

• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •  
• МОСКВА •  
• КРАСНОДАР •  
• 2022 •





Ю. А. БЫЧКОВ, В. М. ЗОЛОТНИЦКИЙ,  
Е. Б. СОЛОВЬЕВА, Э. П. ЧЕРНЫШЕВ

# ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРЕТИЧЕСКУЮ ЭЛЕКТРОТЕХНИКУ

*Курс подготовки бакалавров*

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •  
МОСКВА •  
КРАСНОДАР •  
2022 •

ББК 31.2я73

Б 95

**Бычков Ю. А., Золотницкий В. М.,**

**Соловьева Е. Б., Чернышев Э. П.**

**Б 95** Введение в теоретическую электротехнику. Курс подготовки бакалавров: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2022. — 288 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-2406-1**

Переход на подготовку бакалавров ФГОС ВО требует изменения объема курса теоретической электротехники с выделением его фундаментальных разделов. Предлагаемая книга отвечает этой цели, представляя материал в краткой, легкодоступной форме.

Книга предназначена для учебного процесса по следующим дисциплинам: «Основы теории электрических цепей», «Теоретическая электротехника», «Теоретические основы электротехники» и «Общая электротехника» для студентов электроэнергетических, электротехнических, радиотехнических и информационных направлений подготовки бакалавров.

**ББК 31.2я73**

#### **Рецензенты:**

**С. А. КУРГАНОВ** — доктор технических наук, профессор кафедры «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета;

**В. Ф. ДМИТРИКОВ** — доктор технических наук, профессор кафедры «Теория электрических цепей и связи» Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича.

#### **Обложка**

**Е. А. ВЛАСОВА**

*Охраняется законом РФ об авторском праве.  
Воспроизведение всей книги или любой ее части  
запрещается без письменного разрешения издателя.  
Любые попытки нарушения закона  
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2022

© Коллектив авторов, 2022

© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2022

*Посвящается памяти  
профессора И. И. БОРГМАНА,  
основателя научной школы  
и первой в России кафедры  
теоретической электротехники*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

**К**нига обобщает опыт многолетнего преподавания и написания авторами учебно-методических пособий (учебников, задачников, справочников) по курсу теоретической электротехники. Материал в книге изложен по принципу от простого к сложному, что важно при подготовке бакалавров. Предлагаемая книга отвечает этой цели, представляя материал в краткой, легкодоступной форме.

Переход на подготовку бакалавров требует изменения объема курса теоретической электротехники с выделением его фундаментальных разделов. Построение и содержание материала в книге ориентировано на математическое моделирование электротехнических объектов.

Книга содержит цепевые схемы замещения, иллюстрирующие математические модели объектов. Курс начинается с изучения функциональных свойств цепей как преобразователей сигналов, вначале в более физической и понятной временной области. Далее анализ цепей рассмотрен в частотной области и в областях изображений по Лапласу и Фурье.

Учебное пособие ориентировано на активное овладение студентами второго и третьего курсов навыками самостоятельной работы, когда их опыт рационального и эффективного изучения учебной литературы еще мал. Книга предназначена для студентов технических вузов, изучающих теоретическую электротехнику.

Учебное пособие опирается на книгу авторов «Основы теоретической электротехники».

# ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

## 1.1. ТОК, НАПРЯЖЕНИЕ, ЭНЕРГИЯ И МОЩНОСТЬ В ЦЕПИ

### 1.1.1. ТОК В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

**Током**  $i(t)$  называется направленное движение электрических зарядов, как положительных  $q_+(t)$ , так и отрицательных  $q_-(t)$ .

Символ  $i$  — не только качественная, но и количественная характеристика: ток численно равен скорости изменения электрических зарядов в поперечном сечении проводника, так что

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}, \quad q(t) = q_+(t) + q_-(t), \quad (1.1)$$

причем ток  $i$  измеряется в амперах (А), заряд  $q(t)$  — в кулонах (Кл), время  $t$  — в секундах (с).

К моменту времени  $t$  заряд, прошедший через поперечное сечение проводника, таков:

$$q(t) = \int_{-\infty}^t i(t)dt = q(t_0) + \int_{t_0}^t i(t)dt, \quad (1.2)$$

т. е. предполагается, что при  $t \rightarrow -\infty$  ток в цепи отсутствовал.

Условимся малыми (строчными) буквами обозначать значения переменных как функций времени, т. е. мгновенные значения переменных,  $i(t) \equiv i$ ,  $q(t) \equiv q$ . Тогда формулы (1.1), (1.2) в сокращенной записи имеют следующий вид:

$$i = q', \quad q = \int_{-\infty}^t i dt.$$

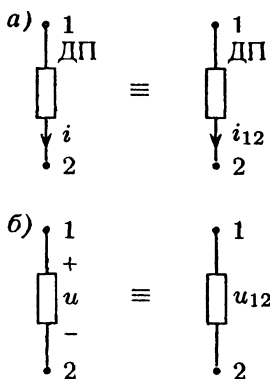


Рис. 1.1

О направлении (знаке) тока можно говорить, только когда указано его условно-положительное направление. Два эквивалентных способа обозначения условно-положительного направления тока между двумя узлами (полюсами) двухполюсника (ДП) изображены на рисунке 1.1а, причем  $i \equiv i_{12}$ . Таким образом, условно-положительное направление тока можно указать либо «стрелкой», либо двумя индексами, соответствующими номерами узлов цепи.

Значение тока принято увязывать с направлением движения положительных зарядов  $q_+$ , поэтому если при решении задачи получено  $i_{12}(t) = -2$  А, то движение отрицательных зарядов  $q_-$  в этот момент времени  $t$  происходит от узла 1 к узлу 2, а положительных  $q_+$  — от узла 2 к узлу 1.

*Следствие:*  $i_{12}(t) = -i_{21}(t)$ .

### 1.1.2. НАПРЯЖЕНИЕ

Движение зарядов связано с потреблением энергии. Для характеристики этого явления вводят понятие — напряжение  $u(t)$ . Однако  $u(t)$  — не только качественная, но и количественная характеристика: напряжение  $u_{12}(t)$  между узлами 1 и 2 цепи численно равно энергии  $W_{12}$  (работе  $A_{12}$ ), затраченной на перенос единичного положительного заряда  $q = +1$  Кл от узла 1 к узлу 2 цепи:

$$\begin{aligned} u_{12}(t) &= u_1(t) - u_2(t) = \\ &= W_{12}(t)|_{q=+1} = A_{12}(t)|_{q=+1} = -u_{21}(t). \end{aligned}$$

*Следствия.*

1. Напряжение  $u_1(t)$  узла 1 цепи численно равно работе по переносу заряда  $q = +1$  Кл из узла 1 в тот узел цепи, напряжение которого условно принято нулевым; такой базисный узел с нулевым напряжением выбирается произвольно.



2. Если осуществляется перенос бесконечного малого заряда  $dq$ , то затраченная энергия

$$dW(t) = u(t)dq(t), \quad (1.3)$$

причем энергия измеряется в джоулях (Дж), а напряжение — в вольтах (В).

О знаке напряжения можно говорить, если указана (задана) его условно-положительная полярность. Два эквивалентных способа обозначения условно-положительной полярности приведены на рисунке 1.1б, причем  $u \equiv u_{12}$ .

Таким образом, можно условно-положительную полярность указать либо разметкой «плюс–минус» узлов ДП, либо двумя индексами, соответствующими номерам этих узлов. Если при решении задачи получено  $u_{12} = -10$  В, то энергетический уровень узла 2 выше, чем узла 1.

### 1.1.3. СОГЛАСОВАННАЯ ПОЛЯРНОСТЬ

Условимся полярность напряжения  $R$ -,  $L$ -,  $C$ -элементов, т. е. так называемых пассивных элементов цепи, всегда согласовывать с выбранным направлением тока этих элементов, как показано на рисунке 1.2а. Полярность  $u(t)$  элемента (или ДП) цепи называют согласованной с направлением тока  $i(t)$  этого же элемента (или ДП), если ток на схеме направлен к элементу от узла, которому присвоена положительная полярность (рис. 1.2а). Очень часто разметку полярности напряжения ( $\pm$ ) указывают непосредственно у выводов обозначения элемента на схеме (рис. 1.2б–г). В этом случае полярность элемента называют согласованной (строго — полярность напряжения элемента называют согласованной с направлением тока), если

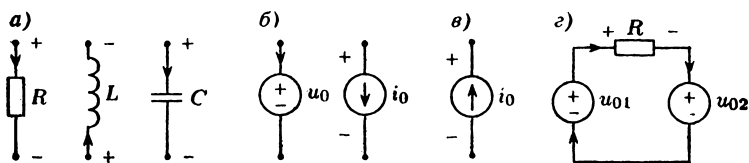


Рис. 1.2

ток на схеме направлен к выводу элемента, помеченному знаком «плюс», от ближайшего узла, к которому элемент присоединен.

У источников напряжения  $u_0$  или тока  $i_0$  полярность в общем случае можно выбирать как согласованной (рис. 1.2б), так и несогласованной (рис. 1.2в).

Несогласованная полярность характерна (следует из физических представлений) для цепей с единственным источником. В качестве примера на рисунке 1.2г изображена схема последовательной цепи с двумя источниками напряжения (соответствующая практической схеме зарядки аккумулятора); ток элементов цепи одинаков; при выбранном его направлении у источника  $u_{02}$  согласованная полярность, а у источника  $u_{01}$  — несогласованная.

*Примечание.* Двухполюсником (ДП) называют любую часть цепи, имеющую два внешних вывода (узла, зажима, полюса), относительно которых и рассматриваются ее характеристики; условное обозначение ДП приведено на рисунке 1.1.

#### 1.1.4. ЭНЕРГИЯ И МОЩНОСТЬ

Пусть через ДП током  $i(t)$  переносится заряд  $dq(t)$ , а полярность напряжения ДП  $u(t)$  согласована с направлением тока. Тогда, согласно (1.3), затраченная при этом элементарная энергия будет

$$dW(t) = u(t)dq(t).$$

Мощностью ДП  $p(t)$  называют скорость поступления энергии в ДП:

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt} = u(t) \frac{dq(t)}{dt} = u(t)i(t). \quad (1.4)$$

Измеряется мощность в ваттах (Вт). На основании (1.4) энергия, поступившая в ДП к моменту времени  $t$ , будет

$$W(t) = \int_{-\infty}^t p(t)dt. \quad (1.5)$$

### Примечания.

1. ДП или элемент цепи называют пассивным, если в любой момент времени его энергия неотрицательна, т. е.

$$W_{\text{пас}}(t) \geq 0. \quad (1.6)$$

2. Если мощность элемента  $p(t) > 0$ , то элемент в этот момент потребляет или запасает энергию, если же  $p(t) < 0$ , то элемент генерирует энергию (или возвращает запасенную).

3. По закону сохранения энергии сумма мощностей всех элементов цепи равна нулю, т. е. в цепи имеет место баланс мощностей

$$\sum_k p_k(t) = 0, \quad (1.7)$$

где  $k$  — номер элемента.

4. Если полярность напряжения ДП несогласована с направлением тока (см., например, рис. 1.2в, г), то в отличие от (1.4) формула мощности ДП имеет следующий вид:

$$p(t) = -u(t)i(t). \quad (1.8)$$

## 1.2. РЕЗИСТИВНЫЙ ЭЛЕМЕНТ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

### 1.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЗИСТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА

В курсе теории электрических цепей единый электромагнитный процесс генерирования, передачи, преобразования и потребления электромагнитной энергии идеализируют и условно разбивают на отдельные составляющие, которые учитывают обычно в виде следующих элементов (см. рис. 1.2а, б):  $R$ -элемент учитывает необратимое потребление электромагнитной энергии;  $L$ -элемент — запасание энергии магнитного поля;  $C$ -элемент — запасание энергии электрического поля; для учета процесса генерирования электромагнитной энергии за счет других видов энергии вводят идеальные источники напряжения  $u_0(t)$  и тока  $i_0(t)$ . Рассмотрим подробно характеристики каждого из указанных элементов.

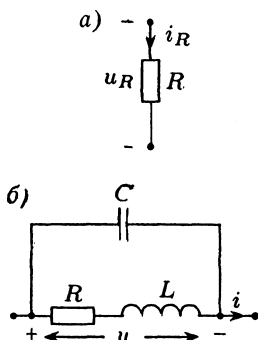


Рис. 1.3

Резистивным элементом, или  $R$ -элементом, цепи называют идеализированный, пассивный, двухполюсный элемент, который отражает только одну сторону единого электромагнитного процесса — необратимое преобразование электромагнитной энергии в другие виды энергии (тепловую, световую, механическую, химическую и др.).

Условное обозначение  $R$ -элемента с указанием согласованной полярности приведено на рисунке 1.3а.

По своим характеристикам к  $R$ -элементу приближаются реальные резисторы и нагревательные приборы на низких частотах (НЧ). Однако уже на средних частотах схема замещения реального резистора усложняется и обычно имеет вид, близкий к приведенному на рисунке 1.3б, где  $R$ -элемент отражает необратимые потери электромагнитной энергии;  $L$ -элемент учитывает наличие магнитного поля, обусловленного протеканием тока  $i$  в реальном резисторе;  $C$ -элемент учитывает наличие электрического поля, обусловленного напряжением  $u$  на выводах реального резистора. Вопросы составления схем замещения реальных электротехнических устройств достаточно сложны и рассматриваются в спецдисциплинах.

### 1.2.2. ВОЛЬТ-АМПЕРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РЕЗИСТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА

Связь между током и напряжением линейного  $R$ -элемента определяется законом Ома

$$u_R(t) = Ri_R(t),$$

следовательно, символ  $R$  — не только качественная, но и количественная характеристика: величина  $R$  называется сопротивлением резистивного элемента и является коэффициентом пропорциональности между его напряжением  $u_R$  и током  $i_R$ , т. е.

$$R = \frac{u_R(t)}{i_R(t)}; \quad (1.9)$$

обратная величина

$$G = \frac{1}{R} = \frac{i_R}{u_R} \quad (1.10)$$

называется проводимостью резистивного элемента, причем в (1.9), (1.10) сопротивление измеряют в омах (Ом), а проводимость — в сименсах (См).

Показанный на рисунке 1.4а график вольт-амперной характеристики (ВАХ) линейного резистивного элемента — прямая линия, проходящая через начало координат, причем тангенс угла наклона этой прямой к оси абсцисс пропорционален сопротивлению элемента:  $R \sim \operatorname{tg} \gamma$  (в формуле поставлен символ пропорциональности, так как необходимо учитывать масштабы для  $i_R$ ,  $u_R$  на графике).

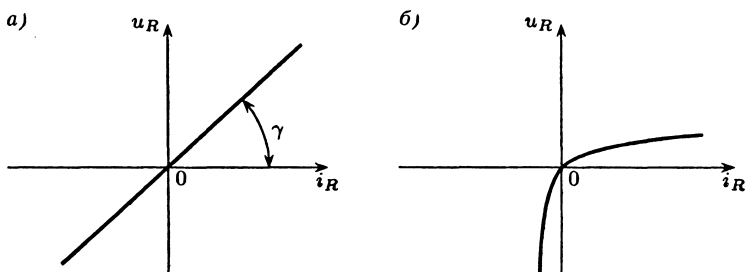


Рис. 1.4

Следует отметить, что характеристики большинства реальных резистивных элементов нелинейны: линейность — это обычно идеализация реальных ВАХ в ограниченном диапазоне токов-напряжений элемента. Так, на рисунке 1.4б качественно показана ВАХ диода, являющаяся существенно-нелинейной.

**Вывод.** ВАХ линейного  $R$ -элемента описывается линейными алгебраическими уравнениями (1.9), (1.10).

### 1.2.3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ R-ЭЛЕМЕНТА

Согласно (1.4), мгновенная мощность, т. е. скорость поступления энергии в  $R$ -элемент, будет следующей

$$p_R(t) = u_R(t)i_R^2(t) = Ri_R^2(t) = Gu_R^2(t) > 0. \quad (1.11)$$

*Вывод.* Согласно формуле (1.11),  $R$ -элемент, действительно, необратимо потребляет энергию в любой момент времени.

Энергия, поступившая в  $R$ -элемент к моменту времени  $t$ , будет

$$W_R(t) = \int_{-\infty}^t p_R(t)dt \geq 0, \quad (1.12)$$

как интеграл от положительной функции.

*Вывод.* Из сравнения формул (1.6) и (1.12) следует, что  $R$ -элемент, действительно, является пассивным элементом.

### 1.3. ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ

#### 1.3.1. ИСТОЧНИК НАПРЯЖЕНИЯ

*Источником напряжения (ИН)* называют идеализированный двухполюсный элемент, напряжение которого  $u_0(t)$  является заданной функцией времени и не зависит от протекающего через ИН тока.

Условное обозначение ИН приведено на рисунке 1.5а. Направление тока ИН может быть произвольным, как согласованным, так и несогласованным с полярностью напряжения.

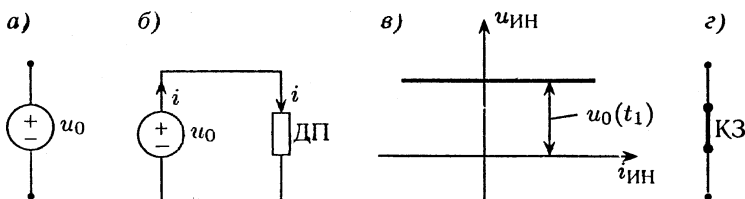


Рис. 1.5

*Примечание.* Для цепей с единственным ИН характерна (логична) несогласованная полярность, как показано на рисунке 1.5б, где ДП — пассивный двухполюсник: действительно, при резистивном ДП его мощность согласно формуле (1.11)  $p_{\text{ДП}} > 0$ , а мощность ИН при несогласованной полярности будет на основании формулы (1.8)  $p_{\text{ИН}} = -u_0 i < 0$ , что соответствует физическим процессам генерирования энергии в цепи. При этом в соответствии с формулой (1.7) имеет место баланс мощностей, т. е.  $p_{\text{ИН}} + p_{\text{ДП}} = 0$ .

Независимость напряжения ИН от тока отражается на ВАХ источника, как показано на рисунке 1.5в для некоторого момента времени  $t = t_1$ ; следовательно, дифференциальное сопротивление ИН

$$R_{\text{ДИФ}} = \frac{du}{di} = 0.$$

Частный случай источника напряжения с нулевым напряжением  $u_0 = 0$  эквивалентен короткозамкнутому участку цепи (КЗ), который определяется как идеализированный двухполюсный элемент, условно изображенный на рисунке 1.5г, причем сопротивление и напряжение идеального КЗ-элемента являются нулевыми, т. е.

$$\begin{cases} R_{\text{КЗ}} = 0; \\ u_{\text{КЗ}} = 0; \\ G_{\text{КЗ}} = 1/R_{\text{КЗ}} \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1.13)$$

(ток КЗ-элемента зависит от вида остальной цепи).

Идеальный ИН является источником бесконечной мощности. Действительно, при коротком замыкании ИН, как показано на рисунке 1.6а, ток ИН  $i_{\text{ИН}} = u_0/R_{\text{КЗ}} \rightarrow \infty$ , а мощность с учетом (1.8) из-за несогласованной полярности ИН  $p_{\text{ИН}} = -u_0 i_{\text{ИН}} \rightarrow -\infty$ . Однако этот предельный случай в теории цепей не рассматривается (действительно, относительно узлов 1, 2 имеем параллельное соединение ИН и КЗ, т. е.  $u_0 = u_{\text{КЗ}}$ ), поскольку в схеме рисунка 1.6а:

- нарушаются согласно формуле (1.13) определения ИН и КЗ;
- нарушается закон напряжений Кирхгофа, так как сумма напряжений в контуре не равна нулю.

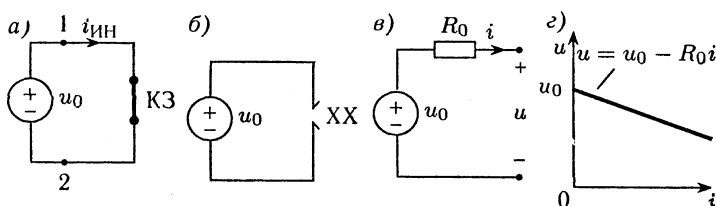


Рис. 1.6

Нормальными режимами работы идеального ИН являются:

- нагрузка, например, пассивным ДП, как было показано на рисунке 1.5б;
- холостой ход, т. е. обрыв нагрузки, как изображено на рисунке 1.6б.

По своим характеристикам к ИН приближаются, например, мощные аккумуляторные батареи в режиме малых отдаваемых токов. Обычно схема замещения реального ИН на НЧ имеет вид, изображенный на рисунке 1.6в; ВАХ реального ИН представлена схематично на рисунке 1.6г (в предположении  $u_0 > 0$ ,  $i > 0$  для некоторого момента времени  $t = t_1$ ); сопротивление  $R_0$  в этом случае часто называют внутренним или выходным сопротивлением реального источника.

### 1.3.2. ИСТОЧНИК ТОКА

Источником тока (ИТ) называют идеализированный двухполюсный элемент, ток которого  $i_0(t)$  описывается заданной функцией времени и не зависит от напряжения ИТ. Условное обозначение ИТ приведено на рисунке 1.7а.

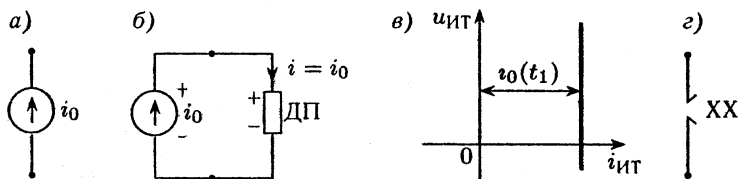


Рис. 1.7



Полярность напряжения ИТ может быть выбрана произвольно, как согласованной, так и несогласованной с направлением тока ИТ.

*Примечание.* Для цепей с единственным ИТ характерна (логична) несогласованная полярность, как показано на рисунке 1.7б, где ДП — пассивный двухполюсник; действительно, при резистивном ДП его мощность, согласно формуле (1.11),  $p_{\text{ДП}} > 0$ , а мощность источника с учетом  $u_{\text{ИТ}} = u_{\text{ДП}}$  и несогласованной полярности ИТ  $p_{\text{ИТ}} = -u_{\text{ИТ}}i_0 < 0$ , причем  $p_{\text{ИТ}} + p_{\text{ДП}} = 0$ .

Независимость тока ИТ от напряжения отражается на ВАХ источника, как показано на рисунке 1.7в для некоторого момента времени  $t = t_1$ , следовательно, дифференциальное сопротивление ИТ  $R_{\text{ДИФ}} = \frac{du}{di} \rightarrow \infty$ .

Частный случай источника тока с нулевым током  $i_0 = 0$  эквивалентен разомкнутому (разорванному) участку цепи, который иначе называют холостым ходом (ХХ), т. е. обрывом в цепи.

Холостой ход — это идеализированный двухполюсный элемент цепи, условное изображение которого приведено на рисунке 1.7г, причем у такого идеального элемента ток и проводимость являются нулевыми:

$$i_{\text{ХХ}} = 0, \quad G_{\text{ХХ}} = 0, \quad R_{\text{ХХ}} = 1/G_{\text{ХХ}} \rightarrow \infty, \quad (1.14)$$

а напряжение зависит от вида остальной цепи.

*Примечание.* Формулы (1.13), (1.14) намеренно имеют одинаковую форму, чтобы подчеркнуть фундаментальное в теории цепей свойство аналогии (двойственности) характеристик элементов, называемое дуальностью элементов.

Идеальный ИТ является источником бесконечной мощности. Действительно, при обрыве его выводов, как показано на рисунке 1.8а, напряжение ИТ  $u_{\text{ИТ}} = -i_0 R_{\text{ХХ}} \rightarrow \infty$ , мощность с учетом несогласованной полярности  $p_{\text{ИТ}} = -u_{\text{ИТ}}i_0 \rightarrow -\infty$ . Однако этот предельный случай в теории цепей не рассматривается (действительно, схему на рисунке 1.8а можно трактовать как последовательное соединение ИТ и ХХ, т. е.  $i_0 = i_{\text{ХХ}}$ ), поскольку здесь:

- нарушаются, согласно формуле (1.14), определения ИТ и ХХ ( $i_0 \neq 0$ ,  $i_{XX} = 0$ );
- нарушается закон токов Кирхгофа (ток, втекающий, например, в узел 1, не равен вытекающему).

Нормальными режимами работы идеального ИТ являются:

- нагрузка его, например, пассивными ДП (см. рис. 1.7б);
- короткое замыкание его выводов (см. рис. 1.8б).

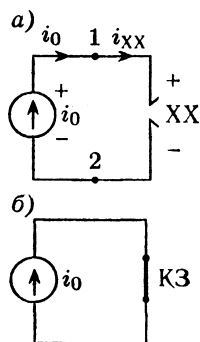


Рис. 1.8

## 1.4. ИНДУКТИВНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ЦЕПИ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

### 1.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНДУКТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА ЦЕПИ

Индуктивным элементом, или  $L$ -элементом, называют идеализированный двухполюсный пассивный элемент цепи, единственным электромагнитным процессом в котором является запасание энергии магнитного поля.

Условное обозначение  $L$ -элемента приведено на рисунке 1.9а, причем полярность напряжения принято согласовывать с направлением тока элемента. Символ  $L$  — не только качественная, но и количественная характеристика: величина  $L$ , называемая индуктивностью, является коэффициентом пропорциональности между потоко-сцеплением самоиндукции  $\Psi$  и током  $i_L$ , обусловившим это потоко-сцепление:

$$L = \frac{\Psi(t)}{i_L(t)}, \quad (1.15)$$

где потоко-сцепление  $\Psi = \sum_{(N)} \Phi_k = N\Phi_{cp}$ , т. е. в катушке индуктивности, являющейся на НЧ близким реальным

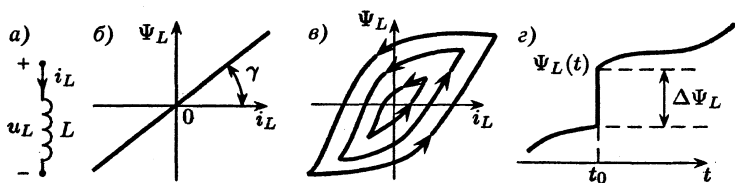


Рис. 1.9

прототипом  $L$ -элемента, потокосцепление равно сумме элементарных потоков  $\Phi_k$ , пронизывающих все  $N$  витков катушки (здесь  $\Phi_{\text{ср}}$  — средний поток, сцепленный с каждым из витков катушки). В формуле (1.15) потокосцепление  $\Psi$  измеряют в веберах (Вб),  $L$  — в генри (Гн).

Вебер-амперная характеристика линейного  $L$ -элемента — это прямая линия (рис. 1.9б), причем  $\text{tg} \gamma \sim L$ . Однако у реальных катушек индуктивности с магнитным сердечником вебер-амперная характеристика нелинейна, неоднозначна и обладает гистерезисом (рис. 1.9в). В случае отсутствия магнитного сердечника зависимость  $\Psi(i_L)$  близка к линейной.

#### 1.4.2. ВОЛЬТ-АМПЕРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА $L$ -ЭЛЕМЕНТА

Изменение тока  $i_L$  приводит, согласно формуле (1.15), к изменению потокосцепления, пронизывающего витки катушки индуктивности, а изменение  $\Psi_L$  приводит по закону электромагнитной индукции к появлению напряжения самоиндукции  $u_L$  на выводах катушки, которое равно скорости изменения потокосцепления, что применительно к идеализированному линейному  $L$ -элементу записывается следующим образом:

$$u_L(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = L \frac{di_L(t)}{dt} = Li'_L(t). \quad (1.16)$$

Формула (1.16) записана для случая согласованной полярности (см. рис. 1.9а).

*Примечания.*

1. Согласно формуле (1.16), в цепях постоянного тока при  $i_L = \text{const}$  напряжение  $u_L = 0$ , т. е. в соответствии с формулой (1.13)  $L$ -элемент эквивалентен КЗ; действительно, при  $i_L = \text{const}$  магнитный поток, пронизывающий катушку индуктивности, неизменен, поэтому напряжение индукции равно нулю.

2. По закону электромагнитной индукции напряжение (ЭДС) индукции  $u_L$ , создаваемое током  $i_L$ , наводится такой полярности (такого знака), что как бы препятствует вызвавшей это напряжение причине; например, при убывании тока ( $i'_L < 0$ ) согласно формуле (1.16) получим  $u_L < 0$ , т. е. истинная полярность  $u_L$  обратна указанной на рисунке 1.9а условно-положительной и, если рассматривать  $L$ -элемент условно как источник напряжения, то такой ИН как бы «стремится поддержать убывающий ток».

Согласно формуле (1.16), мгновенное значение тока  $L$ -элемента будет

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(t) dt = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(t) dt - i_L(t_0-), \quad (1.17)$$

причем во второй части формулы (1.17) ток  $i_L(t_0-)$ , предшествующий рассматриваемому интервалу  $t > t_0$ , строго следовало записать  $i_L(t_0 - \varepsilon)$ , но бесконечно малую  $\varepsilon$  обычно в теории цепей опускают.

**Вывод.** Вольт-амперные характеристики линейного  $L$ -элемента описывают простейшими дифференциальными или интегральными линейными уравнениями (1.16), (1.17).

### 1.4.3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ $L$ -ЭЛЕМЕНТА

Согласно рисунку 1.9а, мгновенная мощность  $L$ -элемента такова:

$$p_L(t) = u_L(t)i_L(t) = Li_L(t)i'_L(t).$$

Тогда энергия, запасенная в  $L$ -элементе к моменту времени  $t$ , записывается как

$$W_L(t) = \int_{-\infty}^t \left( Li_L \frac{di_L}{dt} \right) dt = \int_0^{i_L} Li_L di_L = \frac{Li_L^2(t)}{2} \geq 0, \quad (1.18)$$

где произведена замена переменных при интегрировании, причем учтено, что при времени  $t$  ток в цепи равен  $i_L$ , а при  $t \rightarrow -\infty$  ток в цепи отсутствовал ( $i_L = 0$ ).

**Вывод.** Согласно формулам (1.16), (1.18),  $L$ -элемент, действительно, является пассивным элементом цепи.

С учетом формулы (1.15) преобразуем формулу (1.18) к следующему виду:

$$W_L(t) = \frac{\Psi_L^2(t)}{2L} = \frac{N^2 \Phi_{\text{ср}}^2(t)}{2L}. \quad (1.19)$$

*Примечания.*

1. Ток  $i_L$  и магнитный поток — это две стороны одного и того же явления, что отражено в выражениях (1.15), (1.19), следовательно, на основании формул (1.18), (1.19),  $L$ -элемент, действительно, характеризует запасание энергии магнитного поля.

2.  $L$ -элемент является идеализированным элементом реальной электрической цепи, поскольку, например, схему замещения (модель катушки индуктивности) даже на НЧ обычно изображают в виде последовательного соединения  $L$ - и  $R$ -элементов, причем  $R$ -элемент отражает сопротивление активных потерь в проводах катушки.

#### 1.4.4. ПРИНЦИП (ЗАКОН) НЕПРЕРЫВНОСТИ ПОТОКОСЦЕПЛЕНИЯ $L$ -ЭЛЕМЕНТА

При условии ограниченности значений токов и напряжений цепи потокосцепление  $\Psi_L(t)$  является непрерывной функцией времени и не может изменяться скачком:

$$\Psi_L(t-) = \Psi_L(t+), \quad (1.20)$$

где, как указано ранее, бесконечно малая  $\varepsilon$  опущена.

Докажем равенство (1.20) от противного. Допустим, что в момент времени  $t = t_0$  потокосцепление  $\Psi_L(t)$  изменилось скачком на  $\Delta\Psi_L$ , как показано на рисунке 1.9з (строго: функция  $\Psi_L$ , описывающая потокосцепление, претерпевает при  $t_0$  разрыв первого рода). Тогда, согласно

формуле (1.16) и определению производной, напряжение  $L$ -элемента стремится при  $t_0$  к бесконечно большому значению:

$$u_L(t_0) = \frac{d\Psi_L(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Psi_L}{\Delta t} \Big|_{t=t_0} \rightarrow \infty, \quad (1.21)$$

поскольку приращение функции  $\Delta\Psi_L$  конечно, а приращение аргумента  $\Delta t$  является бесконечно малым. Значение  $u_L$  в формуле (1.21) противоречит условию ограниченности уровней токов и напряжений в цепи, т. е.  $\Psi_L(t)$  — непрерывная функция.

*Следствие.* При условии неизменности значения индуктивности в цепи ток  $L$ -элемента также является непрерывной функцией времени и не может изменяться скачком, т. е.

$$i_L(t-) = i_L(t+), \quad (1.22)$$

причем равенство (1.22) вытекает из равенства (1.20) с учетом выражения (1.15). Энергетическая трактовка равенства (1.22) такова:

$$W_L(t-) = 0,5Li_L^2(t-) = W_L(t+) = 0,5Li_L^2(t+),$$

т. е. энергия, запасенная  $L$ -элементом, не может изменяться скачком (в произвольный момент  $t = t_0$ ), иначе, согласно формуле (1.4), мощность  $L$ -элемента  $p_L(t_0) = W'_L(t_0)$  становится бесконечной, что реально осуществить невозможно.

Математическая трактовка выражения (1.20) следует также из формул (1.15), (1.17): интеграл от ограниченной по уровню функции

$$\Psi_L(t) = \int_{-\infty}^t u_L(t) dt \quad (1.23)$$

является непрерывной функцией (площадь под кривой, ограниченной по уровню, не может измениться скачком). Из формулы (1.23) следует также вариант физической трактовки выражения (1.20): если  $u_L(t)$  считать скоростью движения, то  $\Psi_L(t)$  — координата, которая не может измениться скачком, если скорость небесконечна.

## 1.5. ЕМКОСТНОЙ ЭЛЕМЕНТ ЦЕПИ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

### 1.5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ С-ЭЛЕМЕНТА ЦЕПИ

*Емкостным элементом*, или *С-элементом* цепи, называется идеализированный двухполюсный пассивный элемент цепи, который отражает лишь процессы запасания энергии электрического поля.

Условное обозначение *С-элемента* приведено на рисунке 1.10, причем полярность напряжения принято согласовывать с направлением тока.

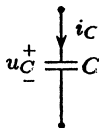


Рис. 1.10

Символ *C* — не только качественная, но и количественная характеристика: величина *C*, называемая емкостью, является коэффициентом пропорциональности между зарядом  $q_C$  емкостного элемента и напряжением элемента:

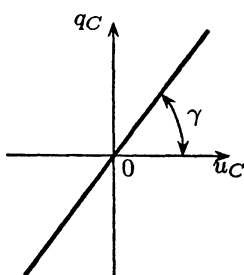


Рис. 1.11

$$C = \frac{q_C(t)}{u_C(t)}, \quad (1.24)$$

емкость *C* в (1.24) измеряется в фарадах (Ф).

Кулон-вольтная характеристика линейного *С-элемента* — это прямая линия (рис. 1.11);  $\operatorname{tg} \gamma \sim C$ . К емкостному элементу по своим характеристикам достаточно близок на НЧ высококачественный конденсатор, однако у некоторых типов конденсаторов (варикапов, варикондов) характеристика нелинейна даже в небольшом диапазоне изменения переменных  $q_C(u_C)$ .

### 1.5.2. ВОЛЬТ-АМПЕРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА С-ЭЛЕМЕНТА

Изменение напряжения  $u_C$  емкостного элемента, согласно формуле (1.24), приводит к изменению заряда  $q_C$ , но на основании выражения (1.1) изменение заряда свидетельствует о протекании через *С-элемент* тока:

$$i_C(t) = \frac{dq_C}{dt} = C \frac{du_C(t)}{dt}, \quad (1.25)$$

при этом соотношение (1.25) записано для согласованной полярности (см. рис. 1.10).

*Примечание.* Согласно формуле (1.25), в цепях постоянных токов и напряжений при  $u_C = \text{const}$  ток  $i_C = 0$ , т. е. в соответствии с (1.16)  $C$ -элемент эквивалентен ХХ.

На основании формулы (1.25) напряжение  $C$ -элемента в момент времени  $t$  будет

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(t) dt = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(t) dt + u_C(t_0-). \quad (1.26)$$

*Вывод.* Вольт-амперная характеристика линейного  $C$ -элемента описывается простейшими дифференциальными и интегральными соотношениями (1.25), (1.26).

### 1.5.3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ $C$ -ЭЛЕМЕНТА

Мгновенная мощность  $C$ -элемента с учетом (1.25) записывается как

$$p_C(t) = u_C(t)i_C(t) = Cu_C(t)u'_C(t),$$

следовательно, энергия, запасенная  $C$ -элементом к моменту времени  $t$ , будет

$$W_C(t) = \int_{-\infty}^t p_C(t) dt = C \int_0^{u_C} u_C du_C = \frac{Cu_C^2(t)}{2} \geq 0. \quad (1.27)$$

При интегрировании в формуле (1.27) произведена замена переменных, причем учтено, что в момент времени  $t$  напряжение  $C$ -элемента равно  $u_C$ , а при  $t \rightarrow \infty$  напряжение  $u_C = 0$ .

*Вывод.* Согласно формулам (1.6), (1.27), емкостной элемент, действительно, является пассивным элементом.

С учетом формулы (1.24) преобразуем (1.27) к следующему виду:



$$W_C(t) = \frac{0,5q_C^2(t)}{C}. \quad (1.28)$$

*Примечание.* Заряд, напряжение и электрическое поле — это различные стороны одного и того же явления, что отражено в выражениях (1.24), (1.28); следовательно,  $C$ -элемент, действительно, характеризует запасание энергии электрического поля.

Необходимо отметить, что линии тока, как известно из курса физики, непрерывны. Так, на рисунке 1.12, где схематично изображены обкладки конденсатора, ток  $i_C(t)$  в подводящих проводах и обкладках (линии тока изображены пунктиром) — это ток проводимости, обусловленный в основном движением свободных зарядов в проводниках.

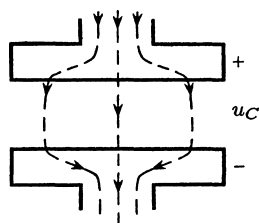


Рис. 1.12

В пространстве между обкладками конденсатора ток проводимости переходит в ток смещения. Действительно, при изменении на обкладках конденсатора заряда  $q_C(t)$  и напряжения  $u_C(t)$  между обкладками создается переменное электрическое поле, под воздействием которого в атомах диэлектрика, находящегося между обкладками, как бы перемещаются центры положительного и отрицательного зарядов атома (т. е. в любом поперечном сечении между обкладками существует ток). Однако указанный ток поляризации атомов — это только часть тока смещения, который имеет место и в вакууме. В последнем случае переменный заряд  $q_C(t)$  создает между обкладками переменное электрическое поле, которое по законам электромагнетизма создает вокруг себя переменное магнитное поле. Как указано ранее, магнитное поле и ток — это две стороны одного и того же явления, следовательно, в вакууме роль тока смещения, протекающего через конденсатор, играет переменное магнитное поле.

*Примечание.* Как известно, напряжение, разность потенциалов между узлами цепи, электродвижущая сила измеряются одинаково — в вольтах; напряжение элемента

определяется разностью потенциалов между узлами, к которым он присоединен; ЭДС элемента (источника напряжения или, например, ЭДС индукции  $L$ -элемента) обеспечивает разность потенциалов между узлами элемента; поэтому в теории цепей при анализе вольт-амперных характеристик элементов и расчете процессов целесообразно использовать в указанных случаях одну переменную — напряжение  $u(t)$ , обращаясь к терминам ЭДС и «разность потенциалов» преимущественно при физической трактовке изучаемых явлений.

#### 1.5.4. ПРИНЦИП (ЗАКОН) НЕПРЕРЫВНОСТИ ЗАРЯДА $C$ -ЭЛЕМЕНТА

При условии ограниченных по уровню значений токов и напряжений цепи заряд  $q_C(t)$  является непрерывной функцией времени и не может измениться скачком:

$$q_C(t-) = q_C(t+). \quad (1.29)$$

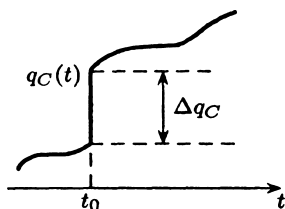


Рис. 1.13

Докажем (1.29) от обратного. Допустим, что в момент времени  $t = t_0$  заряд элемента  $q_C$  изменился скачком на  $\Delta q_C$ , как показано на рисунке 1.13. Тогда, согласно (1.25) и определению производной, ток  $C$ -элемента при  $t = t_0$  будет иметь бесконечно большое значение

$$i_C(t_0) = \left. \frac{dq_C(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q_C}{\Delta t} \Big|_{t=t_0} \rightarrow \infty,$$

что противоречит условию ограниченности уровня токов.

*Следствие.* При условии неизменности значения емкости в цепи напряжение  $C$ -элемента также является непрерывной функцией времени и не может измениться скачком, т. е.

$$u_C(t-) = u_C(t+), \quad (1.30)$$

причем равенство (1.30) вытекает из равенства (1.29) с учетом формулы (1.24).

## 1.6. ГЕОМЕТРИЯ ЦЕПЕЙ

### 1.6.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИИ ЦЕПЕЙ

*Электрическая цепь* — это идеализированная модель реального электротехнического устройства. *Схема цепи* — это графическое изображение электрической цепи в виде различных соединений элементов цепи (из которых ранее рассмотрены  $R$ -,  $L$ -,  $C$ -элементы, ИН, ИТ, КЗ, ХХ). Геометрия схем простых цепей в основном характеризуется нижеследующими понятиями.

*Ветвь* — в общем случае любая часть цепи, соединяющая два узла (часть цепи с одинаковыми токами). В частном случае, ветвь может состоять из одного элемента; при этом КЗ- и ХХ-элементы рассматриваются как устранимые ветви, поскольку их можно на схеме и не изображать (как показано ниже).

*Узел* — это место соединения трех и более ветвей. Отметим, что место соединения только двух ветвей называют устранимым узлом, поскольку в этом случае имеем дело с последовательным соединением элементов, которое при решении многих задач можно рассматривать как одну общую ветвь.

*Контур* обычно рассматривают как замкнутую последовательность ветвей схемы (причем эти ветви не пересекаются и дважды не повторяются). Если рассматривается контур, содержащий разомкнутый элемент цепи (ХХ), то такой контур оговаривается особо и обычно используется для расчета напряжения холостого хода  $u_{xx}$ , когда напряжения остальных элементов этого контура известны. *Ячейка* — это простейший контур плоской цепи, который изображается в схеме без пересечения другими ветвями (не входящими в контур). *Путь* — это непрерывная последовательность ветвей, связывающая пару узлов.

*Сечение* — это замкнутая линия, пересекающая некоторые ветви схемы цепи (в случае пространственной схемы сечение — это замкнутая поверхность). Более строго сечение определяется как множество ветвей, удаление которых разбивает схему на две несвязанные части.

Обычно говорят о следующих соединениях (структурах соединений) элементов (или ДП) в схеме цепи:

- последовательное соединение — это соединение элементов один за другим через устранимые узлы; ток таких элементов одинаков, если одинаковым выбрано его направление во всех последовательно соединенных элементах (рис. 1.14а), чему и рекомендуется следовать в практике расчета цепей;

- параллельное соединение образуется присоединением элементов к одной и той же паре узлов, как показано на рисунке 1.14б; напряжение параллельно соединенных элементов одинаково, если положительная полярность напряжения всех элементов выбрана одинаково, т. е. проставлена у одного из указанных углов, а отрицательная — у другого (чему также рекомендуется следовать в расчетах);

- смешанное соединение — это последовательно-параллельное соединение (рис. 1.14в); цепное (лестничное) соединение — это многократное последовательно-параллельное соединение (рис. 1.14г);

- соединение, например,  $R$ -элементов звездой представлено на рисунке 1.15а, соединение треугольником — на рисунке 1.15б, мостовое соединение — на рисунке 1.15в.

*Следствие.* В практических расчетах узлы, соединенные КЗ-элементами, обычно рассматривают как один общий узел. Так, схема, представленная на рисунке 1.14б,

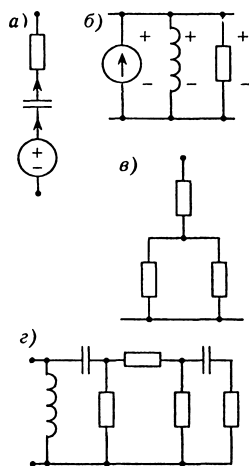


Рис. 1.14

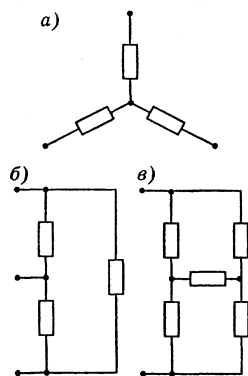


Рис. 1.15

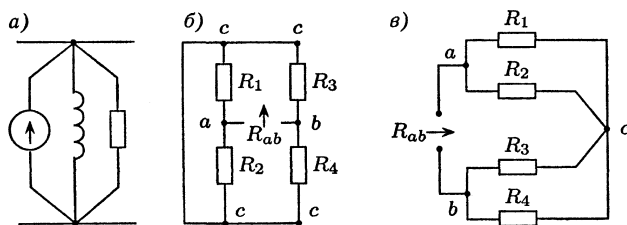


Рис. 1.16

может быть эквивалентно преобразована, как указано на рисунке 1.16а. А при расчете, например, входного сопротивления  $R_{ab}$  относительно узлов  $a, b$  схемы, приведенной на рисунке 1.16б, проще воспользоваться эквивалентной схемой, изображенной на рисунке 1.16в, производя разметку узлов исходной схемы (рис. 1.16б) и считая коротко-замкнутые узлы одним общим узлом (узлом  $c$ ), что и отражено в схеме на рисунке 1.16в, из рассмотрения которой очевидно следует, что

$$R_{ab} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

### 1.6.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТОПОЛОГИИ ЦЕПЕЙ

Топология изучает неметрические свойства геометрических фигур. Так, *граф схемы* — это геометрический образ схемы цепи. Узлы (вершины) графа соответствуют узлам схемы, а ветви (ребра) графа, изображаемые линиями, которые соединяют узлы, соответствуют ветвям схемы. Так, граф схемы, изображенной на рисунке 1.17а, представлен на рисунке 1.17б (кривизна ветвей графа произвольна).

Дерево графа получают, соединяя узлы графа ветвями без образования замкнутых контуров. Ветви, вошедшие в дерево, называют ветвями дерева. Ветви, не вошедшие в дерево, называют хордами (или ветвями связи). Присоединение какой-либо хорды к дереву приведет к образованию замкнутого контура. У графа может быть несколько

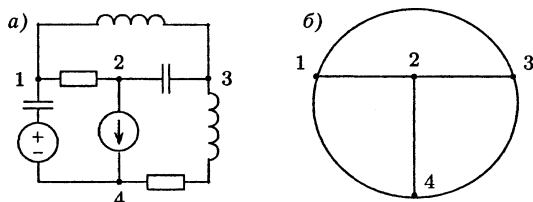


Рис. 1.17

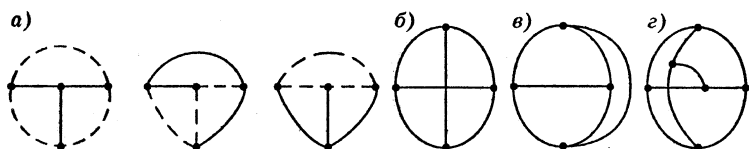


Рис. 1.18

деревьев; так, некоторые деревья графа, изображенного на рисунке 1.17б, представлены на рисунке 1.18а: ветви дерева изображены сплошными линиями, а хорды — пунктиром. Очевидно, что число ветвей дерева

$$n_{\text{в.д}} = n_y - 1,$$

где  $n_y$  — число узлов; а число хорд

$$n_x = n_{\text{в}} - n_{\text{в.д}} = n_{\text{в}} - n_y + 1,$$

где  $n_{\text{в}}$  — число ветвей; при этом  $n_{\text{в.д}}$  соответствует числу независимых уравнений цепи, которые можно составить по закону токов Кирхгофа (ЗТК), т. е.  $n_{\text{в.д}} = n_{\text{эТК}}$ ;  $n_x$  соответствует числу независимых уравнений цепи, которые можно составить по закону напряжений Кирхгофа (ЗНК), т. е.  $n_x = n_{\text{зНК}}$ .

Цепь называется плоской (планарной), если ее граф можно изобразить без пересечения ветвей; в противном случае цепь называют пространственной (непланарной). Так, на рисунке 1.18б представлен граф плоской цепи, поскольку ее можно эквивалентно преобразовать к виду (рис. 1.18в), графу (рис. 1.18г) соответствует пространственная цепь.

