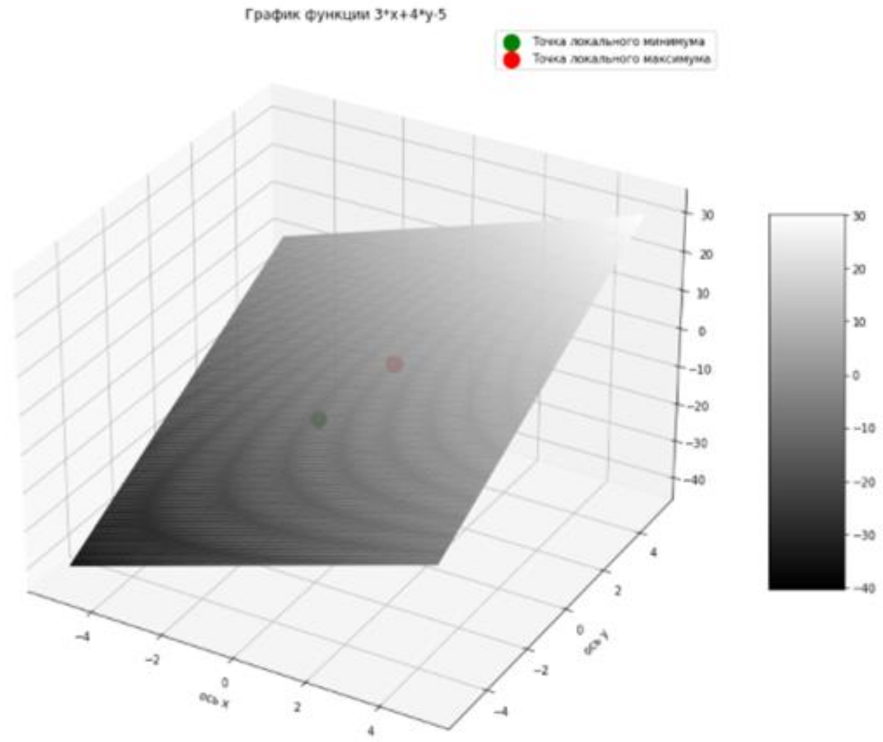


Рис. 17 Функция №4, Алгоритм 2

extrema	function	$3x + 4y - 5$
	domain	$-1 + x^2 + y^2 = 0$

Global maximum:

Approximate form

$$\max\{3x + 4y - 5 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\} = 0 \text{ at } (x, y) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Global minimum:

Approximate form

$$\min\{3x + 4y - 5 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\} = -10 \text{ at } (x, y) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

3D plot:

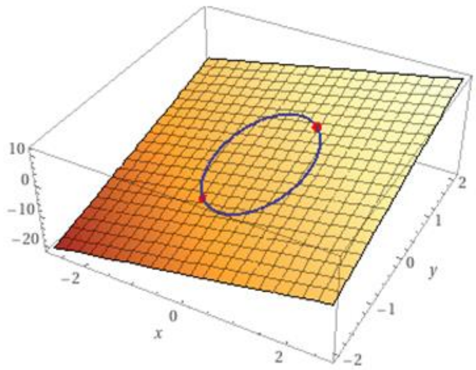


Рис. 18 Функция №4, WolframAlpha

Contour plot:

