МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

Кафедра систем штучного інтелекту

Лабораторна робота № 6

з дисципліни

«Дискретна математика»

Виконала:

студентка групи КН-114

Кемська Юлія

Викладач:

Мельникова Н.І.

Львів – 2019

Тема: Генерація комбінаторних конфігурацій

Мета роботи: набути практичних вмінь та навичок при комп'ютерній реалізації комбінаторних задач.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Головна задача комбінаторики – підрахунок та перелік елементів у скінчених множинах.

Правило додавання: якщо елемент – х може бути вибрано n способами, а у- іншими m способами, тоді вибір „ х або у" може бути здійснено (m+n) способами.

Правило добутку: якщо елемент – х може бути вибрано n способами, після чого у - m способами, тоді вибір упорядкованої пари (х, у) може бути здійснено (m*n) способами.

Набір елементів $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im}$ з множини $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ називається вибіркою об'єму m з n елементів – *(n, m) – вибіркою.*

Упорядкована (n, m) – вибірка, в якій елементи не можуть повторюватися, називається *(n, m) – розміщеням*, кількість всіх можливих розміщень обчислюється за формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}\ .$$

Упорядкована (n, m) – вибірка, в якій елементи можуть повторюватися, називається *(n, m) – розміщеням з повторюваннями*, кількість всіх можливих таких розміщень обчислюється за формулою:

$$\overline{A_n^m} = n^m\ .$$

Неупорядкована (n, m) – вибірка, в якій елементи не можуть повторюватися, називається *(n, m) – сполученням*, кількість всіх можливих сполучень обчислюється за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}\ .$$

Неупорядкована (n, m) – вибірка, в якій елементи можуть повторюватися, називається *(n,m)-сполученням з повторюваннями*, кількість всіх можливих таких сполучень обчислюється за формулою:

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m\ .$$

A_n^n – називається *перестановкою*, а кількість різних перестановок позначається та обчислюється за формулою:

$$P_n = n!.$$

Якщо в перестановках є однакові елементи, а саме перший елемент присутній n_1 разів, другий елемент – n_2 разів, ... , k-ий елемент – n_k разів, причому $n_1+n_2+....+n_k=n$, то їх називають *перестановками з повторенням* та кількість їх можна знайти за формулою

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Нехай $X = \{X_1, X_2,\ldots,X_k\}$ - *розбиття множини* X ($X = n$) на k підмножин таких, що: $\bigcup_{i=1}^{k} X_i = X$, $X_i \cap X_j = 0$ при $i \neq j$,

$|X_i| = n_i$.

Їх кількість при фіксованих n_i та *упорядкованих* $X_1, X_2,\ldots, X_k$ обчислюється за формулою:

$$C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k\ ) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

Якщо ж

множину X ($|X| = n$) потрібно розбити на підмножини, серед яких для усіх i=1, …, n є $m_i \geq 0$ підмножин з *i* елементами, де $\sum_{i=1}^{n} i * m_i = n$, та при цьому набір підмножин в розбитті *не є упорядкованим,* тоді їх кількість обчислюється за формулою: $n!$

$$N(m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n\ ) = \frac{n!}{m_1! m_2! \ldots m_n! (1!)^{m1} (2!)^{m2} \ldots (n!)^{m_n}}.$$

<u>Формула включень та виключень.</u> Нехай X_i – скінчені множини, де i=1,…,n, тоді:

$$|X_1 \cup \ldots \cup X_n| = (|X_1| + \ldots + |X_n|) - (|X_1 \cap X_2| + \ldots + |X_{n-1} \cap X_n|) +$$

$$+ (|X_1 \cap X_2 \cap X_3| + \ldots + |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n|) - \ldots + (-1)^{n+1} |X_1 \cap \ldots \cap X_n|.$$ <u>Наслідок.</u>

$$|X \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_n)| = |X| - (|X_1| + \ldots + |X_n|) +$$

$$(|X_1 \cap X_2| + \ldots + |X_{n-1} \cap X_n|) - \ldots + (-1)^n |X_1 \cap \ldots \cap X_n|.$$

Приведемо ще одну форму запису формули включень та виключень. Нехай X – скінчена множина з N елементів, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ – деякі властивості, якими володіють чи ні елементи з X. Позначимо через $X_i = \{x \in X | \alpha_i(x)\}$ – множину елементів в X, які володіють властивістю α_i, а

$N(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik}) = |X_{i1} \cap \ldots \cap X_{ik}| = |\{x \in X | \alpha_{i1}(x) \wedge \ldots \wedge \alpha_{ik}(x)\}|$ – кількість

елементів в X, які володіють одночасно властивостями $\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{ik}$, $N_0 = |X \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_n)|$ - кількість елементів, що не володіють жодною з властивостей α_{i1}, …, α_{ik}. Тоді маємо формулу:

$N_0 = N - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^n S_n$, де $S_k = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n} N(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik})\ k = 1, 2, \ldots, n.$