*Следствие.* Кроме рассмотренных простых топологических графов, в теории электрических цепей широко

используются и другие варианты графов, например, полных (учитывающих все элементы цепи), направленных топологических (учитывающих направления токов и полярности напряжений) и др., которые преимущественно используют при машинных и аналитических расчетах сложных цепей.

## 1.7. ЗАКОНЫ КИРХГОФА

### 1.7.1. ЗАКОН ТОКОВ КИРХГОФА

Первый закон Кирхгофа, называемый также законом токов Кирхгофа (ЗТК), отражает закон сохранения зарядов в цепи: алгебраическая сумма токов в любом узле или сечении цепи в любой момент времени равна нулю, т. е.

$$\sum_{(k)} i_k(t) = 0, \quad (1.31)$$

причем для определенности вытекающие из узла (сечения) токи берут в уравнении (1.31) со знаком «плюс», а втекающие — со знаком «минус»; здесь  $k$  — номера ветвей, присоединенных к рассматриваемому узлу.

*Следствия.*

1. Сумма токов, втекающих в узел (сечение), равна сумме вытекающих токов, что поясняется на рисунке 1.19а, где  $i_3 = i_1 + i_2$ , поскольку на основании уравнения (1.31) получено  $i_3 - i_1 - i_2 = 0$ ; ЗТК для показанного пунктиром на рисунке 1.19б сечения имеет вид  $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ .

2. В последовательно соединенных элементах цепи ток одинаков, если одинаковым выбрано его направление во всех элементах, как показано, например, на рисунке 1.19в, где уравнения для устранимых узлов 1, 2 имеют вид  $i_R = i_{\text{ин}}, i_{\text{ин}} = i_C$ .

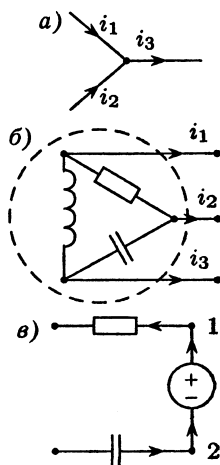


Рис. 1.19

### 1.7.2. ЧИСЛО НЕЗАВИСИМЫХ УРАВНЕНИЙ ЗТК

Максимальное число независимых уравнений, составляемых по ЗТК, равно

$$n_{\text{ЗТК}} = n_y - 1 = n_{\text{В.Д}} n_{\text{ЗТК}}. \quad (1.32)$$

Для доказательства (1.32) вначале покажем, что уравнение ЗТК для узла с номером  $n_y$  является зависимым, если составлены уравнения ЗТК для всех  $n_y$  узлов схемы. Действительно, ток каждой ветви (например,  $i_{km}$  на рис. 1.20а) входит лишь в 2 уравнения ЗТК, составленных для тех двух узлов, к которым присоединена рассматриваемая ветвь (например,  $i_3 + i_4 - i_{km} = 0$ ,  $-i_1 - i_2 + i_{km} = 0$  для схемы рис. 1.20а). При этом в одно из уравнений этот ток входит со знаком «плюс», а в другое — со знаком «минус», следовательно, сумма всех  $n_y$  уравнений ЗТК равно нулю (поскольку токи сокращаются). Таким образом, уравнение ЗТК для узла с номером  $n_y$  равно взятой со знаком «минус» сумме остальных  $(n_y - 1)$  уравнений и поэтому является зависимым.

Для обоснования независимости остальных  $(n_y - 1)$  уравнений ЗТК рассмотрим граф некоторой цепи (рис. 1.20б), в котором выделим сплошными линиями какое-либо дерево и пронумеруем узлы и ветви дерева «от краев к основанию дерева».

При такой нумерации каждое «новое» уравнение ЗТК, составленное для узла с последующим номером (вплоть

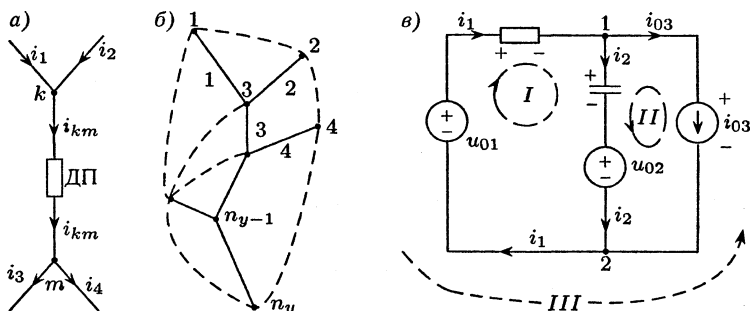


Рис. 1.20



до номера ( $n_y - 1$ )), содержит хотя бы одну «новую» переменную (которой не было в предыдущих уравнениях) — ток ветви дерева с тем же последующим («новым») номером. Известно, что составленная подобным образом система уравнений независима (ни одно из уравнений невозможно получить из других).

В качестве узла, уравнение ЗТК для которого считаем зависимым, выбирают любой узел цепи; для остальных узлов уравнения ЗТК независимы. Действительно, например, в схеме на рисунке 1.20в уравнение ЗТК для узла 1 имеет вид  $i_2 + i_{03} - i_1 = 0$ , а для второго узла  $i_1 - i_2 - i_{03} = 0$ , т. е. является зависимым.

### 1.7.3. ЗАКОН НАПРЯЖЕНИЙ КИРХГОФА

Второй закон Кирхгофа, называемый также законом напряжений Кирхгофа (ЗНК), отражает закон сохранения энергии в замкнутом контуре: алгебраическая сумма напряжений в любом замкнутом контуре равна нулю в любой момент времени, т. е.

$$\sum_{(k)} u_k(t) = 0, \quad (1.33)$$

причем в уравнении (1.33) символом  $k$  обозначены номера элементов схемы цепи, вошедших в контур. Правило знаков: если, например, обход контура согласован с полярностью напряжения элемента  $k$ , то это напряжение берут в (1.33) со знаком «плюс», если не согласован — со знаком «минус». Обход контура может быть выбран произвольно. Так, например, уравнения ЗНК для указанных пунктиром контуров I, II, III схемы, изображенной на рисунке 1.20в, имеют вид  $u_R + u_C + u_{02} - u_{01} = 0$ ,  $u_C + u_{02} - u_{03} = 0$ ,  $u_{01} - u_{03} - u_R = 0$ . Как видно из приведенных уравнений, правило знаков одинаково как для напряжений источников, так и для напряжений пассивных элементов.

*Следствия.*

1. У параллельно соединенных элементов (или двухполюсников) напряжение одинаково, если полярность напряжения всех элементов выбрана одинаково, как пока-

зано, например, на рисунке 1.14б, где  $u_{\text{ИТ}} = u_L = u_R$ , поскольку уравнения ЗНК ячеек схемы при их обходе по часовой стрелке  $u_L - u_{\text{ИТ}} = 0$ ,  $u_R - u_L = 0$ .

2. Напряжение  $u_{AB}$  между любыми узлами  $A$ ,  $B$  цепи равно алгебраической сумме напряжений по любому пути из точки  $A$  в точку  $B$ ; при этом правило знаков остается вышеизложенным (если направление пути из узла  $A$  к узлу  $B$  согласовано с полярностью напряжения элемента цепи, по которому проходит путь, это напряжение учитывают в уравнении ЗНК со знаком «плюс»).

Использував следствие 2 для анализа схемы, изображенной на рисунке 1.20в, можно написать  $u_{12} = -u_R + u_{01} = u_C + u_{02} = u_{03}$ , что, естественно, вытекает из уравнений ЗНК схемы, приведенных ранее.

#### 1.7.4. ЧИСЛО НЕЗАВИСИМЫХ УРАВНЕНИЙ ЗНК

Максимальное число независимых уравнений, которые можно составить по ЗНК, равно

$$n_{\text{ЗНК}} = n_{\text{в}} - (n_{\text{у}} - 1) = n_{\text{х}}. \quad (1.34)$$

Для доказательства (1.34) составим в соответствии с изложенным ранее  $n_{\text{в}}$  уравнений ЗНК для всех  $n_{\text{в}}$  ветвей схемы цепи. Для произвольной ветви  $km$  (см. рис. 1.20а) напряжение двухполюсника (или элемента) ветви

$$u_{km} = u_k - u_m, \quad (1.35)$$

где  $u_k$ ,  $u_m$  — напряжения узлов  $k$ ,  $m$  относительно базисного, причем каждое из этих узловых напряжений входит минимум в два уравнения вида (1.35). Поэтому все  $(n_{\text{у}} - 1)$  узловых напряжения могут быть исключены из составленной системы из  $n_{\text{в}}$  независимых уравнений вида (1.35) для напряжений всех ветвей (система независима, поскольку напряжение каждой ветви как переменная системы входит лишь в одно из уравнений и не встречается в других). В результате останется лишь  $(n_{\text{в}} - n_{\text{у}} + 1)$  независимых уравнений, составленных по ЗНК и содержащих только напряжения ветвей.

На практике рекомендуется «независимые контуры» выбрать так, чтобы уравнение ЗНК, составленное для каждого последующего контура, содержало хотя бы одну «новую» переменную. В случае цепей сложной структуры (например, непланарных) выбирают какое-либо дерево графа схемы цепи и, присоединяя по очереди хорды, получают «независимые контуры». Если цепь планарна, «независимыми контурами» могут служить ячейки схемы, число которых  $n_{\text{яч}}$  также, очевидно, равно числу хорд, т. е.

$$n_{\text{ЗНК}} = n_{\text{яч}}. \quad (1.36)$$

Так, в схеме, приведенной на рисунке 1.20в, на основании равенства (1.36) получим  $n_{\text{ЗНК}} = n_{\text{яч}} = 2$ . Считая составленные в п. 1.7.3 уравнения ЗНК для двух ячеек (контуров I, II) независимыми, получим третье уравнение ЗНК для «большого» контура схемы («зависимого контура»), вычитая из второго уравнения первое.

## 1.8. ТИПОВОЙ ПРИМЕР

Дана цепь, изображенная на рисунке 1.21 при  $u_1 = 5 \text{ В}$ ,  $R_2 = R_3 = 2 \text{ Ом}$ ,  $i_4 = 2 \text{ А}$ ,  $R_5 = 1 \text{ Ом}$ ,  $u_6 = 2 \text{ В}$ . Определить токи, напряжения и мощности элементов цепи, используя систему независимых уравнений законов Кирхгофа.

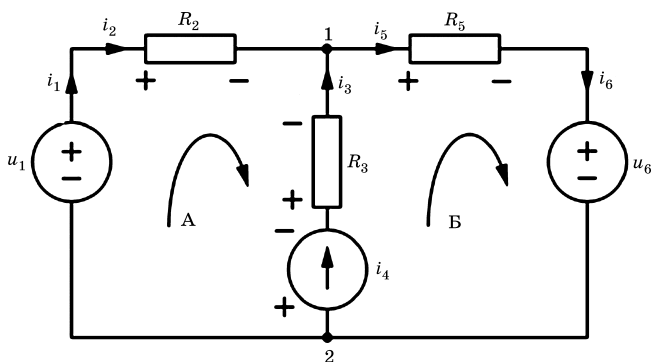


Рис. 1.21

Покажем предполагаемые направления токов в цепи. При действии нескольких источников заранее трудно предсказать направления движения положительных зарядов (токов), поэтому в схеме произвольно указываем предполагаемые направления.

Покажем полярности напряжений  $R$ -элементов, согласованные с направлениями токов (внутри каждого  $R$ -элемента ток протекает от «+» к «-»). У источников может быть как согласованная, так и несогласованная полярность напряжения, например ИН  $u_1$  и ИН  $u_6$  на рисунке 1.21 соответственно.

Для формирования уравнений законов Кирхгофа обозначим узлы и контуры на рисунке 1.21.

Число уравнений по ЗТК:  $n_{\text{ЗТК}} = n_y - 1 = 1$ . Для узла 1 при  $i_2 = i_1$  ( $R_2$  и ИН  $u_1$  соединены последовательно),  $i_4 = i_3$  ( $R_3$  и ИТ  $i_4$  соединены последовательно) и  $i_5 = i_6$  ( $R_5$  и  $u_6$  соединены последовательно) запишем

$$-i_2 - i_4 + i_5 = 0.$$

Число уравнений по ЗНК:  $n_{\text{ЗНК}} = n_B - n_y + 1 = 2$ . Для контуров А и Б формируем равенства:

$$\begin{cases} -u_1 + u_2 - u_3 - u_4 = 0; \\ u_4 + u_3 + u_5 + u_6 = 0. \end{cases}$$

Указанные уравнения дополним вольт-амперными характеристиками резистивных элементов (по закону Ома). В результате получим систему независимый уравнений:

$$\begin{cases} -i_2 - i_4 + i_5 = 0; \\ -u_1 + R_2 i_2 - R_3 i_4 - u_4 = 0; \\ u_4 + R_3 i_4 + R_5 i_5 + u_6 = 0. \end{cases} \quad (1.37)$$

Решение системы уравнений (1.37) следующее:  $i_2 = 1/3$  А,  $i_5 = 7/3$  А,  $u_4 = -25/3$  В.

Другие токи и напряжения находим как

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 = 1/3 \text{ А}; \\ i_3 &= i_4 = 2 \text{ А}; \\ i_6 &= i_5 = 7/3 \text{ А}; \end{aligned}$$

$$u_2 = R_2 i_2 = 2/3 \text{ В};$$

$$u_3 = R_3 i_3 = 4 \text{ В};$$

$$u_5 = R_5 i_5 = 7/3 \text{ В}.$$

Вычислим мощности  $p_k$  элементов цепи по формулам:

$$p_k = u_k i_k$$

при согласованной полярности напряжений,

$$p_k = -u_k i_k$$

при несогласованной полярности напряжений.

В результате запишем:

$$p_1 = -u_1 i_1 = -5/3 \text{ Вт};$$

$$p_2 = u_2 i_2 = 2/9 \text{ Вт};$$

$$p_3 = u_3 i_3 = 8 \text{ Вт};$$

$$p_4 = u_4 i_4 = -50/3 \text{ Вт};$$

$$p_5 = u_5 i_5 = 49/9 \text{ Вт};$$

$$p_6 = u_6 i_6 = 14/3 \text{ Вт}.$$

Убеждаемся, что в цепи выполняется баланс мощностей:

$$\sum_{k=1}^6 p_k = 0.$$

## 2.1. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРЫ ЦЕПИ

**А**нализ резистивной цепи часто можно упростить, если предварительно произвести эквивалентные преобразования цепи или ее части. При этом эквивалентность понимается в том смысле, что режим работы неразобранной части цепи сохраняется, т. е. токи и напряжения ветвей остаются прежними. Из всего многообразия эквивалентных преобразований рассмотрим лишь те, которые необходимы при изложении последующих разделов. Некоторые из преобразований являются элементарными и очевидными. К ним относятся объединение последовательно соединенных  $R$ -элементов в один элемент и параллельно соединенных  $R$ -элементов в один элемент. Сюда же можно отнести и объединение в один источник напряжения нескольких источников, соединенных последовательно, и объединение в один источник тока нескольких источников, соединенных параллельно.

### 2.1.1. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИСТОЧНИКОВ

Пусть произвольная цепь подключена к источнику напряжения с последовательно включенным  $R_0$ -элементом (рис. 2.1а).

Поставим следующую задачу: заменить источник напряжения  $u_0$  с последовательно включенным сопротивлением  $R_0$  (рис. 2.1а) на источник тока  $i_x$  с параллельно включенным сопротивлением  $R_x$  (рис. 2.1б) так, чтобы

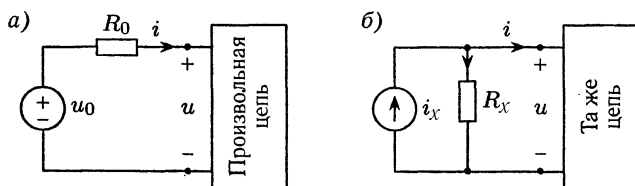


Рис. 2.1

режим непреобразованной части цепи сохранился. Спрашивается, чему при этом равны  $i_x$  и  $R_x$ ?

Для решения поставленной задачи найдем  $u$  и  $i$  непреобразованной части обеих схем. Для цепи (рис. 2.1а) по второму закону Кирхгофа находим  $u_{R_0} + u = u_0$ . Отсюда  $u = u_0 - R_0 i$ , а  $i = u_0 / R_0 - u / R_0$ .

Для цепи (рис. 2.1б) по первому закону Кирхгофа находим  $i_{R_x} + i = i_x$ . Отсюда  $i = i_x - u / R_x$ , а  $u = R_x i_x - R_x i$ .

Сравнивая полученные результаты, приходим к выводу, что эквивалентное преобразование возможно, если выполняются следующие соотношения:

$$i_x = \frac{u_0}{R_0}, \quad R_x = R_0.$$

Такие преобразования часто позволяют многоконтурную цепь привести к эквивалентной одноконтурной, в которой сохраняется ток какой-либо ветви. Найдя его, можно шаг за шагом, восстанавливая схему цепи, найти остальные токи.

Проиллюстрируем изложенное для цепи (рис. 2.2а), где  $R_1 = 1$  Ом,  $R_2 = R_3 = 2$  Ом,  $u_{01} = 4$  В,  $u_{02} = 4$  В.

Преобразуем источник напряжения  $u_{02}$  в источник тока  $i_{02} = u_{02} / R_2 = 4/2 = 2$  А. При этом сохраняются неизменными токи  $i_1$  и  $i_3$ . В результате получим цепь (рис. 2.2б).

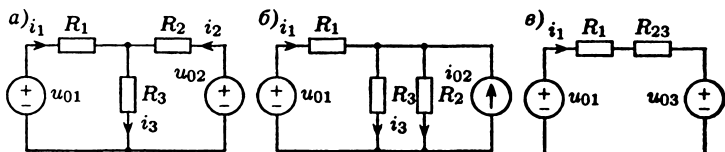


Рис. 2.2

Отметим, что ток через  $R_2$  полученной цепи будет отличаться от тока  $i_2$  исходной цепи. Теперь объединим элементы  $R_2$  и  $R_3$  в один элемент  $R_{23} = R_2 R_3 / (R_2 + R_3) = 1$  Ом, а затем преобразуем источник тока  $i_{02}$  в источник напряжения  $u_{03} = R_{23} i_{02} = 1 \times 2 = 2$  В. Из одноконтурной цепи (рис. 2.2в) легко определяется сохранившийся неизменным ток  $i_1 = (u_{01} - u_{03}) / (R_1 + R_{23}) = (4 - 2) / (1 + 1) = 1$  А.

Далее из цепи (рис. 2.2б) по второму закону Кирхгофа находим:

$$R_1 i_1 + R_3 i_3 = u_{01}, \quad i_3 = (u_{01} - R_1 i_1) / R_3 = (4 - 1) / 2 = 1,5 \text{ А.}$$

Из цепи (рис. 2.2а) по первому закону Кирхгофа находим ток

$$i_2 = i_3 - i_1 = 1,5 - 1 = 0,5 \text{ А.}$$

### 2.1.2. ТЕОРЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ

После определения тока (напряжения) какой-либо ветви (например так, как это было сделано в п. 2.1.1), для вычисления токов (напряжений) остальных ветвей полезно пользоваться теоремой замещения, согласно которой любая ветвь цепи (рис. 2.3а) с током  $i_k$  и напряжением  $u_k$  для расчетных целей может быть заменена либо источником тока (рис. 2.3б) с током  $i_k$ , либо источником напряжения (рис. 2.3в) с напряжением  $u_k$ ; при этом режим в непреобразованной части цепи сохраняется прежним.

Справедливость теоремы замещения очевидна, так как уравнения Кирхгофа для цепей, изображенных на рисунке 2.3а–в, одинаковы.

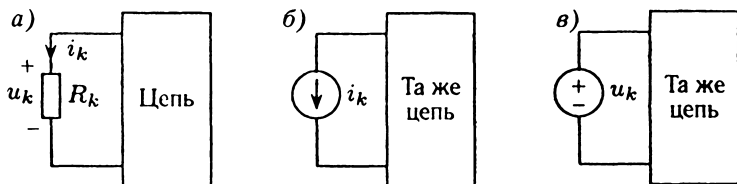


Рис. 2.3



## 2.2. АНАЛИЗ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

Анализ  $R$ -цепи произвольной структуры может быть осуществлен на основе законов Кирхгофа. При этом для нахождения токов всех ветвей цепи часто необходимо составить и решить систему из  $n_b$  независимых алгебраических уравнений, где  $n_b$  — число ветвей цепи. Зная токи, можно найти и все напряжения ветвей. Размерность такой системы уравнений может оказаться очень большой. Решение системы большой размерности связано с известными вычислительными трудностями, поэтому для анализа сложных цепей используют другие методы, приводящие к системе меньшей размерности.

### 2.2.1. МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ

Для расчета линейных цепей с несколькими источниками применяется метод наложения. Его суть заключается в том, что реакции цепи с несколькими источниками определяются как алгебраические суммы их составляющих от каждого источника в отдельности. Следует иметь в виду, что при расчете реакции цепи от одного источника другие источники напряжения заменяются на КЗ, а источники тока — на ХХ.

Таким образом, расчет сложной цепи методом наложения сводится к расчету нескольких простых цепей с одним источником.

### 2.2.2. МЕТОД УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

В методе узловых напряжений (МУН) неизвестными принимаются напряжения узлов относительно одного из них, напряжение которого считается известным и равным нулю. Этот узел называется базисным, или опорным, узлом. Предполагается, что другие узлы имеют напряжения выше, чем напряжение базисного. Так как напряжение (потенциал) базисного узла принимается равным нулю, то разность напряжений между любым узлом и опорным совпадает с напряжением (потенциалом) этого

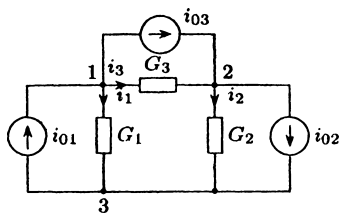


Рис. 2.4

узла, поэтому этот метод называют методом узловых напряжений (иногда — методом узловых потенциалов).

Таким образом, число неизвестных напряжений равно  $n_y - 1$ , где  $n_y$  — число узлов цепи. В общем случае  $n_y - 1 < n_b$ . Зная напряжения узлов, можно легко

найти токи всех  $n_b$  ветвей цепи. Таким образом, число неизвестных напряжений равно  $n_y - 1$ , где  $n_y$  — число узлов цепи. В общем случае  $n_y - 1 < n_b$ . Зная напряжения узлов, можно легко найти токи всех  $n_b$  ветвей цепи.

Для иллюстрации алгоритма формирования системы узловых уравнений рассмотрим конкретную цепь (рис. 2.4).

Один из трех узлов цепи примем за базисный и присвоим ему последний номер. Выразим токи ветвей через напряжения узлов:

$$i_1 = G_1 u_1^y, \quad i_2 = G_2 u_2^y, \quad i_3 = G_3 (u_1^y - u_2^y),$$

где  $u_1^y, u_2^y$  — напряжения первого и второго узлов относительно базисного.

Составим уравнения по первому закону Кирхгофа для первого и второго узлов:

$$i_1 + i_3 = i_{01} - i_{03}, \quad i_3 - i_2 = i_{02} - i_{03};$$

$$G_1 u_1^y + G_3 (u_1^y - u_2^y) = i_{01} - i_{03};$$

$$G_3 (u_1^y - u_2^y) - G_2 u_2^y = i_{02} - i_{03}.$$

После преобразования получим следующую систему:

$$(G_1 + G_3) u_1^y - G_3 u_2^y = i_{01} - i_{03};$$

$$-G_3 u_1^y + (G_2 + G_3) u_2^y = -i_{02} + i_{03}.$$

Переобозначим коэффициенты при неизвестных потенциалах и правые части:

$$G_{11} u_1^y + G_{12} u_2^y = i_1^y;$$

$$G_{21} u_1^y + G_{22} u_2^y = i_2^y.$$

Двойной индекс у вновь введенных коэффициентов при неизвестных определяет их место в матрице этих коэффициентов. Первый индекс определяет строку, второй — столбец.

Для того чтобы систему узловых уравнений составить непосредственно по схеме, раскроем смысл входящих в систему коэффициентов и правых частей:

$G_{11} = G_1 + G_3$  — сумма проводимостей ветвей, сходящихся в первый узел, которую будем называть собственной проводимостью первого узла;

$G_{22} = G_2 + G_3$  — сумма проводимостей ветвей, сходящихся во второй узел, которую будем называть собственной проводимостью второго узла;

$G_{12} = -G_3$  — проводимость ветви, соединяющей первый узел со вторым, взятая со знаком «-», которую будем называть взаимной проводимостью между первым и вторым узлами;

$G_{21} = -G_3$  — взаимная проводимость между вторым и первым узлами (очевидно, что  $G_{12} = G_{21}$ );

$i_2^y = i_{01} - i_{03}$  — сумма токов источников тока, сходящихся в первый узел, которую будем называть узловым током (токи источников, направленные к узлу, входят в эту сумму со знаком «+», а направленные от узла — со знаком «-»);

$i_2^y = i_{03} - i_{02}$  — узловый ток второго узла.

Полученные результаты можно распространить на цепь с произвольным числом независимых узлов  $n = n_y - 1$ :

$$G_{11}u_1^y + G_{12}u_2^y + \dots + G_{1n}u_n^y = i_1^y;$$

$$G_{21}u_1^y + G_{22}u_2^y + \dots + G_{2n}u_n^y = i_2^y;$$

.....

$$G_{n1}u_1^y + G_{n2}u_2^y + \dots + G_{nn}u_n^y = i_n^y.$$

Приведенная в примере закономерность определения коэффициентов  $G_{jj}$ ,  $G_{jk}$  ( $j \neq k$ ) и правых частей  $i_j^y$  позволяет легко составить систему узловых уравнений для произвольной цепи.

Введем в рассмотрение следующие матрицы:

$[u^y] = [u_1^y, u_2^y, \dots, u_n^y]^T$  — вектор неизвестных узловых напряжений;

$[i^y] = [i_1^y, i_2^y, \dots, i_n^y]^T$  — вектор правых частей;

$$[G^y] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix}$$

— матрица узловых проводимостей.

Запишем узловые уравнения в матричной форме:

$$[G^y] \cdot [u^y] = [i^y].$$

Так как  $G_{jk} = G_{kj}$  ( $k \neq j$ ), то матрица узловых проводимостей симметрична относительно главной диагонали, что упрощает ее формирование.

После решения системы узловых уравнений будут определены  $n$  неизвестных напряжений, зная которые, можно легко найти токи и напряжения всех ветвей цепи.

Как видим, для получения правых частей системы узловых уравнений необходимо, чтобы в цепи действовали только источники тока. Поэтому, если в исходной цепи действовали источники напряжения, то они должны быть предварительно преобразованы в источники тока. Может оказаться, что исходная цепь содержит элементарно непреобразуемый источник напряжения, последовательно с которым (см. для сравнения рис. 2.1а) нет включенного  $R$ -элемента. В этом случае можно поступить следующим образом. Базисным узлом следует выбрать один из узлов, к которым этот источник подключен. Тогда напряжение другого узла становится известным и равным напряжению (с учетом полярности) этого источника. Число неизвестных сокращается на единицу, и из системы уравнений следует исключить уравнение для узла, напряжение которого таким образом найдено.

Однако таких непреобразуемых источников может быть несколько. В этом случае выбор базисного узла указанным образом не позволяет сформировать систему уравнений. Тогда можно произвести следующие преобразования, показанные на рисунке 2.5. Исходная цепь (рис. 2.5а) и цепь, изображенная на рисунке 2.5б, эквивалентны, так

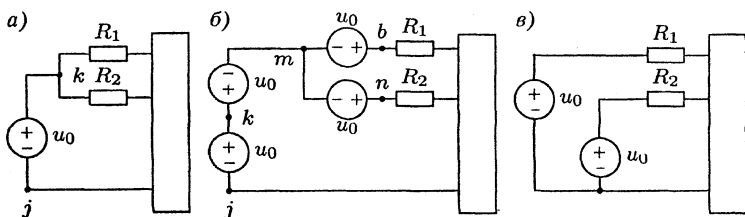


Рис. 2.5

как напряжения точек  $k$ ,  $n$  и  $b$  одинаковы и точки  $k$ ,  $n$  и  $b$  можно замкнуть накоротко.

Ветвь  $jm$  на рисунке 2.5б содержит два источника одинаковой величины и противоположной полярности, т. е. сумма их напряжений равна нулю. В этом случае ветвь  $jm$  можно замкнуть накоротко, в результате чего получится цепь (рис. 2.5в), в которой источники напряжения можно преобразовать в источники тока.

### 2.2.3. МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

В методе контурных токов (МКТ) неизвестными принимаются условные токи, которые замыкаются внутри контуров, не выходя за их пределы. Эти токи называются контурными. Если найти  $n_b - n_y + 1$  контурных токов (где  $n_b$  — число ветвей, а  $n_y$  — число узлов цепи), то реальные токи легко через них выражаются. В общем случае  $n_b - n_y + 1 < n_b$ . Если через ветвь проходит ток лишь одного контура, то ток ветви будет определяться этим контурным током. Если же через ветвь проходит несколько контурных токов, то реальный ток будет равен алгебраической сумме контурных токов.

Для иллюстрации алгоритма формирования системы уравнений контурных токов рассмотрим конкретную цепь (рис. 2.6).

Цепь содержит 3 ветви и 2 узла. Следовательно, доста-

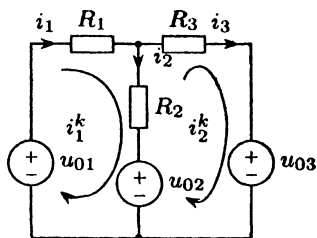


Рис. 2.6

точно определить 2 контурных тока  $i_1^k$  и  $i_2^k$ . Зная их, реальные токи определим следующим образом:  $i_1 = i_1^k$ ,  $i_2 = i_1^k - i_2^k$ ,  $i_3 = i_2^k$ .

Составим уравнения по второму закону Кирхгофа для первого и второго контуров. Получим:

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + R_2 i_2 &= u_{01} - u_{02}; \\ R_3 i_3 - R_2 i_2 &= u_{02} - u_{03}. \end{aligned}$$

Выражая токи ветвей, входящих в систему, через контурные токи, получим:

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2) \cdot i_1^k - R_2 i_2^k &= u_{01} - u_{02}; \\ -R_2 i_1^k + (R_2 + R_3) \cdot i_2^k &= u_{02} - u_{03}. \end{aligned}$$

Переобозначим коэффициенты при неизвестных контурных токах и правые части:

$$\begin{aligned} R_{11} i_1^k + R_{12} i_2^k &= u_1^k; \\ R_{21} i_1^k + R_{22} i_2^k &= u_2^k, \end{aligned}$$

где двойной индекс у вновь введенных коэффициентов определяет их место в матрице этих коэффициентов.

Для того чтобы систему уравнений контурных токов составить непосредственно по схеме, раскроем смысл входящих в нее коэффициентов и правых частей:

$R_{11} = R_1 + R_2$  — сумма сопротивлений ветвей, образующих первый контур, которую будем называть собственным сопротивлением первого контура;

$R_{22} = R_2 + R_3$  — сумма сопротивлений ветвей, образующих второй контур, которую будем называть собственным сопротивлением второго контура;

$R_{12} = -R_2$  — сопротивление ветви, одновременно принадлежащей первому и второму контуру, взятое с отрицательным знаком, так как контурные токи через это сопротивление протекают навстречу друг другу. Будем называть это сопротивление взаимным сопротивлением между первым и вторым контурами;

$R_{21} = -R_2$  — взаимное сопротивление между вторым и первым контурами (очевидно, что  $R_{12} = R_{21}$ );

$u_1^k = u_{01} - u_{02}$  — алгебраическая сумма напряжений источников, входящих в первый контур (эти напряжения

берутся со знаком «+», если контурный ток выходит из плюсового полюса источника и со знаком «-» в противном случае);

$u_2^k = u_{02} - u_{03}$  — алгебраическая сумма напряжений источников, входящих во второй контур.

Полученные результаты можно распространить на цепь с произвольным числом контурных токов  $n = n_b - n_y + 1$ .

$$R_{11}i_1^k + R_{12}i_2^k + \dots + R_{1n}i_n^k = u_1^k;$$

$$R_{21}i_1^k + R_{22}i_2^k + \dots + R_{2n}i_n^k = u_2^k;$$

.....

$$R_{n1}i_1^k + R_{n2}i_2^k + \dots + R_{nn}i_n^k = u_n^k.$$

Приведенная в примере закономерность определения  $R_{jj}$  и  $R_{jk}$  ( $j \neq k$ ) и правых частей  $u^k_j$  позволяет составить систему контурных уравнений непосредственно по схеме любой цепи.

Введем в рассмотрение следующие вектора и матрицы:

$[i^k] = [i^k_1, i^k_2, \dots, i^k_n]^T$  — вектор неизвестных контурных токов,

$[u^k] = [u^k_1, u^k_2, \dots, u^k_n]^T$  — вектор правых частей;

$$[R^k] = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix}$$

— матрица контурных сопротивлений.

Тогда контурные уравнения в матричной форме будут:

$$[R^k][i^k] = [u^k].$$

Так как  $R_{jk} = R_{kj}$  ( $k \neq j$ ), то матрица контурных сопротивлений симметрична относительно главной диагонали, что упрощает ее формирование.

После решения системы уравнений будут найдены  $n$  неизвестных контурных токов, зная которые, можно легко найти токи всех ветвей цепи.

Как видно, для получения правых частей системы необходимо, чтобы в цепи действовали только источники напряжения. Если в исходной цепи действовали источники тока, то перед началом анализа они должны быть пре-

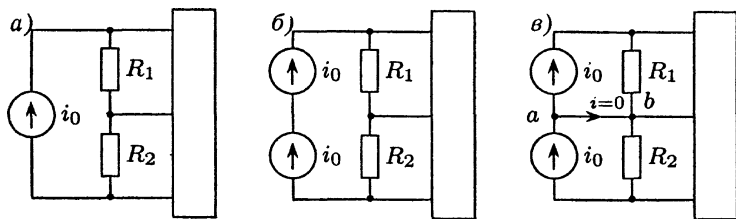


Рис. 2.7

образованы в источники напряжения. Может оказаться, что в исходной цепи есть непреобразуемый источник тока, параллельно которому нет включенного  $R$ -элемента (см. для сравнения рис. 2.1б). В этом случае нужно так выбрать контурные токи, чтобы через непреобразуемый источник тока проходил только один контурный ток. Тогда этот контурный ток определяется сразу: он равен току источника, и, следовательно, из системы уравнений можно исключить уравнение для этого контура. Имеется и другая возможность сформировать систему уравнений в данном случае. Поясним ее на примере цепи (рис. 2.7а).

Режим цепи рисунка 2.7а не изменится, если вместо одного источника  $i_0$  мы включим два равных по величине источника тока  $i_0$  (рис. 2.7б). Теперь можно соединить источники тока так, как это показано на рисунке 2.7в. Такое соединение не изменяет режим работы, так как ток в соединении «ab» равен нулю. Источники тока цепи (рис. 2.7в) можно эквивалентно преобразовать в источники напряжения.

Выбирая метод решения задачи (метод контурных токов или метод узловых напряжений), предпочтение следует отдать тому из них, который приводит к системе уравнений меньшей размерности.

### 2.3. ТЕОРЕМЫ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ИСТОЧНИКАХ

Пусть имеется изображенная на рисунке 2.8а произвольная цепь, в которой требуется найти ток  $i_k$  в одной из ветвей с сопротивлением  $R_k$ , причем источники



цепи (для определенности их взято два) вынесены наружу. Выясним, нельзя ли всю цепь по отношению к двухполюснику  $R_k$  заменить одним источником с напряжением  $u_0$  и последовательно включенным сопротивлением  $R_0$  так, чтобы режим работы  $R_k$  не изменился (рис. 2.8б).

Если такая замена возможна, то  $i_k = u_0 / (R_0 + R_k)$ , а  $u_0$  и  $R_0$  образуют эквивалентный источник напряжения, который заменяет действие всей цепи по отношению к  $R_k$ .

Для доказательства сформулированной теоремы выполним следующие преобразования. Режим работы цепи не изменится, если в ветвь с сопротивлением  $R_k$  включить два одинаковых по величине источника напряжения противоположной полярности, как показано на рисунке 2.9а, где  $u_0' = u_0'' = u_0$ .

Будем определять  $i_k$  методом наложения, как сумму двух токов:  $i_k = i_{k1} + i_{k2}$ , где  $i_{k1}$  — ток, обусловленный действием всех источников цепи и источником (рис. 2.9б), а  $i_{k2}$  — ток, вызываемый действием только источника  $u_0''$  (рис. 2.9в).

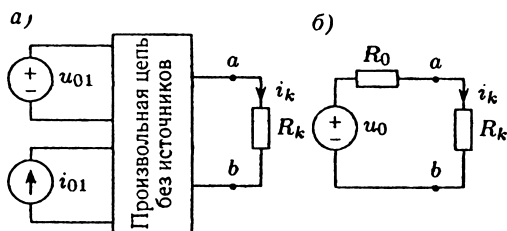


Рис. 2.8

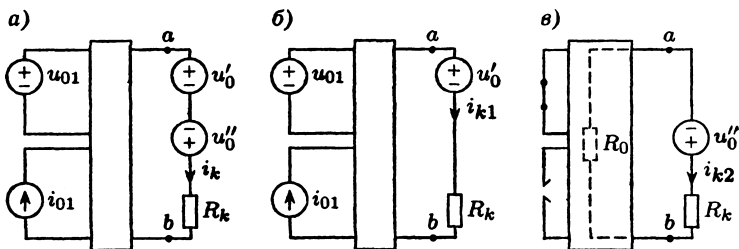


Рис. 2.9

Для цепи (рис. 2.9б) ток  $i_{k1} = (u_{ab} - u_0') / R_k$ . Выберем такое значение  $u_0'$ , чтобы ток  $i_{k1}$  равнялся нулю. Это возможно, если  $u_0' = u_{ab}$ . Но если  $i_{k1} = 0$ , то ветвь  $ab$  можно разомкнуть, и тогда очевидно, что  $u_0'$  должно равняться напряжению холостого хода между полюсами  $ab$ , т. е.  $u_0' = u_{XX}$ .

Тогда в цепи (рис. 2.9в) получим:

$$i_k = i_{k2} = u_0'' / (R_0 + R_k) = u_{XX} / (R_0 + R_k),$$

где  $R_0$  — сопротивление цепи относительно полюсов (узлов)  $ab$  при закороченных источниках напряжения и разомкнутых источниках тока.

Доказанную теорему часто называют теоремой Тевенена, или теоремой об эквивалентном источнике напряжения.

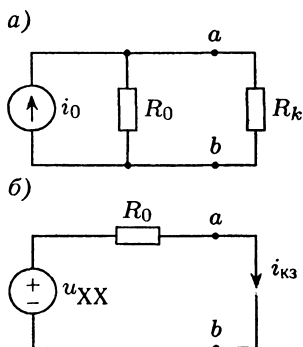


Рис. 2.10

Можно аналогичным образом доказать дуальную теорему об эквивалентном источнике тока (теорему Нортон). Однако проще воспользоваться уже доказанной теоремой.

Для этого преобразуем источник напряжения (рис. 2.8б) в изображенный на рисунке 2.10а источник тока  $i_0 = u_{XX} / R_0$ .

Тогда напряжение ветви  $U_k = u_k = i_0 / (G_0 + G_k)$ , где  $G_0 = 1 / R_0$ ,  $G_k = 1 / R_k$ . Для того чтобы величину источника тока можно было

определить по исходной цепи, раскроем его смысл.

Как следует из цепи рисунка 2.10б, ток, текущий через коротко-замкнутые полюсы  $ab$ , будет равен  $u_{XX} / R_0 = i_0 = i_{k3}$ .

Итак, окончательно имеем

$$u_k = i_{k3} / (G_0 + G_k).$$

Доказанные теоремы целесообразно применять для расчетных целей лишь в том случае, когда требуется определить только один ток в какой-либо ветви. В этом слу-

чае определение напряжения холостого хода или тока короткого замыкания осуществляется обычно в более простой, чем исходная, цепи.

## 2.4. ТИПОВЫЕ ПРИМЕРЫ

**Пример 1.** Методом наложения определить токи всех ветвей цепи на рисунке 2.11а при  $R_1 = R_2 = R_4 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 0,5 \text{ Ом}$ ,  $u_0 = 6 \text{ В}$ ,  $i_0 = 5 \text{ А}$ .

Исключим ИТ  $i_0$  из схемы на рисунке 2.11а, эквивалентно заменяя его ХХ, поскольку  $i_0$  полагаем равным нулю. В результате формируется схема (рис. 2.11б) с токами:

$$i'_5 = i'_2 = \frac{u_0}{R_2 + \frac{R_1(R_3 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4}} = 3,75 \text{ А};$$

$$i'_1 = i'_5 \cdot \frac{(R_3 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4} = 2,25 \text{ А};$$

$$i'_3 = i'_2 = i'_5 - i'_1 = 1,5 \text{ А}.$$

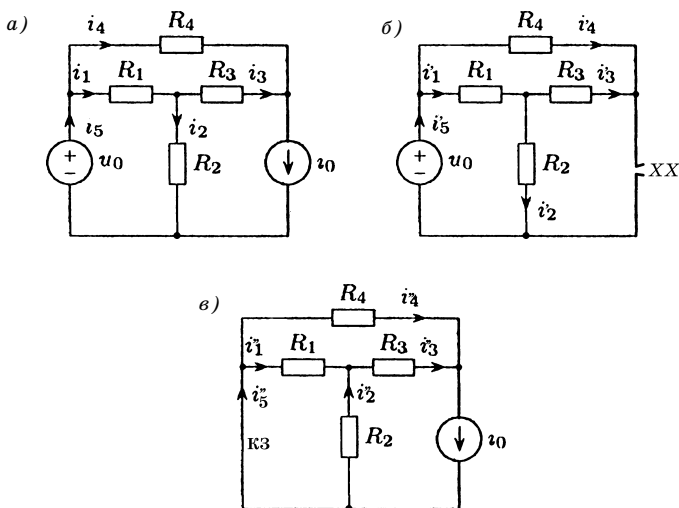


Рис. 2.11

Исключим ИН  $u_0$  из схемы рисунка 2.11а, эквивалентно заменяя его КЗ, поскольку полагаем  $u_0 = 0$ . Полученная схема показана на рисунке 2.11в.

Токи в данной цепи находим по формулам:

$$i_3'' = \frac{i_0 \cdot R_4}{R_4 + R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = 2,5 \text{ A};$$

$$i_4'' = i_0 - i_3'' = 2,5 \text{ A};$$

$$i_1'' = i_3'' \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 1,25 \text{ A};$$

$$i_5'' = i_4'' + i_1'' = 3,75 \text{ A};$$

$$i_2'' = i_0 - i_5'' = 1,25 \text{ A}.$$

Для нахождения токов исходной схемы (рис. 2.11а) надо сравнить принятые в ней положительные направления искомых токов с направлениями их составляющих в схемах рисунка 2.11б, в. В результате получим

$$i_1 = i_1' + i_1'' = 3,5 \text{ A};$$

$$i_2 = i_2' - i_2'' = 2,5 \text{ A};$$

$$i_3 = -i_3' + i_3'' = 1 \text{ A};$$

$$i_4 = i_4' + i_4'' = 4 \text{ A};$$

$$i_5 = i_5' + i_5'' = 7,5 \text{ A}.$$

**Пример 2.** Методом узловых напряжений определить токи всех ветвей цепи на рисунке 2.12 при  $R_1 = R_2 = R_4 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 0,5 \text{ Ом}$ ,  $u_0 = 6 \text{ В}$ ,  $i_0 = 5 \text{ А}$ .

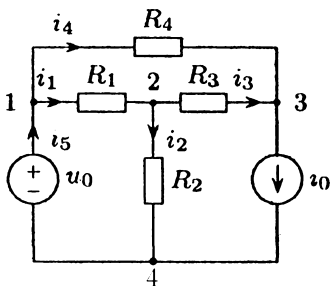


Рис. 2.12

Цепь содержит 4 узла и один непробуемый источник напряжения. За базисный примем узел, к которому этот источник подключен, и присвоим ему четвертый номер. Тогда напряжение первого узла будет  $u_1^y = u_0 = 6 \text{ В}$  и первое уравнение в системе из трех уравнений формировать не нужно. Уравнения для второго и третьего узлов:

$$G_{21} u_1^y + G_{22} u_2^y + G_{23} u_3^y = i_2^y;$$

$$G_{31} u_1^y + G_{32} u_2^y + G_{33} u_3^y = i_3^y.$$

Собственные и взаимные проводимости узлов записываются как

$$G_{22} = 1 / R_1 + 1 / R_2 + 1 / R_3 = 4 \text{ См};$$

$$G_{33} = 1 / R_3 + 1 / R_4 = 3 \text{ См};$$

$$G_{21} = -1 / R_1 = -1 \text{ См};$$

$$G_{23} = G_{32} = -1 / R_3 = -2 \text{ См};$$

$$G_{31} = -1 / R_4 = -1 \text{ См}.$$

Правые части уравнений будут следующими:

$$i_2^y = 0 \text{ А}, \quad i_3^y = -i_0 = -5 \text{ А}.$$

Система уравнений с учетом переноса в правую часть известных первых слагаемых преобразуется к виду

$$\begin{cases} 4u_2^y - 2u_3^y = 6; \\ -2u_2^y + 3u_3^y = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим:  $u_2^y = 2,5 \text{ В}$ ,  $u_3^y = 2 \text{ В}$ . Тогда токи ветвей будут:

$$i_1 = \frac{u_1^y - u_2^y}{R_1} = 3,5 \text{ А};$$

$$i_2 = \frac{u_2^y}{R_2} = 2,5 \text{ А};$$

$$i_3 = \frac{u_2^y - u_3^y}{R_3} = 1 \text{ А};$$

$$i_4 = \frac{u_1^y - u_3^y}{R_4} = 4 \text{ А};$$

$$i_5 = i_1 + i_4 = 3,5 + 4 = 7,5 \text{ А}.$$

При анализе этой цепи по уравнениям Кирхгофа потребовалось бы составить и решить систему из 5 уравнений вместо двух, полученных методом узловых напряжений.

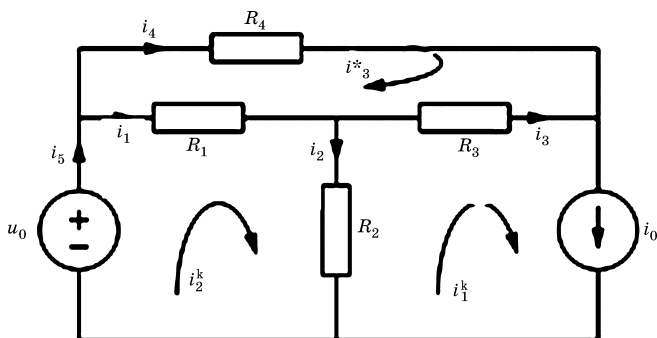


Рис. 2.13

**Пример 3.** Методом контурных токов определить токи ветвей цепи, изображенной на рисунке 2.13, при  $R_1 = R_2 = R_4 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 0,5 \text{ Ом}$ ,  $u_0 = 6 \text{ В}$ ,  $i_0 = 5 \text{ А}$ .

В цепи есть непреобразуемый источник тока. Выбираем контурные токи, чтобы через источник тока проходил лишь один контурный ток  $i_1^k$ , который будет равен току источника  $i_1^k = i_0 = 5 \text{ А}$ .

В результате формируем уравнения только для второго и третьего контуров:

$$\begin{aligned} R_{21}i_1^k + R_{22}i_2^k + R_{23}i_3^k &= u_2^k; \\ R_{31}i_1^k + R_{32}i_2^k + R_{33}i_3^k &= u_3^k, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_{22} &= R_1 + R_2 = 2 \text{ Ом}; \\ R_{33} &= R_1 + R_3 + R_4 = 2,5 \text{ Ом}; \\ R_{21} &= -R_2 = -1 \text{ Ом}; \\ R_{23} &= R_{32} = -R_1 = -1 \text{ Ом}; \\ R_{31} &= -R_3 = -0,5 \text{ Ом}; \\ u_2^k &= u_0 = 6 \text{ В}; \\ u_3^k &= 0 \text{ В}. \end{aligned}$$

Система уравнений с числовыми коэффициентами имеет вид

$$\begin{aligned} -5 + 2i_2^k - i_3^k &= 6; \\ -2,5 - i_2^k + 2,5i_3^k &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, находим  $i_2^k = 7,5 \text{ A}$ ;  
 $i_3^k = 4 \text{ A}$ , тогда

$$i_1 = i_2^k - i_3^k = 3,5 \text{ A};$$

$$i_2 = i_2^k - i_1^k = 2,5 \text{ A};$$

$$i_3 = i_1^k - i_3^k = 1 \text{ A};$$

$$i_4 = i_3^k = 4 \text{ A};$$

$$i_5 = i_2^k = 7,5 \text{ A}.$$

**Пример 4.** На основе теоремы об эквивалентном источнике напряжения найти ток  $i_3$  в цепи, изображенной на рисунке 2.14а, если  $R_1 = R_2 = R_4 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 0,5 \text{ Ом}$ ,  $u_0 = 6 \text{ В}$ ,  $i_0 = 5 \text{ А}$ .