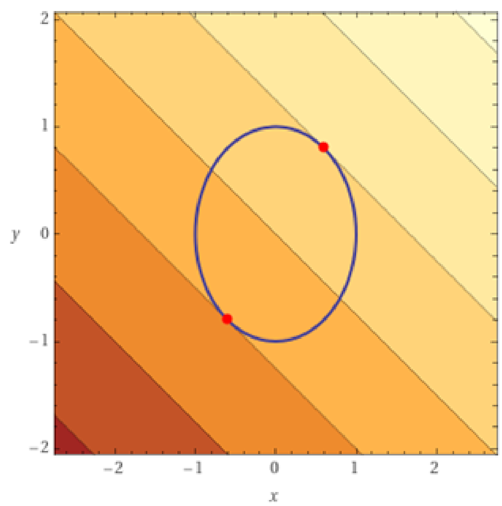


Рис. 19 Функция №4, WolframAlpha

```
Ввод [192]: all_f()

Введите названия переменных. Пример: x y. Ввод:x y
Введите функцию z=f(x,y). Пример: x**2+sin(y). Ввод:exp(x+y)*(x**2-2*y**2)
Есть ли ограничения ? 1-да/ 0 - нет. Ввод:0
В точке x = -4 = -4.000 y = 2 = 2.000  функция имеет локальный максимум равный 8*exp(-2) = 1.083
В точке x = 0 = 0.000 y = 0 = 0.000 функция не обладает экстремумом, то есть седловая точка
```

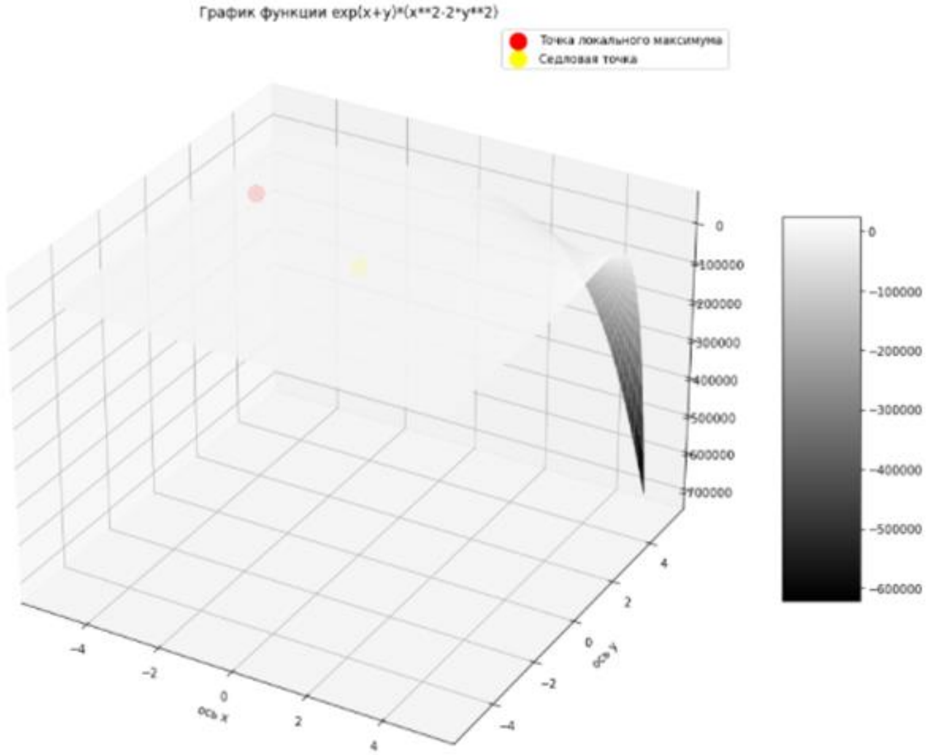


Рис. 20 Функция №5, Алгоритм 1

Input interpretation:

local extrema	$\exp(x+y)\left(x^2-2y^2\right)$

Local maximum:

Approximate form

$$\max\{\exp(x+y)\left(x^2-2y^2\right)\} = \frac{8}{e^2} \text{ at } (x, y) = (-4, 2)$$

Local minima:

(no local minima found)

Рис. 21 Функция №5, WolframAlpha

```
Ввод [197]: all_f_with_limit()

Введите названия переменных. Пример: x y. Ввод:x y
Введите функцию z=f(x,y). Пример: x**2+sin(y). Ввод:3*y**3+4*x**2-x*y
Введите ограничивающую функцию z=f(x,y)=0. Пример: x**2+y**2-1. Ввод:x+y
Есть ли ограничения ? 1-да/ 0 - нет. Ввод:0
В точке x = 10/9 = 1.111 y = -10/9 = -1.111  функция имеет локальный максимум равный 500/243 = 2.058
В точке x = 0 = 0.000 y = 0 = 0.000  функция имеет локальный минимум равный 0 = 0.000
```