Якщо треба знайти кількість елементів, які володіють рівно m властивостями, тоді використовують наступну формулу:

$$\hat{N}_m = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k C_{m+k}^{m} S_{m+k}.$$

Варіант № 9

1. Скількома способами можна розставити 4 однакових книжки з алгебри і 5 різних з геометрії так, щоб усі книги з геометрії стояли
разом?
2. У класі тридцять учнів. Скількома способами можна серед них вибрати старосту та його заступника?
3. Скільки наборів з 10 цукерок можна скласти, якщо у продажу їх 6 сортів?
4. На площині дано три точки: А, В, С. Проведемо через точку А 5 прямих, через В- 3 прямих, через С- 7 прямих. Причому у сукупності ці прямі є прямими загального положення, тобто жодні дві з них не паралельні і жодні три з них не перетинаються в одній точці (крім точок А, В, С), а також немає прямих, що проходять через дві з цих трьох точок. Знайти кількість трикутників, вершини яких є точками перетину цих прямих і не збігаються з точками А, В, С.
5. З цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 утворюють різні шестицифрові числа, що не мають однакових цифр. Визначити кількість чисел, у яких зустрічаються цифри 6 та 8 одночасно, але вони не стоять поруч.
6. У групі 20 чоловік. Їх необхідно поділити на п'ять коаліцій, в яких повинно бути 3, 3, 3, 4 та 7 чоловік. Скількома способами це можна зробити?
7. У класі навчається 40 учнів. Із них мають трійки з англійської мови 16 учнів, з математики – 12, з фізики – 18. Мають трійки з фізики та англійської мови – 11 учнів, з математики та англійської мови – 8, з математики та фізики – 6. А 7 учнів мають трійки по всім цим предметам. Скільки учнів навчаються без трійок з цих предметів? Скільки мають лише по дві трійки з цих предметів?

1)

$P_5 * P_3 = 5!*3!=120*6=720$

2)

30*29=870

3)

$$C_{10}^{6} = \frac{10!}{6!*4!} = \frac{7*8*9*10}{1*2*3*4} = \frac{5040}{24} = 210$$

4)

Через точку А проводимо 5 сторін трикутника

Через точку В проводимо 3 сторони трикутника , котрі перетнуться з п'ятьма сторонами, які проходять через точку А.

Через точку С проводимо 7 сторін трикутника, які перетнуться з сторонами, котрі проходять через точки А та В.

Тобто отримаємо такий результат:

5*3*7=**105** трикутників

5)

A_7^4 *2*5=2100

Усі комбінації: 181 440

Комбінації, де немає 6 та 8: 5040

Числа, у яких зустрічаються 6 та 8, але вони не стоять поруч

181 440-5040=174300

6)

$$C_{20}^{3,3,3,4,7} = \frac{20!}{3!3!3!4!7!} = 93117024000$$

7)

N=40

S_1= 16+12+18=36

S_2= 11+12+6=25

S_3=7

N0=N-S1+S2-S3 (к-сть людей)

Які не мають трійок:

N_0=40-36+25-7=22

$N_2 = \frac{3!}{2!*1!}$ =25

Код :

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main(){
    int a[6] = {1,2,3,4,5,6};
    for(int o=1;o<=12;o++){
        for(int i=4;i>=0;i--)
        if(a[i]<a[i+1]){swap(a[i],a[i+1]);
            for(int i=0;i<=5;i++){
                cout<<a[i]<<' ';
            }
            cout<<endl;
            break;         }
    }
}
```

Реалізація

```
1 2 3 4 6 5
1 2 3 6 4 5
1 2 3 6 5 4
1 2 6 3 5 4
1 2 6 5 3 4
1 2 6 5 4 3
1 6 2 5 4 3
1 6 5 2 4 3
1 6 5 4 2 3
1 6 5 4 3 2
6 1 5 4 3 2
6 5 1 4 3 2

Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.045 s
Press any key to continue.
```

Код

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
#define x 1
#define y -1
#define n 9
using namespace std;

int trcoef (int a, int b)
{
  if (b == 0 || a == b)
    return 1;
  return trcoef (a - 1, b - 1) + trcoef (a - 1, b);
}

int main ()
{
    cout<<"x^"<<9;
    for(int i = 1 ;i < n; i++){
        int coef = pow(x,n-i) * pow(y,i) * trcoef(n,i);
        if(coef>0)cout<<'+';
        if(abs(coef)!=1)cout<<coef;
        if(coef==-1)cout<<'-';
        cout<<"x^"<<n-i<<"*y^"<<i;
    }

    cout<<"-y^9";
  }
```

Результат

```
x^9-9x^8*y^1+36x^7*y^2-84x^6*y^3+126x^5*y^4-126x^4*y^5+84x^3*y^6-36x^2*y^7+9x^1*y^8-y^9
Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.099 s
Press any key to continue.
```