Для определения  $u_{XX}$  размыкаем ветвь с сопротивлением  $R_3$ . В результате образуется другая, более простая цепь (рис. 2.14б).

Для этой цепи согласно второму закону Кирхгофа запишем  $u_{XX} - i_b R_4 + i_a R_1 = 0$ , причем

$$i_b = i_0 = 5 \text{ А}, \quad i_a = \frac{u_0}{R_1 + R_2} = 3 \text{ А}.$$

Тогда напряжение холостого хода равно  $u_{XX} = i_b R_4 - i_a R_1 = 2 \text{ В}$ .

Находим  $R_0$ , разомкнув в цепи изображенный на рис. 2.14а источник тока  $i_0$  и замкнув накоротко источник напряжения  $u_0$ :

$$R_0 = R_4 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1,5 \text{ Ом}.$$

В результате ток  $i_3$  исходной цепи на рисунке 2.14а определяется по теореме об эквивалентном источнике напряжения:

$$i_3 = \frac{u_{XX}}{R_0 + R_3} = \frac{2}{2} = 1 \text{ А}.$$

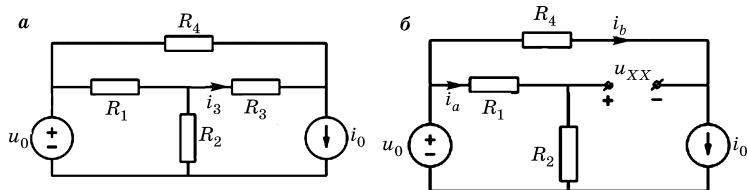


Рис. 2.14

# 3 АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ ПРИ ПОСТОЯННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

## 3.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

### 3.1.1. УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Цепь, содержащая хотя бы один накопитель, т. е.  $L$ - или  $C$ -элемент, называется динамической цепью.

**Пример 1.** Уравнения цепи, схема которой приведена на рисунке 3.1а, могут быть записаны по-разному.

Вариант 1:

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = u_0(t),$$

т. е.  $u_R + u_C = u_0$ .

Вариант 2:

$$Ri(t) + u_C(t) = u_0(t), \quad i(t) = Cu_C'(t).$$

Вариант 3:

$$RCu_C'(t) + u_C(t) = u_0(t),$$

при этом характеристический полином (ХП)  $RCp + 1 = 0$ , откуда  $p_1 = -1 / (RC)$ .

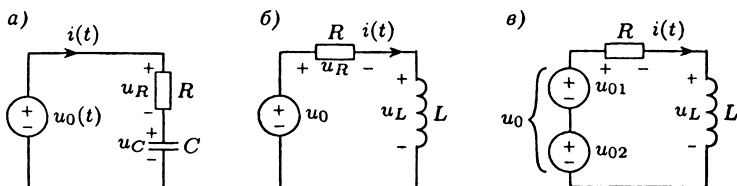


Рис. 3.1



Вариант 4: получим дифференцированием уравнений варианта 1:

$$Ri'(t) + i(t) / C = u'_0(t),$$

при этом ХП  $Rp + 1 / C = 0$  и его корень  $p_1 = -1 / (RC)$  не изменился.

В общем случае  $RLC$ -цепи можно описать системами дифференциальных, интегральных, интегродифференциальных и алгебраических уравнений. При этом характеристическое уравнение (характеристический полином) системы является единственным для любой из переменных системы. Коэффициенты уравнений таких цепей с сосредоточенными параметрами постоянны, т. е. стационарны. Дифференциальное уравнение, связывающее реакцию цепи  $f_2(t)$  (т. е. выходную переменную) с воздействием  $f_1(t)$  (т. е. входным сигналом), можно записать следующим образом (если исключить из системы остальные переменные):

$$\begin{aligned} a_n f_2^{(n)} + \dots + a_1 f_2'(t) + a_0 f_2(t) = \\ = b_n f_1^{(n)} + \dots + b_1 f_1'(t) + b_0 f_1(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $a_n, \dots, a_0, b_n, \dots, b_0$  — коэффициенты; при этом для решения (3.1) должно быть известно  $n$  начальных условий:  $f_2(0), f_2'(0), \dots, f_2^{(n-1)}(0)$ .

### 3.1.2. ПЕРВОЕ СВОЙСТВО ЛИНЕЙНОСТИ УРАВНЕНИЙ ЦЕПИ — ПРИНЦИП ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ (ОДНОРОДНОСТИ)

Если воздействие изменить в  $k$  раз, реакция изменится во столько же раз. Обоснуем свойство на примере цепи (рис. 3.1б), дифференциальное уравнение которой

$$Li'(t) + Ri(t) = u_0(t). \quad (3.2)$$

Умножая левую и правую части (3.2) на постоянный коэффициент  $k$  и учитывая коммутативность (переместительность) операций дифференцирования и умножения на постоянный коэффициент, получим:

$$L(ki)' + R(ki) = (ku_0). \quad (3.3)$$

Уравнения (3.2) и (3.3) удовлетворяют общей математической форме

$$Lf'_2(t) + Rf_2(t) = f_1(t), \quad (3.4)$$

т. е. если  $f_1 = u_0$ , то  $f_2 = i$ ; если же  $f_1 = ku_0$ , то  $f_2 = ki$ .

Свойство справедливо:

- в общем случае (3.1);
- только при единственном в цепи воздействии;
- только при нулевых начальных условиях.

### 3.1.3. ВТОРОЕ СВОЙСТВО ЛИНЕЙНОСТИ — ПРИНЦИП ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ (СТАЦИОНАРНОСТИ)

Если новое воздействие является производной или интегралом от предыдущего, то новая реакция является производной или интегралом от предыдущей реакции. Действительно, продифференцировав (3.2), получим с учетом коммутативности операций дифференцирования и умножения на постоянный коэффициент: что также удовлетворяет общей форме (3.4), т. е. при воздействии  $f_1 = u_0'$  реакцией будет  $f_2 = i'$ .

Свойство справедливо:

1. В общем случае (3.1).
2. Только при единственном в цепи воздействии.
3. Только при нулевых начальных условиях.

4. Только при постоянных (стационарных) коэффициентах  $a_k$  и  $b_k$  уравнения (3.1), поскольку в случае переменных коэффициентов коммутативность операций дифференцирования и умножения на нестационарный коэффициент не справедлива, т. е.  $[a(t)f(t)]' \neq a(t)f'(t)$ .

**Пример 2.** Известна реакция  $f_{2I}$  при воздействии  $f_{1I} = 1$  при  $t > 0$ , причем  $f_{1I} = 0$  при  $t < 0$ . Найти реакцию  $f_{2II}$ , если  $f_{1II} = 5t^2$  при  $t > 0$  и  $f_{1II} = 0$  при  $t < 0$ .

Поскольку в любой момент времени  $t$  имеем

$$f_{1II} = 10 \int_{-\infty}^t \left( \int_{-\infty}^t f_{1I} dt \right) dt,$$

то и  $f_{2II}$  является двойным интегралом от  $f_{2I}$ , увеличенным в  $k = 10$  раз.

### 3.1.4. ТРЕТЬЕ СВОЙСТВО ЛИНЕЙНОСТИ — ПРИНЦИП НАЛОЖЕНИЯ (СУПЕРПОЗИЦИИ, АДДИТИВНОСТИ)

При нескольких воздействиях реакция равна сумме элементарных реакций от каждого из воздействий в отдельности. Обоснуем свойство на примере цепи (рис. 3.1б).

Если при  $u_0 = u_{01}$  реакция  $i = i_1$ , а при  $u_0 = u_{02}$  реакция  $i = i_2$ , то соответствующие уравнения цепи имеют вид

$$\begin{aligned} Li_1' + Ri_1 &= u_{01}; \\ Li_2' + Ri_2 &= u_{02}. \end{aligned}$$

Просуммировав эти уравнения с учетом переместительности операций суммирования, дифференцирования и умножения на постоянный коэффициент, получим

$$L(i_1 + i_2)' + R(i_1 + i_2) = (u_{01} + u_{02}),$$

что также удовлетворяет общей форме (3.4), т. е. при воздействии  $f_1 = u_0 = u_{01} + u_{02}$  реакцией будет  $f_2 = i = i_1 + i_2$ .

Свойство справедливо:

- в общем случае, если уравнение (3.1) при наличии, например, еще одного воздействия  $f_3(t)$  дополнить в правой части слагаемыми вида  $d_k f_3^k + \dots + d_1 f_3' + d_0 f_3$ ;
- только при нулевых начальных условиях.

На свойстве базируется расчет цепей методом наложения, в котором в промежуточных расчетах (в данном случае — при расчете элементарных реакций от каждого из источников в отдельности) рекомендуется изменять некоторые из исходных направлений реакций (токов, напряжений) таким образом, чтобы можно было использовать со знаком «+» простейшие формулы практического анализа: закон Ома для входного сопротивления, формулы делителей напряжений и токов. Однако при изменении исходного направления элементарные реакции суммируются алгебраически.

*Примечание.* Свойство позволяет воздействия произвольной формы приближенно представлять суммой воздействий простой стандартной формы, на-

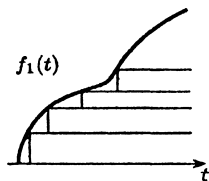


Рис. 3.2

пример, вида односторонних постоянных функций (показаны на рис. 3.2 тонкими линиями).

**Вывод.** Целесообразно изучать реакции цепи при воздействии единичного постоянного уровня.

### 3.2. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КЛАССИЧЕСКОГО МЕТОДА АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

#### 3.2.1. ПОНЯТИЕ О КОММУТАЦИИ И ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССАХ

Коммутацией называют какое-либо переключение в цепи с помощью идеального ключа  $K$ , условное обозначение которого приведено на рисунке 3.3а. *Идеальный ключ* — это элемент, обладающий следующими свойствами: в замкнутом состоянии он эквивалентен короткозамкнутому участку ( $KЗ$ ), а в разомкнутом — обрыву, т. е. холостому ходу ( $ХХ$ ); переключение осуществляется мгновенно; рядом с обозначением ключа указывают момент переключения: как правило, это  $t = 0$  (рис. 3.3а).

Обычно в цепи до коммутации (при  $t < 0$ ) и через некоторое время после нее (при  $t \geq 0$ ) наблюдаются установившиеся режимы. Режим в цепи в интервале времени, следующем за коммутацией (при  $t > 0$ ), до наступления установившегося называют переходным режимом, а процессы при этом — переходными процессами.

Пример подключения некоторой цепи  $\Pi$  к источнику постоянного напряжения  $u_0(t) = U_0 = \text{const}$  приведен на рисунке 3.3а, там же показан график изменения напряжения  $u(t)$  на входе цепи  $\Pi$ .

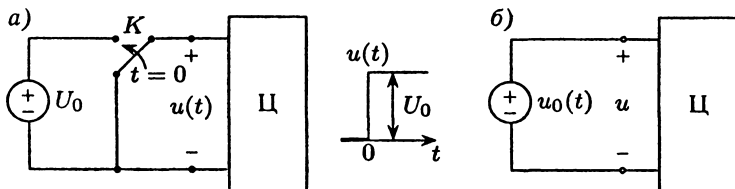


Рис. 3.3

Но коммутация — это не только переключение: если воздействие или какая-либо его производная изменилась скачком (т. е. описываются функцией с разрывом первого рода), тоже говорят о коммутации. Так, если в схеме (рис. 3.3б) закон изменения напряжения источника  $u_0(t)$  определяется графиком, приведенным на рисунке 3.3а, т. е.  $u_0(t) = u(t)$ , то процессы в одной и той же цепи Ц будут одинаковы в обоих случаях рисунка 3.3а, б.

### 3.2.2. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СВОБОДНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЦЕПИ И СВОБОДНЫХ РЕЖИМОВ В ЦЕПИ

Как указано ранее, процессы в цепи можно описать неоднородным дифференциальным уравнением (3.1). Во многих практически важных случаях математика рекомендует искать решение (3.1) в виде суммы двух составляющих:

$$f_2(t) = f_{2\text{вын}} + f_{2\text{св}}(t), \quad (3.5)$$

где  $f_{2\text{св}}$  и  $f_{2\text{вын}}$  — соответственно, свободная и вынужденная составляющие решения уравнений цепи.

Свободная составляющая  $f_{2\text{св}}(t)$  — это общее решение однородного уравнения

$$a_n f_2^{(n)}(t) + \dots + a_1 f_2'(t) + a_0 f_2(t) = 0, \quad (3.6)$$

соответствующего неоднородному дифференциальному уравнению (3.1).

Свободный режим (процесс) в цепи — это режим (процесс) в цепи без источников, т. е. в цепи, «свободной от источников». Следовательно, свободный режим описывается тем же однородным уравнением (3.6), так как в (3.1)  $f_1(t) = 0$ .

Таким образом, математическая форма описания свободного процесса и свободной составляющей решения одинакова и, как известно, обычно имеет вид

$$f_{2\text{св}}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, \quad (3.7)$$

где  $A_k$  — постоянные интегрирования;  $p_k$  — корни характеристического полинома (характеристического уравнения) цепи, который получают на основании (3.6):

$$a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (3.8)$$

*Утверждение.* Корни ХП цепи располагаются строго в левой полуплоскости комплексной плоскости, т. е.

$$\operatorname{Re} p_k < 0. \quad (3.9)$$

*Обоснование.* Свободная составляющая решения и свободный процесс в цепи описываются математически одинаково — выражениями (3.6), (3.7); но свободный процесс в цепи без источников происходит за счет начальной энергии в накопителях и с течением времени затухает до нуля из-за необратимых потерь энергии в  $R$ -элементах, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_{2\text{св}}(t) \rightarrow 0, \quad (3.10)$$

что может быть лишь при отрицательных показателях экспонент в (3.7), т. е. при выполнении (3.9).

#### *Примечания.*

1. Если в цепи или динамической системе любой физической природы выполняется условие (3.9) или (3.10), то такая система называется устойчивой.

2. Формула (3.7) записана для случая простых (некратных) корней ХП (3.8); если же, например,  $p_1$  является трехкратным корнем (3.8), то (3.7) имеет вид

$$f_{2\text{св}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 t e^{p_1 t} + A_3 t^2 e^{p_1 t} + \sum_{k=4}^n A_k e^{p_k t}. \quad (3.11)$$

### 3.2.3. ВЫНУЖДЕННАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ

Вынужденная составляющая  $f_{2\text{вын}}(t)$  — это частное решение неоднородного уравнения (3.1). Как известно, во многих практически важных случаях ее рекомендуется искать в математической форме воздействия.

Так, если воздействие  $f_1(t) = A e^{p_1 t}$ , то вынужденную составляющую записывают в виде  $f_{2\text{вын}}(t) = a e^{p_1 t}$ , если

$f_1(t) = A \cos \omega_0 t$ , то  $f_{2\text{вын}}(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$ ; если  $f_1(t) = At^2$ , то  $f_{2\text{вын}}(t) = at^2 + bt + d$  (тоже полином второго порядка).

Выражение  $f_{2\text{вын}}(t)$  с неизвестными коэффициентами  $a, b, d$  «математика рекомендует» подставить в дифференциальное уравнение (3.1), после чего, приравнявая левые и правые части (3.1), находят  $a, b, d$ .

#### Примечания.

1. Вынужденный режим в цепи — это режим после практического затухания свободной составляющей, т. е. после практического затухания переходного процесса, когда решение уравнений цепи фактически определяется только вынужденной составляющей.

2. Термин «вынужденный» объясняется тем, что  $f_{2\text{вын}}(t)$  как бы «вынуждена» иметь математическую форму воздействия и им обусловлена.

3. При постоянных и периодических воздействиях вынужденный режим также называют установившимся, а  $f_{2\text{вын}}(t)$  — установившейся составляющей.

### 3.2.4. ЗАКОНЫ КОММУТАЦИИ, НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ И ПОРЯДОК ЦЕПИ

Для отыскания  $n$  постоянных интегрирования в (3.7) необходимо знать  $n$  начальных условий сразу же после коммутации при  $t = 0+$ . Начальные условия находят на основании законов коммутации, т. е. принципов непрерывности:

$$u_C(0+) = u_C(0-), \quad i_L(0+) = i_L(0-), \quad (3.12)$$

причем начальные значения  $u_C(0+)$  и  $i_L(0+)$  называют независимыми начальными условиями, поскольку на основании (3.12) они не зависят от места коммутации и величины воздействия в момент  $t = 0+$ , а определяются лишь значениями  $u_C(0-)$ ,  $i_L(0-)$  в последний момент перед коммутацией. Значения остальных переменных  $u_R(0+)$ ,  $i_R(0+)$ ,  $u_L(0+)$ ,  $i_C(0+)$  называют зависимыми начальными условиями; они в общем случае не равны значениям этих переменных при  $t = 0-$ .

Порядок цепи  $n$  — это максимальная степень дифференциального уравнения цепи (3.1). Порядок цепи, также определяющий количество постоянных интегрирования и требуемое для их отыскания число начальных условий, во многих случаях равен суммарному числу накопителей:  $n = n_C + n_L$ , поскольку каждому накопителю соответствует простейшее дифференциальное уравнение первого порядка и одно независимое начальное условие.

Порядок цепи понижается, если в цепи имеются контуры, состоящие из  $C$ -элементов, или узлы, у которых все присоединенные к ним ветви содержат  $L$ -элементы. Так, цепи, изображенные на рисунке 3.4, имеют второй порядок, поскольку напряжение одной из емкостей (рис. 3.4а) определяется алгебраической суммой напряжений двух других  $C$ -элементов, а в цепи на рисунке 3.4б значение тока одной из индуктивностей  $i_{L1}(0+) = i_{L2}(0+) + i_{L3}(0+)$  является зависимым. В случае « $L$ -контуров» и « $C$ -узлов» порядок цепи обычно также понижается.

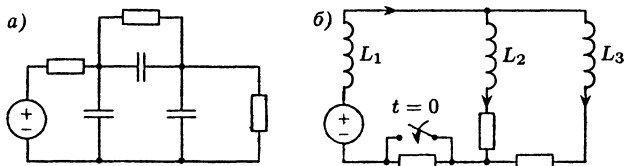


Рис. 3.4

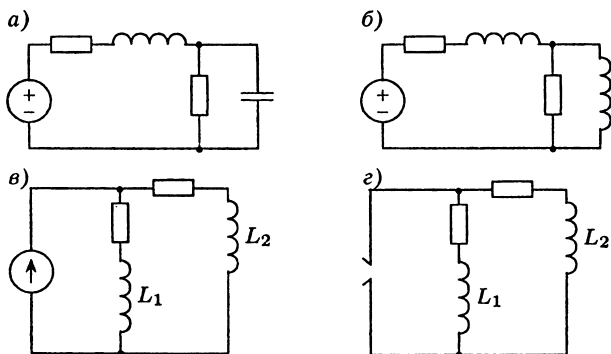


Рис. 3.5



Цепи на рисунке 3.5а, б, содержащие по 2 накопителя, имеют второй порядок, в то время как на рисунке 3.5в изображена цепь первого порядка, поскольку в свободном режиме (рис. 3.5г)  $L$ -элементы цепи соединены последовательно и могут быть заменены эквивалентной индуктивностью  $L_3 = L_1 + L_2$ .

**Вывод.** Порядок цепи целесообразно определять по схеме свободного режима.

### 3.3. АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В РАЗВЕТВЛЕННЫХ ЦЕПЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

#### 3.3.1. РАСЧЕТ СВОБОДНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

В цепи первого порядка свободная составляющая имеет вид

$$f_{2\text{св}} = Ae^{p_1 t} = Ae^{-t/\tau}, \quad (3.13)$$

где постоянная времени  $\tau = L/R_3$ , или  $\tau = CR_3$ , причем  $R_3$  — это эквивалентное сопротивление цепи в свободном режиме относительно выводов (узлов) единственного в цепи накопителя.

Действительно, свободная составляющая решения уравнений цепи и описание процессов в свободном режиме имеют, согласно п. 3.2.2, одну и ту же математическую форму (3.13).

Поэтому в случае цепи первого порядка, например с  $L$ -элементом (рис. 3.6а), перейдем к рассмотрению свободного режима (рис. 3.6б). Эквивалентная схема цепи в этом случае имеет простейший вид рисунка 3.6в и описывается уравнением  $Li'(t) + R_3 i(t) = 0$ , которому соответствует ха-

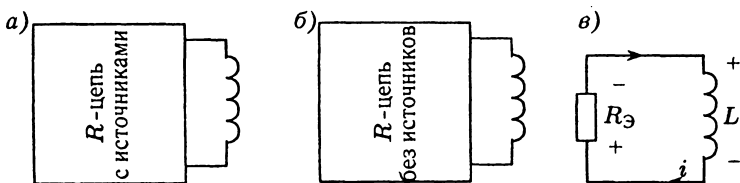


Рис. 3.6

рактеристический полином  $Lp + R_3 = 0$ , откуда  $p_1 = -L/R_3$ , следовательно, согласно (3.7),

$$f_{2CB} = Ae^{p_1 t} = Ae^{-R_3 t/L} = Ae^{-t/\tau},$$

что соответствует (3.13).

*Примечания.*

1. Дуально обосновывается, что в цепи первого порядка с  $C$ -элементом

$$\tau = C/G_3 = CR_3.$$

2. Можно показать, что размерность  $[t] = [t] = c$ .

3. Свободная составляющая имеет одну и ту же математическую форму (3.13) для любой из реакций цепи, поскольку линейные операции с экспонентой (например,  $u_{LCB} = Li'_{LCB}$  в схеме рис. 3.6в) изменяют лишь величину постоянной интегрирования  $A$ .

### 3.3.2. РАСЧЕТ ВЫНУЖДЕННОГО (УСТАНОВИВШЕГОСЯ) РЕЖИМА

При постоянных воздействиях в цепи этот расчет проводят по эквивалентной схеме цепи, в которой  $L$ -элементы заменяют КЗ,  $C$ -элементы — ХХ.

Действительно, согласно п. 3.2.1, вынужденная составляющая решения уравнений цепи должна иметь математическую форму воздействия, т. е. должна быть постоянной. Таким образом,

$$u_{LВЫН} = Li'_{LВЫН} = 0, \quad i_{CВЫН} = u'_{CВЫН} = 0,$$

если  $i_{LВЫН} = \text{const}$ ,  $u_{CВЫН} = \text{const}$ . Отсюда по теореме замещения переходим к указанной выше эквивалентной схеме.

*Примечание.* Условное обозначение ( $t \rightarrow \infty$ ) объясняется полным затуханием свободной составляющей (3.13) при  $t \rightarrow \infty$ , когда в цепи устанавливаются постоянные токи и напряжения; отсюда и название вынужденного режима в этом случае — установившийся режим.

### 3.3.3. РАСЧЕТ НЕЗАВИСИМЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Непосредственно перед коммутацией при  $t < 0$  (точнее, при  $t = 0-$ ) расчет производится при постоянных воздействиях по эквивалентной схеме, описанной в п. 3.3.2. Таким образом, если в условии задачи нет оговорок, режим в цепи при  $t < 0$  считают установившимся и, рассчитав эквивалентную  $R$ -цепь, находят все  $i_L(0-)$  и  $u_C(0-)$ , т. е. все независимые начальные условия.

### 3.3.4. РАСЧЕТ ЗАВИСИМЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

В первый момент после коммутации ( $t = 0+$ ) расчет производят по эквивалентной схеме цепи, в которой все  $C$ -элементы заменяют источниками напряжения значения  $u_C(0-)$ ,  $L$ -элементы — источниками тока  $i_L(0-)$ .

Действительно, на основании законов коммутации известны напряжение емкости  $u_C(0+) = u_C(0-)$  и ток индуктивности  $i_L(0+) = i_L(0-)$ , что позволяет на основании теоремы замещения перейти к описанной ранее эквивалентной  $R$ -цепи с замещающими накопителями источников.

*Следствие.* При нулевых независимых начальных условиях  $u_C(0-) = 0$ ,  $i_L(0-) = 0$  в эквивалентной схеме при  $t = 0+$  заменяют  $C$ -элементы на КЗ,  $L$ -элементы — на ХХ.

### 3.3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ, ЗАПИСЬ РЕШЕНИЯ И ПОСТРОЕНИЕ ЕГО ГРАФИКА

Согласно (3.5), решение уравнений цепи первого порядка имеет вид

$$f_2(t) = f_{2\text{вын}} + f_{2\text{св}}(t) = f_{2\text{вын}} + Ae^{-t/\tau}.$$

Постоянную интегрирования  $A$  определяют, зная  $f_2(0+)$  на основании п. 3.3.4:  $f_2(0+) = f_{2\text{вын}} + A$ , откуда

$$f_2(t) = f_{2\text{вын}} + [f_2(0+) - f_{2\text{вын}}] e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.14)$$

Для построения временной диаграммы процесса (рис. 3.7), т. е. графика выражения (3.14), необходимо

знать характерные значения экспоненты:  $\exp(-\frac{t}{\tau}) = 1$  при

$t = 0$ ;  $e^{-1} \approx 2,7^{-1} \approx 0,37$  при  $t = \tau$ ;  $e^{-2} \approx 0,14 \approx 1/7$  при  $t = 2\tau$ ;  $e^{-3} \approx 0,05 = 1/20$  при  $t = 3\tau$ ;  $e^{-\infty} = 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , а также свойство — любая подкасательная к экспоненте равна постоянной времени  $\tau$  (касательные указаны на рис. 3.7 штрих-пунктиром, подкасательные — отрезками величины  $\tau$ ).

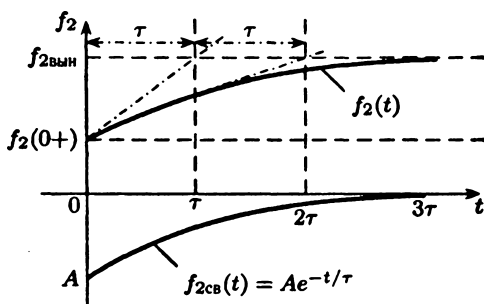


Рис. 3.7

Хотя экспонента затухает до нуля при  $t \rightarrow \infty$ , однако практическая точность ее построения обычно не превышает 5%, поэтому практической длительностью переходного процесса в цепях первого порядка считают обычно временной интервал в 3 постоянных времени:  $t \cong 3\tau$ . При построении временной диаграммы переходного процесса (рис. 3.7) составляющую  $f_{2св}(t)$  обычно не показывают: график процесса строят, соединяя экспонентой начальное значение  $f_2(0+)$  с конечным значением  $f_{2вын} = f_{2вын}(\infty)$  и указывая характерные точки экспоненты.

**Вывод.** Описанный в параграфе 3.3 анализ переходных процессов практически сводится к расчету эквивалентных резистивных схем замещения цепи в различных режимах; составлять, преобразовывать и решать систему дифференциальных уравнений цепи не требуется.

### 3.4. АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ПО УРАВНЕНИЯМ СОСТОЯНИЯ

#### 3.4.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ

*Системой уравнений состояния* обычно называют эквивалентную запись дифференциальных уравнений цепи  $n$ -го порядка в виде уравнений в нормальной форме Коши, т. е. в форме системы  $n$  уравнений (каждое — первого порядка) следующего вида:

$$[f'_{\text{пс}}(t)] = [A][f_{\text{пс}}(t)] + [B][f_1(t)], \quad (3.15)$$

где  $[f_{\text{пс}}]$  — матрица переменных состояния, т. е. некоторых переменных цепи или их линейных комбинаций;  $[f_1]$  — матрица воздействий;  $[A]$ ,  $[B]$  — матрицы коэффициентов.

Если искомые реакции не являются переменными состояния, используют систему алгебраических уравнений связи реакций с переменными состояния и воздействиями

$$[f(t)] = [M][f_{\text{пс}}(t)] + [N][f_1(t)], \quad (3.16)$$

где  $[M]$ ,  $[N]$  — матрицы коэффициентов.

#### 3.4.2. МЕТОДИКА СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЙ

Переменными состояния удобно выбрать напряжения  $C$ -элементов и токи  $L$ -элементов, т. е. непрерывные переменные цепи. Таким образом, в соответствии с (3.15) необходимо составить систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} u'_{C_k}(t) = F_k(\dots u_{C_k} \dots i_{L_j} \dots u_{0m} \dots i_{0n} \dots); \\ i'_{L_j}(t) = F_j(\dots u_{C_k} \dots i_{L_j} \dots u_{0m} \dots i_{0n} \dots), \end{cases} \quad (3.17)$$

где  $k, j, m, n$  — номера соответственно  $C$ -элементов,  $L$ -элементов, источников напряжения и тока;  $F$  — линейные функционалы.

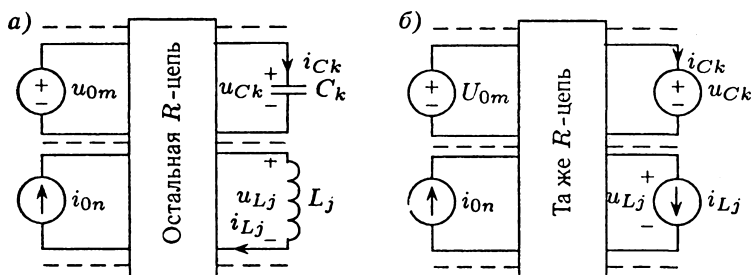


Рис. 3.8

Для получения (3.17) используют уравнения вольт-амперных характеристик накопителей:

$$u'_C = \frac{i_C}{C}, \quad i'_L = \frac{u_L}{L}, \quad (3.18)$$

причем вначале формируют вспомогательную систему

$$\begin{cases} i_{C_k}(t) = \Phi_k(\dots u_{C_k} \dots i_{L_j} \dots u_{0m} \dots i_{0n} \dots); \\ u_{L_j}(t) = \Phi_j(\dots u_{C_k} \dots i_{L_j} \dots u_{0m} \dots i_{0n} \dots), \end{cases} \quad (3.19)$$

где  $\Phi$  — линейные функционалы, а затем, подставляя (3.19) в (3.18), записывают уравнения состояния (3.17).

Наиболее просто получить (3.19) методом вспомогательных замещающих источников, когда в исходной схеме рисунка 3.8а замещают все  $C$ -элементы источниками напряжения величины  $u_C(t)$ , а все  $L$ -элементы — источниками тока  $i_L(t)$  как показано на рисунке 3.8б. В составленной таким образом цепи, используя методы расчета  $R$ -цепей, находят токи  $C$ -элементов и напряжения  $L$ -элементов как функции независимых источников  $u_{0m}$ ,  $i_{0n}$  и вспомогательных источников  $u_{C_k}$ ,  $i_{L_j}$ , т. е. формируют систему (3.19).

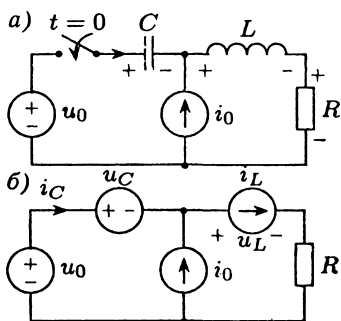


Рис. 3.9

**Пример 3.** Составить уравнения состояния цепи рисунка

ка 3.9а для  $t > 0$  при  $u_0 = 2$  В;  $i_0 = 10$  А;  $R = 2$  Ом;  $C = 2$  Ф;  $L = 2$  Гн.

По схеме со вспомогательными источниками  $u_C(t)$ ,  $i_L(t)$ , изображенной на рисунке 3.9б, несложно записать систему (3.19):

$$\begin{aligned} i_C &= i_L - i_0; \\ u_L &= -u_C + u_0 - Ri_L, \end{aligned}$$

и далее с учетом уравнений накопителей (3.18) — систему уравнений состояния (3.17) в упорядоченном виде

$$\begin{cases} u'_C(t) = 0 + \frac{1}{C}i_L(t) + 0 - \frac{1}{C}i_0; \\ i'_L(t) = -\frac{1}{L}u_C(t) - \frac{R}{L}i_L(t) + \frac{1}{L}u_0 + 0 \end{cases}$$

или в матричной форме (3.15)

$$\begin{bmatrix} u'_C(t) \\ i'_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ i_0 \end{bmatrix},$$

т. е. с учетом численных значений можно записать:

$$\begin{bmatrix} u'_C \\ i'_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

### 3.4.3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ

Аналитическое решение уравнений состояния наиболее просто осуществлять в последовательности, аналогичной изложенной в параграфе 3.3.

1. Находят свободную составляющую решения уравнений цепи, для чего в начале записывают характеристи-

ческий полином, используя известную из курса математики формулу

$$\text{ХП} = \det([A] - p[E]) = 0,$$

т. е. из элементов главной диагонали матрицы  $[A]$  вычитают  $p$  (здесь  $[E]$  — единичная матрица) и вычисляют определитель полученной таким образом матрицы. Найдя корни  $p_k$  характеристического полинома (ХП), записывают  $f_{\text{св}}(t)$  для любой из переменных состояния (ПС) в виде (3.7).

2. Определяют вынужденную (установившуюся) составляющую решения  $f_{\text{вын}}$  либо по эквивалентной схеме установившегося режима, описанной в п. 3.3.2, либо непосредственно по уравнениям состояния (3.15), учитывая, что при постоянных воздействиях  $f_1(t) = \text{const}$  вынужденная составляющая реакции тоже постоянна, т. е. производные в левой части системы (3.15) в вынужденном (установившемся) режиме равны нулю:

$$[0] = [A][f_{\text{вын}}] + [B][f_1]. \quad (3.20)$$

Решая (3.20), находят  $[f_{\text{вын}}] = -[A]^{-1}[B][f_1]$ , где  $[A]^{-1}$  — обратная к  $[A]$  матрица. В случае цепи второго порядка это простейшая система двух линейных алгебраических уравнений, которая, например, для уравнения примера 3 сразу дает  $i_{L\text{вын}} = 10$ ,  $u_{C\text{вын}} = 18$  В.

3. Расчет независимых начальных условий, т. е. всех значений  $u_C(0-)$  и  $i_L(0-)$ , осуществляют, как описано в п. 3.3.3. Поскольку  $u_C$ ,  $i_L$  являются переменными состояния, то по законам коммутации начальные значения переменных состояния известны:  $[f_{\text{пс}}(0+)] = [f_{\text{пс}}(0-)]$ .

4. В соответствии с замечанием к (3.1) в цепях высокого порядка необходимо найти начальные значения производных переменных состояния. Их определяют непосредственно по уравнениям состояния (3.15) при  $t = 0+$ :

$$\begin{cases} [f'_{\text{пс}}(0+)] = [A][f_{\text{пс}}(0+)] + [B][f'_1(0+)]; \\ [f''_{\text{пс}}(0+)] = [A][f'_{\text{пс}}(0+)] + [B][f''_1(0+)], \end{cases} \quad (3.21)$$



причем для получения второго и последующих уравнений в (3.21) вначале дифференцируют (3.15), а затем подставляют  $t = 0+$ , очевидно, что  $f_1'(0+) = 0$  в (3.21), если воздействие  $f_1(t) = \text{const}$ .

5. Записывают решения для соответствующих переменных состояния в виде

$$f_{\text{пс}}(t) = f_{\text{вын}} + f_{\text{св}}(t) = f_{\text{вын}} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots \quad (3.22)$$

и осуществляют дифференцирование (3.22)  $(n - 1)$  раз:

$$\begin{cases} f'_{\text{пс}}(t) = 0 + p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t} + \dots \\ \dots \end{cases}$$

Зная начальные значения переменной состояния и ее производных, отыскивают постоянные интегрирования  $A_k$ , решая систему, полученную при  $t = 0+$  из вышезаписанных уравнений:

$$\begin{cases} f_{\text{пс}}(0+) = f_{\text{вын}} + A_1 + A_2 + \dots; \\ f'_{\text{пс}}(0+) = 0 + p_1 A_1 + p_2 A_2 + \dots \end{cases}$$

6. Далее находят искомые реакции, не являющиеся переменными состояния, для чего используют уравнения связи (3.16), фактически записанные ранее при составлении уравнений состояния при анализе схемы с вспомогательными источниками, учитывая, однако, что значения  $u_C(t)$  и  $i_L(t)$  теперь уже найдены. Так, в примере 3 уравнениями связи являются первые два уравнения, если  $i_C$ ,  $u_L$  — искомые реакции; контроль осуществляют по формулам  $i_C = C u'_C$ ,  $u_L = L i'_L$ .

#### Примечания.

1. При наличии кратных корней характеристического уравнения  $p_{1,2}$  следует использовать запись типа (3.11).

2. В случае комплексных корней, например  $p_{1,2} = -a \pm j\omega$ , уравнение (3.22) справедливо, однако во многих случаях целесообразнее использовать иную форму записи свободной составляющей:

$$f_{\text{св}}(t) = A_1 e^{-\alpha t} \cos \omega t + A_2 e^{-\alpha t} \sin \omega t + \dots \quad (3.23)$$

### 3.5. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

#### 3.5.1. ПОНЯТИЕ О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ

В системе уравнений состояния

$$\left[ \frac{df_2(t)}{dt} \right] = [A][f_2(t)] + [B][f_1(t)], \quad (3.24)$$

где для простоты через  $[f_2(t)]$  обозначена матрица переменных состояния, переходят к малым конечным приращениям переменных на  $k$ -м шаге численного расчета:

$$\frac{[\Delta f_{2k}]}{\Delta t} = \frac{[f_{2k}] - [f_{2(k-1)}]}{\Delta t}. \quad (3.25)$$

С учетом (3.24), (3.25) можно записать матрицу переменных состояния на  $k$ -м шаге численного расчета следующим образом:

$$[f_{2k}] = [f_{2(k-1)}] + \Delta t[A][f_{2(k-1)}] + \Delta t[B][f_{1(k-1)}]. \quad (3.26)$$

*Примечания.*

1. Выражение (3.26) называют явной формой алгоритма Эйлера.

2. Чтобы погрешность численного решения системы (3.26) на вычислительных машинах была невелика, временной интервал (шаг)  $\Delta t$  должен быть достаточно малым, например, меньшим 0,2 от наименьшего характерного интервала переходного процесса — минимальной постоянной времени  $\tau_{\min} = 1/\alpha_{\max}$  или минимальной четверти периода синусоиды  $0,25T_{\min}$ , где  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  в соответствии с (3.23).

Для уменьшения накопления ошибки при численном решении уравнений состояния используют более сложные, чем (3.26), алгоритмы или вводят поправки. Так, одним из удачных вариантов считают так называемое билинейное преобразование уравнений (3.24), в котором, в отличие от алгоритма (3.26) явной формы (когда значе-

ния переменных состояния на интервале №  $k$  вычисляли по данным предыдущего шага), применяют формулу

$$\begin{aligned} & [f_{2k}] - [f_{2(k-1)}] = \\ & = \Delta t [A] \frac{[f_{2k}] + [f_{2(k-1)}]}{2} + \Delta t [B] \frac{[f_{1k}] + [f_{1(k-1)}]}{2}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где в правой части используют средние значения переменных на том же шаге №  $k$ .

*Примечание.* Уравнение (3.27) записано в неявной форме так, как его еще необходимо решить относительно  $[f_{2k}]$ .

### 3.5.2. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО ДИСКРЕТНЫМ РЕЗИСТИВНЫМ СХЕМАМ ЗАМЕЩЕНИЯ

От уравнений накопителей

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \frac{di_L}{dt}; \\ i(t) &= C \frac{dU_C}{dt} \end{aligned}$$

переходим к приближенным уравнениям численного расчета.

Для шага расчета №  $k$  имеем

$$u_{Lk} = \frac{L}{\Delta t} i_{Lk} - \frac{L}{\Delta t} i_{L(k-1)}; \quad (3.28)$$

$$i_{Ck} = \frac{C}{\Delta t} u_{Ck} - \frac{C}{\Delta t} u_{C(k-1)}. \quad (3.29)$$

Преобразовав (3.29) к виду

$$u_{Ck} = \frac{\Delta t}{C} i_{Ck} + u_{C(k-1)}, \quad (3.30)$$

трактует алгебраическую сумму напряжений в (3.28), (3.30) как формулу последовательного соединения в эквивалентных схемах, изображенных, соответственно, на рисунке 3.10а, б, где  $R_{gL}$ ,  $R_{gC}$  называют дискретными сопротивлениями  $L$ - и  $C$ -элементов.

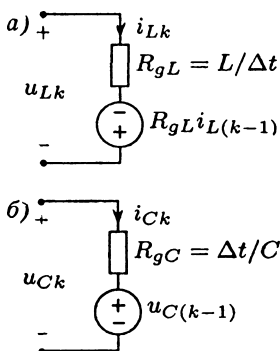


Рис. 3.10

**Выводы.**

1. Дискретные резистивные схемы замещения, в которых накопители заменяют  $R$ -элементами и источниками, как показано на рисунке 3.10, позволяют производить численный расчет переходных процессов вообще без составления и решения дифференциальных уравнений — достаточно использовать методы анализа  $R$ -цепей.

2. На каждом шаге численного расчета, кроме отыскания реакций, нужно находить также значения  $i_{Lk}$  и  $u_{Ck}$  для учета их в эквивалентных резистивных схемах на следующем шаге.

### 3.6. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПРОСТЫХ $RC$ - И $RL$ -ЦЕПЯХ

#### 3.6.1. СВОБОДНЫЙ РЕЖИМ В $RC$ -ЦЕПИ

Проанализируем процессы в простых цепях с позиций классической математики, дадим им физическую трактовку и сравним результаты с данными расчета по эквивалентным схемам замещения, описанным в параграфе 3.3.

Свободный процесс в  $RC$ -цепи происходит за счет начальных запасов энергии в  $C$ -элементе  $W_C(0-) = W_C(0+) = = Cu_C^2(0+)/2$ . Пример такой цепи приведен на рисунке 3.11а. При этом начальное напряжение  $C$ -элемента считаем положительным:  $u_C(0+) = u_C(0-) = u_{C0} > 0$ .

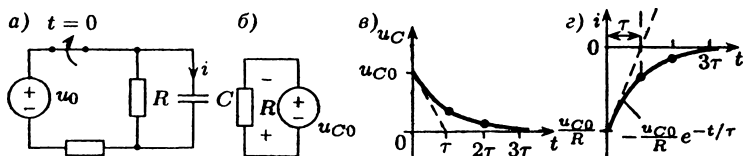


Рис. 3.11

Используя для  $t > 0$  уравнения цепи

$$u_R + u_C = 0, \quad u_R = Ri, \quad i = Cu'_C,$$

составляем дифференциальное уравнение относительно непрерывной переменной:

$$RC u'_C(t) + u_C(t) = 0.$$

Решение такого однородного уравнения цепи без источников содержит только свободную составляющую

$u_C = u_{C\text{св}}(t) = Ae^{p_1 t} = Ae^{\frac{t}{\tau}}$ , где  $p_1 = -\frac{1}{RC}$  — корень характеристического полинома (уравнения)  $RCp + 1 = 0$ ; постоянная времени  $\tau = RC = \frac{1}{|p_1|}$ .

Используя начальные условия  $u_C(0+) = u_{C0}$ , находим постоянную интегрирования  $u_C(0+) = A$ , откуда решение уравнений цепи  $u_C(t) = u_{C0}e^{\frac{t}{\tau}} > 0$  при  $t > 0$ . Далее находим закон изменения тока  $i(t) = Cu'_C - (u_{C0}/R)e^{\frac{t}{\tau}} < 0$  и контролируем полученный результат:  $u_R = -u_C$ ,  $i = u_R/R$ .

*Физическая трактовка.*

1. При  $t > 0$  направление движения положительных зарядов при разряде емкостного элемента указано на рисунке 3.11а пунктиром, т. е., действительно,  $i(t) < 0$ .

2. Начальная энергия  $C$ -элемента с течением времени необратимо потребляется  $R$ -элементом, причем полная энергия будет следующей:

$$\begin{aligned} W_{R\Sigma} &= \int_0^{\infty} Ri^2(t)dt = \int_0^{\infty} R(u_{C0}^2/R^2)e^{-2t/(RC)}dt = \\ &= -0,5Cu_{C0}^2e^{-2t/(RC)} \Big|_0^{\infty} = Cu_{C0}^2/2 = W_C(0+). \end{aligned}$$

3. Составленная на основании теоремы замещения эквивалентная схема цепи при  $t = 0+$  приведена на рисунке 3.11б. Она позволяет найти начальные значения переменных  $u_R(0+) = -u_{C0}$ ,  $i(0+) = \frac{u_R(0+)}{R} = -u_{C0}/R < 0$ , которые соответствуют вышеполученным решениям.

Диаграммы мгновенных значений для  $u_C(t)$ ,  $i(t)$  приведены на рисунке 3.11в, г, где при  $t = 0, \tau, 2\tau, 3\tau$  выделены характерные значения экспоненциальных функций, равные, соответственно, 1; 0,37; 0,14; 0,05 от начального значения экспоненты, а также пунктиром показаны касательные к экспонентам при  $t = 0$ , пересекающие временную ось в момент  $t = \tau$ . Практическая длительность переходного процесса  $t_{\text{пн}} \cong 3\tau = 3RC$  определяется только параметрами цепи и от значения  $u_{C0}$  не зависит.

### 3.6.2. ПОДКЛЮЧЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ $RC$ -ЦЕПИ К ИСТОЧНИКУ ПОСТОЯННОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Схема цепи приведена на рисунке 3.12а; предполагается  $u_0 = \text{const} > 0$ ,  $u_C(0+) = u_C(0-) = u_{C0} > 0$ , причем  $u_0 > u_{C0}$ .

Дифференциальное уравнение цепи, составленное относительно непрерывной переменной на основании преобразования очевидных соотношений

$$u_0 + u_R + u_C = 0, u_R = Ri, i = Cu'_C,$$

является неоднородным:

$$RCu'_C + u_C(t) = u_0.$$

Свободная составляющая как общее решение однородного уравнения

$$RCu'_C + u_C(t) = 0$$

имеет математическую форму, совпадающую с решением уравнений цепи в свободном режиме  $u_{\text{св}}(t) = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ , где  $\tau = RC$  — постоянная времени.

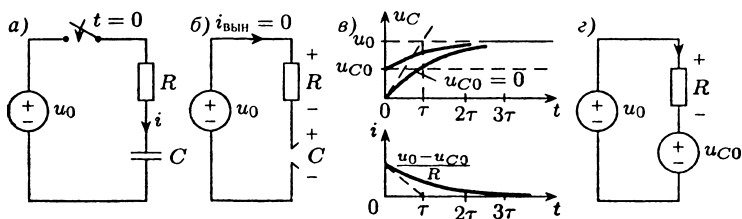


Рис. 3.12

Вынужденную составляющую как частное решение неоднородного уравнения отыскиваем в математической форме воздействия, т. е.  $u_{\text{СВЫН}} = \text{const}$ . Подставляя  $u_{\text{СВЫН}}$  в неоднородное дифференциальное уравнение цепи, получим

$$RC u'_{\text{СВЫН}} + u_{\text{СВЫН}} = u_0,$$

откуда с учетом  $u'_{\text{СВЫН}} = 0$  находим  $u_{\text{СВЫН}} = u_0$ , а также  $i_{\text{ВЫН}} = Cu'_{\text{СВЫН}} = 0$ ,  $u_{\text{RВЫН}} = Ri_{\text{ВЫН}} = 0$ , что соответствует изображенной на рисунке 3.12б эквивалентной схеме цепи для расчета вынужденного (установившегося) режима при  $t \rightarrow \infty$ .

Постоянную интегрирования в решении уравнений цепи

$$u_C(t) = u_{\text{СВЫН}} + u_{\text{СВ}}(t) = u_0 + Ae^{\frac{t}{\tau}}$$

находим по начальному условию  $u_C(0+) = u_{C0} = u_0 + A$ , т. е. решение имеет вид

$$u_C(t) = u_0 - (u_0 - u_{C0})e^{\frac{t}{\tau}},$$

откуда

$$u_R = u_0 - u_C = (u_0 - u_{C0})e^{\frac{t}{\tau}} > 0,$$

$$i = u_R / R [(u_0 - u_{C0}) / R] e^{\frac{t}{\tau}} > 0;$$

контроль осуществляем по формуле  $i = Cu'_C$ .