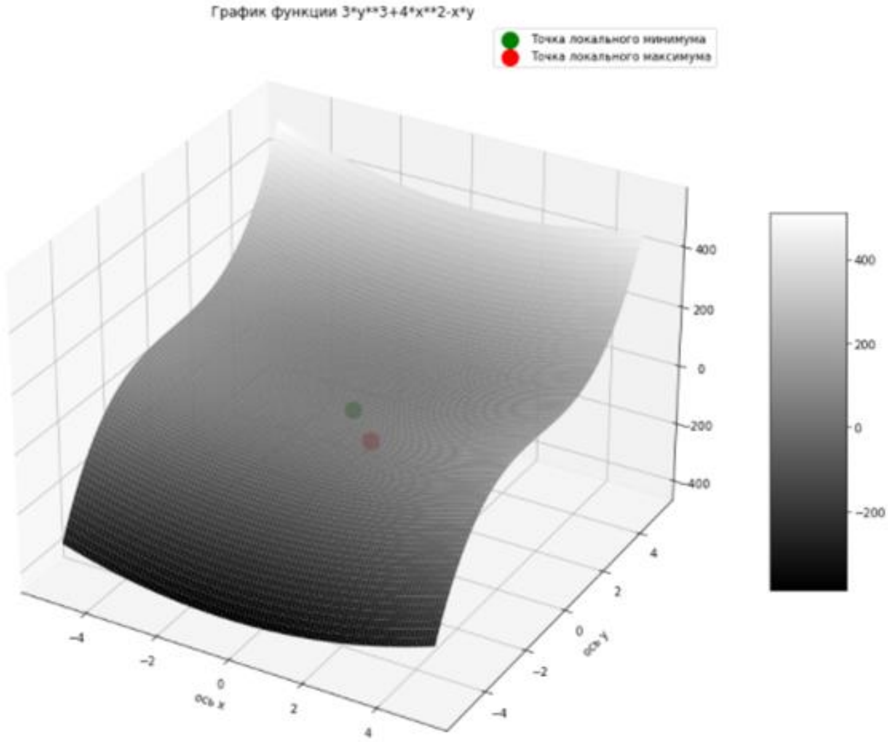


Рис. 22 Функция №5, Алгоритм 2

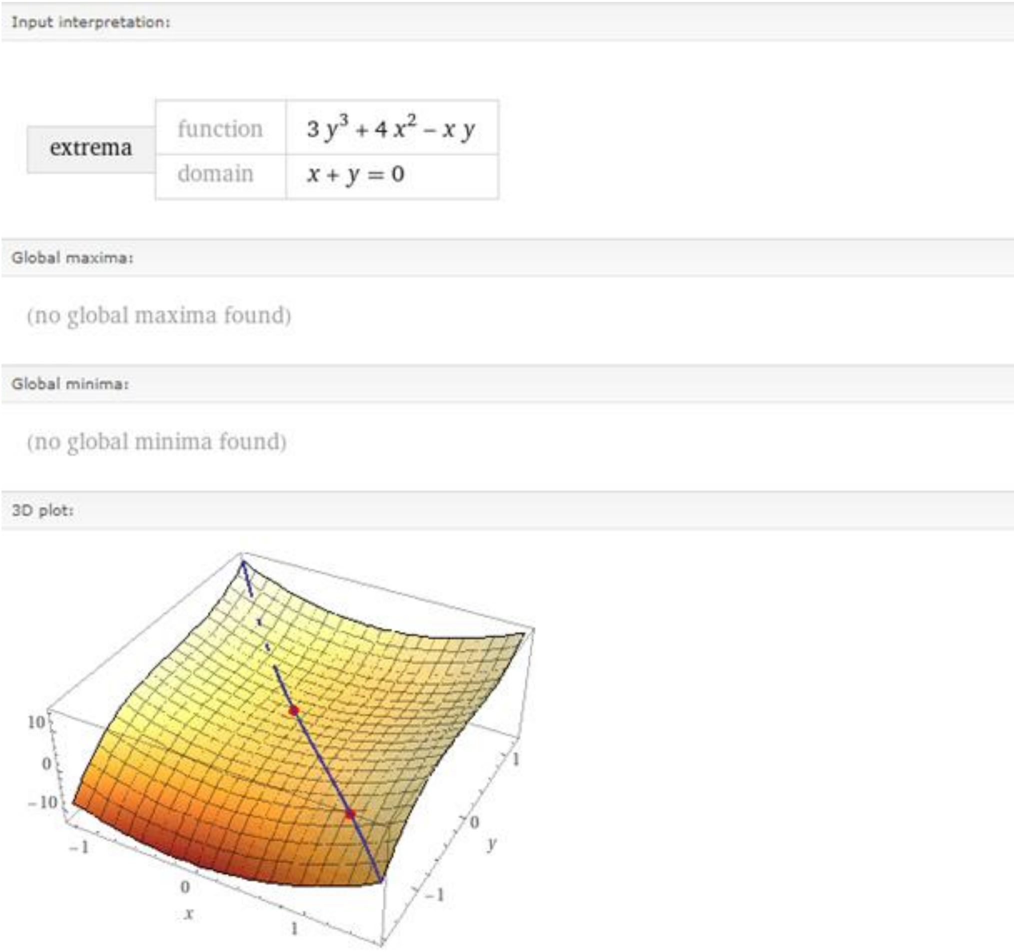


Рис. 23 Функция №5, WolframAlpha

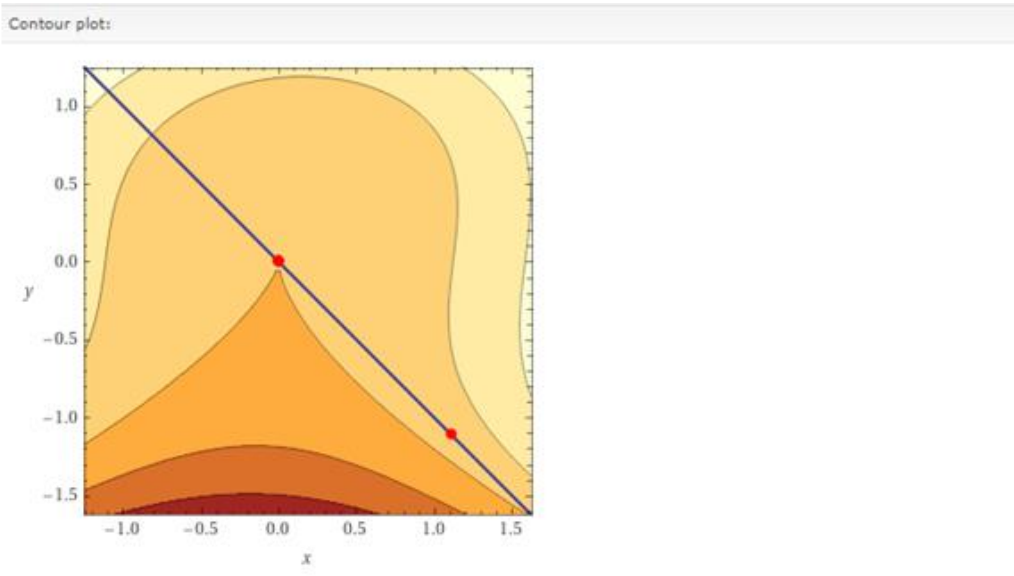


Рис. 24 Функция №5, WolframAlpha

```
Ввод [185]: all_f()
Введите названия переменных. Пример: x y. Ввод:x y
Введите функцию z=f(x,y). Пример: x**2+sin(y). Ввод:atan(x*y)
Есть ли ограничения ? 1-да/ 0 - нет. Ввод:0
В точке x = 0 = 0.000 y = 0 = 0.000 функция не обладает экстремумом, то есть седловая точка
```