Графики  $u_C(t)$ ,  $i(t)$  приведены на рисунке 3.12в. Изображенные пунктиром касательные к временным диаграммам  $u_C(t)$  при различных начальных значениях  $u_{C0}$  пересекают горизонталь  $u_{\text{СВЫН}}$  в одной точке — при  $t = \tau$ . График  $u_C(t)$  описывается непрерывной функцией, график  $i(t)$  изменяется скачком в момент коммутации при  $t = 0$ , т. е. описывается разрывной функцией.

*Физическая трактовка.*

1. При  $t \rightarrow \infty$  в установившемся режиме постоянных токов и напряжений емкостной элемент эквивалентен разорванному участку цепи (XX, см. рис. 3.12б), постоянный ток через  $C$ -элемент не протекает.

2. Поскольку по условию задачи  $u_{C0} < u_0$ , то при  $t > 0$  происходит заряд С-элемента до значения  $u_0$ , т. е. движение положительных зарядов в цепи соответствует указанному условно-положительному направлению тока  $i(t) > 0$ .

3. Составленная на основании теоремы замещения эквивалентная схема цепи при  $t = 0+$  приведена на рисунке 3.12г. Она позволяет найти начальные значения переменных  $u_R(0+) = u_0 - u_{C0}$ ,  $i(0+) = u_R / R = (u_0 - u_{C0}) / R$ , которые соответствуют полученным решениям.

### 3.6.3. СВОБОДНЫЙ РЕЖИМ В $RL$ -ЦЕПИ

Он наблюдается при коммутации, например в цепи, схема которой приведена на рисунке 3.13а. Свободный процесс происходит за счет начальной энергии  $L$ -элемента  $W_L(0-) = W_L(0+) = Li_L^2(0+)/2$ . Для определенности считаем  $i_L(0-) = i_L(0+) = i_{L0} > 0$ .

Используя уравнения цепи для  $t > 0$ :

$$u_R + u_L = 0, u_R = Ri, u_L = Ci'_L,$$

составляем дифференциальное уравнение относительно непрерывной переменной:

$$Li'(t) + Ri(t) = 0.$$

Решение этого однородного уравнения цепи без источников содержит только составляющую

$$i(t) = i_{\text{св}}(t) = Ae^{p_1 t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

где  $p_1$  — корень характеристического полинома  $Lp + R = 0$ ; постоянная времени  $\tau = L / R = 1 / |p_1|$ .

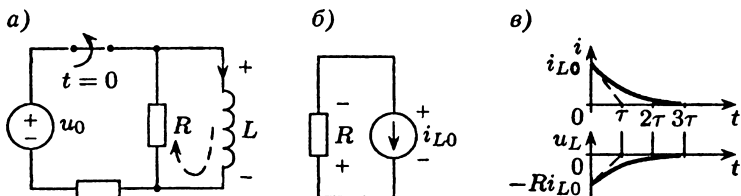


Рис. 3.13



Используя начальные условия  $i(0+) = i_L(0+) = i_{L0}$ , находим постоянную интегрирования  $i(0+) = A = i_{L0}$ , откуда решение уравнений цепи  $i(t) = i_{L0}e^{-\frac{t}{\tau}} > 0$  при  $t > 0$ .

Далее находим  $u_R(t) = Ri = Ri_{L0}e^{-\frac{t}{\tau}}$ , откуда закон изменения напряжения  $L$ -элемента

$$u_L(t) = -u_R(t) = -Ri_{L0}e^{-\frac{t}{\tau}} < 0;$$

контроль осуществляем по формуле  $u_L = Li'$ .

*Физическая трактовка.*

1. Начальная энергия  $L$ -элемента с течением времени необратимо потребляется  $R$ -элементом, причем полная энергия будет следующей:

$$W_{R\Sigma} = \int_0^{\infty} Ri_{L0}^2 e^{-2Rt/L} dt = -0,5 Li_{L0}^2 e^{-2Rt/L} \Big|_0^{\infty} = Li_{L0}^2 / 2 = W_L(0+).$$

2. Мощность  $L$ -элемента  $p_L(t) = u_L(t)i_L(t) < 0$ , мощность  $R$ -элемента  $p_R(t) = Ri^2(t) = -p_L(t)$ , т. е.  $L$ -элемент постав-  
ляет в цепь запасенную ранее энергию,  $R$ -элемент потреб-  
ляет ее.

3. Составленная на основании теоремы замещения эк-  
вивалентная схема цепи при  $t = 0+$  приведена на рисун-  
ке 3.13б. Она позволяет найти начальные значения пере-  
менных  $u_R(0+) = Li_{L0}$ ,  $u_L(0+) = -Li_{L0}$ , которые соответству-  
ют полученным решениям.

4. Полярность напряжения самоиндукции ( $u_L < 0$ ) об-  
ратна условно-положительной, поскольку ЭДС самоиндук-  
ции как бы «стремится поддерживать убывающий ток».

Диаграммы мгновенных значений переменных  $i(t)$  и  $u_L(t) = Li'(t) = -u_R(t)$  приведены на рисунке 3.13в.

#### 3.6.4. ПОДКЛЮЧЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ RL-ЦЕПИ К ИСТОЧНИКУ ПОСТОЯННОГО НАПЯЖЕНИЯ

Схема цепи приведена на рисунке 3.14а. Считаем  $u_0 =$   
 $= \text{const} > 0$ ,  $i_L(0-) = 0$ . Дифференциальное уравнение це-  
пи, составленное относительно непрерывной переменной  
 $i(t) = i_L(t)$ , является неоднородным:

$$Li'(t) + Ri(t) = u_0.$$

Свободная составляющая как общее решение однородного уравнения  $Li'(t) + Ri(t) = 0$  имеет математическую форму, совпадающую с решением уравнений цепи в свободном режиме:

$$i_{\text{св}}(t) = Ae^{p_1 t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

где  $\tau = L / R$  — постоянная времени.

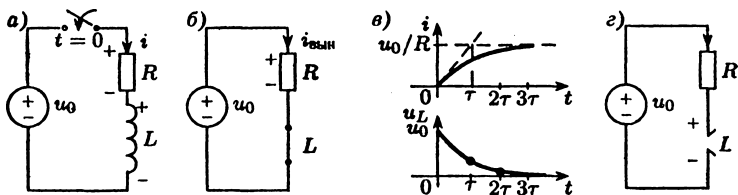


Рис. 3.14

Вынужденную составляющую как частное решение неоднородного уравнения отыскиваем в математической форме воздействия, т. е.  $i_{\text{вын}} = \text{const}$ . Подставляя  $i_{\text{вын}}$  в неоднородное уравнение цепи, получим

$$Li'_{\text{вын}}(t) + Ri_{\text{вын}}(t) = u_0,$$

откуда с учетом  $i'_{\text{вын}} = 0$  находим  $i_{\text{вын}} = u_0 / R$ , а также  $u_{L\text{вын}} = Li'_{\text{вын}} = 0$ ,  $u_{R\text{вын}} = Ri_{\text{вын}} = u_0$ , что соответствует изображенной на рисунке 3.14б эквивалентной схеме цепи для расчета вынужденного (установившегося) режима при  $t \rightarrow \infty$ .

Постоянную интегрирования в решении уравнения цепи

$$i(t) = i_{\text{вын}} + i_{\text{св}}(t) = u_0 / R + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

определяем, используя начальное условие:

$$i(0+) = i_L(0+) = 0 = \frac{u_0}{R} + A,$$

т. е. решение имеет вид

$$i(t) = \frac{u_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right);$$

далее находим

$$u_R = Ri = u_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad u_L = u_0 - u_R = u_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) > 0;$$

контроль осуществляем по формуле  $u_L = Li'$ .

Временные диаграммы  $i(t)$ ,  $u_L(t)$  приведены на рисунке 3.14в.

График  $i(t)$  описывается непрерывной функцией, график  $u_L(t)$  в момент коммутации при  $t = 0$  изменяется скачком, т. е. описывается разрывной функцией.

*Физическая трактовка.*

1. При  $t \rightarrow \infty$  в установившемся режиме постоянных токов и напряжений индуктивный элемент эквивалентен короткозамкнутому участку цепи (КЗ), поскольку постоянный магнитный поток не создает напряжение индукции, т. е.  $u_{L\text{вын}} = 0$ .

2. Ток и энергия  $L$ -элемента не могут измениться скачком, поэтому ток цепи  $i(t)$  плавно возрастает по экспоненте от начального значения  $i(0) = 0$  к конечному  $i(\infty) = i_{\text{вын}} = \frac{u_0}{R}$ .

3. Напряжение самоиндукции  $u_L(t) > 0$ , поскольку ЭДС самоиндукции как бы «препятствует возрастанию тока».

4. Составленная с учетом  $i_L(0+) = i_L(0-) = 0$  эквивалентная схема замещения цепи при  $t = 0+$  приведена на рисунке 3.14а. Она позволяет найти начальные значения переменных  $u_R(0+) = 0$ ,  $u_L(0+) = u_0$ , которые соответствуют полученным решениям.

### 3.7. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ $RLC$ -ЦЕПИ

#### 3.7.1. УРАВНЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО $RLC$ -КОНТУРА

Рассмотрим схему цепи, представленную на рисунке 3.15а, при  $u_0 = \text{const}$ . Считаем независимые начальные условия следующими:  $i_L(0+) = i_L(0-) = 0$ ,  $u_C(0+) = u_C(0-) = u_{C0} > 0$ , причем  $u_C(0-) = u_{C0} > 0$ , причем  $u_{C0} < u_0$ .

Решение отыскиваем для тока.

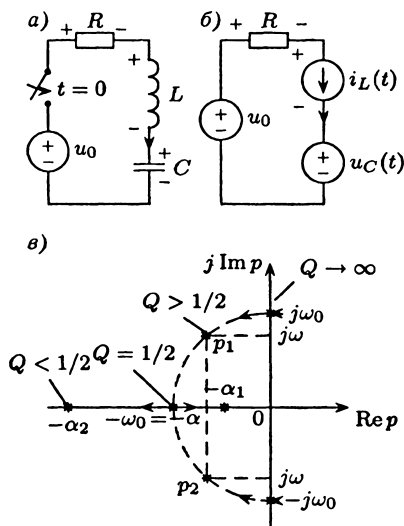


Рис. 3.15

Уравнения состояния для  $t > 0$  находим по схеме со вспомогательными источниками рисунка 3.15б. Имеем  $i_C = i_L$ ,  $u_L = -Ri_L + u_0 - u_C$ , откуда, используя уравнения накопителей  $i_C = Cu'_C$ ,  $u_L = Li'_L$ , находим

$$\begin{aligned} u'_C(t) &= \frac{1}{C} i_L(t); \\ i'_L(t) &= -\frac{1}{L} u_C - \frac{R}{L} i_L + \frac{1}{LC} u_0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

или, записывая уравнения состояния (3.31) в матричной форме

$$\begin{bmatrix} u'_C \\ i'_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} [u_0],$$

после чего определяем, согласно п. 3.4.3, характеристическое уравнение

$$\det \begin{bmatrix} -p & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} - p \end{bmatrix} = p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = 0.$$

Этот же результат можно получить непосредственно по интегродифференциальному уравнению цепи рисунка 3.15а, составленному на основании закона напряжений Кирхгофа (ЗНК),

$$Ri(t) + Li'(t) + u_{C0} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = u_0, \quad (3.32)$$

дифференцируя которое, получим однородное уравнение, так как  $u_0' = 0$  при  $u_0 = \text{const}$ :

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C} i(t) = 0. \quad (3.33)$$

*Примечания.*

1. Характеристический полином, составленный согласно (3.33), соответствует (3.32).

2. Из однородного уравнения (3.33) следует, что в установившемся режиме ток в цепи отсутствует, т. е.  $i_{\text{вын}} = 0$ .

3. Из (3.32) следует, что ток  $i(t)$  в цепи при  $u_{C0} = 0$  будет таким же, как в свободном режиме (т. е. при  $u_0 = 0$ ) при независимом начальном условии  $u_{C0}$ , численно равном значению  $u_{C0} = -u_0$ . Это замечание предваряет важный вывод о том, что независимое начальное условие всегда можно для  $t > 0$  заменить эквивалентным воздействием (источником постоянного напряжения значения  $u_{C0}$ , включаемым последовательно с как бы незаряженным  $C$ -элементом, и источником тока значения  $i_{L0}$ , включаемым параллельно  $L$ -элементу без начального запаса энергии).

Корни характеристического уравнения (3.32)

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad (3.34)$$

где  $a = \frac{R}{2L}$  — так называемый коэффициент затухания;

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  — резонансная частота, или частота свободных

(собственных) колебаний контура без потерь.

Используя обозначения (3.34), запишем (3.32) в виде

$$p^2 + 2ap + \omega_0^2 = 0. \quad (3.35)$$

*Примечание.* В технической литературе встречаются и другие формы записи (3.32), (3.35):

$$p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2 = 0, \quad (3.36)$$

где  $\zeta = \alpha/\omega_0$  — коэффициент демпфирования;

$$p^2 + \frac{\omega_0}{Q} p + \omega_0^2 = 0, \quad (3.37)$$

где  $Q = 0,5\omega_0 / a = \omega_0 L / R$  — добротность  $RLC$ -цепи.

### 3.7.2. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СВОБОДНЫХ РЕЖИМОВ И ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЦЕПИ

В зависимости от соотношения параметров цепи можно получить различные варианты корней ХП (3.32), (3.36), (3.37):

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = p_{1,2} = \\ &= \omega_0(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) = \omega_0\left(-\frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1}\right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

**1. Незатухающий колебательный режим.** Контур без потерь, т. е.  $R = 0$ ,  $a = 0$ ,  $\zeta = 0$ ,  $Q \rightarrow \infty$ ; тогда корни характеристического уравнения — мнимые:

$$p_{1,2} = \pm j \frac{1}{\sqrt{LC}} = \pm j\omega_0, \quad (3.39)$$

т. е., согласно (3.22), (3.23), процессы в свободном режиме являются незатухающими колебательными

$$i_{\text{св}}(t) = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}. \quad (3.40)$$

*Примечания.*

1. Из (3.40) следует объяснение различных названий  $\omega_0$  — частота собственных (свободных) колебаний контура без потерь, частота незатухающих колебаний.

2. Режим цепи в этом случае называют незатухающим колебательным режимом.

3. Отсутствие затухания процесса (3.40) объясняется отсутствием активных потерь в цепи, так как  $R = 0$ .

**2. Колебательный режим.** В контуре потери  $R$  относительно невелики, что соответствует соотношениям в

(3.38)  $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $\alpha < \omega_0$ ,  $\zeta < 1$ ,  $Q > 0,5$ ; тогда корни ХП — комплексные:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega. \quad (3.41)$$

Причем величину  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$  называют частотой собственных (свободных) колебаний контура с потерями, поскольку, согласно (3.22), (3.23), свободная составляющая имеет вид

$$i_{\text{св}}(t) = A_1 e^{-\alpha t} \cos \omega t + A_2 e^{-\alpha t} \sin \omega t = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}, \quad (3.42)$$

т. е. процессы в цепи являются колебательными затухающими.

#### Примечания.

1. Из (3.42) следует объяснение названия  $\alpha$  — коэффициент затухания, поскольку его значение, как и значение постоянной времени  $\tau = 1 / \alpha$ , определяет скорость затухания экспоненты в (3.42), т. е. практическую длительность переходных процессов в цепи  $t_{\text{ин}} \cong 3\tau = 3 / \alpha$ .

2. Корни ХП в случае (3.39) определяются частотой собственных колебаний; кроме того, из (3.41) следует, что размерности и  $a$ , и  $p_{1,2}$  равны размерности частоты  $\omega$ , поэтому очень часто сами корни ХП по аналогии называют частотами собственных колебаний, или обобщенными собственными частотами цепи, или, сокращенно, собственными частотами.

3. Режим цепи в этом случае называют затухающим колебательным режимом, или, сокращенно, колебательным режимом, поскольку из-за относительно небольших потерь процессы затухают медленно, а колебательный процесс обмена энергией между  $L$ - и  $C$ -элементами выражен достаточно ярко.

**3. Аперiodический режим.** Потери относительно велики, если в (3.38)

$$\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \alpha > \omega_0, \quad \zeta > l, \quad Q < 0,5;$$

следовательно, собственные частоты — вещественные:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha_1; \\ p_2 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha_2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Процессы в свободном режиме описываются суммой двух экспонент:

$$i_{\text{св}}(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t} = A_1 e^{-t/\tau_1} + A_2 e^{-t/\tau_2}. \quad (3.44)$$

*Примечание.* Из (3.44) следует, что решение не содержит периодических (колебательных) составляющих, поэтому режим в цели называют в этом случае аперiodическим.

**4. Критический режим.** Случай кратных корней имеет место при  $\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $\alpha = \omega_0$ ,  $\zeta = l$ ,  $Q = 0,5$ ; когда собственные частоты являются одинаковыми вещественными:

$$p_{1,2} = -\alpha, \quad (3.45)$$

как известно, при этом

$$i_{\text{св}}(t) = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 t e^{-\alpha t}. \quad (3.46)$$

*Примечание.* Из (3.46) следует, что решение при этом (т. е. в случае критического режима) также не содержит периодических составляющих.

Траектория положения собственных частот (3.38) на комплексной плоскости при изменении сопротивления потерь  $R$  и неизменной резонансной частоте  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  показана на рисунке 3.15в: корни ХП при увеличении  $R$  от значения  $R = 0$  вначале «двигаются» в левой полуплоскости по полуокружности радиуса  $\omega_0$ , затем становятся кратными, согласно (3.45), и далее — отрицательными вещественными, согласно (3.44), однако произведение их длин (модулей) в соответствии с (3.35) равно  $\omega_0^2$ .



### 3.7.3. РАСЧЕТ ВЫНУЖДЕННОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ И НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Из уравнений (3.31) или по эквивалентной схеме замещения цепи (для  $t \rightarrow \infty$ ) нетрудно установить  $i_{\text{вын}} = 0$ , что также следует из (3.33).

Независимые начальные условия  $i(0+) = i_L(0+) = 0$ ,  $u_C(0+) = u_{C0}$  указаны в исходных данных.

Начальное значение производной тока находим из уравнений состояния (3.31) при  $t = 0+$

$$i'(0+) = i'_L(0+) = \frac{u_L(0+)}{L} = -\frac{u_C(0+)}{L} - \frac{Ri_L(0+)}{L} + \frac{u_0}{L} = \frac{u_0 - u_{C0}}{L},$$

причем значение  $u_L(0+) = u_0 - u_{C0}$  можно проконтролировать по эквивалентной схеме для  $t = 0+$ .

### 3.7.4. ПОДКЛЮЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ LC-ЦЕПИ К ИСТОЧНИКУ ПОСТОЯННОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Используя (3.40) и данные п. 3.7.3, записываем решение:

$$i(t) = i_{\text{св}}(t) = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t. \quad (3.47)$$

Начальное условие  $i(0+) = 0 = A_1$ . Дифференцируем с учетом этого (3.48):

$$i'(t) = \omega_0 A_2 \cos \omega_0 t.$$

Учитывая начальное значение производной, полученное в п. 3.7.3, находим:

$$i'(0+) = \frac{u_0 - u_{C0}}{L} = \omega_0 A_2,$$

откуда решение

$$i(t) = \frac{u_0 - u_{C0}}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t. \quad (3.48)$$

В случае нулевых независимых начальных условий ( $u_{C0} = 0$ ) получим (с учетом  $R = 0$  в идеальной LC-цепи):

$$i(t) = \frac{u_0}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t;$$

$$u_C = u_0 - u_L = u_0 - Li' = u_0 - u_0 \cos \omega_0 t \geq 0.$$

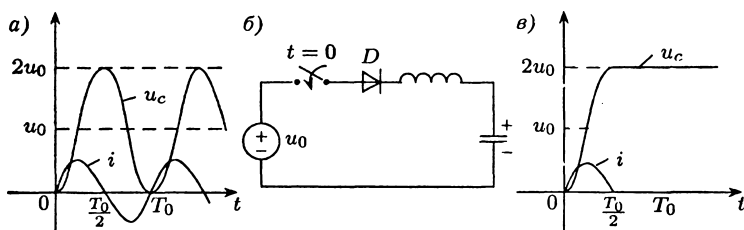


Рис. 3.16

Качественные графики этих переменных приведены на рисунке 3.16а, где  $T_0 = 2\pi / \omega_0$  — период незатухающих колебаний.

*Примечание.* При  $t = T_0 / 2$  напряжение  $u_c = 2u_0$ , что используется на практике в схеме удвоения напряжения, показанной на рисунке 3.16б, где  $D$  — диод, т. е. элемент, который в идеале эквивалентен КЗ при  $i > 0$  и эквивалентен ХХ при  $i < 0$ ; диаграммы  $u_c(t)$ ,  $i(t)$  такой идеальной цепи приведены на рисунке 3.16в.

### 3.7.5. СВОБОДНЫЙ РЕЖИМ В ИДЕАЛЬНОМ LC-КОНТУРЕ

Схема цепи изображена на рисунке 3.17а в предположении, как и раньше,  $u_c(0+) = u_{c0} \geq 0$ ,  $i_L(0+) = 0$ . Результаты ее расчета соответствуют (3.48) при  $u_0 = 0$ :

$$i(t) = \frac{-u_{c0}}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t. \quad (3.49)$$

Диаграмма мгновенных значений тока приведена на рисунке 3.17б.

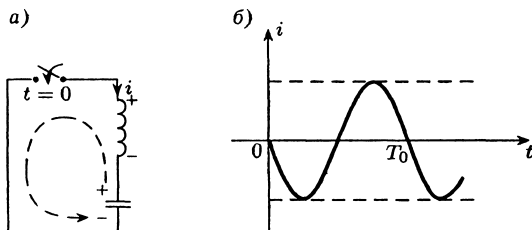


Рис. 3.17

**Физическая трактовка.**

1. В начале процесса направление движения положительных зарядов при разряде  $C$ -элемента указано на рисунке 3.17а пунктиром, что соответствует  $i(t) < 0$  на графике рисунка 3.17б при  $0 < t < T_0 / 2$ .

2. Процесс незатухающий колебательный, поскольку нет потерь ( $R = 0$ ): накопители обмениваются энергией, так что их суммарная энергия в идеальной  $LC$ -цепи неизменна и равна начальной энергии  $C$ -элемента  $W_C(0+) = \frac{Cu_{C0}^2}{2}$ . Действительно, используя (3.49), находим

$$u_C = -u_L = -Li' = u_{C0} \cos \omega_0 t.$$

Следовательно,

$$W_C(t) + W_L(t) = \frac{Cu_{C0}^2}{2} \cos^2 \omega_0 t + \frac{Lu_{C0}^2}{2\omega_0^2 L^2} \sin^2 \omega_0 t = \frac{Cu_{C0}^2}{2}$$

с учетом  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

### 3.7.6. ПОДКЛЮЧЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ RLC-ЦЕПИ К ИСТОЧНИКУ (СЛУЧАЙ КОМПЛЕКСНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ)

Используя схему рисунка 3.15а, формулу (3.42) и данные п. 3.7.3, можем записать:

$$i(t) = i_{\text{св}}(t) = A_1 e^{-\alpha t} \cos \omega t + A_2 e^{-\alpha t} \sin \omega t, \quad (3.50)$$

что с учетом  $i(0+) = 0$  дает  $A_1 = 0$ . В этом случае, дифференцируя (3.50), получим

$$i'(t) = -\alpha A_2 e^{-\alpha t} \sin \omega t + \omega A_2 e^{-\alpha t} \cos \omega t,$$

откуда при  $i'(0+) = \frac{u_0 - u_{C0}}{L}$  находим  $A_2$ , т. е. решение

$$i(t) = \frac{u_0 - u_{C0}}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t. \quad (3.51)$$

График выражения (3.51), соответствующего затухающему колебательному режиму в цепи, приведен для случая  $T = \tau$  на рисунке 3.18, где  $I_0 = \frac{u_0 - u_{C0}}{\omega L}$ ; пунктиром

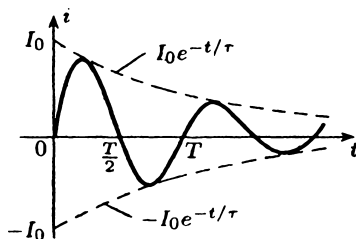


Рис. 3.18

также показаны экспоненты  $\pm I_0 e^{-\alpha t} = \pm I_0 e^{-t/\tau}$ , которых касается график  $i(t)$  в моменты экстремальных значений синусоиды  $\sin \omega t$ , т. е. при  $t = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}, \frac{5T}{4} \dots$

*Примечание.* Для характеристики затухания процесса на рисунке 3.18 используют следующие величины.

1. Коэффициент затухания  $\alpha$ .
2. Постоянную времени  $\tau = \frac{1}{\alpha}$ .
3. Декремент затухания  $\theta$ , определяемый отношением значений функции через период:

$$\theta = \frac{i(t)}{i(t+T)} = \frac{I_0 e^{-\alpha t} \sin \omega t}{I_0 e^{-\alpha(t+T)} \sin \omega(t+T)} = e^{\alpha T}.$$

4. Логарифмический декремент затухания  $\ln \theta = \alpha T$ .

По снятому экспериментально графику процесса, типа отображенного на рисунке 3.18, можно вначале определить период  $T$  и декремент затухания  $\theta$ , а затем рассчитать  $\ln \theta$ ,  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $p_{1,2}$ ,  $\omega_0$ ,  $Q$ .

### 3.7.7. СВОБОДНЫЙ РЕЖИМ В RLC-КОНТУРЕ (СЛУЧАЙ КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ ХП)

Схема цепи соответствует показанной на рисунке 3.15а при отсутствии воздействия, а расчет — приведенному в п. 3.7.6 при  $u_0 = 0$ :

$$i(t) = -\frac{u_{C0}}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t.$$

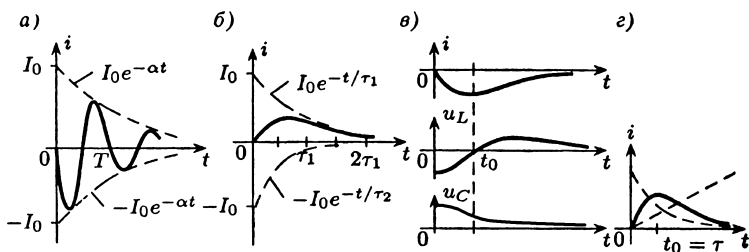


Рис. 3.19

График процесса (для случая  $T = \tau$ ) изображен на рисунке 3.19а, который аналогичен рисунку 3.18в с учетом инверсии знака.

*Примечание.* В интервале  $0 < t < T/2$  ток  $i(t) < 0$ , что соответствует фактическому направлению движения положительных зарядов при разряде  $C$ -элемента в начале процесса.

### 3.7.8. ПОДКЛЮЧЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО $RLC$ -КОНТУРА К ИСТОЧНИКУ (СЛУЧАЙ ПРОСТЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЕЙ $\chi\pi$ )

Схема приведена на рисунке 3.15а. Необходимые для получения решения данные указаны в (3.43), (3.44) и в п. 3.7.3:

$$i_{\text{св}}(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t};$$

$$i'(t) = -\alpha_1 A_1 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_2 A_2 e^{-\alpha_2 t}.$$

Учитывая начальные значения

$$i(0+) = 0, \quad i'(0+) = i'(0+) = \frac{u_0 - u_{C0}}{L},$$

находим

$$A_1 = -A_2 = i'(0+) = (u_0 - u_{C0})/L(\alpha_1 - \alpha_2),$$

причем, согласно (3.43), (3.44) и рисунку 3.15в, следует учитывать, что  $\alpha_2 > \alpha_1$ ,  $\tau_1 > \tau_2$ . Итак, решение оказывается:

$$i(t) = \frac{u_0 - u_{C0}}{L(\alpha_1 - \alpha_2)} \left( e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right). \quad (3.52)$$

График процесса, описываемого разностью экспонент (3.52), изображен на рисунке 3.19б для случая  $\tau_1 = 2\tau_2$  (использовано обозначение  $I_0 = A_1 = -A_2$ ; пунктиром показаны отдельные составляющие решения).

*Примечание.* График, приведенный на рисунке 3.19б, действительно имеет аperiodический характер.

### 3.7.9. СВОБОДНЫЙ РЕЖИМ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ RLC-ЦЕПИ (СЛУЧАЙ ПРОСТЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЕЙ $\chi_1$ )

Решение уравнений цепи в этом случае получаем из (3.52):

$$i(t) = \frac{-u_{C0}}{L(\alpha_1 - \alpha_2)} (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}) < 0. \quad (3.53)$$

График аperiodического свободного процесса (3.53), показанный на рисунке 3.19в, аналогичен рисунку 3.19б с учетом инверсии знака. На рисунке 3.19в изображены также временные диаграммы напряжений

$$u_L = Li', \quad u = u_{C0} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt,$$

причем диаграмма  $u_L$  получена качественным дифференцированием графика  $i(t)$ , а график  $u_C$  также построен качественно с учетом

$$u_C(0+) = u_{C0}, \quad u_C(0+) \rightarrow 0, \quad \int_0^t i dt < 0;$$

кроме того, из п. 3.7.3 следует, что в данной цепи  $u_L(0+) = -u_{C0} < 0$ .

*Физическая трактовка.*

1. Ток  $i(t) < 0$ , что соответствует фактическому направлению движения положительных зарядов при разряде  $C$ -элемента.

2. Из рассмотрения рисунка 3.19в следует, что мощность элементов  $p(t) = u(t)i(t)$  в интервале  $0 < t < t_0$  положительна у  $R$ - и  $L$ -элементов, но  $p_C < 0$ , т. е.  $C$ -элемент поставляет (отдает запасенную) энергию в цепь,  $R$ -элемент необратимо потребляет энергию,  $L$ -элемент запасает энергию, т. е. тоже является потребителем; в интервале  $t > t_0$  мощность  $p_L = u_L i < 0$ ,  $p_C = u_C i < 0$ ,  $p_R = Ri^2 > 0$ , т. е. оба накопителя питают энергией  $R$ -элемент.

### 3.7.10. ПОДКЛЮЧЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ RLC-ЦЕПИ К ИСТОЧНИКУ (СЛУЧАЙ КРАТНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ)

Схема цепи приведена на рисунке 3.15а, данные, необходимые для отыскания решения, указаны в (3.45), (3.46), а также в п. 3.7.3:

$$\begin{aligned} i(t) &= A_1 e^{-\alpha t} + A_2 t e^{-\alpha t}; \\ i'(t) &= -\alpha A_1 e^{-\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t} - \alpha A_2 t e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

С учетом

$$i(0+) = 0, i'(0+) = i'(0+) = \frac{u_0 - u_{C0}}{L}$$

получим

$$A_1 = 0, A_2 = \frac{u_0 - u_{C0}}{L} L,$$

т. е.

$$i(t) = \frac{u_0 - u_{C0}}{L} t e^{-\alpha t}. \quad (3.54)$$

График выражения (3.54) построен на рисунке 3.19г приближенно-качественным умножением линейной функции и экспоненты (см. пунктир).

#### Примечания.

1. График напоминает данные рисунка 3.19б; колебательных составляющих в процессе нет, т. е. в цепи действительно критический режим.

2. Из условия  $i'(t) = 0$  следует, что в данном случае момент экстремального значения тока  $t_0 = 1 / \alpha = \tau$  определяется постоянной времени цепи.

### 3.8. ТИПОВОЙ ПРИМЕР

Рассмотрим анализ переходного процесса в цепи первого порядка, схема которой приведена на рисунке 3.20а:  $u_{01} = 12$ ,  $R_0 = 4$ ,  $R_1 = R_2 = 2$ ,  $L = 6$ , ключ *размыкается*. Найти токи.

Так как воздействия в цепи *постоянны*, то для анализа можно использовать схемы замещения.

1. Определяем *независимые начальные условия*, т. е.  $i_L(0-)$  в данной схеме (или  $u_C(0-)$  в цепи с  $C$ -элементом). До размыкания ключа в цепи все токи постоянны (полагаем для  $t = 0-$  процесс *установившимся*). Тогда выводы  $L$ -элемента можно на схеме *замкнуть накоротко* (рис. 3.20б), так как  $u_L(t) = Li_L'(t)$  при постоянном  $i_L$  равно нулю, т. е.  $u_L(0-) = 0$ . В схеме рисунка 3.20б при определении  $i_L(0-)$  следует принять  $R_0 = 0$ , так как ключ при  $t < 0$  замкнут. Тогда  $i_L(0-) = u_{01} / R_1 = 6$ .

В цепи с  $C$ -элементом при постоянных воздействиях для определения  $u_C(0-)$  следует *ветвь* с этим элементом *разомкнуть*, так как  $i_C = C du_C / (dt) = 0$  при постоянном  $u_C$ .

2. Находим *вынужденные составляющие* реакций. При постоянных воздействиях эти составляющие будут также постоянны (*установившийся режим*,  $t \rightarrow \infty$ ), их легко рассмотреть по схеме замещения (рис. 3.20б); ее обоснование — см. п. 1.

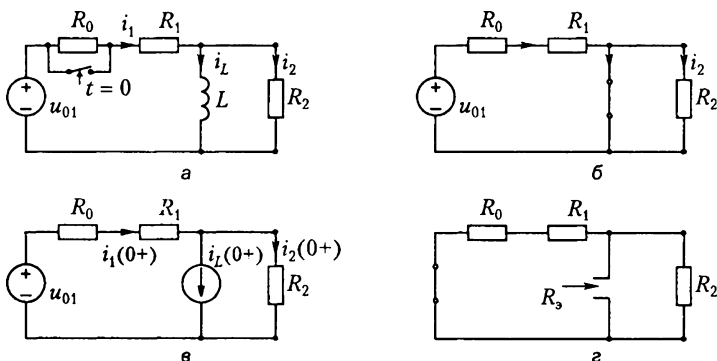


Рис. 3.20



Рассчитывая цепь, определяем:

$$i_{1B} = u_{01} / (R_0 + R_1) = 2;$$

$$i_{2B} = 0;$$

$$i_{LB} = i_{1B} = 2.$$

3. Находим *зависимые начальные условия* — значения токов  $i_1(0+)$ ,  $i_2(0+)$  в момент  $t = 0+$ . Используем схему рисунка 3.20в, в которой вместо  $L$ -элемента исходной цепи включен ИТ  $i_L(0+) = i_L(0-) = 6$  (в цепи с  $C$ -элементом вместо него включают ИН  $u_C(0+) = u_C(0-)$ ).

Далее следует использовать наиболее рациональный для конкретной цепи метод расчета. В примере целесообразно преобразовать ИТ  $i_L(0+)$  в ИН, тогда

$$i_1(0+) = \frac{u_{01} + R_2 i_L(0+)}{R_0 + R_1 + R_2} = \frac{12 + 12}{8} = 3;$$

$$i_2(0+) = i_1(0+) - i_L(0+) = 3 - 6 = -3.$$

4. Определяем *постоянную времени* цепи, для чего рассматриваем схему рисунка 3.20г, в которой по сравнению с исходной *исключены источники*; находим эквивалентное сопротивление  $R_3$  резистивной части цепи относительно выводов накопительного элемента:

$$R_3 = (R_0 + R_1)R_2 / (R_0 + R_1 + R_2) = 1,5.$$

Постоянная времени  $\tau = L / R_3 = 4$  (в цепи с  $C$ -элементом  $\tau = R_3 C$ ).

5. Выражение *любой реакции* представляем как сумму *вынужденной и свободной* составляющих, например  $i_1(t) = i_{1B} + i_{1CB} = i_{1B} + A_1 e^{-t/\tau}$ ; *постоянную интегрирования* находим по начальным условиям:  $i_1(0+) = i_{1B} + A_1$ , откуда  $A_1 = i_1(0+) - i_{1B} = 3 - 2 = 1$ .

Следовательно,  $i_1(t) = 2 + e^{-t/4}$ . Аналогично определяем:  $i_L(t) = 2 + 4e^{-t/4}$ ,  $i_2(t) = -3e^{-t/4}$ .

*Примечание.* При построении графика функции  $f(t) = B + Ae^{-t/\tau}$  соединяют дугой экспоненты начальное значение  $f(0+) = B + A$  с конечным  $f(\infty) = B$ , используя *характерные значения экспоненты* 1; 0,37; 0,14; 0,05 соответственно при  $t = 0, \tau, 2\tau, 3\tau$ ;  $t = 0, \tau, 2\tau, 3\tau$ ; учитывают, что *любая подкасательная* к экспоненте  $e^{-t/\tau}$  равна  $\tau$ .

# ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СИГНАЛОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

## 4.1. ЕДИНИЧНАЯ СТУПЕНЧАТАЯ ФУНКЦИЯ

### 4.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Единичной ступенчатой функцией  $\delta_1(t - t_0) = 1(t - t_0)$  называется обобщенная функция, равная 0 при  $t < t_0$  (т. е. при отрицательном аргументе) и равная 1 при  $t > t_0$  (т. е. при положительном аргументе).

Существуют различные варианты формирования единичной ступенчатой функции: будем рассматривать ее как предел последовательности указанных слева на рисунке 4.1 кусочно-линейных функций  $\varphi(t)$ , изменяющихся от 0 до 1 в окрестности  $t_0$ , когда эта окрестность  $\Delta t$  сжимается к 0.

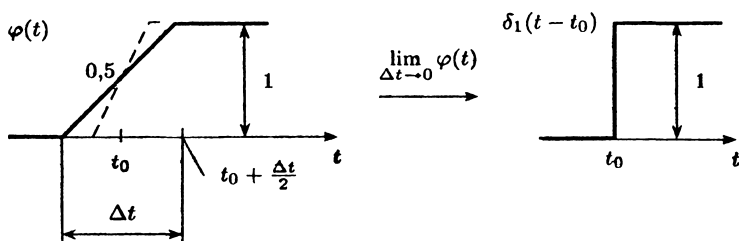


Рис. 4.1

На основании рисунка 4.1 можем записать для смещенной и несмещенной единичных ступенчатых функций соответственно:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0; \\ 0,5, & t = t_0; \\ 1, & t > t_0; \end{cases}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 0,5, & t = 0; \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Среди других видов последовательностей  $\varphi(t)$ , формирующих  $\delta_1(t)$ , укажем две:

$$\varphi(t) = 0,5 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{t}{\Delta t} \Big|_{\Delta t \rightarrow 0}, \quad (4.1)$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ (1 - e^{-i\omega t}) \Big|_{\Delta t \rightarrow 0}, & t > 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

при этом достоинство функций (4.1) в том, что они являются абсолютно гладкими, допускающими многократное дифференцирование, а недостаток функций (4.2) в том, что они являются односторонними в сравнении с изображенными на рисунке 4.1.

#### 4.1.2. ПРИМЕНЕНИЕ ЕДИНИЧНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ФУНКЦИИ

Укажем следующие случаи использования функции  $\delta_1(t)$ .

1. Приближенное представление воздействия произвольной формы суммой элементарных воздействий стандартной ступенчатой формы (рис. 4.2а).

2. Описание коммутации без использования идеального ключа (так, в «остальной цепи», показанной на рис. 4.2б, в, процессы в обоих случаях одинаковы).

3. Описание односторонних функций и функций с разрывами первого рода.

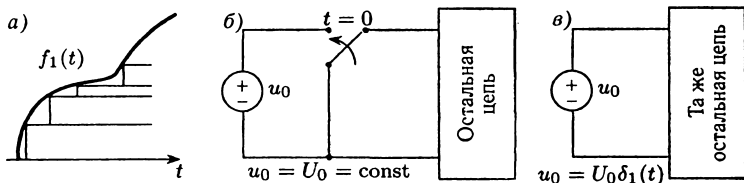


Рис. 4.2

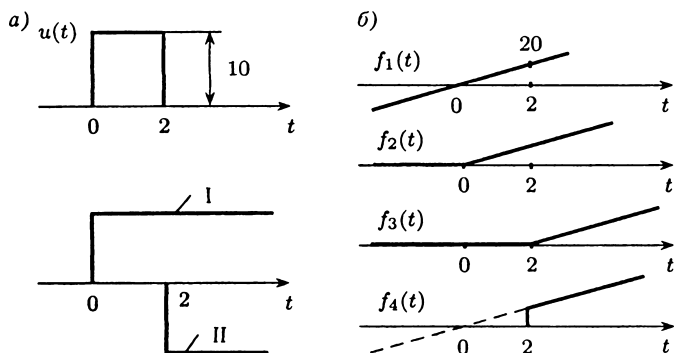


Рис. 4.3

**Пример 1.** Прямоугольный импульс  $u(t)$ , изображенный на рисунке 4.3а, может быть в интервале  $-\infty < t < \infty$  описан суммой двух ступенчатых функций, представленных на рисунке 4.3а внизу, т. е.

$$u(t) = I + II = 10\delta_1(t) - 10\delta_1(t - 2).$$

На рисунке 4.3б изображены графики функций  $f_1(t) = 10t$ ,  $f_2(t) = 10\delta_1(t)$ ,  $f_3(t) = 10(t - 2)\delta_1(t - 2)$ ,  $f_4(t) = 10t\delta_1(t - 2)$ , а функция  $f(t) = f(t) = |10t|$  может быть записана в виде  $f(t) = -10t\delta_1(-t) + 10t\delta_1(t)$ , если учесть, что единичная ступенчатая функция равна 1 только при положительном аргументе.

*Примечание.* Функция  $\delta_1(t - t_0)$  является обобщенной, поскольку с ее помощью запись разрывных и односторонних функций на различных интервалах заменяется обобщенной записью для любого момента времени  $-\infty < t < \infty$ .

## 4.2. ЕДИНИЧНАЯ ИМПУЛЬСНАЯ ФУНКЦИЯ (ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ)

### 4.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Единичной импульсной функцией (или дельта-функцией)  $\delta(t - t_0)$  называется обобщенная функция единичной площади, равная 0 при  $t \neq t_0$  и стремящаяся к бесконечности при  $t = t_0$ .

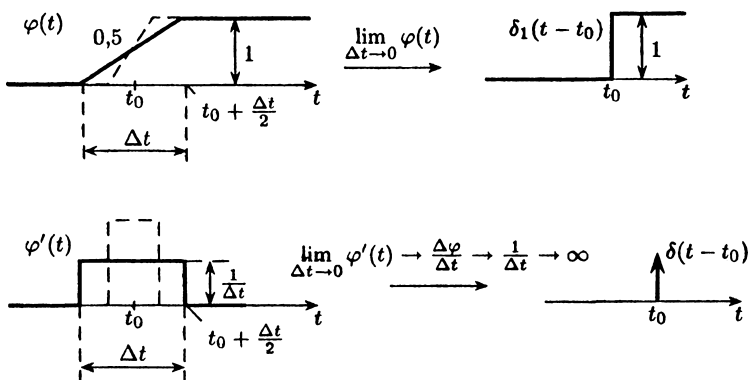


Рис. 4.4

Эту функцию удобно трактовать как предел последовательности производных  $\varphi'(t)$  от последовательности функции  $\varphi(t)$ , с помощью которых была сформирована  $\delta_1(t - t_0)$ , что отражается на рисунке 4.4. Из рассмотрения левой части рисунка 4.4 следует, что площадь под графиком  $\varphi'(t)$  остается равной 1, поскольку высота прямоугольника, описывающего  $\varphi'(t)$ , равна  $1 / \Delta t \rightarrow \infty$ , а основание равно  $\Delta t \rightarrow 0$ .

В центре рисунка 4.4 дополнительно приведено символическое объяснение бесконечной высоты дельта-функции, которая обозначается стрелкой, «устремленной в бесконечность», как указано на рисунке внизу справа.

На основании приведенного на рисунке 4.4 способа формирования дельта-функции можем записать для смещенной и несмещенной дельта-функций соответственно:

$$\delta(t - t_0) = \frac{d\delta_1(t - t_0)}{dt} = \begin{cases} \infty, & t = t_0; \\ 0, & t \neq t_0; \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\delta(t) = \delta_1'(t) = \begin{cases} \infty, & t = t_0; \\ 0, & t \neq t_0. \end{cases}$$

### 4.2.2. СВОЙСТВА ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЙ

Рассмотрим следующие широко используемые свойства.

#### 1. Интегралы от дельта-функций на основании (4.3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1; \quad (4.4)$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(t - t_0) dt = \delta_1(t - t_0), \quad (4.5)$$

причем интеграл (4.4) определяет площадь единичной импульсной функции.

2. Свойство выборки, или фильтрующее свойство дельта-функции,

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0) \quad (4.6)$$

следует из того, что произведение слева в (4.6) равно 0 при любых  $t$ , кроме  $t = t_0$ , когда  $f(t) = f(t_0)$ , т. е. из всех значений  $f(t)$  выбирается (фильтруется) лишь одно значение  $f(t_0)$ .

Следствие для интегралов с учетом (4.4)–(4.6):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t - t_0) dt = f(t_0);$$

$$\int_{-\infty}^t f(t)\delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^t f(t_0)\delta(t - t_0) dt = f(t_0)\delta_1(t - t_0).$$

3. Симметрия (четность) несмещенной единичной импульсной функции  $\delta(t) = \delta_1(-t)$  следует из рассмотрения рисунка 4.4, где при  $t_0 = 0$  производная  $\varphi'(t)$  является четной функцией  $\varphi'(t) = \varphi'(-t)$ .

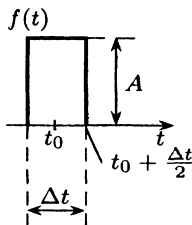


Рис. 4.5

4. Использование дельта-функции для описания «коротких» импульсов. Так, импульс прямоугольной формы  $f(t)$ , имеющий высоту  $A$ , длительность  $\Delta t$ , действующий в момент  $t_0$  (рис. 4.5), по виду аналогичен импульсу  $\varphi'(t)$ , из которого сформирована дельта-функция (см. рис. 4.4), т. е.  $\varphi'(t) \approx \delta(t - t_0)$  при

$\Delta t \rightarrow 0$ . В связи с этим приближенное соотношение  $f(t)\delta(t - t_0) \approx A / (1 / \Delta t)$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  позволяет приближенно описать «короткий» импульс дельта-функцией:

$$f(t) \approx A\Delta t\delta(t - t_0), \quad (4.7)$$

причем площадь импульса  $A\Delta t$  рассматривается как коэффициент при дельта-функции.

#### Примечания.

1. Импульс (рис. 4.5) должен быть «коротким» в сравнении с длительностью переходных процессов.

2. Импульс не обязательно должен иметь прямоугольную форму; важно, чтобы он был «коротким».

#### 4.2.3. ПРИМЕНЕНИЕ ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЙ

Здесь рассмотрим лишь следующие приложения.

1. Приближенное описание воздействия произвольной формы суммой элементарных воздействий стандартной формы вида «коротких» прямоугольных импульсов, т. е. с помощью суммы дельта-функций (рис. 4.6а).

2. Введение понятия о производной от функции, имеющей разрывы первого рода. Пример такой функции и производной от нее дан на рисунке 4.6б, где разрывная функция  $f(t) = at - b\delta_1(t - t_0)$  задана в диапазоне  $-\infty < t < \infty$ , а производная от такой функции  $f'(t) = a - b\delta_1(t - t_0)$ .

**Вывод.** На функции с разрывом первого рода (когда существуют пределы слева и справа от точки разрыва) обобщается понятие производной. Производная в точке разрыва (скачка) функции равна дельта-функции, умно-

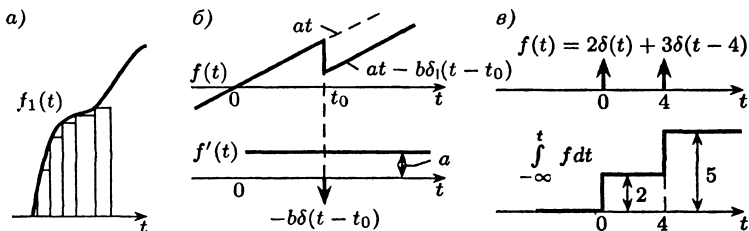


Рис. 4.6

женной на коэффициент, равный величине скачка (что аналогично свойствам классических непрерывных функций: если функция изменилась в несколько раз, то производная изменилась во столько же раз). Указанный коэффициент определяет площадь дельта-функции, поэтому при обратной операции (интегрировании такой дельта-функции) получим скачок, величина которого равна площади дельта-функции (пример данной операции приведен на рис. 4.6е). Если же исходная функция непрерывна (не имеет скачков), то при ее дифференцировании дельта-функция появиться не может, т. е. неопределенность

$$\delta_1(t) = 0. \quad (4.8)$$

3. Описание особых случаев коммутации в идеализированных цепях.

#### 4.2.4. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ КОММУТАЦИИ

Существует несколько особых случаев коммутации.