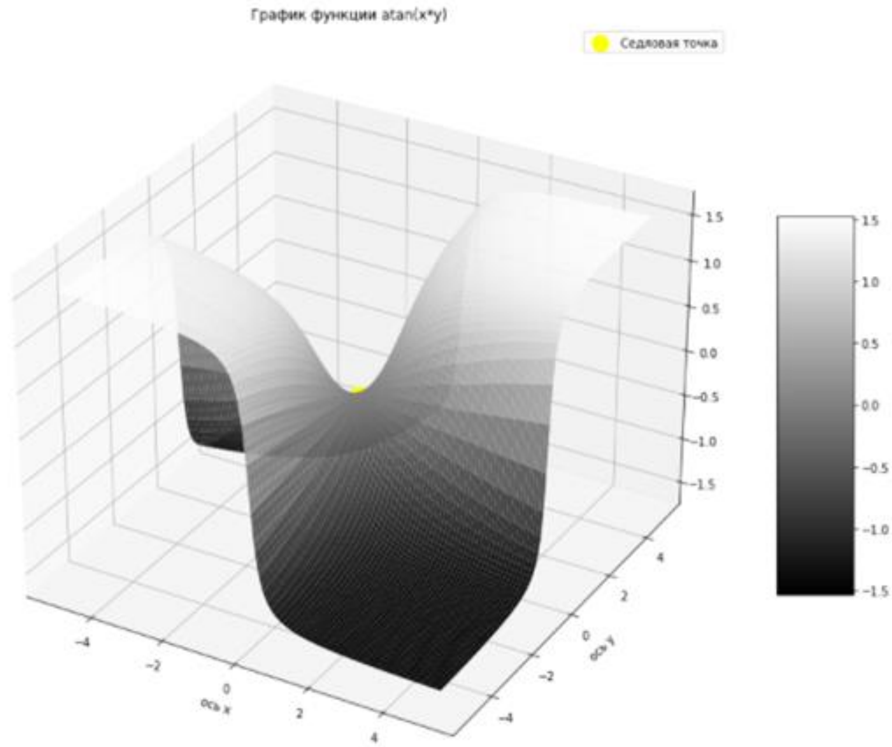


Рис. 25 Функция №6, Алгоритм 1

Input interpretation:

local extrema	$\tan^{-1}(x\, y)$

Local maxima:

(no local maxima found)

Local minima:

(no local minima found)

Рис. 26 Функция №6, WolframAlpha

```
Ввод [174]: all_f_with_limit()

Введите названия переменных. Пример: x y. Ввод:x y
Введите функцию z=f(x,y). Пример: x**2+sin(y). Ввод:5*x*y-4
Введите ограничивающую функцию z=f(x,y)=0. Пример: x**2+y**2-1. Ввод:x**2/8+y**2/2-1
Есть ли ограничения ? 1-да/ 0 - нет. Ввод:0
В точке x = -2 = -2.000 y = -1 = -1.000  функция имеет локальный максимум равный 6 = 6.000
В точке x = 2 = 2.000 y = 1 = 1.000  функция имеет локальный максимум равный 6 = 6.000
В точке x = -2 = -2.000 y = 1 = 1.000  функция имеет локальный минимум равный -14 = -14.000
В точке x = 2 = 2.000 y = -1 = -1.000  функция имеет локальный минимум равный -14 = -14.000
```