##### I. Особые случаи коммутации по условию задачи.

1. Параллельная  $RC$ -цепь подключается к источнику постоянного напряжения (рис. 4.7а). Очевидно, здесь  $u_C(0-) = 0$ ,  $u_C(0+) = u_0$ , т. е. не выполняется принцип не-

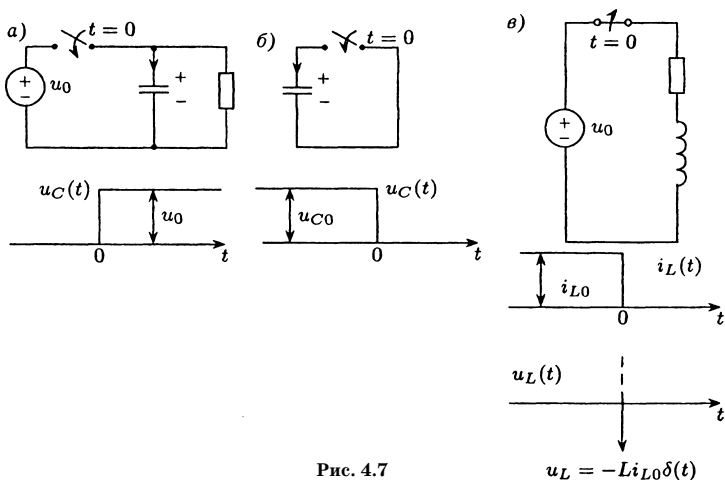


Рис. 4.7



прерывности напряжения  $C$ -элемента, которое при  $t = 0$  изменяется скачком за счет бесконечного (в идеале) тока заряда. Действительно, как показано на рисунке 4.7а,  $u_C(t) = u_0\delta_1(t)$ , где  $u_0 = \text{const}$ , тогда  $i_C = Cu_C' = Cu_0\delta(t)$ .

2. Заряженный  $C$ -элемент замыкается накоротко (рис. 4.7б) и, следовательно, мгновенно полностью разряжается за счет протекания бесконечного тока в этой идеализированной цепи, т. е.  $u_C(0-) = u_{C0} \neq u_C(0+) = 0$ .

3. Последовательная  $RL$ -цепь отключается от источника постоянного напряжения (рис. 4.7в), ток в индуктивности мгновенно уменьшается до нуля:  $i_L(0-) = i_{L0} \neq i_L(0+) = 0$ , т. е.  $i_L(t) = i_{L0} - i_{L0}\delta_1(t) = i_{L0}\delta_1(-t)$ , тогда

$$u_L(t) = Li_L'(t) = -Li_{L0}\delta(t) \rightarrow -\infty$$

при  $t = 0$ . Поскольку  $u_0 = \text{const}$  и  $u_R = Ri_L$  тоже ограничено, то по ЗНК бесконечно большое напряжение при  $t = 0$  будет в этой идеализированной цепи на ключе (в этом причина преждевременного выхода из строя выключателей многих реальных электротехнических устройств, так как их цепь питания аналогична показанной на рис. 4.7в).

**II. Особые случаи коммутации с изменением скачком значений индуктивностей и емкостей в момент коммутации.**

1. Схема цепи изображена на рисунке 4.8а. Очевидно,

$$\begin{aligned} u_{C1}(0-) &= u_0 = \text{const} \neq u_{C2}(0-) = 0, \\ \text{но } u_{C1}(0+) &= u_{C2}(0+), \end{aligned}$$

т. е. в момент коммутации происходит мгновенное выравнивание напряжений  $C$ -элементов за счет протека-

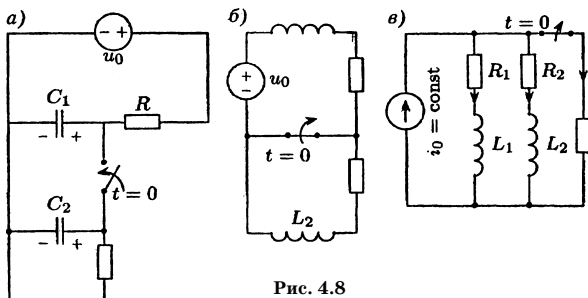


Рис. 4.8

ния бесконечно большого тока перезаряда; принцип непрерывности напряжения  $C$ -элементов нарушается; емкость цепи в момент коммутации изменяется, поскольку  $C(0-) = C_1 \neq C(0+) = C_1 + C_2$ .

2. Схема цепи приведена на рисунке 4.8б; при  $t = 0$  происходит мгновенное выравнивание токов  $L$ -элементов, т. е. не выполняется принцип непрерывности тока  $i_L(0-) = i_L(0+)$ ; индуктивность цепи при  $t = 0$  изменяется:

$$L(0-) = L_1 \neq L(0+) = L_1 + L_2.$$

### III. Особые случаи коммутации с изменением порядка цепи в момент коммутации.

1. Схема цепи приведена на рисунке 4.8в. В момент размыкания ключа нарушается принцип непрерывности тока  $L$ -элемента, поскольку

$$i_{L1}(0+) + i_{L2}(0+) = i_0 \neq i_{L1}(0-) + i_{L2}(0-) < i_0;$$

в результате  $|u_L| = |Li'_L| \rightarrow \infty$  при  $t = 0$ . Указанная цепь при  $t < 0$  имела второй порядок, а при  $t > 0$  — первый, так как в цепи свободного режима при  $t > 0$   $L$ -элементы соединены последовательно и могут быть заменены эквивалентной индуктивностью.

#### Примечание.

При решении задач в случаях 2, 3 можно использовать обобщенные законы коммутации:

$$\begin{aligned} \sum q_{Ck}(0-) &= \sum q_{Ck}(0+); \\ \sum \psi_{Lk}(0-) &= \sum \psi_{Lk}(0+), \end{aligned}$$

при этом правило знаков при вычислении сумм в первом уравнении соответствует правилу знаков закона напряжений Кирхгофа (ЗНК), а во втором — закона токов Кирхгофа (ЗТК).

**Вывод.** Таким образом, дельта-функция — не только математическая абстракция, с помощью которой обобщается понятие производной на функции с разрывами первого рода. Кроме того, дельта-функция необходима при описании сверхтоков и сверхнапряжений, имеющих место в особых случаях коммутации в идеальных цепях.

### 4.3. ПЕРЕХОДНАЯ И ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПИ

#### 4.3.1. ПЕРЕХОДНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Переходная характеристика  $h_1(t)$  численно равна реакции цепи при нулевых независимых начальных условиях на единственное в цепи воздействие вида единичной ступенчатой функции  $f_1(t) = F_{10}\delta_1(t)$ , где  $F_{10} = 1$  В или 1 А — коэффициент, выравнивающий размерность.

*Примечание.* Единичная ступенчатая функция  $\delta_1(t)$  безразмерна, единичная импульсная функция  $\delta(t)$  имеет размерность 1/с.

По принципу пропорциональности при указанном воздействии  $f_1(t) = F_{10}\delta_1(t)$  реакция будет равна  $f_2(t) = F_{10}h_1(t)$ , откуда размерность переходной характеристики

$$[h_1] = [f_2] / [F_{10}] = [f_2] / [f_1].$$

Способ отыскания переходной характеристики  $h_1(t)$  вытекает из ее определения: необходимо цепь при нулевых независимых начальных условиях как бы подключить к источнику единичного постоянного уровня и рассмотреть переходный процесс.

По условию физической осуществимости (следствие не может возникнуть раньше причины, а реакция — раньше воздействия) переходную характеристику можно записать следующим образом для  $-\infty < t < \infty$ :

$$h_1(t) = h_1^*(t)\delta_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ h_1^*(t), & t > 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

где  $h_1^*(t)$  — аналитическое продолжение переходной характеристики в область  $t < 0$ , т. е.  $h_1^*(t)$  — обычная непрерывная функция, у которой

$$\begin{aligned} h_1^*(t-) &= h_1^*(t+); \\ h_1^*(0-) &= h_1^*(0) = h_1^*(0+). \end{aligned} \quad (4.10)$$

### 4.3.2. ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Импульсная характеристика  $h(t)$  численно равна реакции цепи при нулевых независимых начальных условиях на единственное в цепи воздействие вида единичной импульсной функции  $f_1(t) = F_{10}\delta(t)$ , где  $F_{10} = 1$  В или 1 А·с — коэффициент, выравнивающий размерность.

По принципу пропорциональности реакция в этом случае  $f_2(t) = F_{10}h(t)$ , откуда размерность импульсной характеристики

$$[h] = [f_2] / [F_{10}] = [f_2] / ([f_1][t]).$$

По условию физической реализуемости

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \neq 0, & t > 0. \end{cases}$$

Способ отыскания импульсной характеристики вытекает из принципа дифференцируемости: так как в интервале  $-\infty < t < \infty$  стандартные воздействия связаны соотношениями (4.3), т. е.  $\delta(t) = \delta'(t)$ , то и реакции связаны аналогично:

$$h(t) = h'(t), \quad (4.11)$$

т. е. импульсная характеристика является производной от переходной характеристики.

Раскроем детально (4.11), используя (4.9) и (4.3):

$$h(t) = \frac{d}{dt}[h_1^*(t)\delta_1(t)] = \frac{dh_1^*(t)}{dt}\delta_1(t) + h_1^*(t)\delta(t),$$

при этом второе слагаемое на основании (4.6) и (4.10) можно привести к виду  $h_1^*(0)\delta(t) = h_1(0+)\delta(t)$ , т. е.

$$h(t) = \frac{dh_1^*(t)}{dt}\delta_1(t) + h_1(0+)\delta(t). \quad (4.12)$$

*Примечания.*

1. Если в основную формулу (4.11) подставлять переходную характеристику в форме (4.10), то запись в виде (4.12) будет получена непосредственно в процессе численного расчета при учете свойства выборки (4.6).

2. Второе слагаемое в (4.12) отражает то, что  $h_1(t)$  при  $t = 0$  может измениться скачком от значения  $h_1(0-) = 0$  до  $h_1(0+) \neq 0$ , следовательно, при дифференцировании  $h_1(t)$  появляется дельта-функция с коэффициентом  $h_1(0+)$ .

3. Если  $h_1(t)$  — непрерывная функция (не имеющая скачка при  $t = 0$ ), то последнее слагаемое в (4.12) должно отсутствовать.

#### 4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

##### 4.4.1. ИНТЕГРАЛ СВЕРТКИ (ИНТЕГРАЛ НАЛОЖЕНИЯ, ВЫРАЖЕННЫЙ ЧЕРЕЗ ИМПУЛЬСНУЮ ХАРАКТЕРИСТИКУ ЦЕПИ)

Для простоты считаем воздействие  $f_1(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ . Необходимо найти реакцию  $f_2(t)$  при известной импульсной характеристике цепи  $h(t)$ .

Воздействие приближенно заменяем суммой «коротких прямоугольных» импульсов, как изображено на рисунке 4.9, где  $f_1(\tau)$  — высота элементарного импульса, действующего в момент  $\tau$ ;  $\Delta\tau$  — длительность импульса.

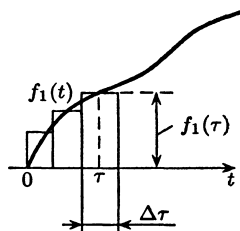


Рис. 4.9

На основании (4.7) указанный «короткий» импульс прямоугольной формы можно описать дельта-функцией с коэффициентом, равным площади импульса,  $f_1(\tau)\Delta\tau\delta(t - \tau)$ . Такой импульс к моменту  $t$  даст элементарную реакцию  $f_1(\tau)\Delta\tau h(t - \tau)$ , причем величина  $f_1(\tau)\Delta\tau$  учитывается как коэффициент (по свойству пропорциональности).

Тогда по принципу наложения реакция от всех импульсов будет приближенно

$$f_2(t) \cong \sum f_1(\tau)\Delta\tau h(t - \tau),$$

причем суммирование ведется по всем  $\Delta\tau$  от 0 до  $t$ .

Считая длительность импульсов бесконечно малой ( $\Delta\tau \rightarrow d\tau$ ), получим интеграл свертки, т. е. интеграл нало-

жения, выраженный через импульсную характеристику цепи:

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) h(t-\tau) d\tau. \quad (4.13)$$

*Примечания.*

1. Заменой переменных можно получить вторую форму интеграла свертки

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) h(\tau) d\tau.$$

2. В (4.13) рассматривается интервал  $t > 0$ , поэтому под интегралом все  $\delta$ -функции равны 1.

3. Интегрирование в (4.13) ведется по  $\tau$ , т. е.  $t$  под интегралом рассматривается как параметр.

4. Если воздействие приложено при  $t < 0$ , нижний предел в (4.13) можно расширить до  $t = -\infty$ , учитывая при этом, однако, под интегралом все  $\delta_1$ -функции.

5. Трудности взятия интеграла (4.13) возникают, если импульсная характеристика содержит дельта-функцию (в случае  $h_1(0+) \neq 0$ )

$$h(t) = \frac{dh^*(t)}{dt} \delta_1(t) + h_1(0+) \delta(t) = h_0(t) + h_1(0+) \delta(t), \quad (4.14)$$

где  $h_0(t)$  — часть импульсной характеристики, не содержащая дельта-функцию.

Выведем расчетную формулу для указанного случая, подставив (4.14) в (4.13):

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) h_0(t-\tau) d\tau + \int_0^t f_1(\tau) h_1(0+) \delta(t-\tau) d\tau; \quad (4.15)$$

с учетом свойства выборки (4.6) второе слагаемое можно преобразовать к виду

$$\int_0^t f_1(\tau) h_1(0+) \delta(t-\tau) d\tau = f_1(t) h_1(0+) \int_0^t \delta(t-\tau) d\tau = f_1(t) h_1(0+),$$

поскольку переменная  $t$  под интегралом является параметром.

В результате расчетная формула интеграла свертки:

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) h_0(t - \tau) d\tau + f_1(t) h_1(0+). \quad (4.16)$$

Интеграл от дельта-функции, согласно (4.4), (4.5), равен 1, если дельта-функция находится внутри интервала интегрирования, что в (4.15) неочевидно. Поэтому подтвердим справедливость (4.16) примером процессов в простейшей  $R$ -цепи, изображенной на рисунке 4.10, где реакция  $f_2(t) = u_{R_2}$ , причем  $R_1 = R_2$ . В такой цепи очевидно следующее:  $h_1(t) = 0,5\delta_1(t)$ ;  $h(t) = 0,5\delta(t)$ ;  $f_2'(t) = 0,5f_1'(t)$ . Сравнивая последние два соотношения с (4.13), (4.16), заключаем, что в цепи  $h_0(t) = 0$ ,  $h_1(0+) = 0,5$ , т. е. формула (4.16) правомерна.

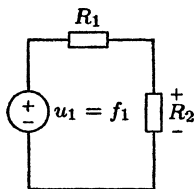


Рис. 4.10

#### 4.4.2. ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ (ИНТЕГРАЛ НАЛОЖЕНИЯ, ВЫРАЖЕННЫЙ ЧЕРЕЗ ПЕРЕХОДНУЮ ХАРАКТЕРИСТИКУ ЦЕПИ)

Пусть воздействие  $f_1(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ , а при  $t = 0$  изменяется скачком. Дана переходная характеристика цепи  $h_1(t)$ . Необходимо найти реакцию  $f_2(t)$ .

Воздействие приближенно заменяем суммой ступенчатых функций, как показано на рисунке 4.11. Первое воздействие ступенчатой формы  $f_1(0+)\delta_1(t)$  даст к моменту  $t$  реакцию  $f_1(0+)h_1(t)$ . Последующие элементарные воздействия, действующие в момент  $\tau$  и имеющие малую высоту  $\Delta f_1(\tau) \cong f_1'(\tau)\Delta\tau$  (последнее выражение вытекает из

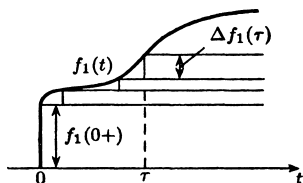


Рис. 4.11

определения производной как предела отношения приращения функции  $\Delta f_1(\tau)$  к приращению аргумента  $\Delta\tau$ ), можно записать в виде

$$\Delta f_1(\tau)\delta_1(t - \tau) \cong f_1'(\tau)\Delta\tau\delta_1(t - \tau),$$

причем  $f_1'(\tau)\Delta\tau$  рассматривается как коэффициент при единичной ступенчатой функции.

Тогда элементарная реакция к моменту  $t$  будет

$$f_1'(\tau)\Delta\tau\delta_1(t-\tau),$$

причем величина  $f_1'(\tau)\Delta\tau$  учитывается по принципу пропорциональности как коэффициент.

По методу наложения находим приближенно реакцию

$$f_2(t) = f_1(0+)h_1(t) + \sum f_1'(\tau)\Delta\tau h_1(t-\tau),$$

причем суммирование ведется по всем  $\Delta\tau$  от 0 до  $t$ .

Считая интервал между элементарными ступенчатыми воздействиями бесконечно малым ( $\Delta\tau \rightarrow d\tau$ ), получим интеграл Дюамеля:

$$f_2(t) = f_1(0+)h_1(t) + \int_0^t f_1'(\tau)h_1(t-\tau)d\tau. \quad (4.17)$$

*Примечания.*

1. Заменой переменных и интегрированием (4.17) по частям можно получить еще 3 формы интеграла Дюамеля, одна из которых фактически совпадает с расчетной формулой интеграла свертки (4.16).

2. Взятие интеграла (4.17) усложняется, если воздействие изменяется скачком, например на  $\Delta f_1(t_0)$  в момент  $t_0$ , однако из вышеприведенного доказательства следует, что в этом случае реакция должна содержать слагаемое  $\Delta f_1(t_0)h_1(t-t_0)$ , а дифференцировать в (4.17) нужно только непрерывную часть  $f_1(\tau)$ .

#### 4.4.3. СЕМЕЙСТВА СТАНДАРТНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦЕПИ

Назовем функцией единичного наклона  $\delta_2(t)$  одностороннюю линейную функцию, равную интегралу от единичной ступенчатой функции:

$$\delta_2(t) = t\delta_1(t) = \int_{-\infty}^t \delta_1(t)dt = \begin{cases} t, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (4.18)$$



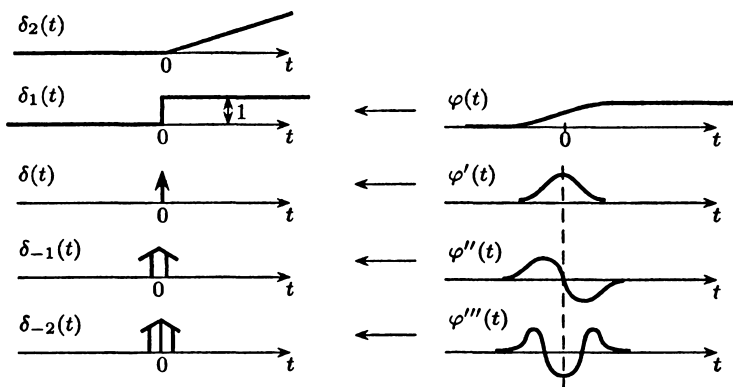


Рис. 4.12

График  $\delta_2(t)$  приведен на рисунке 4.12, причем при  $t > 0$  линейная функция  $\delta_2(t) = at$  имеет единичный коэффициент наклона, т. е.  $a = 1$ .

По аналогии с параграфом 4.3 назовем  $h_2(t)$  характеристикой цепи, численно равной реакции цепи на воздействие вида  $f_1(t) = F_{10}\delta_2(t) = F_{10}t\delta_1(t)$ , где  $F_{10} = 1$  В/с или 1 А/с — коэффициент, выравнивающий размерность. На основании (4.18) по свойству дифференцируемости  $h_2(t)$ , называемому также весовой характеристикой второго порядка, может быть найдена интегрированием переходной характеристики:

$$\begin{aligned}
 h_2(t) &= \int_{-\infty}^t h_1(t)dt = \int_{-\infty}^t h_1^*(t)\delta_1(t)dt = \\
 &= \delta_1(t) \int_{-\infty}^t h_1^*(t)dt = h_2^*(t)\delta_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ h_2^*(t), & t > 0, \end{cases} \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

где  $h_2^*(t)$  — аналитическое продолжение  $h_2(t)$ .

Осуществляя многократное интегрирование (4.18), (4.19), можем продолжить как семейство стандартных воздействий

$$\begin{aligned}
 \delta_3(t) &= \frac{1}{2}t^2\delta_1(t); \\
 \delta_4(t) &= \frac{1}{6}t^3\delta_1(t)\dots,
 \end{aligned}$$

так и семейство соответствующих реакций

$$h_3(t) = \int_{-\infty}^t h_2(t) dt, h_4(t) \dots$$

Однако, чтобы продолжить семейство в другую сторону путем многократного дифференцирования (как показано на рис. 4.12), необходимо иначе задать последовательность функций  $\varphi(t)$ , с помощью которых в параграфе 4.1 была сформирована функция  $\delta_1(t)$ , а в параграфе 4.2 — дельта-функция; функция  $\varphi(t)$  должна быть абсолютно гладкой, допускающей многократное дифференцирование, например, имеющей вид (4.1):

$$\varphi(t) = 0,5 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{t}{\Delta t}$$

при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Вид функции  $\varphi(t)$  и ее производных, экстремумы которых становятся бесконечными при  $\Delta t \rightarrow 0$ , указан справа на рисунке 4.12. При  $\Delta t \rightarrow 0$  «формируются» таким образом производные от дельта-функции:  $\delta_{-1}(t) = \delta'(t)$ ,  $\delta_{-2}(t) = \delta''(t)$ , ..., называемые соответственно числу выбросов  $\varphi''$ ,  $\varphi'''$ , ... ду-плетом, триплетом, ... и обозначаемые, соответственно, стремящейся к бесконечности «двойной стрелкой», «тройной стрелкой», как указано слева на рисунке 4.12. При указанных стандартных воздействиях говорят о соответствующих стандартных реакциях  $h_{-1}(t) = h'(t)$ ,  $h_{-2}(t) = h_{-1}'(t) = h''(t)$ , ..., называемых, соответственно, весовыми характеристиками «минус первого», «минус второго», ... порядков.

*Примечание.* В центре семейства стандартных воздействий и реакций находятся дельта-функция и импульсная характеристика, что в настоящее время является общепринятым для всех дисциплин технико-кибернетического направления.

#### 4.4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ

Воздействие кусочно-линейной формы  $f_1(t)$ , например, показанное на рисунке 4.13, можно описать суммой смещенных односторонних линейных функций, т. е. смещен-

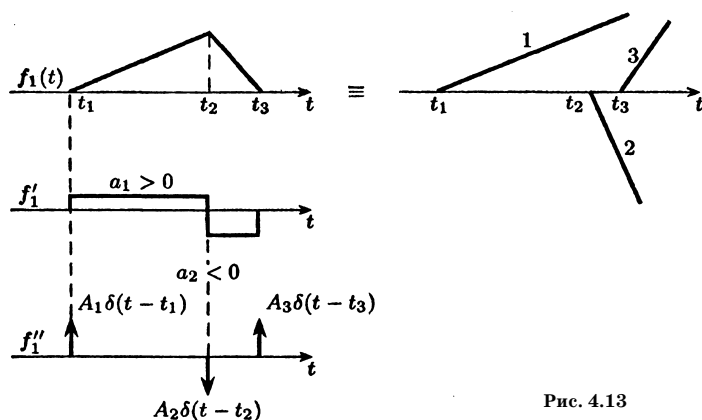


Рис. 4.13

ных стандартных воздействий  $\delta_2$  с некоторыми коэффициентами (рис. 4.13 справа):

$$\begin{aligned} f_1(t) &= I + II + III = \sum A_k \delta_2(t - t_k) = \\ &= \sum A_k(t - t_k) \delta_1(t - t_k), \end{aligned} \quad (4.20)$$

следовательно, реакция при таком воздействии

$$f_2(t) = \sum A_k h_2(t - t_k) = \sum A_k h_k^*(t - t_k) \delta_1(t - t_k). \quad (4.21)$$

Процедура отыскания коэффициентов  $A_k$  в (4.20), (4.21) полностью формализуется при использовании метода двойного дифференцирования, отраженного на рисунке 4.13 слева. Первая производная  $f_1'(t)$  описывается кусочно-ступенчатой функцией, причем

$$\begin{aligned} a_1 &= [f_1(t_2) - f_1(t_1)] / (t_2 - t_1); \\ a_2 &= [f_1(t_3) - f_1(t_2)] / (t_3 - t_2). \end{aligned}$$

Вторая производная — это сумма смещенных дельта-функций:

$$f_1''(t) = \sum A_k \delta(t - t_k), \quad (4.22)$$

коэффициенты  $A_k$  при которых определяются только величинами соответствующих скачков  $f_1'(t)$ , т. е. в рассматриваемом примере  $A_1 = a_1 - 0$ ,  $A_2 = a_2 - a_1$ ,  $A_3 = 0 - a_2$ . Двойное интегрирование (4.22) для получения  $f_1(t)$ , естественно, дает (4.20).

## 4.5. ТИПОВОЙ ПРИМЕР

Схема цепи приведена на рисунке 4.14а:  $i_1$  — воздействие;  $u_2(t)$  — реакция;  $L = 6$  Гн;  $R_2 = 2$  Ом,  $R_3 = 1$  Ом. Найти:  $h_1(t)$ ,  $h(t)$ ,  $h_2(t)$  для  $u_2(t)$ ;  $u_2(t)$  при задании  $i_1(t)$  графиком кусочно-линейной формы (рис. 4.14б).

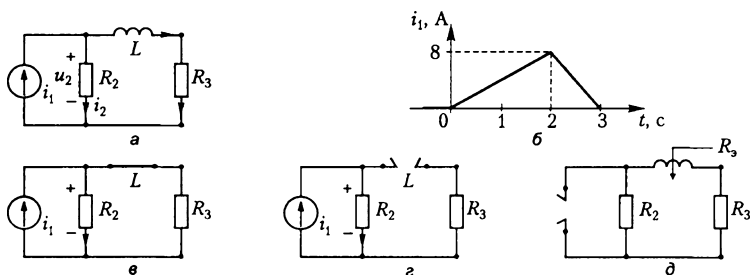


Рис. 4.14

1. Находим переходную и импульсную характеристики цепи для реакции  $u_2(t)$ .

1.  $t = 0-$ . По определению *переходной характеристики* в цепи рисунка 4.14а как бы включается *источник тока единичного уровня* в момент  $t = 0$ , поэтому независимые начальные условия равны нулю, т. е.  $i_L(0-) = 0$ .

2.  $t \rightarrow \infty$ . Находим *вынужденную* составляющую реакции  $u_2(t)$  по эквивалентной схеме замещения рисунка 4.14в. Так как  $i_1 = 1$  А при  $t > 0$ , то в цепи при  $t \rightarrow \infty$  *установившийся* режим при постоянном воздействии, следовательно,

$$u_2 = i_1 / (G_1 + G_2) = 2/3 \text{ В.}$$

3.  $t = 0+$ . Определяем *зависимое начальное условие*  $u_2(0+)$  по эквивалентной схеме замещения рисунка 4.14г. Здесь выводы индуктивного элемента разомкнуты, так как  $i_L(0-) = i_L(0+) = 0$  (по теореме замещения  $L$ -элемент при  $t = 0$  заменяется *источником тока с нулевым током*, т. е. XX). Очевидно  $u_2(0+) = R_2 i_1 = 2$  В.

4. Находим *постоянную времени* цепи  $\tau$ , для чего рассматриваем схему цепи в свободном режиме (рис. 4.14д), в которой по сравнению с исходной схемой (рис. 4.14а)

исключен источник тока  $i_1$ . Определяем эквивалентное сопротивление  $R_3$  относительно выводов накопительного элемента  $L$ :  $R_3 = R_2 + R_3 = 3 \text{ Ом}$ , а затем постоянную времени  $\tau = L / R_3 = 2 \text{ с}$ .

Записываем реакцию  $u_2(t)$  в переходном режиме как сумму вынужденной и свободной составляющих:  $u_2(t) = u_{2\text{вын}} + u_{2\text{св}} = u_{2\text{вын}} + A_1 e^{-t/\tau}$ ; постоянную интегрирования  $A_1$  находим по начальным условиям при  $t = 0+$ , откуда  $A_1 = u_2(0+) - u_{2\text{вын}} = 4/3$ . Тогда  $u_2(t) = 2/3 + 4/3 e^{-0,5t}$  для  $t > 0$ .

Переходная характеристика численно равна реакции цепи, следовательно, для любого момента времени можно записать

$$h_1(t) = h_1^*(t) \delta_1(t) = (2/3 + 4/3 e^{-0,5t}) \delta_1(t).$$

Причем размерность  $[h_1] = [u_2] / [i_1] = \text{В/А} = \text{Ом}$ .

Импульсная характеристика есть производная от переходной характеристики, поэтому по (4.14)

$$h(t) = h_1'(t) = \frac{dh^*(t)}{dt} \delta_1(t) + h_1(0+) \delta(t) = -2/3 e^{-0,5t} \delta_1(t) + 2\delta(t),$$

причем размерность  $[h] = [h_1'] = \text{Ом/с}$ . Графики  $h_1(t)$  и  $h(t)$  для реакции  $u_2(t)$  приведены на рисунке 4.15.

Поскольку при  $t = 0$  переходная характеристика  $h_1(t)$  имеет разрыв, равный 2, то при ее дифференцировании появляется дельта-функция с коэффициентом, равным 2, т. е. площадь этой дельта-функции равна 2. Соответственно, при интегрировании  $2\delta(t)$  получим в переходной ха-

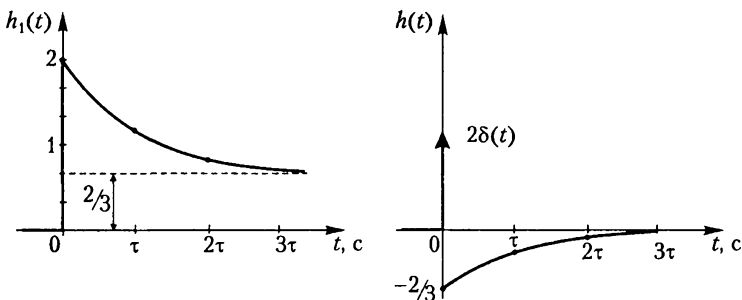


Рис. 4.15

рактеристике при  $t = 0$  скачок (разрыв), значение которого равно 2.

Найдем реакцию  $f_2(t) = u_2(t)$ , если воздействие  $f_1(t) = i_1(t)$  имеет кусочно-линейную форму (см. график на рис. 4.14б).

Вначале для  $t > 0$  находим весовую характеристику второго порядка

$$\begin{aligned} h_2(t) &= \int_0^t h_1(t) dt = \int_0^t (2/3 + 4/3 e^{-0,5t}) dt = \\ &= (2/3)t - (8/3)e^{-0,5t} + 8/3, \end{aligned}$$

тогда для любого момента времени  $h_2(t) = ((2/3)t - (8/3)e^{-0,5t} + 8/3)\delta_1(t)$ .

Затем запишем функцию воздействия аналитически, используя метод двойного дифференцирования (рис. 4.16).

Очевидно  $f_1''(t) = i_1''(t) = 4\delta(t) - 12\delta(t-2) + 8\delta(t-3)$ , тогда

$$f_1(t) = i_1(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t (i_1''(t) dt) dt = 4\delta_2(t) - 12\delta_2(t-2) + 8\delta_2(t-3).$$

Используя принцип наложения, найдем реакцию на такое воздействие, как сумма реакций на каждое слагаемое воздействия в отдельности:

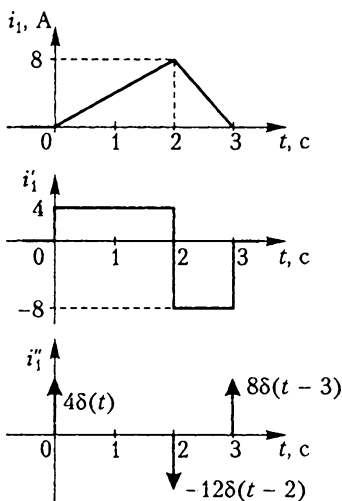


Рис. 4.16

$$\begin{aligned} f_2(t) &= u_2(t) = 4h_2(t) - \\ &- 12h_2(t-2) + 8h_2(t-3) = \\ &= (4/3)[8 + 2t - 8e^{-0,5t}]\delta_1(t) - \\ &- 4[8 + 2(t-2) - \\ &- 8e^{-0,5(t-2)}]\delta_1(t-2) + \\ &+ (8/3)[8 + 2(t-3) - \\ &- 8e^{-0,5(t-3)}]\delta_1(t-3), \end{aligned}$$

причем аргумент  $(t - t_k)$  в квадратных скобках соответствует математической записи запаздывающих относительно друг друга функций, в то время как умножение функции на  $\delta_1(t - t_k)$  соответствует тому, что «произведение» равно нулю при  $t < t_k$ .

# ГЛАВА 5 АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ В УСТАНОВИВШЕМСЯ СИНУСОИДАЛЬНОМ РЕЖИМЕ

**В** настоящее время электроснабжение большого класса потребителей осуществляется от источников синусоидального напряжения или тока. Это большинство промышленных и практически все бытовые потребители. Широкое распространение синусоидальные источники нашли также в радиотехнике. При этом часто интересуются лишь установившимся режимом. Поэтому будем считать, что переходный процесс в цепи закончился и установились синусоидальные напряжения и токи, определение которых удобно производить не во временной, а в частотной области, используя так называемый метод комплексных амплитуд, основанный на алгебре комплексных чисел.

## 5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ

### 5.1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Синусоидальным напряжением или током называют напряжение или ток, изменяющиеся по следующему закону:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u) = U_m \sin(\omega t + \alpha_u'). \quad (5.1)$$

Для записи синусоидального напряжения или тока можно использовать, согласно (5.1), тригонометрическую функцию как косинуса, так и синуса. Очевидно, что

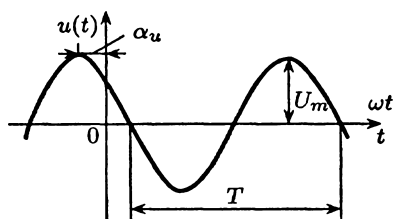


Рис. 5.1

$a_u' = a_u + \pi / 2$ . На практике оказалась удобнее косинусная форма записи. На рисунке 5.1 приведен график синусоидального напряжения.

Приведем величины, характеризующие синусоидальное напряжение (ток).

1. Амплитуда  $U_m$  — максимальное из мгновенных значений.

2. Фаза  $\gamma(t) = \omega t + a_u$  — аргумент функции.

3. Угловая частота  $\omega$  — скорость увеличения фазы, т. е.  $\omega = d\gamma/dt$ .

4. Период  $T$  — наименьший временной интервал повторения периодического синусоидального сигнала, т. е.

$$U_m \cos(\omega t + \alpha_u) = U_m \cos[\omega(t + T) + \alpha_u],$$

следовательно,  $\omega T = 2\pi$ , откуда период  $T = 2\pi / \omega$ .

5. Циклическая частота  $f$  — число периодов в секунду, т. е.  $f = 1 / T$ . Циклическая частота измеряется в герцах; очевидно, что  $\omega = 2\pi / T = 2\pi f$ . Так, промышленной частоте соответствует  $f = 50$  Гц, а  $\omega = 314$  рад/с.

6. Начальная фаза  $a_u$  определяет значение фазы при  $t = 0$  (часто ее для удобства записывают в градусах). Она определяет положение ближайшего положительного максимума (в косинусной форме записи) относительно оси ординат (рис. 5.1): при  $a_u > 0$  этот максимум будет смещен влево от оси ординат на величину  $a_u$ .

7. Разность фаз, или сдвиг по фазе двух синусоидальных функций одинаковой частоты, — это разность их начальных фаз. Так, если  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u)$ , а  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha_i)$ , то сдвигом по фазе между током и напряжением будем называть угол  $\varphi = \alpha_u - \alpha_i$ .



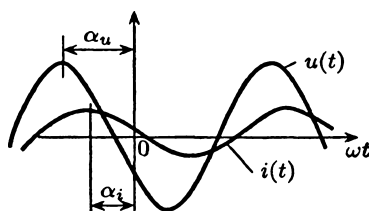


Рис. 5.2

Если  $a_u > \alpha_i$ , то  $\varphi > 0$  (рис. 5.2), тогда максимум напряжения наступает раньше, чем максимум тока. В этом случае говорят, что ток отстает по фазе на угол  $\varphi$  от напряжения или напряжение опережает по фазе ток на угол  $\varphi$ .

Если  $a_u < \alpha_i$ , то  $\varphi < 0$ , тогда максимум тока наступает раньше, чем максимум напряжения. В этом случае говорят, что ток опережает напряжение по фазе на угол  $|\varphi|$  или напряжение отстает по фазе на угол  $|\varphi|$  от тока. При  $\varphi = 0$  имеем  $a_u = \alpha_i$ , и тогда ток и напряжение совпадают по фазе.

### 5.1.2. СРЕДНЕЕ И ДЕЙСТВУЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

Среднее за период значение любой периодической функции определяется в соответствии с теоремой о среднем следующим образом:

$$F_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (5.2)$$

Для синусоидальных токов и напряжений среднее значение (5.2) за период равно нулю, так как площадь за период равна нулю. Иногда говорят о среднем значении положительной полуволны

$$U_{\text{cp}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_m \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} U_m, \quad (5.3)$$

причем полученное в (5.3) значение часто называют средним выпрямленным значением.

Очень важной характеристикой периодических напряжений и токов является действующее, или эффективное,

значение. Действующее значение периодического тока численно равно такому значению постоянного тока, который за время, равное периоду, выделит в  $R$ -элементе одинаковое количество энергии. Пусть  $i(t)$  — периодический ток  $R$ -элемента. Тогда энергия, расходуемая за период, определяется

$$W_+ = \int_0^T Ri^2(t)dt. \quad (5.4)$$

При протекании постоянного тока энергия, расходуемая за это же время, будет

$$W_+ = \int_0^T RI^2dt = RI^2T. \quad (5.5)$$

Приравнявая (5.4) и (5.5), получим действующее значение любого периодического тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (5.6)$$

Для синусоидального тока, согласно (5.6), выполняется

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m. \quad (5.7)$$

Приборы, применяемые для измерения синусоидальных напряжений и токов, за немногими исключениями, показывают действующее значение.

### 5.1.3. ЗАДАЧА АНАЛИЗА УСТАНОВИВШЕГОСЯ СИНУСОИДАЛЬНОГО РЕЖИМА

Реакция цепи на заданное воздействие состоит из свободной и вынужденной составляющих. Свободная составляющая не зависит от вида воздействия и при  $t \rightarrow \infty$  стремится к нулю, так как корни характеристического уравнения линейной пассивной цепи всегда отрицательны либо имеют отрицательную вещественную часть, если они комплексные. Вынужденная составляющая определяется ви-

дом правой части дифференциального уравнения, а при периодическом воздействии понятия вынужденной и установившейся составляющих совпадают. При действии источников синусоидального напряжения и тока одинаковой частоты в правой части дифференциального уравнения будет синусоидальная функция, так как суммирование и дифференцирование синусоидальных функций одной частоты дают синусоидальную функцию той же частоты. Из математики известно, что частным решением в этом случае будет синусоидальная функция, т. е. вынужденная (или установившаяся) составляющая искомого тока будет

$$i_B = i_Y = I_m \cos(\omega t + \alpha_i), \quad (5.8)$$

где  $\omega$  — заданная частота источников;  $I_m$  и  $\alpha_i$  — неизвестные амплитуда и начальная фаза установившегося тока.

В принципе, их можно найти в  $t$ -области подстановкой тока (5.8) в дифференциальное уравнение. Рассмотрим эту возможность на примере простейшей последовательной  $RL$ -цепи.

В цепи (рис. 5.3.) действует синусоидальный источник напряжения  $u_0(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u)$ . Дифференциальное уравнение, полученное по закону Кирхгофа при обходе контура:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u_0(t).$$

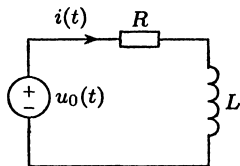


Рис. 5.3

Подставим ток (5.8) и заданное напряжение в уравнение

$$-\omega L I_m \sin(\omega t + \alpha_i) + R I_m \cos(\omega t + \alpha_i) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u).$$

Для определения  $I_m$  и  $\alpha_i$  необходимо решить это тригонометрическое уравнение, где неизвестная  $\alpha_i$  входит в аргумент тригонометрической функции. Решение подобных уравнений является сложной задачей. Поэтому для расчета установившегося синусоидального режима (определения  $I_m$  и  $\alpha_i$ ) разработан специальный метод комплексных амплитуд, в основе которого лежит представление (5.8) через экспоненту с мнимым аргументом, что позво-

ляет определить  $I_m$  и  $\alpha_i$  из алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами. Кроме этого, метод комплексных амплитуд позволяет использовать методы расчета  $R$ -цепей для анализа установившегося синусоидального режима.

## 5.2. МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД

В последующих параграфах будем считать (если это специально не оговаривается), что цепь находится в установившемся синусоидальном режиме, т. е.  $f_{\text{св}}(t) = 0$ , а  $f(t) = f_{\text{вын}}(t) = f_{\text{уст}}(t)$ .

### 5.2.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ ЭКСПОНЕНТЫ С МНИМЫМ АРГУМЕНТОМ

Из тригонометрии известно, что синусоидальную функцию времени можно получить как проекцию вектора, вращающегося против часовой стрелки с угловой скоростью, равной угловой частоте функции, причем длина вектора равна амплитуде функции, а начальное положение вектора при  $t = 0$  определяется начальной фазой. Проекция такого вектора на ось абсцисс комплексной плоскости дает косинусную форму записи синусоидальной функции, а на ось ординат — синусную форму записи этой функции. Для аналитической записи вращающегося вектора удобно использовать комплексные числа.

Комплексное число  $\dot{A}$  можно записать в алгебраической, тригонометрической и показательной формах:

$$\dot{A} = a + jb = A \cos \gamma + j A \sin \gamma = A e^{j\gamma}, \quad (5.9)$$

где  $a = \operatorname{Re} \dot{A}$  — вещественная (реальная), а  $b = \operatorname{Im} \dot{A}$  — мнимая составляющие комплексного числа  $\dot{A}$ ;  $A$  — модуль;  $\gamma$  — аргумент (угол) комплексного числа  $\dot{A}$ ;  $j = \sqrt{-1}$ .

Очевидны также следующие соотношения между компонентами комплексного числа:

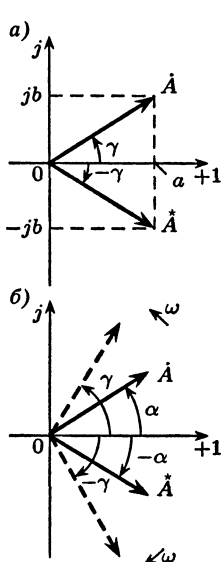


Рис. 5.4

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \text{Mod } \dot{A} = |\dot{A}|;$$

$$\gamma = \arctg \frac{b}{a} = \text{Arg } \dot{A}. \quad (5.10)$$

С помощью комплексного числа можно определять радиус-вектор, начинающийся в начале координат и заканчивающийся в точке, определяемой комплексным числом на комплексной плоскости (рис. 5.4а). Длина вектора  $A = \text{Mod } \dot{A}$ , а угол  $\gamma = \text{Arg } \dot{A}$ .

Сопряженным комплексным числом  $\dot{A}$  называется число, отличающееся лишь знаком мнимой части:

$$\dot{A}^* = a - jb = A \cos \gamma - jA \sin \gamma = Ae^{-j\gamma}. \quad (5.11)$$

На комплексной плоскости сопряженному числу будет соответствовать вектор той же длины, но расположенный под углом  $-\gamma$ . Если положить, что  $\gamma = \omega t + \alpha$ , то это будет означать, что угол  $\gamma$  с течением времени будет увеличиваться, т. е. вектор  $\dot{A}$  будет вращаться вокруг начала координат с угловой скоростью  $\omega$  против часовой стрелки, а вектор  $\dot{A}^*$  точно так же — по часовой стрелке. При этом положение вектора при  $t = 0$  будет определяться углом  $\alpha$  (рис. 5.4б).

Тогда для  $\gamma = \omega t + \alpha$  из (5.9)–(5.11) получим:

$$\dot{A} = Ae^{j(\omega t + \alpha)} = A \cos(\omega t + \alpha) + jA \sin(\omega t + \alpha); \quad (5.12)$$

$$\dot{A}^* = Ae^{-j(\omega t + \alpha)} = A \cos(\omega t + \alpha) - jA \sin(\omega t + \alpha). \quad (5.13)$$

Сложив (5.12), (5.13) и переходя к принятым для синусоидальных напряжений (токов) обозначениям, находим:

$$U_m \cos(\omega t + \alpha_u) = \text{Re}[U_m e^{j(\omega t + \alpha_u)}] =$$

$$= \frac{1}{2}[U_m e^{j(\omega t + \alpha_u)} + U_m e^{-j(\omega t + \alpha_u)}], \quad (5.14)$$

т. е. получаем аналитическое описание проекции вращающегося вектора на ось абсцисс в виде косинусной формы записи синусоидального напряжения (тока).

Аналогично, вычитая (5.13) из (5.12), получим аналитическую запись проекции вращающегося вектора на ось ординат, т. е. синусную форму записи синусоидального напряжения (тока):

$$\begin{aligned} U_m \sin(\omega t + a_u) &= \text{Im}[U_m e^{j(\omega t + a_u)}] = \\ &= \frac{1}{2j} [U_m e^{j(\omega t + a_u)} - U_m e^{-j(\omega t + a_u)}]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Преобразуем (5.14):

$$\begin{aligned} U_m \cos(\omega t + a_u) &= \text{Re}[U_m e^{j(\omega t + a_u)}] = \\ &= \frac{1}{2} [U_m e^{ja_u} e^{j\omega t} + U_m e^{-ja_u} e^{-j\omega t}] = \\ &= \text{Re}[\dot{U}_m e^{j\omega t}] = \frac{1}{2} [\dot{U}_m e^{j\omega t} + \dot{U}_m e^{-j\omega t}], \end{aligned} \quad (5.16)$$

причем  $\dot{U}_m = U_m e^{ja_u}$  будем называть комплексной амплитудой.

Как видно, модуль комплексной амплитуды равен амплитуде синусоидального напряжения (тока), а аргумент — начальной фазе. На комплексной плоскости комплексная амплитуда изображается вектором, длина которого равна амплитуде напряжения (тока), повернутым на угол, равный углу начальной фазы.

Аналогично, для (5.15)

$$U_m \sin(\omega t + \alpha_m) = \text{Im}[\dot{U}_m e^{j\omega t}] = \frac{1}{2j} [\dot{U}_m e^{j\omega t} - \dot{U}_m e^{-j\omega t}]. \quad (5.17)$$

Синусоидальные напряжения (5.15) и (5.16) выражены через экспоненты с мнимым аргументом.

Таким образом, задача анализа электрической цепи в установившемся синусоидальном режиме может быть сведена к поиску комплексной амплитуды, так как комплексная амплитуда определяет обе неизвестные величины — амплитуду и фазу реакции.

**Пример 1.** Если в результате анализа найдена комплексная амплитуда  $\dot{I}_m = 3 + j4$ , то амплитуда тока

$$I_m = \text{Mod } \dot{I}_m = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ A},$$

начальная фаза  $\alpha_i = \text{Arg } \dot{I}_m = \arctg 4/3 = 53^\circ$ , следовательно, ток  $i(t) = 5 \cos(\omega t + 53^\circ)$ .

Таким образом, существует однозначное соответствие между комплексной амплитудой и синусоидальной функцией времени.

**Пример 2.** Напряжению  $u(t) = 10\cos(\omega t + 60^\circ)$  соответствует комплексная амплитуда

$$\dot{U}_m = 10e^{j60^\circ} = 10\cos 60^\circ + j10\sin 60^\circ = 5 + j8,6.$$

Сопряженная комплексная амплитуда в (5.16) и (5.17) не несет никакой новой информации. Множитель  $e^{j\omega t}$  в (5.16) и (5.17) превращает неподвижный вектор комплексной амплитуды во вращающийся, и его часто называют оператором вращения.

Рассмотрим возможный способ определения установившегося синусоидального тока в последовательной  $RL$ -цепи (рис. 5.3).

Представим заданное воздействие и искомый установившийся ток в соответствии с (5.16):

$$u_0(t) = 0,5[\dot{U}_m e^{j\omega t} + \dot{U}_m^* e^{-j\omega t}];$$

$$i(t) = 0,5[\dot{I}_m e^{j\omega t} + \dot{I}_m^* e^{-j\omega t}],$$

где  $\dot{U}_m = U_m e^{j\alpha_u}$  — комплексная амплитуда заданного напряжения, а  $\dot{I}_m = I_m e^{j\alpha_i}$  — комплексная амплитуда искомого тока, которую надо найти.

Для ее определения можно подставить в дифференциальное уравнение приведенные выражения для  $u_0(t)$  и  $i(t)$ , но в этом случае получим два уравнения для определения

$$\dot{I}_m \text{ и } \dot{I}_m^*.$$

Поскольку, как уже отмечалось, сопряженная комплексная амплитуда не несет новой информации по сравнению с  $\dot{I}_m$ , то для того, чтобы сразу получить уравнение только относительно комплексной амплитуды, целесообразно подставить в дифференциальное уравнение условные представления:

$$\begin{aligned} i(t) &\doteq \dot{I}_m e^{j\omega t}; \\ u_0(t) &\doteq \dot{U}_m e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

После подстановки получим

$$j\omega L \dot{I}_m e^{j\omega t} + R \dot{I}_m e^{j\omega t} = \dot{U}_m e^{j\omega t}.$$

Экспонента  $e^{j\omega t}$  будет входить в левую и правую части дифференциального уравнения любого порядка, и ее всегда можно сократить. Получим алгебраическое уравнение  $(R + j\omega L) \dot{I}_m = \dot{U}_m$ , откуда

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{R + j\omega L} = \frac{U_m e^{j\alpha_u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j\varphi}} = \frac{U_m e^{j(\alpha_u - \varphi)}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},$$

где  $\varphi = \arctg(\omega L / R)$ .

$$\text{Следовательно, } I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad \alpha_i = \alpha_u - \varphi.$$

Тогда искомый ток

$$i(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t + \alpha_u - \varphi).$$

### 5.2.2. ЗАКОНЫ КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ ЗАПИСИ

Первый закон Кирхгофа (ЗТК) для токов, сходящихся в узел,

$$\sum_{(k)} \dot{i}_k(t) = 0, \quad (5.19)$$

где  $\dot{i}_k(t) = I_{mk} \cos(\omega t + \alpha_{ik})$  — синусоидальные токи одинаковой частоты. Подставим в (5.19) условные равенства вида (5.18) для каждого тока:

$$\dot{i}_k(t) \doteq \dot{I}_{mk} e^{j\omega t}.$$

Тогда, вынося  $e^{j\omega t}$  за знак суммы, запишем

$$e^{j\omega t} \sum_{(k)} \dot{I}_{mk} = 0,$$

откуда получим первый закон Кирхгофа в комплексной форме:



$$\sum_{(k)} \dot{I}_{mk} = 0, \quad (5.20)$$

т. е. сумма комплексных амплитуд синусоидальных токов, сходящихся в узел, равна нулю.

Второй закон Кирхгофа (ЗНК) для напряжений замкнутого контура

$$\sum_{(k)} u_k(t) = 0,$$

где  $u_k(t) = U_{mk} \cos(\omega t + \alpha_{uk})$  — синусоидальные напряжения одинаковой частоты.

Проводя аналогичные рассуждения, придем к выводу, что

$$\sum_{(k)} \dot{U}_{mk} = 0. \quad (5.21)$$

Таким образом, второй закон Кирхгофа в комплексной форме утверждает, что сумма комплексных амплитуд синусоидальных напряжений замкнутого контура равна нулю.

Следует обратить внимание на то, что полученные законы Кирхгофа в комплексной форме справедливы именно для комплексных амплитуд и не справедливы для амплитуд токов и напряжений. Это обстоятельство отражает тот факт, что длина суммарного вектора не равна сумме длин слагаемых векторов.

На практике часто пользуются понятиями комплексных действующих значений напряжения и тока

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}}, \quad \dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}}. \quad (5.22)$$

С учетом (5.20)–(5.22) законы Кирхгофа для комплексных действующих значений:

$$\begin{aligned} \sum_{(k)} \dot{I}_k &= 0; \\ \sum_{(k)} \dot{U}_k &= 0. \end{aligned}$$

### 5.2.3. ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ В УСТАНОВИВШЕМСЯ СИНУСОИДАЛЬНОМ РЕЖИМЕ

Прежде чем приступить к анализу  $RLC$ -цепей в установившемся синусоидальном режиме, необходимо изучить поведение отдельных элементов электрической цепи в этом режиме. Рассмотрим вольт-амперные и энергетические характеристики, считая, что к элементу приложено напряжение  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u)$  и протекает ток  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha_i)$ . Будем интересоваться соотношениями между амплитудами и начальными фазами напряжения и тока элемента:

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\alpha_u} \text{ и } \dot{I}_m = I_m e^{j\alpha_i}.$$

**1. Резистивный элемент.** Подставим в вольт-амперную характеристику элемента  $u = Ri$  синусоидальные напряжение и ток  $U_m \cos(\omega t + \alpha_u) = RI_m \cos(\omega t + \alpha_i)$ . Отсюда следует, что в  $R$ -элементе  $U_m = RI_m$ ,  $\alpha_u = \alpha_i$ . Угол сдвига по фазе между напряжением и током  $\varphi = \alpha_u - \alpha_i = 0$ , т. е. ток и напряжение  $R$ -элемента совпадают по фазе (рис. 5.5а).

Подставив в вольт-амперную характеристику условные представления  $u(t) = \dot{U}_m e^{j\omega t}$ , получим

$$\dot{U}_m e^{j\omega t} = R \dot{I}_m e^{j\omega t},$$

или после сокращения

$$\dot{U}_m = R \dot{I}_m. \quad (5.23)$$

Из (5.23) видно, что векторы комплексной амплитуды напряжения и комплексной амплитуды тока сонаправлены, так как  $R$  — вещественный коэффициент (рис. 5.5б).

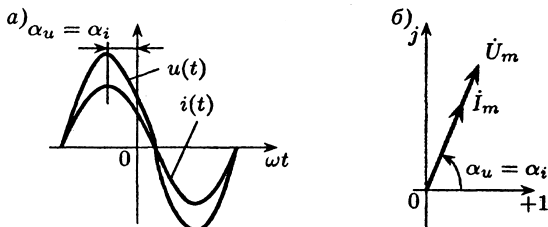


Рис. 5.5

Введем понятие комплексного сопротивления элемента как отношения комплексных амплитуд напряжения и тока:

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{U_m e^{j\alpha_u}}{I_m e^{j\alpha_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\alpha_u - \alpha_i)} = |Z| e^{j\varphi}, \quad (5.24)$$

причем из (5.24) следует, что аргумент  $\varphi$  комплексного сопротивления равен углу фазового сдвига между током и напряжением.

Будем называть комплексной проводимостью элемента отношение комплексной амплитуды тока к комплексной амплитуде напряжения:

$$Y = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = \frac{I_m e^{j\alpha_i}}{U_m e^{j\alpha_u}} = \frac{I_m}{U_m} e^{j(\alpha_i - \alpha_u)} = |Y| e^{j\psi}, \quad (5.25)$$

причем из (5.25) очевидно, что  $Y = 1 / Z$ ,  $\psi = \alpha_i - \alpha_u = -\varphi$ .

Тогда для  $R$ -элемента комплексное сопротивление будет

$$Z_R = |Z_R| e^{j\varphi} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = R, \quad (5.26)$$

а комплексная проводимость —

$$Y_R = |Y_R| e^{j\psi} = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = \frac{1}{R} = G. \quad (5.27)$$

Из (5.26), (5.27) следует, что

$$\begin{aligned} Z_R &= |Z_R| = R, & \varphi &= \alpha_u - \alpha_i = 0; \\ Y_R &= |Y_R| = \frac{1}{R} = G, & \psi &= -\varphi = 0. \end{aligned}$$

Мгновенная мощность

$$\begin{aligned} p_R(t) &= Ri^2 = R I_m^2 \cos^2(\omega t + \alpha_i) = \frac{RI_m^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \alpha_i)] = \\ &= RI^2 [1 + \cos 2(\omega t + \alpha_i)] \geq 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Из (5.28) следует, что мощность колеблется с двойной частотой вокруг своего среднего значения, оставаясь положительной. Среднее значение мощности за период называют активной мощностью. Для  $R$ -элемента активная мощность

$$P_a = P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T p_R(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T RI^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T RI^2 \cos 2(\omega t + \alpha_i) dt = RI^2,$$

или, используя очевидные соотношения, получим

$$P_a = RI^2 = GU^2 = UI. \quad (5.29)$$

*Примечание.* (5.29) совпадает по форме записи с формулой мощности  $R$ -элемента при протекании через него постоянного тока, но в (5.29) определяется среднее значение мощности при протекании через  $R$ -элемент синусоидального тока с действующим значением  $I = I_m / \sqrt{2}$ .

**2. Индуктивный элемент.** Подставим в вольт-амперную характеристику  $L$ -элемента  $u = L \frac{di}{dt}$  синусоидальные напряжение и ток:

$$\begin{aligned} U_m \cos(\omega t + a_u) &= -\omega LI_m \sin(\omega t + a_i) = \\ &= \omega LI_m \cos(\omega t + a_i + \pi / 2). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Из (5.30) следует, что в  $L$ -элементе  $U_m = \omega LI_m$ , а  $a_u = a_i + \pi / 2$ . Угол фазного сдвига  $\varphi = a_u - a_i = \pi / 2$ , т. е. ток элемента  $L$  отстает по фазе от напряжения на  $\pi / 2$  (рис. 5.6а). Коэффициент пропорциональности между амплитудой напряжения и амплитудой тока имеет размерность сопротивления. Его называют индуктивным сопротивлением  $X_L$ , т. е.

$$X_L = \frac{U_m}{I_m} = \omega L. \quad (5.31)$$

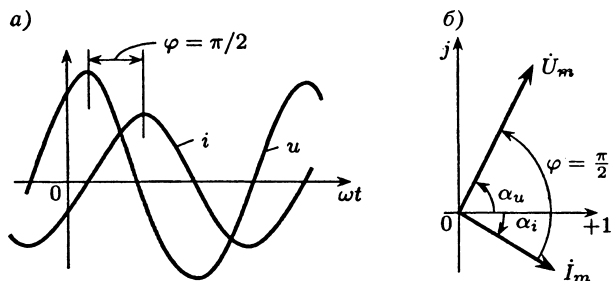


Рис. 5.6

Индуктивное сопротивление (5.31) зависит от частоты. Так, при  $\omega = 0$  (постоянный ток)  $X_L = 0$ , а при  $\omega \rightarrow \infty$  сопротивление  $X_L \rightarrow \infty$ . Это обстоятельство позволяет заменять для расчетных целей  $L$ -элемент короткозамкнутым участком (КЗ) при  $\omega = 0$  и разрывом (ХХ) при  $\omega \rightarrow \infty$ .

Индуктивной проводимостью  $B_L$  называют величину, обратную индуктивному сопротивлению:

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{I_m}{U_m} = \frac{1}{\omega L}.$$

Если в вольт-амперную характеристику подставим  $u(t) = \dot{U}_m e^{j\omega t}$ ,  $i(t) = \dot{I}_m e^{j\omega t}$ , получим  $\dot{U}_m e^{j\omega t} = j\omega L \dot{I}_m e^{j\omega t}$  и соотношение для комплексных амплитуд  $\dot{U}_m e^{j\omega t} = j\omega L \dot{I}_m e^{j\omega t}$ , или после сокращения

$$\dot{U}_m = j\omega L \dot{I}_m. \quad (5.32)$$

Из (5.32) видно, что вектор  $U_m$  повернут относительно вектора  $I_m$  на  $\pi / 2$ , так как  $j = e^{j\pi/2}$ , т. е. ток отстает от напряжения на  $\pi / 2$  (рис. 5.6б).

Из (5.32) получим комплексное сопротивление  $L$ -элемента

$$Z_L = |Z_L| e^{j\varphi} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = j\omega L = \omega L e^{j\pi/2} = X_L e^{j\pi/2}. \quad (5.33)$$

Комплексная проводимость будет

$$Y_L = |Y_L| e^{j\psi} = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{\omega L} e^{-j\pi/2} = B_L e^{-j\pi/2}. \quad (5.34)$$

Из (5.33), (5.34) следует, что

$$\begin{cases} Z_L = j\omega L, & |Z_L| = X_L = \omega L, & \varphi = \pi/2; \\ Y_L = -j \frac{1}{\omega L}, & |Y_L| = B_L = \frac{1}{\omega L}, & \psi = -\varphi = -\pi/2. \end{cases} \quad (5.35)$$

Энергия, запасенная в индуктивности,

$$\begin{aligned} W_L(t) &= \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \cos^2(\omega t + \alpha_i) = \\ &= \frac{LI_m^2}{2} \frac{1}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \alpha_i)] = \frac{LI^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \alpha_i)], \end{aligned}$$

т. е. колеблется с двойной частотой относительно среднего значения

$$W_{Lcp} = \frac{LI^2}{2};$$

дважды за период тока происходят накопление энергии в магнитном поле  $L$ -элемента и ее возврат в остальную цепь. Мгновенная мощность  $L$ -элемента будет

$$p_L(t) = ui = \frac{dW_L}{dt} = -\omega LI^2 \sin(2\omega t + \alpha_i). \quad (5.36)$$

Как следует из (5.36), мощность изменяется с двойной частотой по синусоидальному закону, следовательно, среднее значение мощности за период (т. е. активная мощность)  $L$ -элемента равна нулю. Это отражает тот факт, что энергия в  $L$ -элементе не потребляется, т. е.  $L$ -элемент является реактивным элементом. Будем называть реактивной мощностью экстремальную скорость поступления энергии в элемент, у которого ток и напряжение сдвинуты на угол  $|\varphi| = \pi / 2$ . Ей присваивается специальная единица измерения — вольт-ампер реактивный (вар). Реактивная мощность  $L$ -элемента

$$P_Q = P_{Lmax} = \omega LI^2 = X_L I^2 = UI = B_L U^2.$$

**3. Емкостной элемент.** Подставим в вольт-амперную характеристику  $C$ -элемента  $i = C \frac{du}{dt}$  синусоидальные ток и напряжение:

$$\begin{aligned} I_m \cos(\omega t + \alpha_i) &= -\omega C U_m \sin(\omega t + \alpha_u) = \\ &= \omega C U_m \cos(\omega t + \alpha_u + \pi / 2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $I_m = \omega C U_m$ , а  $\alpha_i = \alpha_u + \pi / 2$ . Угол фазного сдвига  $\varphi = \alpha_u - \alpha_i = -\pi / 2$ , т. е. ток элемента  $C$  опережает по фазе напряжение на угол  $\pi / 2$  (рис. 5.7а).

Емкостное сопротивление

$$X_C = \frac{U_m}{I_m} = \frac{1}{\omega C}$$

зависит от частоты. При  $\omega = 0$  выполняется  $X_C = \infty$ , а при  $\omega \rightarrow \infty$ , соответственно,  $X_C \rightarrow 0$ . Это обстоятельство позво-

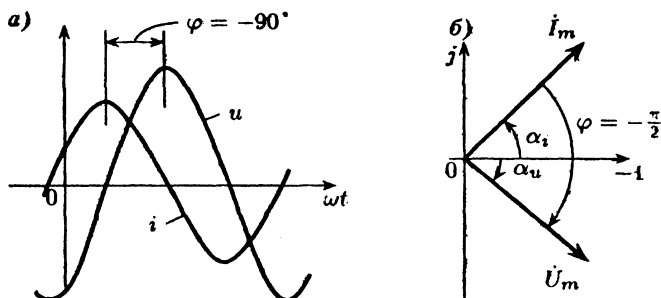


Рис. 5.7

ляет заменить для расчетных целей  $C$ -элемент разрывом (XX) при  $\omega = 0$  (постоянный ток) и короткозамкнутым участком (КЗ) при  $\omega \rightarrow \infty$ .

Емкостная проводимость будет

$$B_C = \frac{1}{X_C} = \frac{I_m}{U_m} = \omega C.$$

В комплексной форме  $\dot{I}_m e^{j\omega t} = j\omega C \dot{U}_m e^{j\omega t}$ , откуда

$$\dot{I}_m = j\omega C \dot{U}_m. \quad (5.37)$$

Из (5.37) видно, что вектор  $\dot{I}_m$  повернут относительно вектора  $\dot{U}_m$  на  $\pi/2$ , т. е. ток опережает напряжение на  $\pi/2$  (рис. 5.7б).

Из (5.37) получим комплексное сопротивление  $C$ -элемента

$$Z_C = |Z_C| e^{j\varphi} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} = X_C e^{-j\pi/2}. \quad (5.38)$$

Комплексная проводимость будет

$$Y_C = |Y_C| e^{j\Psi} = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = j\omega C = \omega C e^{j\pi/2} = B_C e^{j\pi/2}. \quad (5.39)$$

Из (5.38), (5.39) следует:

$$\begin{cases} Z_C = -j \frac{1}{\omega C}, & |Z_C| = X_C = \frac{1}{\omega C}, & \varphi = -\pi/2; \\ Y_C = j\omega C, & |Y_C| = B_C = \omega C, & \Psi = -\varphi = \pi/2. \end{cases}$$

Энергия, запасаемая в емкости,

$$W_C(t) = \frac{CU^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} \cos^2(\omega t + \alpha_u) = \frac{CU^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \alpha_u)]$$

колеблется с двойной частотой вокруг своего среднего значения  $W_{Ccp} = CU^2 / 2$ ; дважды за период приложенного напряжения происходят накопление энергии в электрическом поле  $C$ -элемента и ее возврат в остальную цепь.

Мгновенная мощность  $C$ -элемента

$$p_C(t) = ui = dW / dt = -\omega CU^2 \sin 2(\omega t - \alpha_u), \quad (5.40)$$

как и в  $L$ -элементе, изменяется с двойной частотой по синусоидальному закону. Таким образом,  $P_{cp} = 0$ , а реактивная мощность  $C$ -элемента

$$|P_Q| = P_{Cmax} = \omega CU^2 = B_C U^2 = UI = X_C I^2,$$

т. е.  $C$ -элемент является реактивным элементом.

Аналогия выражений, полученных для  $L$ - и  $C$ -элементов, объясняется дуальностью этих элементов.

#### 5.2.4. КОМПЛЕКСНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ДВУХПОЛЮСНИКА. ЗАКОН ОМА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Понятие комплексного сопротивления, введенное для элементов цепи, можно распространить на произвольный  $RLC$ -двухполюсник:

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{U_m e^{j\alpha_u}}{I_m e^{j\alpha_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\alpha_u - \alpha_i)} = |Z| e^{j\varphi}; \quad (5.41)$$

$$Z = |Z| e^{j\varphi} = |Z| \cos \varphi + j |Z| \sin \varphi = r + jx.$$

Из (5.41) следует, что модуль комплексного сопротивления определяет отношение амплитуды напряжения к амплитуде тока:

$$|Z| = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}.$$

Аргумент комплексного сопротивления  $\varphi$  определяет сдвиг по фазе между током и напряжением:

$$\varphi = \alpha_u - \alpha_i.$$



Вещественную составляющую комплексного сопротивления называют активной, или резистивной, составляющей

$$r = |Z| \cos \varphi,$$

мнимую часть комплексного сопротивления называют реактивной составляющей

$$x = |Z| \sin \varphi.$$

Аналогично, комплексная проводимость произвольного двухполюсника будет

$$\begin{cases} Y = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = \frac{I_m e^{j\alpha_i}}{U_m e^{j\alpha_u}} = \frac{I_m}{U_m} e^{j(\alpha_i - \alpha_u)} = |Y| e^{j\Psi}; \\ Y = |Y| e^{j\Psi} = |Y| \cos \Psi + j |Y| \sin \Psi = g + jb, \end{cases}$$

где  $|Y| = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I}{U}$ ;  $\Psi = \alpha_i - \alpha_u = -\varphi$ ;  $g = |Y| \cos \Psi$  — активная составляющая комплексной проводимости;  $b = |Y| \sin \Psi$  — реактивная составляющая.

Очевидно, что можно записать

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r + jx} = \frac{r}{r^2 + x^2} - j \frac{x}{r^2 + x^2} = g + jb.$$

Аналогично, записывается

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{g + jb} = \frac{g}{g^2 + b^2} - j \frac{b}{g^2 + b^2} = r + jx.$$

Введение понятия комплексного сопротивления, как коэффициента пропорциональности между комплексной амплитудой напряжения и комплексной амплитудой тока, и означает введение закона Ома в комплексной форме:

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= Z \dot{I}_m, & \dot{U} &= Z \dot{I}; \\ \dot{I}_m &= Y \dot{U}_m, & \dot{I} &= Y \dot{U}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

По форме записи закон Ома в комплексной форме (5.42) аналогичен закону Ома для  $R$ -цепей, однако здесь он устанавливает связь не между током и напряжением двухполюсника, а между комплексными амплитудами синусоидального напряжения и тока двухполюсника.

### 5.3. АНАЛИЗ ПРОСТЫХ ЦЕПЕЙ В УСТАНОВИВШЕМСЯ СИНУСОИДАЛЬНОМ РЕЖИМЕ. КОМПЛЕКСНАЯ СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ

После введения комплексного сопротивления для элементов цепи, законов Ома и Кирхгофа в комплексной форме можно уравнения относительно комплексных амплитуд получать не из дифференциальных уравнений, а из так называемой комплексной схемы замещения. Комплексная схема может быть получена из исходной, если элементы цепи заменить их комплексными сопротивлениями, а имеющиеся в цепи токи и напряжения синусоидальной формы — их комплексными амплитудами. Так как законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме аналогичны законам  $R$ -цепей, то все методы расчета  $R$ -цепей можно применить для анализа комплексной схемы замещения.

#### 5.3.1. УСТАНОВИВШИЙСЯ СИНУСОИДАЛЬНЫЙ РЕЖИМ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ $RLC$ -ЦЕПИ

На рисунке 5.8а приведена последовательная  $RLC$ -цепь, где  $u_0(t) = U_m \cos(\omega t + a_u)$ , а на рисунке 5.8б — ее комплексная схема замещения, где  $Z_L = jX_L = j\omega L$ ,  $Z_C = -jX_C = -j\frac{1}{\omega C}$ ,  $Z_R = R$ ,  $\dot{U}_m = U_m e^{ja_u}$ .

Входное комплексное сопротивление будет

$$Z_{\text{вх}} = Z_R + Z_L + Z_C = R + j(X_L - X_C) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

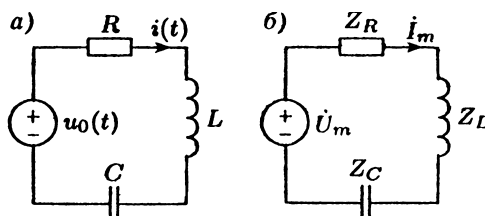


Рис. 5.8

следовательно, комплексная амплитуда тока оказывается

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z_{\text{BX}}} = \frac{\dot{U}_m}{R + j(X_L - X_C)} = \frac{U_m e^{j(\alpha_u - \varphi)}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}},$$

где угол фазного сдвига  $\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$ .

Амплитуда синусоидального тока в цепи (рис. 5.8a) будет

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}},$$

а начальная фаза тока записывается как  $\alpha_i = \alpha_u - \varphi = \alpha_u - \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$ .

Таким образом, ток в цепи будет

$$i(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \cos(\omega t + \alpha - \varphi).$$

Аналогично можно найти комплексные амплитуды напряжений элементов цепи:

$$\dot{U}_{mR} = Z_R \dot{I}_m = R \dot{I}_m;$$

$$\dot{U}_{mL} = Z_L \dot{I}_m = jX_L \dot{I}_m;$$

$$\dot{U}_{mC} = Z_C \dot{I}_m = -jX_C \dot{I}_m.$$

Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. Может оказаться, что  $X_L > X_C$ , т. е.

$$\omega L > \frac{1}{\omega C},$$

следовательно,  $U_{mL} = X_L I_m > U_{mC} = X_C I_m$ .

На рисунке 5.9a построена векторная диаграмма (ВД) для этого случая: ток  $i(t)$  отстает по фазе от

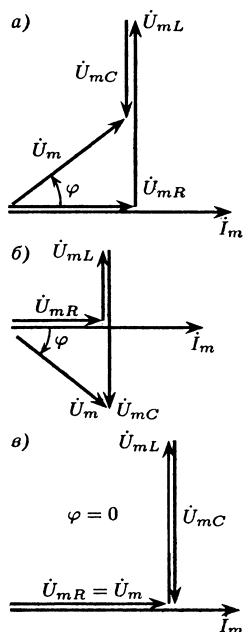


Рис. 5.9

напряжения  $u_0(t)$ , так как угол  $\varphi > 0$ . Цепь имеет индуктивный характер.

2. При  $X_L < X_C$  выполняется  $U_{mL} = X_L I_m < U_{mC} = I_m X_C$ ; ток цепи (рис. 5.9б) опережает напряжение, так как угол  $\varphi < 0$ ; цепь имеет емкостной характер.

3. Если  $X_L = X_C$ , то  $U_{mL} = U_{mC}$ .

В этом случае  $Z_{BX} = R$ , а  $\varphi = 0$ . Напряжения на  $L$ - и  $C$ -элементах полностью компенсируют друг друга, так как  $u_L + u_C = 0$ , а напряжение на  $R$ -элементе становится равным напряжению источника (рис. 5.9в). Этот режим называют резонансом напряжений.

### 5.3.2. УСТАНОВИВШИЙСЯ СИНУСОИДАЛЬНЫЙ РЕЖИМ В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ $RLC$ -ЦЕПИ

На рисунке 5.10а приведена параллельная  $RLC$ -цепь, питаемая от источника синусоидального тока  $i_0(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha_i)$ , а на рисунке 5.10б — ее комплексная схема замещения, где

$$Y_R = G, \quad Y_L = -jB_L = -j\frac{1}{\omega L},$$

$$Y_C = jB_C = j\omega C, \quad \dot{I}_m = I_m e^{j\alpha_i}.$$

Входная комплексная проводимость

$$Y_{\text{вх}} = Y_R + Y_L + Y_C = G + j(B_C - B_L) = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}),$$

следовательно, комплексная амплитуда напряжения цепи

$$\dot{U}_m = \frac{\dot{I}_m}{Y_{\text{вх}}} = \frac{\dot{I}_m}{G + j(B_C - B_L)} \frac{I_m e^{j(\alpha_i - \Psi)}}{\sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2}},$$

где угол проводимости  $\Psi = \arctg(B_C - B_L) / G = -\varphi$ .

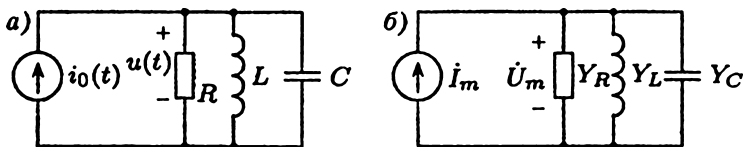


Рис. 5.10

Таким образом, напряжение цепи (рис. 5.10а)

$$u(t) = \frac{I_m}{\sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2}} \cos(\omega t + \alpha_i - \Psi).$$

Аналогично можно найти комплексные амплитуды токов элементов цепи, а по ним и сами токи:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{mR} &= Y_R \dot{U}_m = G \dot{U}_m; \\ \dot{I}_{mL} &= Y_L \dot{U}_m = -jB_L \dot{U}_m; \\ \dot{I}_{mC} &= Y_C \dot{U}_m = jB_C \dot{U}_m. \end{aligned}$$

Здесь также можно рассмотреть три случая, которые иллюстрируются векторными диаграммами на рисунке 5.11.

1. Если  $B_L > B_C$ , т. е.  $1 / (\omega L) > \omega C$ , то  $I_{mL} = B_L U_m > I_{mC} = B_C U_m$ . В этом случае  $\Psi < 0$ ,  $\varphi > 0$  и напряжение  $u(t)$  опережает ток источника  $i_0(t)$ , т. е. цепь имеет индуктивный характер (рис. 5.11а).

2. При  $B_L < B_C$  токи  $I_{mL} = B_L U_m < I_{mC} = B_C U_m$ . В этом случае  $\Psi > 0$ ,  $\varphi < 0$  и напряжение  $u(t)$  отстает от тока  $i_0(t)$  (рис. 5.11б). Цепь имеет емкостной характер.

3. Если  $B_L = B_C$ , то  $I_{mL} = I_{mC}$ . В этом случае получим  $Y_{\text{вх}} = G$ ,  $\Psi = 0$ . Токи  $L$ - и  $C$ -элементов полностью компенсируют друг друга, так как  $i_L + i_C = 0$ , в результате чего ток через  $R$ -элемент равен току источника (рис. 5.11в). Этот режим называют резонансом токов.

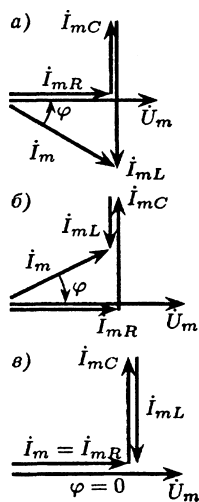


Рис. 5.11

### 5.3.3. О РАСЧЕТЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ СИНУСОИДАЛЬНОГО РЕЖИМА В РАЗВЕТВЛЕННЫХ $RLC$ -ЦЕПЯХ

На рисунке 5.12 приведен пример разветвленной цепи с двумя источниками одинаковой частоты:  $u_0(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u)$ ,  $i_0(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha_i)$ . Для определения токов в ветвях необходимо образовать комплексную схему замещения (рис. 5.12а), в которой  $\dot{U}_0 = \dot{U}_m / \sqrt{2}$ ;  $\dot{I}_0 = \dot{I}_m / \sqrt{2}$ ;  $Z_1 = -j / (\omega C_1)$ ;  $Z_2 = j\omega L$ ;  $Z_3 = R$ ;  $Z_4 = -j / (\omega C_4)$ .

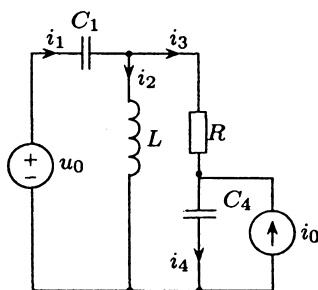


Рис. 5.12

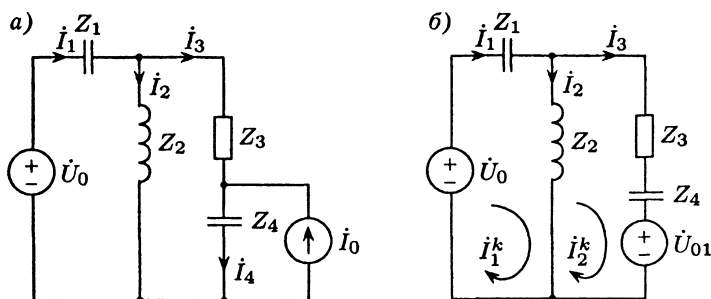


Рис. 5.13

После преобразования источника тока  $\dot{I}_0$  в источник напряжения  $\dot{U}_{01} = Z_4 \dot{I}_0$  можно применить для анализа цепи рисунка 5.13б, например, метод контурных токов:

$$\begin{cases} Z_{11} \dot{I}_1^k + Z_{12} \dot{I}_2^k = \dot{U}_1^k; \\ Z_{21} \dot{I}_1^k + Z_{22} \dot{I}_2^k = \dot{U}_2^k, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} Z_{11} &= Z_1 + Z_2; \\ Z_{22} &= Z_2 + Z_3 + Z_4; \\ Z_{21} &= -Z_2; \\ \dot{U}_1^k &= \dot{U}_0; \\ \dot{U}_2^k &= -\dot{U}_{01}. \end{aligned}$$

После решения этой системы уравнений с комплексными коэффициентами будут найдены «комплексные» токи, а по ним — и синусоидальные токи цепи рисунка 5.12.

## 5.4. МОЩНОСТЬ В УСТАНОВИВШЕМСЯ СИНУСОИДАЛЬНОМ РЕЖИМЕ

### 5.4.1. МГНОВЕННАЯ, АКТИВНАЯ, РЕАКТИВНАЯ И ПОЛНАЯ МОЩНОСТИ ПАССИВНОГО ДВУХПОЛЮСНИКА

Пусть (рис. 5.14а) через  $RLC$ -двухполюсник (ДП) протекает синусоидальный ток  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha_i)$  и приложено синусоидальное напряжение  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u)$ .

Для определенности положим, что ток отстает от напряжения на угол  $\varphi = \alpha_u - \alpha_i$  (рис. 5.14б).

Мгновенная мощность будет

$$\begin{aligned} p(t) &= ui = U_m \cos(\omega t + \alpha_u) I_m \cos(\omega t + \alpha_i) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} \cos(\alpha_u - \alpha_i) + \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \alpha_u + \alpha_i) = \\ &= UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \alpha_u + \alpha_i). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Из (5.43) следует, что  $p(t)$  совершает периодические колебания с двойной частотой относительно постоянной составляющей (рис. 5.14в).

Положительной мгновенной мощности соответствует процесс потребления электрической энергии, часть которой необратимо расходуется в  $R$ -элементах, а часть — запасается в электрическом и магнитном полях реактивных элементов ДП. Отрицательной мгновенной мощности соответствует процесс возврата двухполюсником энергии.

Активная (средняя) мощность записывается как

$$\begin{aligned} P &= P_a = P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T UI \cos \varphi dt + \frac{1}{T} \int_0^T UI \cos(2\omega t + \alpha_u + \alpha_i) dt = UI \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.44)$$

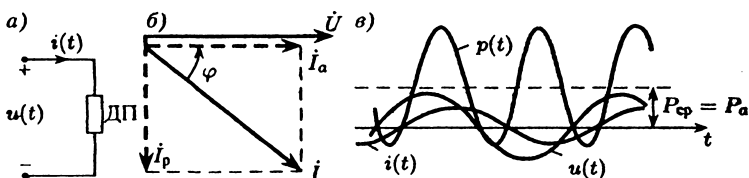


Рис. 5.14

Поскольку второй интеграл в (5.44) равен нулю как интеграл от синусоидальной функции за время, кратное периоду.

Таким образом, активная мощность, измеряемая в ваттах, произвольного двухполюсника

$$P = P_a = UI \cos \varphi.$$

В пассивном двухполюснике среднее значение мощности не может быть отрицательным, следовательно, угол фазного сдвига не может выходить за пределы

$$-\pi / 2 \leq \varphi \leq \pi / 2.$$

Выражение (5.44) можно преобразовать, пользуясь соотношениями для составляющих комплексного сопротивления и комплексной проводимости произвольного двухполюсника:

$$\begin{aligned} Z &= |Z| e^{j\varphi} = |Z| \cos \varphi + j |Z| \sin \varphi = r + jx; \\ Y &= |Y| e^{j\psi} = |Y| \cos \psi + j |Y| \sin \psi = g + jb. \end{aligned}$$

Так как  $U = |Z|I$ , а  $I = |Y|U$ , то можно записать

$$\begin{aligned} P &= P_a = UI \cos \varphi = |Z| I^2 \cos \varphi = \\ &= |Y| U^2 \cos \varphi = r I^2 = g U^2. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Реактивная мощность произвольного двухполюсника вводится по аналогии с тем, как это было сделано для  $L$ - и  $C$ -элементов, где она определялась произведением действующих значений напряжения и тока, сдвиг по фазе между которыми  $|\varphi| = \pi / 2$ . Разложим вектор тока  $\dot{I}$  на две составляющие  $\dot{I}_a$  и  $\dot{I}_p$  (см. рис. 5.14б). Составляющая  $\dot{I}_a$  совпадает по фазе с напряжением  $\dot{U}$  и называется активной составляющей тока, а составляющую  $\dot{I}_p$ , перпендикулярную вектору  $\dot{U}$ , называют реактивной составляющей тока. В общем случае разложение тока на активную и реактивную составляющие не имеет физического смысла. Очевидно, что  $I_p = I \sin \varphi$ . Тогда реактивная мощность произвольного двухполюсника будет

$$P_Q = UI_p = I \sin \varphi.$$



Можно получить другие выражения для реактивной мощности через компоненты комплексного сопротивления и комплексной проводимости (5.45):

$$P_Q = UI \sin \varphi = |Z| I^2 \sin \varphi = |Y| U^2 \sin \varphi = x I^2 = -b U^2. \quad (5.46)$$

Реактивная мощность (5.46) измеряется в вольт-амперах реактивных, она не имеет того же физического смысла, что активная мощность, и является чисто расчетной величиной, используемой на практике. Следует отметить, что реактивная мощность может быть как положительной, так и отрицательной величиной.

Если цепь имеет индуктивный характер, то  $\varphi > 0$  и  $P_Q > 0$ . Если цепь имеет емкостной характер, то  $\varphi < 0$ , и тогда  $P_Q < 0$ . Так, для  $L$ -элемента  $\varphi_L = \pi / 2$  и  $P_{QL} > 0$ , а для  $C$ -элемента —  $\varphi_C = -\pi / 2$  и  $P_{QC} < 0$ . Таким образом, если в цепи есть  $L$ - и  $C$ -элементы, то реактивные мощности могут взаимно компенсироваться, что необходимо учитывать, составляя баланс мощностей в цепи.

Как видно из (5.45), активная мощность зависит от  $\cos \varphi$ . При  $\cos \varphi = 1$  активная мощность равна произведению действующих значений напряжения и тока. Поэтому это произведение называют полной, или кажущейся (располагаемой), мощностью и измеряют в вольт-амперах (ВА):

$$P_S = UI = |Z| I^2 = |Y| U^2. \quad (5.47)$$

Очевидным являются следующие соотношения между активной, реактивной и полной мощностями:

$$P_S = \sqrt{P_a^2 + P_Q^2}; \quad P_a = P_S \cos \varphi; \quad P_Q = P_S \sin \varphi. \quad (5.48)$$

#### 5.4.2. КОЭФФИЦИЕНТ МОЩНОСТИ И ЕГО ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Коэффициентом мощности называют  $\cos \varphi$ . Только при  $\cos \varphi = 1$  вся располагаемая мощность реализуется как активная. Из (5.47), (5.48) следует

$$\cos \varphi = \frac{P_a}{P_S} = \frac{P_a}{\sqrt{P_a^2 + P_Q^2}} = \frac{P_a}{UI}.$$

Чем больше  $\cos\varphi$ , тем больше степень использования полной мощности, тем меньшим током при заданном напряжении можно доставить к потребителю активную мощность. Действительно, действующее значение тока

$$I = \frac{P_a}{U \cos\varphi}.$$

При заданной активной мощности  $P_a$  и напряжении  $U$  ток  $I$  обратно пропорционален  $\cos\varphi$ , а от значения  $I$  зависят сечения подводящих энергию проводов, кабелей, линий передачи, которые, как правило, изготавливаются из дорогостоящих цветных металлов. Кроме того, потери энергии в подводящих энергию проводниках пропорциональны квадрату действующего значения тока. Таким образом, увеличивая  $\cos\varphi$ , мы не только снижаем потери в подводящих энергию проводниках, но и можем использовать проводники меньшего сечения.

Для увеличения  $\cos\varphi$  необходимо уменьшать реактивную мощность. При  $P_Q = 0$  имеем  $\cos\varphi = 1$ . Так как  $P_{QL} > 0$ , а  $P_{QC} < 0$ , то для компенсации реактивной мощности параллельно нагрузке, имеющей, как правило, индуктивный характер, подключают компенсирующую емкость, значение которой выбирают из условия  $P_Q = P_{QL} + P_{QC} = 0$ .

#### 5.4.3. КОМПЛЕКСНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ МОЩНОСТИ

Так как расчет установившегося синусоидального режима ведется в комплексной форме, целесообразно получить выражения мощности через комплексные значения тока  $\dot{I}$  и напряжения  $\dot{U}$ . Для этого умножим комплекс напряжения на сопряженный комплекс тока:

$$\dot{U} \dot{I}^* = U e^{j\alpha_u} I e^{-j\alpha_i} = UI e^{j(\alpha_u - \alpha_i)} = UI \cos\varphi + jUI \sin\varphi = P_a + jP_Q;$$

это произведение называют комплексной мощностью  $P_S$ :

$$\tilde{P}_S = \dot{U} \dot{I}^* = P_a + jP_Q. \quad (5.49)$$

**Пример 3.**  $\dot{U} = 30 + j40$ ,  $\dot{I} = 2 + j2$ . Тогда на основании (5.50)  $\dot{P}_S = \dot{U} \dot{I} = (30 + j40)(2 - j2) = 140 + j20$ . Активная мощность  $P_a = 140$  Вт, реактивная мощность  $P_Q = 20$  вар, полная мощность  $P_S = \sqrt{P_a^2 + P_Q^2} = 141,4$  ВА.

#### 5.4.4. УСЛОВИЕ ПЕРЕДАЧИ МАКСИМУМА АКТИВНОЙ МОЩНОСТИ В НАГРУЗКУ

В ряде практических задач необходимо получить в нагрузке  $Z_H = r_H + jx_H$  максимальную активную мощность. По теореме Тевенена об эквивалентном источнике напряжения цепь, к которой подключена нагрузка, можно (рис. 5.15) заменить источником  $\dot{U}$  с внутренним (выходным, эквивалентным) сопротивлением  $Z_{BH} = r_{BH} + jx_{BH}$ .

Активная мощность нагрузки будет

$$P_{aH} = r_H I^2,$$

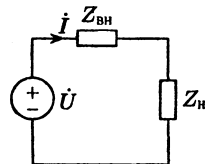


Рис. 5.15

причем ток оказывается

$$I = \frac{U}{|Z|} = \frac{U}{\sqrt{(r_{BH} + r_H)^2 + (x_{BH} + x_H)^2}};$$

тогда получим

$$P_{aH} = \frac{r_H U^2}{(r_{BH} + r_H)^2 + (x_{BH} + x_H)^2}.$$

Для того чтобы  $P_{aH}$  была максимальной, необходимо принять  $x_H = -x_{BH}$ , а потом взять производную по  $r_H$  от

$$P_{aH} = \frac{r_H U^2}{(r_{BH} + r_H)^2}.$$

Из условия  $(dP_{aH} / dr_H) = 0$  получим, что  $r_{BH} = r_H$ . При этом

$$P_{aH\max} = \frac{U^2}{4r_H}.$$

Таким образом, для получения максимальной активной мощности необходимо, чтобы

$$Z_H = r_H + jx_H = r_{BH} - jx_{BH}.$$

Очевидно, что в этом случае такая же мощность будет выделяться и во внутреннем сопротивлении источника, так как  $r_{\text{вн}} = r_{\text{н}}$ . Это означает, что максимальную активную мощность можно получить только при КПД, равном 50%.

## 5.5. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Как отмечалось в параграфе 5.3, емкостные и индуктивные сопротивления (проводимости) могут взаимно компенсироваться, так что входное сопротивление (проводимость) становится чисто резистивным, несмотря на наличие реактивных элементов. Это приводит к тому, что ток и напряжение, приложенное к цепи, совпадают по фазе.

Такое состояние электрической цепи или ее части называют резонансом. Если в произвольном режиме пассивного двухполюсника  $Z = r + jx$ , а  $\varphi = \arctg x / r$ , то в режиме резонанса будет  $Z = r$ , а  $\varphi = 0$ . Аналогично получим, что проводимость в произвольном режиме  $Y = g + jb$  и  $\psi = \arctg b / g$ . При резонансе будет  $Y = g$  и  $\psi = 0$ .

Таким образом, условие резонанса можно описать любым из следующих соотношений:

$$\begin{cases} \operatorname{Im} Z = 0; \\ \operatorname{Im} Y = 0. \end{cases} \quad (5.50)$$

### 5.5.1. РЕЗОНАНС В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ RLC-КОНТУРЕ

В п. 5.3.1 уже упоминалось о режиме резонанса в последовательном RLC-контуре (см. рис. 5.10в), входное сопротивление которого записывается как

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Из условия (5.50) получим, что цепь будет в состоянии резонанса, если  $\omega L - 1 / \omega C = 0$  или  $\omega^2 LC = 1$ . Настройку в

резонанс можно обеспечить изменением параметров  $L$ - и  $C$ -элементов или изменением частоты источника. Значение частоты, полученное из указанного выше равенства, называется резонансной частотой

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Сравним характеристики последовательного  $RLC$ -контура при  $\omega \neq \omega_0$  и при  $\omega = \omega_0$ .

### Входное сопротивление

$$Z = R + j(X_L - X_C), \quad Z_0 = R;$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad |Z_0| = R = \min.$$

### Угол фазного сдвига

$$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} \neq 0, \quad \varphi_0 = 0.$$

### Действующее значение тока

$$I = \frac{U}{|Z|} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}, \quad I_0 = \frac{U}{|Z_0|} = \frac{U}{R} = \max.$$

### Активная мощность

$$P_a = UI \cos \varphi, \quad P_{a0} = UI_0 = \max.$$

### Действующие значения напряжения на элементах цепи

$$U_R = RI, \quad U_{R0} = RI_0 = R \frac{U}{R} = U;$$

$$U_L = \omega LI, \quad U_{L0} = \omega_0 LI_0 = \sqrt{L/C} I_0 = \rho I_0;$$

$$U_C = (1 / \omega C) I \neq U_L, \quad U_{C0} = U_{L0}.$$

Так как при резонансе  $U_L = U_C$ , то резонанс в последовательном контуре часто называют резонансом напряжений.

При резонансе может оказаться, что напряжение на  $L$ - и  $C$ -элементах во много раз больше, чем напряжение источника. Для оценки этого превышения вводят понятие добротности

$$Q = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{\rho I_0}{R I_0} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\rho}{R},$$

где  $\rho = \omega_0 L = \sqrt{L/C}$  — характеристическое сопротивление.

Если  $\sqrt{L/C} > R$ , то  $Q > 1$ . В идеальном контуре при  $R = 0$  получим, что  $Q \rightarrow \infty$ . В общем случае напряжение на реактивных элементах при резонансе в  $Q$  раз больше напряжения источника:

$$U_{L0} = U_{C0} = QU.$$

Все соотношения для резонанса в параллельном  $RLC$ -контуре при резонансе токов, о котором уже упоминалось в п. 5.3.2, можно получить на дуальной основе, так как параллельный и последовательный контуры дуальны.

### 5.5.2. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО $RLC$ -КОНТУРА

Из приведенного в п. 5.5.1 анализа видно, что при изменении частоты изменяются действующее значение (и амплитуда) тока и угол фазного сдвига.

Так как  $\dot{I} = Y\dot{U}$ , то поведение тока зависит от проводимости:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = |Y(j\omega)| e^{j\psi(\omega)}; \quad (5.51)$$

$$|Y(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}};$$

$$\Psi(\omega) = -\arctg \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \quad (5.52)$$

Действительно,

$$\dot{I} = Ie^{j\alpha_i} = |Y(j\omega)| e^{j\psi(\omega)} U e^{j\alpha_u}.$$

Тогда

$$I = |Y(j\omega)|U; \quad \alpha_i = \psi(\omega) + \alpha_u. \quad (5.53)$$

В соответствии с (5.53) зависимость  $|Y(j\omega)|$  называют амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) входной проводимости, а  $\psi(\omega)$  — фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) входной проводимости. На рисунке 5.16 приведены АЧХ и ФЧХ, построенные по выражениям (5.51) и (5.52).

Как следует из АЧХ, последовательный  $RLC$ -контур обладает избирательной способностью, так как он имеет относительно большую проводимость (малое сопротивление) на частотах, близких к резонансной, и малую проводимость (большое сопротивление) на частотах, далеких от резонансной. Для оценки избирательной способности вводят понятие полосы пропускания, которую определяют по уровню половинной мощности. Так как  $P_a = RI^2$ , то уменьшение тока в  $\sqrt{2}$  раз эквивалентно уменьшению мощности в 2 раза. Поэтому полоса пропускания может быть найдена по АЧХ входной проводимости по уровню  $|Y(j\omega)|_{\max} / \sqrt{2} = 0,707|Y(j\omega)|_{\max}$  (рис. 5.16).

Как следует из ФЧХ, в последовательном  $RLC$ -контуре изменяется знак  $\psi$  с изменением частоты. Для частот  $\omega < \omega_0$  имеем  $\psi > 0$ , ток опережает по фазе напряжение,

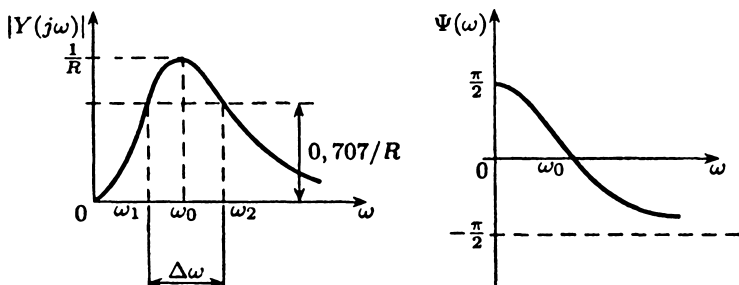


Рис. 5.16

т. е. контур имеет емкостной характер. Если  $\omega > \omega_0$ , то  $\psi(\omega) < 0$  и ток отстает от напряжения, т. е. контур имеет индуктивный характер.