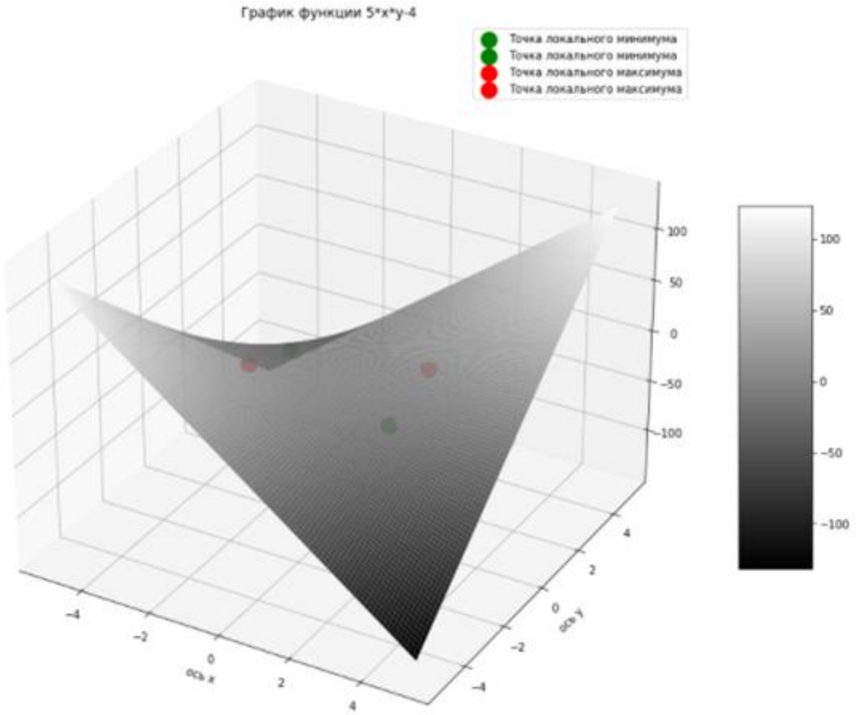


Рис. 27 Функция №6, Алгоритм 2

Input interpretation:

extrema	function	$5\,x\,y-4$
	domain	$-1+\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=0$

Global maxima:

$$\max\left\{5\,x\,y-4 \,\middle|\, \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1=0\right\}=6 \text{ at } (x,\,y)=(-2,\,-1)$$

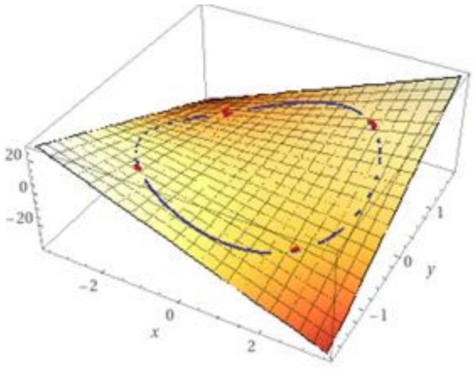
$$\max\left\{5\,x\,y-4 \,\middle|\, \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1=0\right\}=6 \text{ at } (x,\,y)=(2,\,1)$$

Global minima:

$$\min\left\{5\,x\,y-4 \,\middle|\, \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1=0\right\}=-14 \text{ at } (x,\,y)=(-2,\,1)$$

$$\min\left\{5\,x\,y-4 \,\middle|\, \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1=0\right\}=-14 \text{ at } (x,\,y)=(2,\,-1)$$

Рис. 28 Функция №6, WolframAlpha



Contour plot:

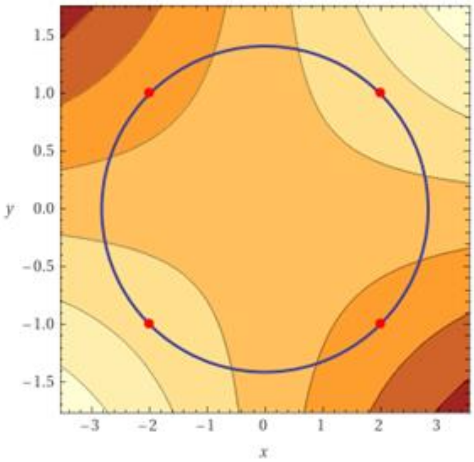


Рис. 29 Функция №6, WolframAlpha