### 5.5.3. НОРМИРОВКА ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для того чтобы частотные характеристики имели минимальное число параметров, удобно вводить нормировку по уровню и по частоте, выбирая базисные значения сопротивления  $Z_6$  (проводимости  $Y_6$ ) и частоты  $\omega_6$ . Тогда нормированные значения сопротивления (проводимости) и частоты

$$\begin{aligned} Z_* &= \frac{Z}{Z_6}; \\ Y_* &= \frac{Y}{Y_6}; \\ \omega_* &= \frac{\omega}{\omega_6}. \end{aligned}$$

Проведем нормировку  $Y(j\omega)$  последовательного  $RLC$ -контура:

$$Y_*(j\omega_*) = 1 / \left\{ Y_6 \left[ R + j \left( \omega_6 \omega_* L - \frac{1}{\omega_6 \omega_* C} \right) \right] \right\}.$$

Если принять  $Y_6 = 1 / R_6$ , а  $\omega_6 = \omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$ , то

$$Y_*(j\omega_*) = \frac{1}{1 + j \left( \frac{\omega_* \omega_0 L}{R} - \frac{1}{R \omega_* \omega_0 C} \right)} = \frac{1}{1 + jQ(\omega_* - 1/\omega_*)}.$$

Тогда АЧХ и ФЧХ, соответственно, будут

$$\begin{cases} |Y_*(j\omega_*)| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\omega_* - 1/\omega_*)^2}}; \\ \psi(\omega_*) = -\arctg[Q(\omega_* - 1/\omega_*)]. \end{cases} \quad (5.54)$$



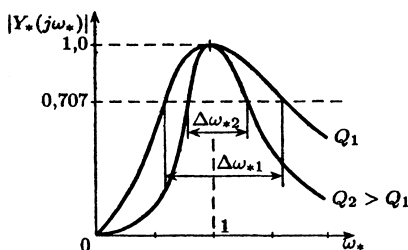


Рис. 5.17

На рисунке 5.17 построены АЧХ в соответствии с (5.54) при различных добротностях  $Q$ . Как видно из графика, полоса пропускания зависит от добротности. Чем больше добротность, тем меньше полоса пропускания, т. е. выше избирательность контура.

Можно доказать, что

$$Q = \frac{1}{\Delta\omega_*} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega},$$

где  $\Delta\omega_*$  — полоса пропускания в относительных единицах.

Частотные характеристики параллельного контура аналогичны характеристикам последовательного контура, а в нормированных единицах при

$$Z_6 = R \text{ и } \omega_6 = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

они полностью совпадают:

$$\begin{cases} |Z_*(j\omega_*)| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\omega_* - 1/\omega_*)^2}}; \\ \varphi(\omega_*) = -\arctg[Q(\omega_* - 1/\omega_*)]. \end{cases}$$

#### 5.5.4. КОМПЛЕКСНЫЕ ФУНКЦИИ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Исследовать поведение той или иной реакции цепи с изменением частоты источника можно исследуя частотные свойства соответствующих функций. Если на цепь действует синусоидальный источник напряжения с  $\dot{U}_1 = U_1 e^{j\alpha_u}$ ,

то реакцией может быть входной ток, ток или напряжение какой-либо  $k$ -й ветви. Тогда для этих случаев можно записать:

$$\begin{cases} \dot{I}_{\text{вх}} = Y_{\text{вх}}(j\omega)\dot{U}_1; \\ \dot{I}_k = Y_{k-1}(j\omega)\dot{U}_1; \\ \dot{U}_k = H_U(j\omega)\dot{U}_1, \end{cases}$$

где  $Y_{\text{вх}}(j\omega)$  — комплексная функция входной проводимости;  $Y_{k-1}(j\omega)$  — комплексная функция передаточной проводимости;  $H_U(j\omega)$  — комплексная функция передачи по напряжению.

Если воздействием является синусоидальный источник тока с  $\dot{I}_1 = I_1 e^{j\alpha_i}$ , то реакцией может быть входное напряжение, напряжение или ток какой-либо  $k$ -й ветви. Тогда для этих случаев можно записать:

$$\begin{cases} \dot{U}_{\text{вх}} = Z_{\text{вх}}(j\omega)\dot{I}_1; \\ \dot{U}_k = Z_{k-1}(j\omega)\dot{I}_1; \\ \dot{I}_k = H_I(j\omega)\dot{I}_1, \end{cases}$$

где  $Z_{\text{вх}}(j\omega)$  — комплексная функция входного сопротивления;  $Z_{k-1}(j\omega)$  — комплексная функция передаточного сопротивления;  $H_I(j\omega)$  — комплексная функция передачи по току.

Каждая из шести приведенных функций может быть записана через модуль и аргумент или через вещественную и мнимую составляющие:

$$\begin{aligned} Y_{\text{вх}}(j\omega) &= |Y_{\text{вх}}(j\omega)|e^{j\psi(\omega)} = g(\omega) + jb(\omega); \\ Z_{\text{вх}}(j\omega) &= |Z_{\text{вх}}(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = r(\omega) + jx(\omega); \\ H_U(j\omega) &= |H_U(j\omega)|e^{j\Phi(\omega)} = B(\omega) + jM(\omega) \end{aligned}$$

и т. д.

Модули всех функций определяют отношение действующих значений (амплитуд) соответствующих реакций и воздействий (при изменении частоты) и являются амплитудно-частотными характеристиками соответствующих функций. Аргументы (фазы) всех функций опреде-

ляют разность начальных фаз соответствующих реакций и воздействий при изменении частоты и являются фазо-частотными характеристиками соответствующих функций. Следует отметить, что АЧХ и ФЧХ — это функции вещественной переменной  $\omega$ . Кроме АЧХ и ФЧХ комплексные функции могут характеризоваться вещественными частотными характеристиками соответствующих функций  $g(\omega)$ ,  $r(\omega)$ ,  $B(\omega)$  и мнимыми частотными характеристиками  $b(\omega)$ ,  $x(\omega)$ ,  $M(\omega)$ .

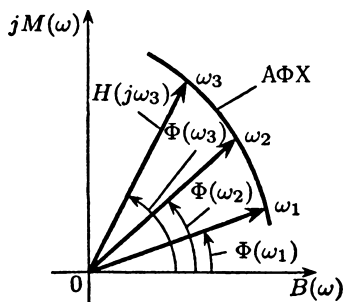


Рис. 5.18

Например, для последовательной  $RC$ -цепи функция входной проводимости  $Y_{\text{вх}}(j\omega) = 1 / (R - j / \omega C)$ . Ее амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики:

$|Y_{\text{вх}}(j\omega)| = 1 / \sqrt{R^2 + 1 / (\omega C)^2}$ ,  $\psi(\omega) = \text{arctg}(1 / \omega RC)$ . Вещественная частотная характеристика входной проводимости  $g(\omega) = R / (R^2 + 1 / (\omega C)^2)$ .

Мнимая частотная характеристика входной проводимости  $b(\omega) = 1 / (\omega C) / (R^2 + 1 / (\omega C)^2)$ .

Кроме рассмотренных функций на практике используется амплитудно-фазовая характеристика (АФХ), представляющая собой траекторию (годограф), которую описывает вектор, определяемый соответствующей функцией  $H(j\omega) = B(\omega) + jM(\omega)$  на комплексной плоскости при изменении частоты (рис. 5.18). Амплитудно-фазовая характеристика в неявном виде включает в себя АЧХ и ФЧХ, а также вещественную и мнимую частотные характеристики.

## 5.6. ТИПОВОЙ ПРИМЕР

В цепи рисунка 5.19 представлен установившийся синусоидальный режим. В цепи (рис. 5.19а)  $u(t) = 50\sqrt{2} \cos 5000t$ ,  $R_1 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $C = 40 \text{ мкФ}$ ,  $L = 0,5 \text{ мГн}$ . Требуется определить токи  $I_1(t)$ ,  $I_2(t)$ ,  $I_3(t)$  и мощности  $P_a$ ,  $P_Q$ ,  $P_S$ . Составить баланс мощностей.

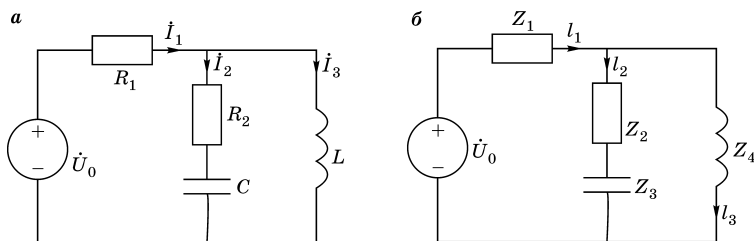


Рис. 5.19

**Решение.** Комплексная схема замещения (рис. 5.19б) и ее анализ

$$\dot{U}_0 = 50, \quad Z_1 = R_1 = 3, \quad Z_2 = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{10^6}{5 \cdot 10^3 \cdot 40} = -j5,$$

$$Z_3 = R_2 = 5, \quad Z_4 = j\omega L = j5 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = j2,5.$$

Находим входное сопротивление

$$Z_{\text{вх}} = Z_1 + \frac{(Z_2 + Z_3) \cdot Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} = 3 + \frac{(5 - j5)j2,5}{3 + 5 - j5 + j2,5} = 4 + j3.$$

Тогда

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_0}{Z_{\text{вх}}} = \frac{50}{4 + j3} = 8 - j6.$$

По второму закону Кирхгофа:

$$Z_1 \dot{I}_1 + (Z_2 + Z_3) \dot{I}_2 = \dot{U}_0.$$

Отсюда

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_0 - Z_1 \dot{I}_1}{Z_2 + Z_3} = \frac{50 - 3(8 - j6)}{5 - j5} = 0,8 + j4,4.$$

По первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 8 - j6 - 0,8 - j4,4 = 7,2 - j10,4.$$

Действующие значения токов:

$$I_1 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ А};$$

$$I_2 = \sqrt{0,8^2 + 4,4^2} = 4,47 \text{ А};$$

$$I_3 = \sqrt{7,2^2 + 10,4^2} = 12,65 \text{ А}.$$

Начальные фазы токов:

$$\alpha_1 = \arctg \frac{-6}{8} = -37^\circ;$$

$$\alpha_2 = \arctg \frac{4,4}{0,8} = 80^\circ;$$

$$\alpha_3 = \arctg \frac{-10,4}{7,2} = -55^\circ.$$

Искомые токи:

$$i_1(t) = 10\sqrt{2} \cos(5000t - 37^\circ);$$

$$i_2(t) = 4,47\sqrt{2} \cos(5000t + 80^\circ);$$

$$i_3(t) = 12,65\sqrt{2} \cos(5000t - 55^\circ).$$

Расчет мощности:

$$\tilde{P}_S = \dot{U}_0 I_1^* = 50(8 + j6) = 400 + j300.$$

Следовательно,

$$P_a = 400 \text{ Вт}, \quad P_Q = 300 \text{ ВАР}, \quad P_S = \sqrt{400^2 + 300^2} = 500 \text{ ВА}.$$

Баланс мощностей:

$$P_{R1} = R_1 I_1^2 = 3 \cdot 100 = 300 \text{ Вт};$$

$$P_{R2} = R_2 I_2^2 = 5 \cdot 20 = 100 \text{ Вт};$$

$$P_a = P_{R1} + P_{R2} = 300 + 100 = 400 \text{ Вт};$$

$$P_{QL} = X_L I_3^2 = 2,5 \cdot 160 = 400 \text{ ВАР};$$

$$P_{QC} = X_C I_2^2 = 5 \cdot 20 = 100 \text{ ВАР};$$

$$P_Q = P_{QL} - P_{QC} = 400 - 100 = 300 \text{ ВАР}.$$

**Выделение** трехфазных цепей в самостоятельный класс объясняется их широким распространением на практике. В настоящее время практически все электроснабжение промышленных и бытовых объектов осуществляется с помощью трехфазных цепей. Это обусловлено рядом достоинств трехфазной системы напряжений, к которым относятся:

1) возможность передавать энергию от трехфазного генератора к трехфазной нагрузке по трем проводам вместо шести при питании потребителей от отдельных источников;

2) трехфазное напряжение позволяет получать вращающееся магнитное поле, которое лежит в основе действия асинхронных трехфазных двигателей, самых простых и надежных в работе;

3) при симметричной нагрузке мгновенная мощность трехфазного источника не зависит от времени и не пульсирует с двойной частотой, как это имеет место при однофазном питании.

## **6.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ**

### **6.1.1. ТРЕХФАЗНАЯ СИСТЕМА НАПРЯЖЕНИЙ, ТРЕХФАЗНЫЙ ГЕНЕРАТОР**

Симметричная трехфазная система напряжений (трехфазное напряжение) представляет собой систему из трех синусоидальных напряжений одинаковой час-

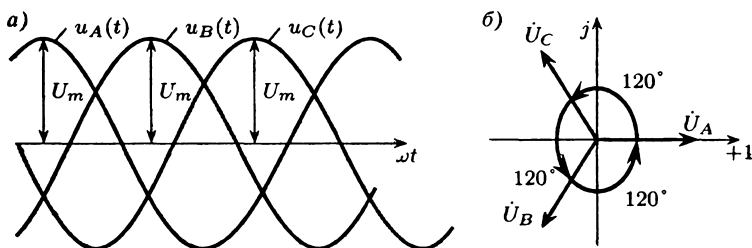


Рис. 6.1

тоты и одинаковой амплитуды, сдвинутых по фазе на  $120^\circ$ . Если условие равенства амплитуд (или условие сдвига по фазе на  $120^\circ$ ) не выполняется, то такая система называется несимметричной.

В этой главе будем рассматривать только симметричные трехфазные источники, генерирующие симметричную систему напряжений, график мгновенных значений которых приведен на рисунке 6.1а. Если одно из этих напряжений, например с начальной фазой, равной нулю, обозначить  $u_A(t)$ , то отстающее от него на  $120^\circ$  напряжение обозначается  $u_B(t)$ , а отстающее от  $u_B(t)$  на  $120^\circ$  — обозначается  $u_C(t)$ . Такой порядок следования напряжений (А–В–С) называют прямым.

Мгновенные значения этих напряжений можно записать, например, следующим образом:

$$\begin{aligned} u_A(t) &= U_m \cos \omega t; \\ u_B(t) &= U_m \cos(\omega t - 120^\circ); \\ u_C(t) &= U_m \cos(\omega t - 240^\circ). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Соответствующие (6.1) комплексы напряжений

$$\dot{U}_A = U, \quad \dot{U}_B = U e^{-j120^\circ}, \quad \dot{U}_C = U e^{-j240^\circ}, \quad U = U_m / \sqrt{2}.$$

На рисунке 6.1б приведена векторная диаграмма (ВД) этих напряжений.

Основное свойство симметричной трехфазной системы напряжений заключается в том, что сумма этих напряжений в любой момент времени равна нулю, т. е.

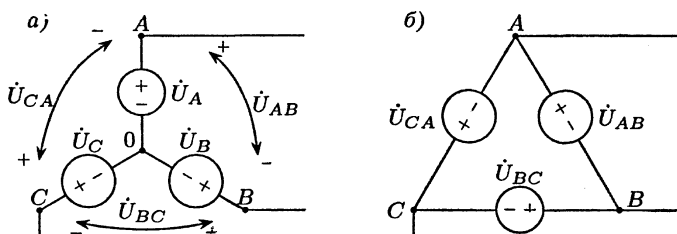


Рис. 6.2

$u_A(t) + u_B(t) + u_C(t) = 0$ . В этом легко убедиться, сложив напряжения или соответствующие векторы (рис. 6.1б):

$$\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0.$$

Трехфазное напряжение получают с помощью специального трехфазного генератора, на статоре которого располагаются три обмотки, сдвинутые друг относительно друга на  $120^\circ$ , витки которых пересекаются постоянным магнитным полем ротора, вращающегося с постоянной угловой скоростью. Схематически трехфазный генератор можно представить в виде трех источников синусоидального напряжения, которые можно соединить звездой (рис. 6.2а) или треугольником (рис. 6.2б), причем точка 0 при соединении генератора «звездой» называется нейтральной точкой.

Следует отметить, что ток внутри треугольника (рис. 6.2б) отсутствует, так как сумма напряжений  $u_{AB}(t) + u_{BC}(t) + u_{CA}(t) = 0$ .

### 6.1.2. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ФАЗНЫМИ И ЛИНЕЙНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ СИММЕТРИЧНОГО ТРЕХФАЗНОГО ГЕНЕРАТОРА

Напряжения на обмотках трехфазного генератора называют фазными напряжениями, а напряжения между линейными проводами, которыми генератор соединяется с нагрузкой, называют линейными напряжениями. Так, при соединении генератора звездой напряжения  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$  — фазные напряжения, а напряжения  $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$  — линейные.



При этом

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B, \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C, \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A.$$

Если обмотки генератора соединены треугольником, то линейные и фазные напряжения равны друг другу ( $U_{\text{л}} = U_{\text{ф}}$ ), что видно из схемы на рисунке 6.2б.

На рисунке 6.3 приведены ВД линейных и фазных напряжений трехфазного генератора при соединении его обмоток звездой (рис. 6.3а) и треугольником (рис. 6.3б).

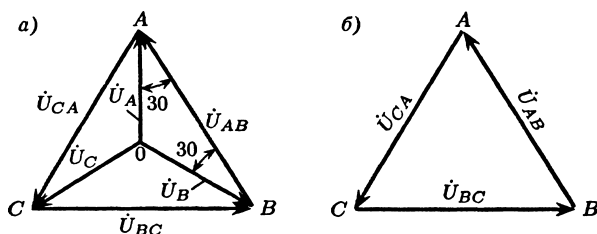


Рис. 6.3

Эти диаграммы построены в соответствии с геометрией (топографией) цепи без указания осей комплексной плоскости. Из диаграммы рисунка 6.3а следует:  $U_A = U_B = U_C = U_{\text{ф}}$ ,  $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_{\text{л}}$ , а из диаграммы рисунка 6.3б будет:  $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_{\text{л}} = U_{\text{ф}}$ ; при этом, если  $\dot{U}_{AB} = U_{\text{л}}$ ,  $\dot{U}_{BC} = U_{\text{л}}e^{-j120^\circ}$  и  $\dot{U}_{CA} = U_{\text{л}}e^{j120^\circ}$ .

Соотношение между линейным и фазным напряжениями генератора, соединенного звездой, легко установить из элементарных тригонометрических рассуждений, рассматривая равнобедренный треугольник  $AOB$  на рисунке 6.3а.

Учитывая, что два угла в этом треугольнике равны  $30^\circ$ , получим

$$U_{\text{л}} = 2U_{\text{ф}} \cos 30^\circ = \sqrt{3}U_{\text{ф}}. \quad (6.2)$$

В соответствии с (6.2) при  $U_{\text{ф}} = 127 \text{ В}$  имеем  $U_{\text{л}} = \sqrt{3} \cdot 127 = 220 \text{ В}$ , а при  $U_{\text{ф}} = 220 \text{ В}$  получим  $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$ .

Теперь легко установить связь между комплексами фазных и линейных напряжений. Из диаграммы на рисунке 6.3а и с учетом (6.2) получим

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_{AB} &= \dot{U}_A \sqrt{3} e^{j30^\circ}; \\
 \dot{U}_{BC} &= \dot{U}_B \sqrt{3} e^{j30^\circ}; \\
 \dot{U}_{CA} &= \dot{U}_C \sqrt{3} e^{j30^\circ}.
 \end{aligned}
 \quad (6.3)$$

Таким образом, симметричный трехфазный генератор, соединенный звездой, при расчетах, легко может быть преобразован в эквивалентный генератор, соединенный треугольником, и наоборот, в соответствии с (6.2) и (6.3).

### 6.1.3. ТРЕХФАЗНАЯ ЦЕПЬ И ОСНОВНЫЕ СХЕМЫ СОЕДИНЕНИЯ

Трехфазный источник вместе с нагрузкой и соединительными проводами образует трехфазную цепь. Нагрузку так же, как и генератор, можно соединить звездой или треугольником. Для расчетных целей удобно считать, что если нагрузка соединена звездой, то и генератор соединен звездой, если нагрузка соединена треугольником, то и генератор соединен треугольником. Если в исходной цепи

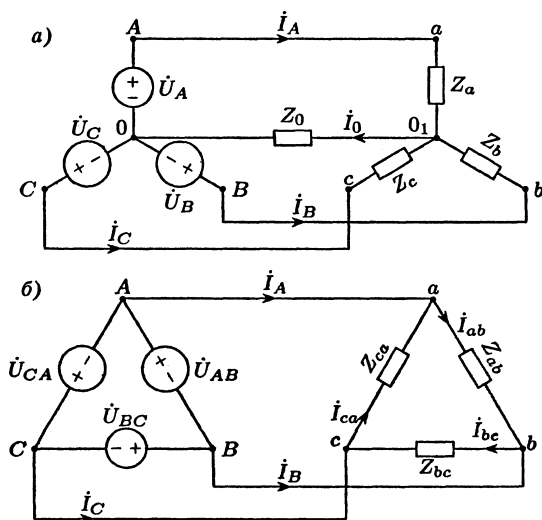


Рис. 6.4

генератор соединен треугольником, а нагрузка звездой, то перед расчетом можно преобразовать его в эквивалентный генератор, соединенный звездой, в соответствии с (6.2) и (6.3). Аналогично можно поступить и в случае, если нагрузка соединена треугольником, а генератор звездой. Таким образом, все возможные случаи можно свести к двум (рис. 6.4).

Токи, текущие в линейных проводах, называют линейными, а токи, текущие по сопротивлениям нагрузки, называют фазными. Провод, соединяющий узловые точки генератора и нагрузки при соединении их звездой, называют нейтралью, или нулевым проводом. Если сопротивление нулевого провода  $Z_0$  равняется нулю, то точки  $O$  и  $O_1$  становятся однопотенциальными и такое соединение называют «звезда — звезда с нулевым проводом». Если  $Z_0$  равняется бесконечности, то такое соединение называют «звезда — звезда без нулевого провода».

Три составных части трехфазной цепи принято называть фазами. Таким образом, в трехфазной цепи передача энергии от источника в нагрузку осуществляется с помощью трех или четырех проводов, что с экономической точки зрения более выгодно по сравнению с передачей от трех несвязанных источников, так как в этом случае потребовалось бы шесть проводов.

Как следует из схемы на рисунке 6.4а, при соединении нагрузки звездой линейные и фазные токи равны ( $I_{\text{л}} = I_{\text{ф}}$ ), а ток нулевого провода будет  $\dot{I}_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$ . При соединении нагрузки треугольником линейные и фазные токи (рис. 6.4б) связаны в соответствии с ЗКТ следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}; \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}; \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}.\end{aligned}$$

Очевидно, что в этом случае  $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$ .

Трехфазная нагрузка называется симметричной, если  $Z_a = Z_b = Z_c = Z_{\text{ф}} = |Z_{\text{ф}}| e^{j\varphi_{\text{ф}}}$  при соединении звездой, а при соединении треугольником, если

$$Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = Z_{\text{ф}} = |Z_{\text{ф}}| e^{j\varphi_{\text{ф}}}.$$

## 6.2. РАСЧЕТ ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ

### 6.2.1. РАСЧЕТ ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ ПРИ СОЕДИНЕНИИ НАГРУЗКИ ЗВЕЗДОЙ

Анализу подлежит цепь (рис. 6.4а) при заданных фазном напряжении симметричного генератора  $U_\Phi$  и комплексных сопротивлениях  $Z_a$ ,  $Z_b$ ,  $Z_c$  и  $Z_0$ . Определению подлежат токи в нагрузке и нулевом проводе.

Трехфазная цепь на рисунке 6.4а является цепью с двумя узлами, и поэтому ее расчет целесообразно осуществить методом узловых потенциалов (напряжений). Считаем узел 0 базисным (опорным) узлом, потенциал которого равен нулю. Найдем потенциал  $U_{01}$  узла 0<sub>1</sub> из уравнения  $Y_{11}\dot{U}_{01} = \dot{I}_1^y$ , где собственная проводимость узла  $Y_{11} = Y_a + Y_b + Y_c + Y_0 = 1/Z_a + 1/Z_b + 1/Z_c + 1/Z_0$ , а  $\dot{I}_1^y$  — сумма источников тока, подключенных к узлу 0<sub>1</sub>. Преобразовав источники напряжения  $\dot{U}_A, \dot{U}_B$  и  $\dot{U}_C$  в источники тока, получим  $\dot{I}_1^y = Y_a\dot{U}_A + Y_b\dot{U}_B + Y_c\dot{U}_C$ . Тогда имеем

$$\dot{U}_{01} = \frac{Y_a\dot{U}_A + Y_b\dot{U}_B + Y_c\dot{U}_C}{Y_a + Y_b + Y_c + Y_0}, \quad (6.4)$$

где  $\dot{U}_A = U_\Phi$ ,  $\dot{U}_B = U_\Phi e^{-j120^\circ}$ ,  $\dot{U}_C = U_\Phi e^{j120^\circ}$ .

Определив потенциал узла 0<sub>1</sub>, можно теперь найти токи, учитывая, что точки А, В и С генератора однопотенциальны с соответствующими точками а, b и с нагрузки:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \frac{\dot{U}_{a0_1}}{Z_a} = \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_{01}}{Z_a}; \\ \dot{I}_B &= \frac{\dot{U}_{b0_1}}{Z_b} = \frac{\dot{U}_B - \dot{U}_{01}}{Z_b}; \\ \dot{I}_C &= \frac{\dot{U}_{c0_1}}{Z_c} = \frac{\dot{U}_C - \dot{U}_{01}}{Z_c}; \\ \dot{I}_0 &= \frac{\dot{U}_{010}}{Z_0} = \frac{\dot{U}_{01}}{Z_0}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Рассмотрим возможные режимы работы.

**1. Режим симметричной нагрузки.** В этом случае имеет место

$$Z_a = Z_b = Z_c = Z_\Phi = |Z_\Phi| e^{j\varphi_\Phi},$$

т. е.  $Y_a = Y_b = Y_c = Y_\Phi = |Y_\Phi| e^{j\psi_\Phi}$ .

Тогда в соответствии с (6.4) запишем

$$\dot{U}_{01} = \frac{Y_\Phi (\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C)}{3Y_\Phi + Y_0} = 0,$$

так как  $\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0$  (основное свойство трехфазного симметричного напряжения). Следовательно, узлы 0 и 0<sub>1</sub> становятся однопотенциальными и ток нулевого провода будет

$$\dot{I}_0 = \dot{U}_{01} / Z_0 = 0.$$

В этом случае отпадает необходимость в нулевом проводе и генератор с нагрузкой может быть соединен тремя линейными проводами. Многие трехфазные потребители по своей природе являются симметричными, например трехфазные двигатели.

Таким образом, в этом случае токи симметричной трехфазной цепи в соответствии с (6.5) оказываются

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_A &= \frac{\dot{U}_A}{Z_a} = \frac{U_\Phi}{|Z_\Phi| e^{j\varphi_\Phi}}; \\ \dot{I}_B &= \frac{\dot{U}_B}{Z_b} = \frac{U_\Phi e^{-j120^\circ}}{|Z_\Phi| e^{j\varphi_\Phi}}; \\ \dot{I}_C &= \frac{\dot{U}_C}{Z_c} = \frac{U_\Phi e^{j120^\circ}}{|Z_\Phi| e^{j\varphi_\Phi}}, \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

причем отсюда следует, что при симметричной нагрузке  $I_A = I_B = I_C = I_\Phi = U_\Phi / |Z_\Phi|$ . Расчет в этом случае можно выполнить для одной фазы, токи в других фазах будут иметь такую же амплитуду, а начальные фазы будут отличаться сдвигом на 120°. На рисунке 6.5а приведена векторная диаграмма для рассмотренного режима. «Звезда» токов нагрузки получается симметричной, повернутой относительно «звезды» фазных напряжений на угол фазного сдвига  $\varphi_\Phi$ .

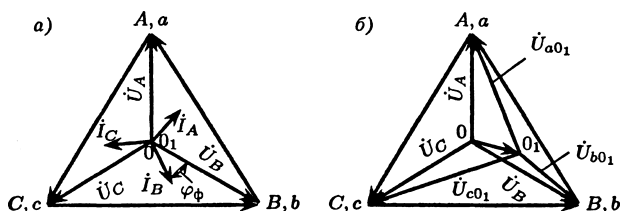


Рис. 6.5

**2. Режим несимметричной нагрузки при отсутствии нулевого провода.** В этом случае  $Z_a \neq Z_b \neq Z_c$ , а  $Y_0 = 0$ . Тогда потенциал узла  $0_1$  в соответствии с (6.4) оказывается

$$\dot{U}_{0_1} = \frac{Y_a \dot{U}_A + Y_b \dot{U}_B + Y_c \dot{U}_C}{Y_a + Y_b + Y_c} \neq 0,$$

т. е. потенциал узла  $0_1$  отличается от потенциала узла  $0$  и на векторной диаграмме эти точки не совпадают. Это значит, что напряжения на фазах нагрузки будут различными, неравными напряжениям фаз генератора. Токи в фазах определяются по выражениям (6.5), а так как нулевой провод отсутствует, то  $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$ .

На рисунке 6.5б приведен вариант ВД напряжений этого режима. Такой режим работы называют зависимым, так как при изменении сопротивления одной из фаз изменяется потенциал узла  $0_1$  и, следовательно, изменяются напряжения на всех фазах нагрузки.

**3. Режим несимметричной нагрузки при наличии нулевого провода с нулевым сопротивлением.** Так как в этом случае  $Z_0 = 0$ , то потенциалы узлов  $0$  и  $0_1$  становятся равными при любой нагрузке, т. е. к каждой фазе нагрузки параллельно подключен источник. Для наглядности схему, соответствующую рисунку 6.4а, можно изобразить так, как показано на рисунке 6.6а. Режим работы фаз становится независимым, т. е. при любой нагрузке

$$\dot{U}_{a0_1} = \dot{U}_A, \quad \dot{U}_{b0_1} = \dot{U}_B, \quad \dot{U}_{c0_1} = \dot{U}_C.$$

Токи в фазах будут  $\dot{I}_A = Y_a \dot{U}_A$ ,  $\dot{I}_B = Y_b \dot{U}_B$ ,  $\dot{I}_C = Y_c \dot{U}_C$ , а ток нулевого провода —  $\dot{I}_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$ .

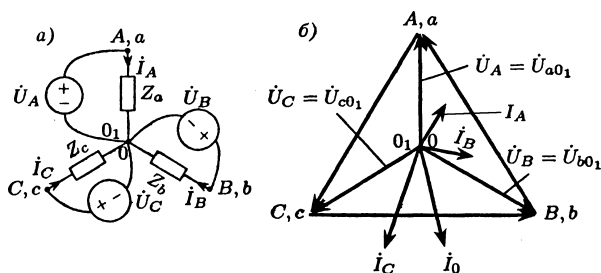


Рис. 6.6

Нулевой провод с  $Z_0 = 0$  обеспечивает независимый режим работы фаз нагрузки. Напряжение на фазах нагрузки не зависит от режима работы фаз, так как узлы 0 и 0<sub>1</sub> соединены друг с другом нулевым проводом. По такой четырехпроводной схеме питается вся бытовая нагрузка. К потребителю подводится одна из фаз генератора и нулевой провод.

На рисунке 6.6б приведен пример ВД такого режима. «Звезда» токов в этом случае будет несимметричной, и поэтому в нулевом проводе ток  $\dot{I}_0 \neq 0$ .

### 6.2.2. РАСЧЕТ ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ ПРИ СОЕДИНЕНИИ НАГРУЗКИ ТРЕУГОЛЬНИКОМ

Анализу подлежит цепь (рис. 6.4б) при заданных линейном напряжении генератора  $U_{\text{л}}$  и комплексах сопротивлений  $Z_{ab}$ ,  $Z_{bc}$ ,  $Z_{ca}$ . Определению подлежат токи в фазах нагрузки и линейных проводах.

Направим на ВД одно из напряжений генератора, например  $\dot{U}_{AB}$  по вещественной оси комплексной плоскости, т. е. будем считать, что  $\dot{U}_{AB} = U_{\text{л}}$  (рис. 6.7а). Тогда имеем

$$\dot{U}_{BC} = U_{\text{л}} e^{-j120^\circ}, \quad \dot{U}_{CA} = U_{\text{л}} e^{j120^\circ}.$$

Как видно из схемы на рисунке 6.4б, здесь осуществляется независимый режим работы фаз, потому что, как показано на рисунке 6.7б, к каждой фазе нагрузки параллельно подключен «свой» источник. Так как в этом случае  $\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{AB}$ ,  $\dot{U}_{bc} = \dot{U}_{BC}$ ,  $\dot{U}_{ca} = \dot{U}_{CA}$ , то токи в фазах нагрузки будут:  $\dot{I}_{ab} = \dot{U}_{AB} / Z_{ab}$ ,  $\dot{I}_{bc} = \dot{U}_{BC} / Z_{bc}$ ,  $\dot{I}_{ca} = \dot{U}_{CA} / Z_{ca}$ . Ли-

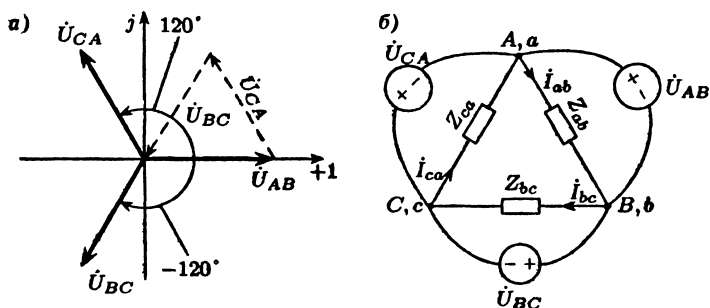


Рис. 6.7

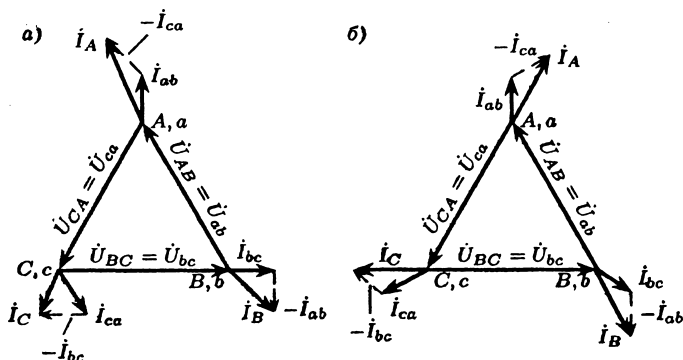


Рис. 6.8

нейные токи в схеме на рисунке 6.4б определяются через фазные в соответствии с первым законом Кирхгофа:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}, \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}, \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}.$$

На рисунке 6.8а приведен пример ВД для несимметричного режима, т. е. когда

$$Z_{ab} \neq Z_{bc} \neq Z_{ca}.$$

В этом случае  $I_{ab} \neq I_{bc} \neq I_{ca}$ ,  $I_A \neq I_B \neq I_C$ .

Рассмотрим симметричный режим при соединении нагрузки треугольником. Такой режим будет в цепи при  $Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = Z_\Phi = |Z_\Phi|e^{j\varphi_\Phi}$ . Токи в фазах нагрузки записываются как



$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{ab} &= \dot{U}_{AB} / Z_{ab} = U_{\text{л}} / |Z_{\Phi}| e^{j\varphi_{\Phi}} = I_{\Phi} e^{-j\varphi_{\Phi}}; \\ \dot{I}_{bc} &= \dot{U}_{BC} / Z_{bc} = U_{\text{л}} e^{-j120^{\circ}} / |Z_{\Phi}| e^{j\varphi_{\Phi}} = I_{\Phi} e^{-j(\varphi_{\Phi}+120^{\circ})}; \\ \dot{I}_{ca} &= \dot{U}_{CA} / Z_{ca} = U_{\text{л}} e^{j120^{\circ}} / |Z_{\Phi}| e^{j\varphi_{\Phi}} = I_{\Phi} e^{-j(\varphi_{\Phi}-120^{\circ})}. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Из (6.7) следует, что в этом случае  $I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_{\Phi}$ . Расчет можно выполнить для одной фазы, токи в других фазах будут иметь такую же амплитуду, а начальные фазы будут отличаться сдвигом на  $120^{\circ}$  в соответствии с (6.7). На рисунке 6.8б приведена ВД симметричного режима. Для определенности взято  $\varphi_{\Phi} > 0$ . Установим связь между действующими значениями линейных и фазных токов

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} = I_{\Phi} e^{-j\varphi_{\Phi}} (1 - e^{j120^{\circ}}) = I_{\Phi} \sqrt{3} e^{-j(\varphi_{\Phi}+30^{\circ})},$$

т. е.  $I_A = \sqrt{3} I_{\Phi}$ .

Из условий симметрии (рис. 6.8б) следует, что в этом режиме

$$I_A = I_B = I_C = I_{\text{л}} = \sqrt{3} I_{\Phi}.$$

### 6.3. МОЩНОСТЬ ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ

Сумму активных мощностей всех фаз называют активной мощностью трехфазной цепи. Так, при соединении звездой имеем

$$P = P_A + P_B + P_C = U_{a01} I_A \cos \varphi_a + U_{b01} I_B \cos \varphi_b + U_{c01} I_C \cos \varphi_c.$$

Аналогично сумму реактивных мощностей всех фаз называют реактивной мощностью трехфазной цепи:

$$\begin{aligned} P_Q &= P_{QA} + P_{QB} + P_{QC} = U_{a01} I_A \sin \varphi_a + \\ &+ U_{b01} I_B \sin \varphi_b + U_{c01} I_C \sin \varphi_c. \end{aligned}$$

Полная мощность трехфазной цепи записывается как

$$P_S = \sqrt{P^2 + P_Q^2}.$$

В комплексной форме мощность трехфазной цепи

$$\tilde{P}_S = P + jP_Q.$$

Если нагрузка симметрична, то имеем

$$\begin{aligned} P &= 3U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi; \\ P_Q &= 3U_\phi I_\phi \sin \varphi_\phi; \\ P_S &= 3U_\phi I_\phi. \end{aligned}$$

При соединении симметричной нагрузки звездой  $U_\phi = U_\Delta / \sqrt{3}$  и  $I_\phi = I_\Delta$ . При соединении симметричной нагрузки треугольником выполняется  $I_\phi = I_\Delta / \sqrt{3}$  и  $U_\phi = U_\Delta$ . Тогда независимо от способа соединения нагрузки для симметричной трехфазной системы получим следующие выражения для мощностей через линейные напряжения и токи:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{3} U_\Delta I_\Delta \cos \varphi_\phi; \\ P_Q &= \sqrt{3} U_\Delta I_\Delta \sin \varphi_\phi; \\ P_S &= \sqrt{3} U_\Delta I_\Delta. \end{aligned}$$

Определим мгновенную мощность трехфазной цепи при симметричном режиме работы:

$$\begin{aligned} p(t) &= u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C = \\ &= U_{\text{тф}} \cos \omega t I_{\text{тф}} \cos(\omega t - \varphi) + \\ &+ U_{\text{тф}} \cos(\omega t - 120^\circ) I_{\text{тф}} \cos(\omega t - 120^\circ - \varphi) + \\ &+ U_{\text{тф}} \cos(\omega t + 120^\circ) I_{\text{тф}} \cos(\omega t + 120^\circ - \varphi) = \\ &= 3U_\phi I_\phi \cos \varphi = P = \text{const.} \end{aligned}$$

Таким образом, мгновенная мощность трехфазной цепи при симметричной нагрузке не зависит от времени (т. е. постоянна) и равна активной мощности всей системы. Это свойство создает благоприятные условия для работы трехфазного генератора, так как вал генератора работает с постоянным моментом нагрузки.

## 6.4. ТИПОВОЙ ПРИМЕР

В трехфазной цепи (рис. 6.4а) линейное напряжение  $U_\Delta = 380$  В. Сопротивление фаз нагрузки:  $Z_a = 100$ ,  $Z_b = j100$ ,  $Z_c = -j100$ , а сопротивление нулевого провода  $Z_0 = \infty$ .

Требуется: определить действующие значения линейных токов, построить векторную диаграмму.

**Решение.** Запишем комплексные фазные напряжения трехфазного источника, направив напряжение фазы  $A$  по вещественной положительной полуоси

$$U_{\Phi} = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В};$$

$$\dot{U}_A = 220, \quad \dot{U}_B = 220e^{-j120^\circ},$$

$$\dot{U}_C = 220e^{j120^\circ}.$$

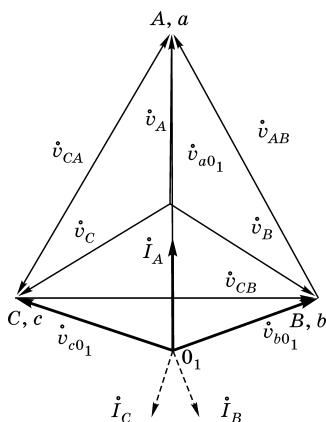


Рис. 6.9

В соответствии с (6.4) потенциал узла  $0_1$ , считая потенциал узла  $0$  равным нулю:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{0_1} &= \frac{Y_a \dot{U}_A + Y_b \dot{U}_B + Y_c \dot{U}_C}{Y_a + Y_b + Y_c} = \\ &= \frac{0,01 \cdot 220 - j0,01 \cdot 220e^{-j120^\circ} + j0,01 \cdot 220e^{j120^\circ}}{0,01 - j0,01 + j0,01} = -160. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_{0_1}}{Z_a} = \frac{220 + 160}{100} = 3,8; \\ \dot{I}_B &= \frac{\dot{U}_B - \dot{U}_{0_1}}{Z_b} = \frac{220e^{-j120^\circ} + 160}{j100} = -1,9 - j0,5; \\ \dot{I}_C &= \frac{\dot{U}_C - \dot{U}_{0_1}}{Z_c} = \frac{220e^{j120^\circ} + 160}{-j100} = -1,9 + j0,5. \end{aligned}$$

Проверка результатов:  $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$ .

Действующие значения линейных токов:

$$I_A = 3,8; \quad I_B = I_C = \sqrt{1,9^2 + 0,5^2} = 1,96.$$

Векторная диаграмма приведена на рисунке 6.9.

# ГЛАВА 7 ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИЕЙ

## 7.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

До сих пор рассматривались цепи, в которых отсутствовали элементы, связанные общим магнитным потоком. Если в цепи есть такой элемент, то цепь называют цепью с взаимной индукцией, или индуктивно связанной цепью. Простейший индуктивно связанный элемент состоит из двух идеальных катушек индуктивности, так близко расположенных друг к другу, что магнитный поток (или его часть) одной катушки пересекает витки другой.

### 7.1.1. ЯВЛЕНИЕ ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ И ИНДУКТИВНОСТЬ РАССЕЯНИЯ

В соответствии с законом электромагнитной индукции на зажимах катушки индуктивности возникает напряжение, если ее витки пронизываются переменным во времени магнитным потоком  $\Phi(t)$ . При этом неважно, каким током вызван этот поток: собственным или током соседней катушки.

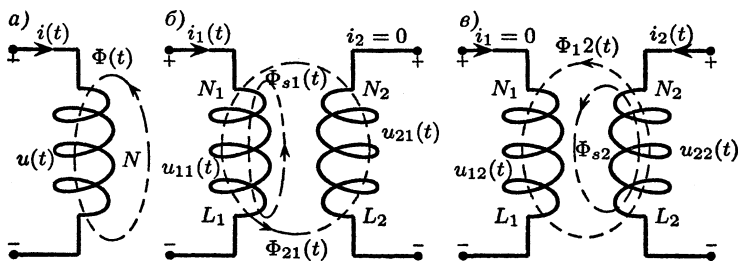


Рис. 7.1

Если считать, что усредненный магнитный поток  $\Phi(t)$  пересекает все  $N$  витков катушки (рис. 7.1а), то напряжение

$$u(t) = \frac{d\psi}{dt} = L \frac{di}{dt},$$

где  $\psi(t) = N\Phi(t) = Li(t)$  — потокосцепление самоиндукции;  $u(t)$  — напряжение самоиндукции;  $L$  — индуктивность.

Если к такой катушке поднести другую так, что часть магнитного потока  $\Phi_{21}(t)$  будет пересекать витки второй катушки (рис. 7.1б), то на ее зажимах наведется напряжение  $u_{21}(t)$ , которое называют напряжением взаимной индукции. Потокосцепление взаимной индукции  $\Psi_{21}(t) = N_2\Phi_{21}(t)$ , так же как и потокосцепление самоиндукции пропорционально току, т. е.  $\Psi_{21}(t) = M_{21}i_1(t)$ .

Коэффициент пропорциональности, измеряемый в генри, называют взаимной индуктивностью:

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}(t)}{i_1(t)},$$

тогда напряжение взаимной индукции будет

$$u_{21} = \frac{d\Psi_{21}(t)}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt}.$$

Та часть потока первой катушки, которая не пересекает витки второй, называется потоком рассеяния  $\Phi_{s1}(t)$  (рис. 7.1б), а соответствующее ему потокосцепление  $\Psi_{s1}(t)$  потокосцеплением рассеяния:  $\Psi_{s1}(t) = N_1\Phi_{s1}(t) = L_{s1}(t)i_1(t)$ , причем коэффициент пропорциональности  $L_{s1}$  называют индуктивностью рассеяния первой катушки:

$$L_{s1} = \frac{\Psi_{s1}(t)}{i_1(t)}. \quad (7.1)$$

Таким образом, магнитный поток самоиндукции первой катушки

$$\Phi_{11}(t) = \Phi_{s1}(t) + \Phi_{21}(t),$$

а потокосцепление самоиндукции

$$\Psi_{11}(t) = N_1\Phi_{11}(t) = L_1(t)i_1(t).$$

Из (7.1) индуктивность первой катушки

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{N_1 \Phi_{11}}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_{s1}}{i_1} + \frac{N_1 \Phi_{21}}{i_1} = \frac{\Psi_{s1}}{i_1} + \frac{N_1}{N_2} \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1} = \\ &= L_{s1} + \frac{N_1}{N_2} \frac{\Psi_{21}}{i_1} = L_{s1} + \frac{N_1}{N_2} M_{21}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Если магнитный поток будет создаваться током второй катушки, а ток первой катушки будет равен нулю (рис. 7.1б), то в этом случае магнитному потоку взаимной индукции  $\Phi_{12}(t)$  будет соответствовать потокосцепление взаимной индукции  $\Psi_{12}(t) = N_1 \Phi_{12}(t) = M_{12}(t)i_2(t)$ . Тогда напряжение взаимной индукции будет

$$u_{12}(t) = \frac{d\Psi_{12}}{dt} = M_{12} \frac{di_2}{dt},$$

где  $M_{12}$  — коэффициент взаимной индукции.

Потокосцепление рассеяния второй катушки записывается как  $\Psi_{s2}(t) = N_2 \Phi_{s2}(t) = L_{s2}(t)i_2(t)$ , где  $L_{s2}$  — индуктивность рассеяния второй катушки. Таким образом, магнитный поток самоиндукции второй катушки будет  $\Phi_{22}(t) = \Phi_{s2}(t) + \Phi_{12}(t)$ , а соответствующее ему потокосцепление самоиндукции

$$\Psi_{22}(t) = N_2 \Phi_{22}(t) = L_2(t)i_2(t). \quad (7.3)$$

Из (7.3) аналогично (7.2) можно получить для индуктивности второй катушки

$$L_2 = L_{s2} + \frac{N_2}{N_1} M_{12}. \quad (7.4)$$

По принципу обратимости пассивных цепей взаимные индуктивности

$$M_{21} = M_{12} = M.$$

Тогда, решая совместно (7.2) и (7.4), получим

$$M = \sqrt{(L_1 - L_{s1})(L_2 - L_{s2})}. \quad (7.5)$$

Из (7.5) видно, что максимальное значение взаимной индуктивности будет при отсутствии потоков рассеяния, т. е. когда  $\Phi_{s1} = \Phi_{s2} = 0$ , а следовательно, и  $L_{s1} = L_{s2} = 0$ :

$$M_{\max} = \sqrt{L_1 L_2}.$$

Если ток будет протекать по обеим катушкам, то напряжение первой  $u_1(t)$  и второй  $u_2(t)$  катушек будут складываться из напряжений самоиндукции и взаимной индукции:

$$u_1(t) = u_{11}(t) + u_{12}(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \quad (7.6)$$

$$u_2(t) = u_{22}(t) + u_{21}(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}. \quad (7.7)$$

Для установившегося синусоидального режима уравнения (7.6) и (7.7) преобразуются к виду

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = Z_{L1} \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = Z_{L2} \dot{I}_2 + Z_M \dot{I}_1, \end{cases}$$

где комплексное сопротивление взаимной индуктивности

$$Z_M = j\omega M.$$

### 7.1.2. КОЭФФИЦИЕНТ СВЯЗИ, СОГЛАСНОЕ И ВСТРЕЧНОЕ ВКЛЮЧЕНИЯ ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для оценки степени связи индуктивно связанных катушек используют понятие коэффициента связи

$$k_{\text{CB}} = \frac{M}{M_{\max}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1.$$

В общем случае коэффициент связи меньше единицы. Если  $k_{\text{CB}} = 1$ , то  $M = M_{\max}$ , и тогда такую индуктивную связь называют совершенной. Для достижения такой степени связи, как уже отмечалось, необходимо добиться того, чтобы потоки рассеяния равнялись нулю. Для этого, например, можно располагать катушки на ферромагнитном сердечнике, наматывая одну на другую (рис. 7.2). При такой намотке поток, создаваемый одной катушкой, практически весь пересекает витки другой. Поток рассея-

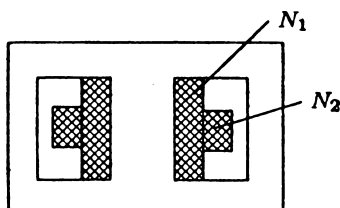


Рис. 7.2

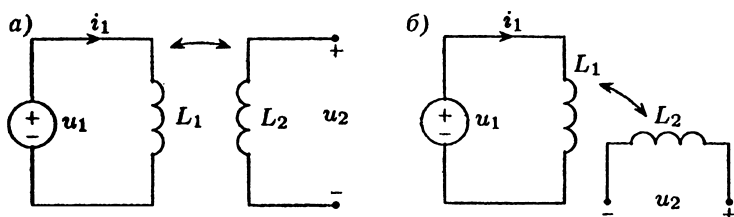


Рис. 7.3

ния близок к нулю, а коэффициент связи будет  $k_{\text{CB}} = 0,90 \div 0,95$ .

Изменяя коэффициент связи, можно изменять взаимную индуктивность  $M = k_{\text{CB}} \sqrt{L_1 L_2}$ , а следовательно, и напряжение взаимной индукции. Для этого можно, например, вращать одну катушку относительно другой, тогда напряжение  $u_2$  будет изменяться от максимального (рис. 7.3а) до практически нулевого (рис. 7.3б).

Потоки самоиндукции и взаимной индукции  $\Phi_{11}$  и  $\Phi_{12}$  (или же  $\Phi_{22}$  и  $\Phi_{21}$ ) могут пересекать витки катушки как в одинаковых, так и в противоположных направлениях (в предположении наличия положительных токов:  $i_1 > 0, i_2 > 0$ ). Если потоки самоиндукции и взаимной индукции направлены одинаково, то говорят о согласном включении (рис. 7.4а), в противном случае включение называют встречным (рис. 7.4б). Очевидно, что при согласном включении напряжения самоиндукции и взаимной индукции имеют одинаковую полярность, т. е. складываются, а при встречном — противоположную, т. е. вычитаются. Поэтому удобно считать взаимную индуктивность величиной алгебраической  $M = \pm |M|$  и полагать



$M = |M| > 0$  — при согласном включении,  $M = -|M| < 0$  — при встречном.

Тогда и для согласного, и для встречного включений выполняется

$$u_1(t) = u_{11}(t) + u_{12}(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = L_1 i_1' \pm |M| i_2';$$

$$u_2(t) = u_{22}(t) + u_{21}(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = L_2 i_2' \pm |M| i_1'.$$

Для условного обозначения характера включения удобно пользоваться маркировкой так называемых однополярных зажимов «звездочками»: если выбранные направления токов ориентированы одинаково по отношению к однополярным зажимам (рис. 7.5а), то это — согласное включение, в противном случае (рис. 7.5б) — встречное (в этом случае отпадает необходимость задавать направление намотки катушек). На рисунке 7.5а приведено обозначение согласного, а на рисунке 7.5б — встречного включений.

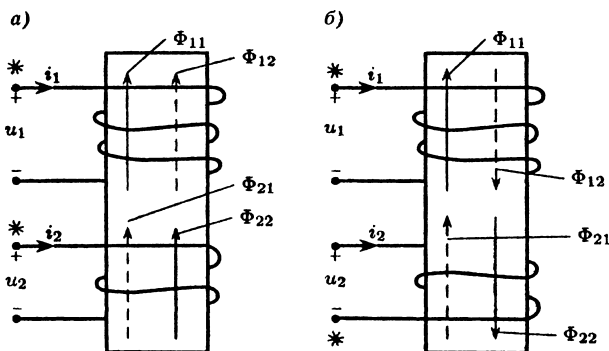


Рис. 7.4

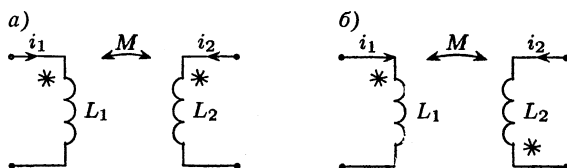


Рис. 7.5

## 7.2. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИЕЙ

### 7.2.1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫХ КАТУШЕК

Для расчета цепи рисунка 7.6а, находящейся в установившемся синусоидальном режиме, будем рассматривать оба вида включения — согласное ( $M > 0$ ) и встречное ( $M < 0$ ).

Тогда для комплексной схемы замещения (рис. 7.6б)  $Z_M = j\omega|M|$ , причем  $Z_M = j\omega|M|$  при согласном включении и  $Z_M = -j\omega|M|$  при встречном включении. Для определения тока в цепи при заданных параметрах составим уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$Z_{R_1} \dot{I} + (Z_{L_1} \dot{I} + Z_M \dot{I}) + (Z_{L_2} \dot{I} + Z_M \dot{I}) + Z_{R_2} \dot{I} = \dot{U}_0.$$

Отсюда получим

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_0}{(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)}.$$

Входное комплексное сопротивление будет

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_0}{\dot{I}} = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) = R_3 + j\omega L_3, \quad (7.8)$$

где  $R_3 = (R_1 + R_2)$ ,  $L_3 = L_1 + L_2 + 2|M|$  — при согласном включении и  $L_3 = L_1 + L_2 - 2|M|$  — при встречном. На рисунке 7.6в приведена цепь, эквивалентная цепи рисунка 7.6а. Так как  $|Z_{\text{вх}}|_{\text{согл}} > |Z_{\text{вх}}|_{\text{встр}}$ , то при одинаковом напряжении ток в цепи при встречном включении будет больше, чем при согласном. На этом основании можно

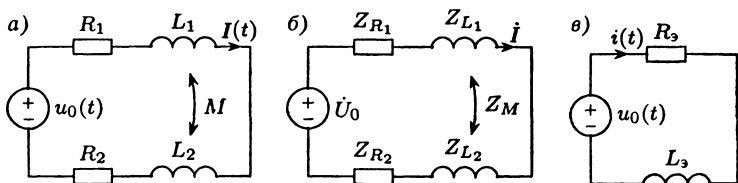


Рис. 7.6

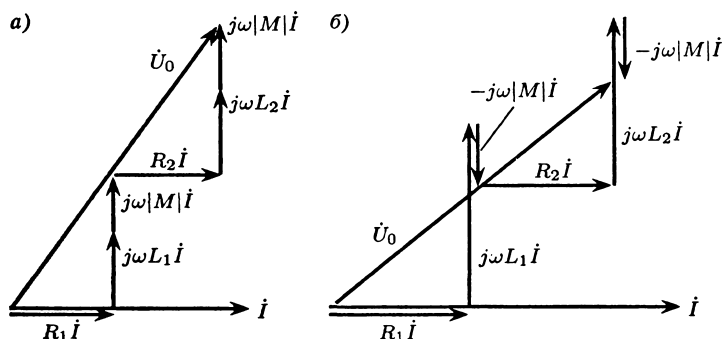


Рис. 7.7

опытным путем определить согласно или встречно включены катушки.

При отсутствии индуктивной связи ( $M = 0$ ) из (7.8) получим известное соотношение для последовательного соединения двух катушек  $L_0 = L_1 + L_2$ .

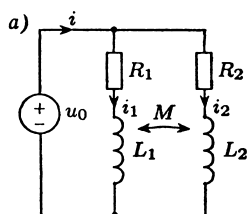
На рисунке 7.7а приведена векторная диаграмма для согласного, а на рисунке 7.7б — для встречного включений.

### 7.2.2. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫХ КАТУШЕК

На рисунке 7.8а приведена цепь, состоящая из параллельного соединения сопротивлений и индуктивно связанных катушек, а на рисунке 7.8б — ее комплексная схема замещения для установившегося синусоидального режима. В случае согласного включения имеем  $Z_M = j\omega|M|$ , а в случае встречного включения  $Z_M = -j\omega|M|$ .

Для определения трех токов в ветвях цепи составим уравнения по законам Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I} &= 0; \\ Z_{R_1} \dot{I}_1 + (Z_{L_1} \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2) &= \dot{U}_0; \\ Z_{R_2} \dot{I}_2 + (Z_{L_2} \dot{I}_2 + Z_M \dot{I}_1) &= \dot{U}_0 \end{aligned} \quad (7.9)$$



и обозначим

$$Z_1 = Z_{R1} + Z_{L1} = R_1 + j\omega L_1;$$

$$Z_2 = Z_{R2} + Z_{L2} = R_2 + j\omega L_2.$$

Тогда второе и третье уравнения системы (7.9) записываются как

$$Z_1 \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2 = \dot{U}_0;$$

$$Z_M \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2 = \dot{U}_0,$$

Находим:

$$\dot{I}_1 = \frac{Z_2 - Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \dot{U}_0;$$

$$\dot{I}_2 = \frac{Z_1 - Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \dot{U}_0,$$

тогда выполняется

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \dot{U}_0. \quad (7.10)$$

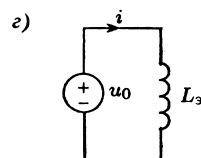
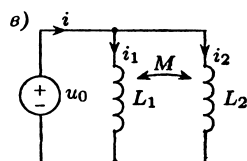
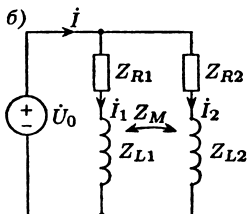


Рис. 7.8

Рассмотрим частный случай (рис. 7.8в), когда  $R_1 = R_2 = 0$ . Из (7.10) при  $Z_1 = j\omega L_1$ ,  $Z_2 = j\omega L_2$  и  $Z_M = j\omega M$  получим:

$$\dot{I} = \frac{j\omega(L_1 + L_2 - 2M)}{\omega^2 M^2 - \omega^2 L_1 L_2} \dot{U}_0 = \frac{\dot{U}_0}{(j\omega \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M})} = \frac{\dot{U}_0}{j\omega L_3}.$$

Эквивалентная индуктивность (рис. 7.8г) оказывается при согласном включении

$$L_{3 \text{ согл}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2|M|}, \quad (7.11)$$

а при встречном включении —

$$L_{3 \text{ встр}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2|M|}, \quad (7.12)$$

следовательно, как и при последовательном соединении,  $L_{\text{э встр}} < L_{\text{э согл.}}$ .

При отсутствии индуктивной связи ( $M = 0$ ) выражения (7.11) и (7.12) превращаются в хорошо известное соотношение для эквивалентной индуктивности параллельного соединения двух идеальных  $L$ -элементов

$$L_{\text{э}} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}.$$

### 7.2.3. РАСЧЕТ РАЗВЕТВЛЕННЫХ ЦЕПЕЙ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИЕЙ

Расчет разветвленных цепей при наличии индуктивно связанных элементов, как правило, осуществляют по уравнениям Кирхгофа либо методом контурных токов. Применение метода узловых напряжений (потенциалов) в этом случае требует специальных приемов и на практике редко используется.

В некоторых задачах можно преобразовать исходную цепь с индуктивной связью в эквивалентную цепь без индуктивной связи, к которой уже легко применить все известные методы расчета.

В качестве примера составим уравнения по законам Кирхгофа для цепи, комплексная схема замещения которой представлена на рисунке 7.9. Как следует из рисунка 7.9, первая и вторая катушки включены согласно (токи входят в однополярные зажимы), а первая и третья — встречно (токи входят в разнополярные зажимы). Следовательно, имеем  $Z_{12} = j\omega|M_{12}|$ ,  $Z_{13} = -j\omega|M_{13}|$ .

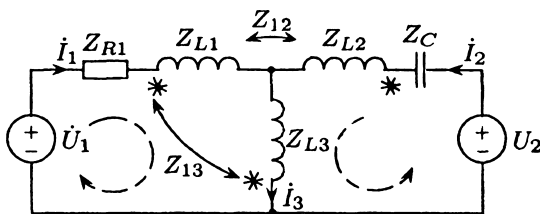


Рис. 7.9

Система уравнений для рассматриваемой цепи для наглядности записана в порядке обхода контуров:

$$\begin{aligned} Z_{R1}\dot{I}_1 + (Z_{L1}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 + Z_{13}\dot{I}_3) + (Z_{L3}\dot{I}_3 + Z_{13}\dot{I}_1) &= \dot{U}_1; \\ Z_C\dot{I}_2 + (Z_{L2}\dot{I}_2 + Z_{12}\dot{I}_1) + (Z_{L3}\dot{I}_3 + Z_{13}\dot{I}_1) &= \dot{U}_2; \\ \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (7.13)$$

После приведения подобных членов система (7.13) может быть решена и по найденным комплексным значениям токов определены токи установившегося синусоидального режима.

При использовании преобразования Лапласа для расчета переходных процессов в цепях с взаимной индукцией уравнения индуктивно связанных катушек

$$\begin{aligned} u_{L1}(t) &= L_1 i'_{L1}(t) + |M| i'_{L2}(t); \\ u_{L2}(t) &= L_2 i'_{L2}(t) + |M| i'_{L1}(t) \end{aligned}$$

преобразуют к виду

$$\begin{aligned} U_{L1}(s) &= [sL_1 I_{L1}(s) - L_1 i_{L1}(0-)] + [sMI_{L2}(s) - Mi_{L2}(0-)]; \\ U_{L2}(s) &= [sL_2 I_{L2}(s) - L_2 i_{L2}(0-)] + [sMI_{L1}(s) - Mi_{L1}(0-)], \end{aligned}$$

при этом  $Z_M(s) = sM = \pm s|M|$  называют операторным сопротивлением взаимной индуктивности.

#### 7.2.4. ИСКЛЮЧЕНИЕ ИНДУКТИВНОЙ СВЯЗИ

На рисунке 7.10а приведены две индуктивно связанные катушки, имеющие общий узел, к которому они подключены однополярными зажимами.

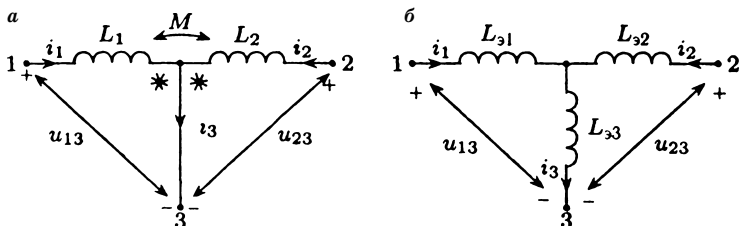


Рис. 7.10

На рисунке 7.10б показана цепь без индуктивной связи. Необходимо определить значения, при которых токи в ветвях и напряжения между узлами будут такими же, как и в исходной цепи. Система уравнений для цепи (рис. 7.10а) записывается как

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0; \\ L_1 i'_1 + |M| i'_2 = u_{13}; \\ L_2 i'_2 \pm |M| i'_1 = u_{23}. \end{cases} \quad (7.14)$$

Исключим из второго уравнения ток  $i_2 = i_3 - i_1$ , а из третьего  $i_2 = i_3 - i_1$ . Тогда уравнения (7.14) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - i_3 &= 0; \\ (L_1 - M) i'_1 + |M| i'_3 &= u_{13}; \\ (L_2 - M) i'_2 + |M| i'_3 &= u_{23}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Для цепи (рис. 7.10б) имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - i_3 &= 0; \\ L_{\alpha 1} i'_1 + L_{\alpha 3} i'_3 &= u_{13}; \\ L_{\alpha 2} i'_2 + L_{\alpha 3} i'_3 &= u_{23}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Сравнивая (7.15) и (7.16), приходим к заключению, что цепи (рис. 7.10а, б) будут эквивалентны, если  $L_{\alpha 1} = L_1 - |M|$ ,  $L_{\alpha 2} = L_2 - |M|$ ,  $L_{\alpha 3} = |M|$ . Взаимная индуктивность записана по модулю, так как полученные выражения для эквивалентных индуктивностей не зависят от характера включения и будут такими при подключении индуктивно связанных катушек к общему узлу однополярными зажимами и при  $M > 0$ , и при  $M < 0$ .

Если элементы будут подключены к общему узлу разнополярными зажимами, то аналогичным образом можно доказать, что в этом случае  $L_{\alpha 1} = L_1 + |M|$ ,  $L_{\alpha 2} = L_2 + |M|$ ,  $L_{\alpha 3} = -|M|$ . Отрицательная индуктивность, включаемая в третью ветвь, является чисто расчетной величиной, не имеющей физического смысла. В установившемся синусоидальном режиме в этом случае  $Z_{\alpha 3} = -j\omega|M|$ .

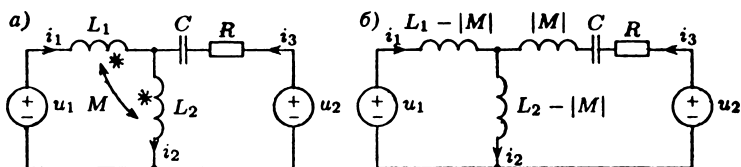


Рис. 7.11

Если индуктивно связанные катушки не имеют общего узла, то такое исключение индуктивной связи невозможно.

Для примера на рисунке 7.11а приведена цепь с индуктивной связью, а на рисунке 7.11б — ей эквивалентная без индуктивной связи.

### 7.3. ТРАНСФОРМАТОР В ЛИНЕЙНОМ РЕЖИМЕ

#### 7.3.1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Трансформатором называют индуктивно связанную цепь, предназначенную обычно для изменения уровней напряжения и тока. Трансформатор представляет собой две индуктивно связанные катушки, называемые обмотками, которые расположены, как правило, на ферромагнитном сердечнике. Будем предполагать, что сердечник работает на линейном участке кривой намагничивания либо трансформатор выполнен без ферромагнитного сердечника («воздушный» трансформатор). По определению идеальный трансформатор должен при любой нагрузке и на любой частоте иметь отношение комплексов напряжений первичной и вторичной обмоток и отношение комплексов токов вторичной и первичной обмоток равными друг другу и равными постоянной величине, которая называется коэффициентом трансформации:

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = n. \quad (7.17)$$

Выясним, при каких условиях возможно выполнение (7.17). Если трансформатор работает на не очень высоких



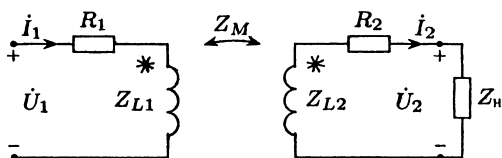


Рис. 7.12

частотах, то можно пренебречь емкостью между обмотками и между витками обмоток. Тогда двухобмоточный трансформатор можно представить схемой (рис. 7.12). Обозначим  $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$ ,  $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$ ,  $Z_M = -j\omega|M| = -jX_M = -j|Z_M|$ .

Уравнения трансформатора имеют вид

$$\begin{aligned} Z_1 \dot{I}_1 - jX_M \dot{I}_2 &= \dot{U}_1; \\ -jX_M \dot{I}_1 + (Z_2 + Z_H) \dot{I}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Из системы (7.18) находим токи:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{(Z_2 + Z_H)U}{Z_1(Z_2 + Z_H) + X_M^2}; \\ \dot{I}_2 &= \frac{jX_M \dot{U}_1}{Z_1(Z_2 + Z_H) + X_M^2}. \end{aligned}$$

Тогда функции передачи будут

$$\begin{aligned} H_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} &= \frac{jX_M}{Z_2 + Z_H} = \frac{j\omega|M|}{R_2 + j\omega L_2 + Z_H}; \\ H_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} &= \frac{Z_H \dot{I}_2}{\dot{U}_1} = \frac{jX_M Z_H}{Z_1(Z_2 + Z_H) + X_M^2}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Как видно из (7.19), полученные функции в общем случае зависят от нагрузки и от частоты и не соответствуют требованиям (7.17).

### 7.3.2. СОВЕРШЕННЫЙ ТРАНСФОРМАТОР БЕЗ ПОТЕРЬ

Будем полагать, что в трансформаторе  $R_1 = R_2 = 0$  и потоки рассеяния отсутствуют, т. е. он обладает совершенной магнитной связью, при которой  $L_{s1} = L_{s2} = 0$  и коэффициент связи  $k_{св} = 1$ . В этом случае имеем

$$H_U \frac{j\omega |M| Z_{\text{н}}}{j\omega L_1 (j\omega L_2 + Z_{\text{н}}) + \omega^2 M^2} = \frac{j\omega |M| Z_{\text{н}}}{j\omega L_1 Z_{\text{н}} - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2} = \frac{|M|}{L_1}.$$

При совершенной связи из (7.2) получим  $L_1 = \frac{N_1}{N_2} |M|$ . Тогда оказывается, что

$$H_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{n} = \text{const},$$

где  $N_2$  — число витков вторичной, а  $N_1$  — число витков первичной обмоток.

Таким образом, совершенный трансформатор без потерь удовлетворяет требованиям (7.17), предъявляемым к функции передачи по напряжению.

Функция передачи по току в этом случае зависит от частоты и сопротивления нагрузки:

$$H_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{j\omega |M|}{j\omega L_2 + Z_{\text{н}}} = \frac{1}{\frac{L_2}{|M|} + \frac{Z_{\text{н}}}{j\omega |M|}},$$

и лишь при  $|Z_{\text{н}}| < \omega |M|$  она удовлетворяет предъявляемым в (7.17) требованиям. Поэтому такой трансформатор иногда называют трансформатором напряжения.

При  $|Z_{\text{н}}| < \omega |M|$ , учитывая из (7.4), что  $L_2 = \frac{N_2}{N_1} |M|$ , находим

$$H_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{|M|}{L_2} = \frac{N_1}{N_2} = n = \text{const}.$$

Для приближения к полученным результатам на практике необходимо выполнять обмотки проводом с малым удельным сопротивлением (медь) и располагать обмотки одну на другой (см. рис. 7.2а) для того, чтобы уменьшить поток рассеяния и тем самым приблизить коэффициент связи к единице.

### 7.3.3. ИДЕАЛЬНЫЙ ТРАНСФОРМАТОР

Будем полагать, что в совершенном трансформаторе без потерь взаимная индуктивность  $M \rightarrow \infty$ . Но тогда верно и

$$L_1 = \frac{N_1}{N_2} |M| \rightarrow \infty, \text{ и } L_2 = \frac{N_2}{N_1} |M| \rightarrow \infty.$$

В этом случае будет

$$H_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{n}, \quad H_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{N_1}{N_2} = n,$$

или

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{N_1}{N_2} = n.$$

Для достижения полученных результатов на практике необходимо, чтобы индуктивности обмоток были как можно больше. Так как индуктивность пропорциональна магнитной проницаемости и квадрату числа витков  $N$ , то необходимо сердечник изготавливать из ферромагнитного материала с высоким значением магнитной проницаемости, а обмотки — с числом витков, в идеале стремящимся к бесконечности, оставляя их отношение  $N_1 / N_2 = n$ .

Особый интерес представляет входное сопротивление идеального трансформатора:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n^2 \dot{U}_2}{\dot{I}_2} = n^2 Z_{\text{н}},$$

т. е. в данном случае происходит трансформация (преобразование значения) сопротивления. Это свойство часто используется на практике для целей согласования сопротивления нагрузки с эквивалентным сопротивлением источника питания, так как источник воспринимает сопротивление нагрузки увеличенным в  $n^2$  раз, где  $n = N_1 / N_2$ .

#### 7.4. ТИПОВОЙ ПРИМЕР

В цепи рисунка 7.13а установившийся синусоидальный режим.  $u(t) = 20\cos(10t - 45^\circ)$ ,  $L_1 = L_2 = 0,3$  Гн,  $C = 0,05$  ф,  $|M| = 0,1$  Гн,  $R = 1$  Ом.

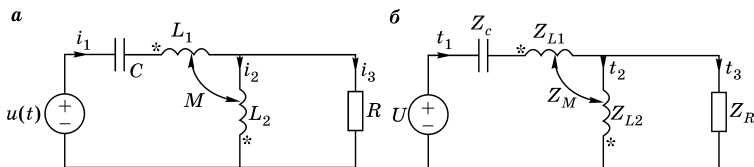


Рис. 7.13

Требуется определить действующие значения токов ветвей, входное сопротивление цепи, действующие значения напряжений на  $L$ -элементах.

**Решение с использованием уравнений Кирхгофа.** На рисунке 7.13б изображена комплексная схема цепи, где

$$Z_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{10 \cdot 0,05} = -j2;$$

$$Z_{L_1} = Z_{L_2} = j\omega L = j10 \cdot 0,03 = j3;$$

$$Z_R = R = 1;$$

$$\dot{U} = \frac{20}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ} = 10 - j10;$$

$$Z_M = j\omega(-M) = -j.$$

( $M < 0$ , встречное включение.)

Система уравнений Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0; \\ Z_C \dot{I}_1 + (Z_{L_1} \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2) + (Z_{L_2} \dot{I}_2 + Z_M \dot{I}_1) = \dot{U} \dot{I}_2; \\ Z_R \dot{I}_3 - (Z_{L_2} \dot{I}_2 + Z_M \dot{I}_1) = 0. \end{cases}$$

Система численно:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0; \\ -j2\dot{I}_2 = 10 - j10; \\ j\dot{I}_1 - j3\dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, найдем:

$$\dot{I}_1 = -5 - j15, \quad \dot{I}_2 = -5 - j5, \quad \dot{I}_3 = -j10.$$

Отсюда

$$I_1 = \sqrt{5^2 + 15^2} = 15,8 \text{ А};$$

$$I_2 = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7,07 \text{ А};$$

$$I_3 = 10 \text{ А}.$$

Напряжения на индуктивных элементах:

$$\dot{U}_{L_1} = Z_{L_1} \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2 = j3(-5 - j15) - j(-5 - j5) = 40 - j10;$$

$$\dot{U}_{L_2} = Z_{L_2} \dot{I}_2 + Z_M \dot{I}_1 = j3(-5 - j5) - j(-5 - j15) = -j10;$$

$$U_{L_1} = \sqrt{40^2 + 10^2} = 41,23 \text{ В};$$

$$U_{L_2} = 10 \text{ В}.$$

**Решение с использованием исключения индуктивной связи.** Индуктивные элементы цепи рисунка 7.13а подключены к общему узлу однополярными зажимами, и цепь без индуктивной связи будет иметь вид рисунка 7.14, где

$$Z_{\varepsilon 1} = j\omega(L_1 - |M|) = j2;$$

$$Z_{\varepsilon 2} = j\omega(L_2 - |M|) = j2;$$

$$Z_{\varepsilon 3} = j\omega|M| = j.$$

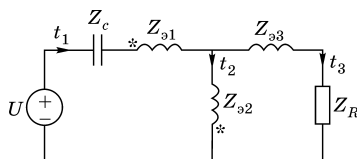


Рис. 7.14

Входное сопротивление в этой цепи можно определить простыми вычислениями:

$$Z_{\text{вх}} = Z_C + Z_{\varepsilon 1} + \frac{Z_{\varepsilon 2}(Z_R + Z_{\varepsilon 3})}{Z_{\varepsilon 2} + Z_R + Z_{\varepsilon 3}} = 0,4 + j0,8.$$

$$\text{Входной ток } \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_{\text{вх}}} = \frac{10 - j10}{0,4 + j0,8} = -5 - j15.$$

Токи  $\dot{I}_2$  и  $\dot{I}_3$  можно найти, например, используя ФДТ.

# ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ

## 8.1. СВЯЗЬ ФОРМЫ СИГНАЛОВ С ПОЛЮСАМИ ИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО ЛАПЛАСУ

### 8.1.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРЕОБРАЗУЕМЫХ ПО ЛАПЛАСУ СИГНАЛОВ

Если сигнал (т. е. переменная в цепи)  $f(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ , а при  $t > 0$  рост  $f(t)$  ограничен в сравнении с нарастающей экспонентой (рис. 8.1а), т. е.  $|f(t)| < Me^{\sigma_A t}$ , где  $M > 0$ , то функция  $f(t)$  может быть преобразована по Лапласу:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = [f(t)], \quad (8.1)$$

причем несобственный интеграл (8.1) абсолютно сходится (т. е. площадь  $|f \exp(-st)|$  ограничена) и  $F(s)$  является регулярной функцией (т. е. непрерывной и дифференцируемой) в правой полуплоскости  $s = \sigma + j\omega$  правее прямой  $\text{Re } s = \sigma_A > 0$ , где  $\sigma_A$  — абсцисса абсолютной сходимости (рис. 8.1б).

Действительно,

$$F(s) \leq \int_0^{\infty} |f(t)e^{-\sigma t - j\omega t}| dt \leq \int_0^{\infty} M e^{-(\sigma - \sigma_A)t} dt = \frac{M}{\sigma - \sigma_A}, \quad (8.2)$$

т. е. последний интеграл в (8.2) отражает при  $\sigma > \sigma_A$  площадь затухающей экспоненты, а эта площадь ограничена (рис. 8.1в).

Условимся использовать обозначение соответствия  $f(t) \div F(s)$ , где  $f(t)$  — оригинал, т. е. сигнал (точнее — функция, описывающая сигнал);  $F(s)$  — изображение  $f(t)$  по Лапласу.

*Примечание.* С позиции теории цепей одностороннюю функцию необходимо записывать в форме  $f(t) = f^*(t)\delta_1(t)$ , но обычно, оговаривая  $t > 0$ , не указывают  $\delta_1(t)$ , если в этом нет необходимости, например,

$$\cos \omega_0 t \div \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \text{ хотя строго говоря,}$$

необходимо записывать

$$\cos \omega_0 t \delta_1(t) \div \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Формула обратного преобразования Лапласа имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad (8.3)$$

причем интегрирование ведется вдоль прямой  $\operatorname{Re} s = c$  в правой полуплоскости так, чтобы все особые точки  $s_k$  изображения  $F(s)$  лежали слева от этой прямой (по определению особой точки  $F(s_k) \rightarrow \infty$ ). В теории цепей в качестве особых точек в основном рассматривают полюсы (т. е. корни знаменателя) дробно-рациональной функции

$$F(s) = \frac{B(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{d_n s^n + \dots + d_1 s + d_0} = \frac{1}{d_n} \frac{B(s)}{\prod_n (s - s_k)}, \quad (8.4)$$

однако на практике для перехода к оригиналу используют не (8.3), а таблицу соответствия оригиналов и изображений или теорему разложения.

### 8.1.2. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ ОРИГИНАЛОВ

К оригиналу от изображения по Лапласу (8.4) переходят на основании теоремы разложения по следующей формуле:

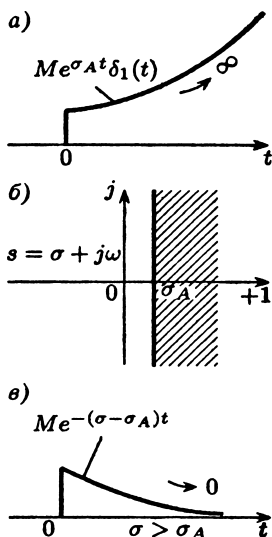


Рис. 8.1

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{1}{d_n} \frac{B(s)}{\prod_n (s - s_k)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_0}{s - s_k} + A_0 \div f(t) = \\
 &= \sum_{k=1}^n A_k e^{s_k t} \delta_1(t) + A_0 \delta(t),
 \end{aligned}
 \tag{8.5}$$

при этом коэффициенты разложения  $F(s)$  на простейшие дроби вычисляются методом неопределенных коэффициентов или по формулам

$$\begin{cases} A_k = (s - s_k) F(s) \big|_{s=s_k} = \frac{B(s)}{D'(s)} \big|_{s=s_k}; \\ A_0 = F(\infty), \end{cases}
 \tag{8.6}$$

причем первый вариант расчета  $A_k$  по формуле (8.6) более прост, а величину  $A_0$  называют целой частью  $F(s)$ .

*Примечания.*

1. Формула (8.5) приведена для случая любых некратных корней (в том числе комплексных, мнимых, нулевого).

2. В (8.4) степень полинома знаменателя не ниже степени полинома числителя, т. е.  $n \geq m$ , причем  $A_0 = 0$  при  $n > m$  и  $A_0 = b_n / d_n$  при  $n = m$ .

3. Функция  $F(s)$  в (8.5) должна быть дробно-рациональной, как указано в (8.4).

Рассмотрим примеры расчета по теореме разложения, в том числе расширяющие возможности ее стандартного применения (8.5).

**Пример 1.** Рассмотрим случай  $n = m$ .

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{10s^2 + 10}{(s+2)s} = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s} + A_0 \div f(t) = \\
 &= (A_1 e^{-2t} + A_2) \delta_1(t) + A_0 \delta(t);
 \end{aligned}$$

где

$$A_1 = (s+2)F(s) \big|_{s=-2} = \frac{10s^2 + 10}{s} \big|_{s=-2} = \frac{10(-2)^2 + 10}{-2} = -25,$$

$$A_2 = sF(s) \big|_{s=0} = \frac{10s^2 + 10}{s+2} \big|_{s=0} = 5;$$

$$A_0 = F(\infty) = 10.$$



*Примечания.*

1. Нулевой полюс  $s_2 = 0$  дал в оригинале  $A_2 e^{0t} = A_2$ .

2. Трактовка использованного выше варианта формулы (8.6) при расчете  $A_k$  очевидна — при сохранении равенства  $F(s)$  слева и справа применен вариант преобразования, включающий все коэффициенты  $A_k$ , кроме искомого.

**Пример 2.** Рассмотрим случай кратных полюсов, например

$$F(s) = \frac{\dots}{(s+2)^3} = \frac{A_1}{(s+2)^3} + \frac{A_2}{(s+2)^2} + \frac{A_3}{(s+2)} \div f(t) = \\ = (A_1 \frac{t^2}{2} + A_2 t + A_3) e^{-2t} \delta_1(t).$$

Формулы, в которых использована описанная выше процедура исключения всех коэффициентов, кроме искомого, в данном случае, очевидно, имеют вид

$$\begin{cases} A_1 = (s+2)^3 F(s) \big|_{s=-2}; \\ A_2 = \frac{d}{ds} [(s+2)^3 F(s)] \big|_{s=-2}; \\ A_3 = \frac{d^2}{ds^2} [(s+2)^3 F(s)] \big|_{s=-2}. \end{cases} \quad (8.7)$$

*Примечания.*

1. На практике, однако, часто вместо формул типа (8.7) применяют метод неопределенных коэффициентов, в котором разложение  $F(s)$  справа приводят к общему знаменателю и находят  $A_k$ , приравнявая коэффициенты числителя  $F(s)$  слева и справа при одинаковых степенях  $s$ .

2. Иногда один из коэффициентов ( $A_3$  в примере 2) находят, используя теорему о начальном значении  $f(0+) = sF(s)$  при  $s \rightarrow \infty$  (поскольку в этом случае в примере 2 составляющие с коэффициентами  $A_1, A_2$  исключаются как в  $s$ -, так и в  $t$ -областях).

Наличие кратного корня в знаменателе  $F(s)$  аналогично появлению кратного корня ХП при расчете переходных процессов, т. е. при экспоненте появляется сомножитель  $t$  или  $t^2 \dots$

**Пример 3.** Если  $F(s)$  не является дробно-рациональной функцией, то на простейшие дроби разлагают только ее дробно-рациональную часть, например,

$$F(s) = \frac{10s + 10e^{-3s}}{s(s+2)} = \frac{10}{s+2} + \frac{10}{s(s+2)}e^{-3s} = \frac{10}{s+2} + \left(\frac{5}{s} + \frac{-5}{s+2}\right)e^{-3s} \div f(t) = 10e^{-2t}\delta_1(t) + [5 - 5e^{-2(t-3)}]\delta_1(t-3).$$

*Примечание.* При записи смещенных (запаздывающих) друг относительно друга односторонних функций использование единичных ступенчатых функций обязательно.

**Пример 4.** Рассмотрим подробно случай комплексных полюсов, например,

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{100}{(s^2 + 6s + 25)s} = \frac{100}{(s+3-j4)(s+3+j4)s} = \\ &= \frac{A_1}{s+3-j4} + \frac{A_2}{s+3+j4} + \frac{A_3}{s}; \\ A_1 &= (s+3-j4)F(s)|_{s=-3+j4} = \frac{100}{(s+3+j4)s}|_{s=-3+j4} = \\ &= \frac{100}{j8(-3+j4)} = \frac{100}{8e^{j90^\circ} 5e^{j127^\circ}} = 2,5e^{-j217^\circ}; \\ A_2 &= A_1^* = 2,5e^{j217^\circ}, \quad A_3 = 4; \\ f(t) &= [2,5e^{-j217^\circ} e^{(-3+j4)t} + 2,5e^{j217^\circ} e^{(-3-j4)t}] + 4 = \\ &= 2,5e^{-3t} [e^{j(4t-217^\circ)} + e^{-j(4t-217^\circ)}] + 4 = \\ &= 5e^{-3t} \cos(4t-127^\circ) + 4. \end{aligned}$$

*Примечания.*

1. Сопряженность коэффициентов  $A_2 = A_1^*$  математически следует из варианта формулы (8.6)  $A_k = B(s) / D'(s)$  при  $s = s_k$ , поскольку одинаковые действия над сопряженными комплексными числами  $s_{1,2} = -3 \pm j4$  дают сопряженный результат; с другой стороны, суммирование сопряженных функций приводит к вещественному ответу.

2. Аналогично следует действовать, если полюсы  $F(s)$  мнимые.

### 8.1.3. СВОЙСТВА И ТЕОРЕМЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Рассмотрим некоторые из свойств и теорем.

1. Свойство линейности:

$$\sum a_k f_k(t) \div \sum a_k F_k(s). \quad (8.8)$$

2. Теоремы о дифференцировании и интегрировании оригинала:

$$f'(t) \div sF(s) - f(0-); \quad \int_0^t f(t) dt \div \frac{F(s)}{s}. \quad (8.9)$$

3. Теорема свертки (изображение интеграла наложения):

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) h(t-\tau) d\tau \div F_2(s) = F_1(s) H(s). \quad (8.10)$$

4. Теорема сдвига (смещения изображения в  $s$ -области):

$$F(s + \beta) \div f(t) e^{-\beta t}. \quad (8.11)$$

5. Теорема запаздывания (смещения оригинала в  $t$ -области):

$$f(t - t_3) \div F(s) e^{-st_3}. \quad (8.12)$$

6. Теорема подобия (нормировки, т. е. масштабирования):

$$f(at) \div \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

7. Теоремы о предельных значениях — начальном и конечном:

$$f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s); \quad (8.13)$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s). \quad (8.14)$$

*Примечание.* Теорема (8.14) справедлива только в том случае, если полюсы  $F(s)$  находятся в левой полуплоскости или, в крайнем случае, один полюс — в начале координат.

8. Свойство коммутативности преобразования Лапласа с операциями взятия вещественной или мнимой части (если не раскрывать сущности аргумента  $s$ ):

$$\operatorname{Re} f(t) \div \operatorname{Re} F(s), \quad \operatorname{Im} f(t) \div \operatorname{Im} F(s).$$

9. Свойство дифференцирования и интегрирования по параметру:

$$\frac{df(t, k)}{dk} \div \frac{dF(s, k)}{dk};$$

$$\int_{k_1}^{k_2} f(t, k) dk \div \int_{k_1}^{k_2} F(s, k) dk.$$

10. Теорема о дифференцировании изображения:

$$\frac{dF(s)}{ds} \div -tf(t).$$

#### 8.1.4. СВЯЗЬ ФОРМЫ ОРИГИНАЛА С ПОЛЮСАМИ ИЗОБРАЖЕНИЯ (ТАБЛИЦА СООТВЕТСТВИЯ ОРИГИНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ)

Найдем на основании (8.1) изображение дельта-функции:

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{0-}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (8.15)$$

*Примечания.*

1. В (8.15) нижний предел в сравнении с (8.1) расширен до  $t = 0-$ , чтобы интервал интегрирования «захватил» дельта-функцию, площадь которой равна единице.

2. При записи второго интеграла в (8.15) использовано свойство «выборки», т. е.

$$\delta(t) e^{-st} = \delta(t) e^0.$$

3. В отличие от (8.1) в теории цепей в основном используется так называемое расширенное преобразование Лапласа, обозначаемое  $\mathcal{L}$ :

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L} |f(t)|.$$

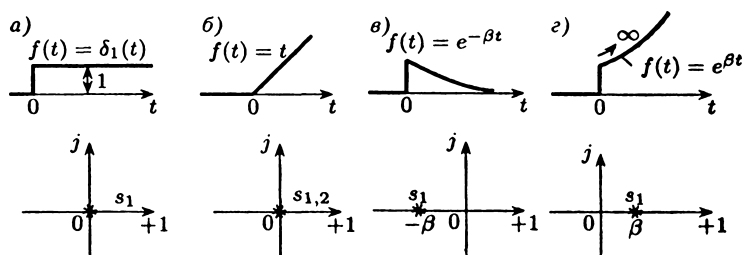


Рис. 8.2

Зная лишь изображение дельта-функции, можно на основании результатов п. 8.1.3 составить таблицу соответствия оригиналов и изображений  $f(t) \div F(s)$ .

1. Изображение дельта-функции  $\delta(t) \div 1$ .

2. Изображение единичной ступенчатой функции имеет вид  $\delta_1(t) \div 1/s$ , поскольку  $\delta_1(t) = \int_0^t \delta(t) dt$ , а на основании (8.9) интегрирование оригинала соответствует делению изображения на  $s$ .

**Вывод.** Из сравнения (рис. 8.2а) графика сигнала  $\delta_1(t)$  и диаграммы расположения полюса изображения  $s_1 = 0$  в комплексной плоскости следует, что полюсу  $F(s)$  в начале координат соответствует наличие постоянной составляющей в оригинале при  $t > 0$ .

3. Изображение постоянной величины:  $A \div A/s$ , поскольку на основании п. 8.1.1 фактически по Лапласу преобразуется функция  $A\delta_1(t)$  для  $t > 0$ .

4. Изображение линейной функции  $t \div 1/s^2$ , поскольку ку фактически находим изображение

$$f(t) = t\delta_1(t) = \int_0^t \delta_1(t) dt$$

при учете теоремы интегрирования (8.9).

**Вывод.** Кратному полюсу в начале координат  $s_{1,2} = 0$  соответствует появление множителя  $t$  в оригинале (рис. 8.2б).

Аналогично выводятся формулы

$$t^2 / 2 \div 1/s^3, t^n / n! \div 1/s^{n+1}.$$

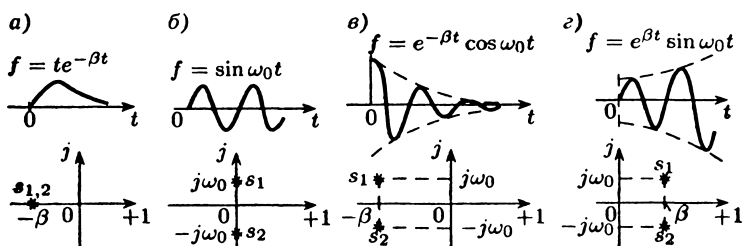


Рис. 8.3

5. Изображение затухающей экспоненты  $e^{-\beta t} \div 1 / (s + \beta)$ , поскольку фактически преобразуется функция  $e^{-\beta t} \delta_1(t)$  при учете теоремы сдвига (8.11).

*Вывод.* Отрицательному полюсу ( $s_1 = -\beta$ ) соответствует затухающая экспонента в оригинале (см. рис. 8.2в).

6. Изображение нарастающей экспоненты  $e^{\beta t} \div 1 / (s - \beta)$ , на основании теоремы сдвига (8.11).

*Вывод.* Положительному полюсу ( $s_1 = \beta$ ) в изображении  $F(s)$  соответствует неограниченно нарастающая экспонента в оригинале  $f(t)$  (рис. 8.2г), т. е. имеет место неустойчивый процесс при  $t > 0$ , что противоречит условиям устойчивости (3.9), (3.10).

7. Произведение линейно нарастающей функции и затухающей экспоненты имеет изображение  $te^{-\beta t} \div 1 / (s + \beta)^2$ , на основании использования теоремы сдвига (8.11) при  $f(t) = t \div 1 / s^2$ .

*Вывод.* Кратному полюсу  $s_{1,2} = -\beta$  изображения соответствует наличие множителя  $t$  в оригинале (рис. 8.3а).

Аналогично выводится формула  $0,5t^2 e^{-\beta t} \div 1 / (s + \beta)^3$ .

8. Изображение синусоиды  $\sin \omega_0 t \div \omega / (s^2 + \omega_0^2)$ , поскольку

$$\sin \omega_0 t = \operatorname{Im} e^{j\omega_0 t} \div \operatorname{Im} 1 / (s - j\omega_0).$$

*Вывод.* Мнимым полюсам  $s_{1,2} = \pm j\omega_0$  изображения соответствуют незатухающие гармонические колебания в оригинале (рис. 8.3б).

9. Изображение косинусоиды

$$\cos \omega_0 t \div s / (s^2 + \omega_0^2)$$

обосновывается аналогично предыдущему.

10. Произведение косинусоиды и затухающей экспоненты имеет изображение

$$e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \div (s + \beta) / ((s + \beta)^2 + \omega_0^2)$$

на основании теоремы сдвига (8.11).

*Вывод.* Комплексным полюсам изображения, находящимся в левой полуплоскости  $s_{1,2} = -\beta \pm j\omega_0$  (рис. 8.3а), соответствуют затухающие по экспоненте гармонические колебания.

11. Произведение синусоиды и нарастающей экспоненты имеет изображение

$$e^{\beta t} \sin \omega_0 t \div \omega_0 / ((s - \beta)^2 + \omega_0^2)$$

на основании теоремы сдвига (8.11).

*Вывод.* Комплексным полюсам изображения, находящимся в правой полуплоскости (рис. 8.3б), соответствует неустойчивый (неограниченно нарастающий) колебательный процесс.

## 8.2. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

### 8.2.1. ЗАКОНЫ КИРХГОФА В ОПЕРАТОРНОЙ ФОРМЕ

Метод расчета переходных процессов с использованием преобразования Лапласа обычно называют операторным методом.

Уравнения законов Кирхгофа  $\sum i_k(t) = 0$ ,  $\sum u_k(t) = 0$  преобразуем по Лапласу с использованием свойства линейности из п. 8.1.3:

$$\begin{aligned} \sum I_k(s) &= 0; \\ \sum U_k(s) &= 0. \end{aligned}$$

*Примечание.* При использовании метода комплексных амплитуд (МКА) для анализа установившегося синусоидального режима уравнения  $\sum \dot{I}_k = 0$ ,  $\sum \dot{U}_k = 0$  имели аналогичный вид.

### 8.2.2. ОПЕРАТОРНАЯ СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ $R$ -ЭЛЕМЕНТА

Преобразуем по Лапласу уравнение  $R$ -элемента  $u_R(t) = Ri_R(t)$ , используя свойство линейности из п. 8.1.3:

$$U_R(s) = RI_R(s),$$

при этом операторное сопротивление резистивного элемента  $Z_R(s) = R$  такое же, как сопротивление  $R$ -элемента в  $t$ -области и при использовании МКА ( $\dot{U}_R = R\dot{I}_R$ ).

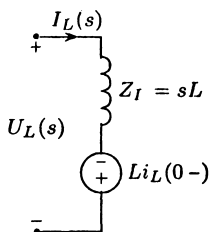
### 8.2.3. ОПЕРАТОРНАЯ СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ $L$ -ЭЛЕМЕНТА

Уравнения индуктивного элемента во временной области

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt};$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt + i_L(0-)$$

преобразуем по Лапласу, используя из п. 8.1.3 свойство линейности, теоремы дифференцирования и интегрирования (8.9), а также формулу изображения постоянной составляющей из п. 8.1.4:



$$U_L(s) = LsI_L(s) - Li_L(0-); \quad (8.16)$$

$$I_L(s) = \frac{U_L(s)}{Ls} + \frac{i_L(0-)}{s}. \quad (8.17)$$

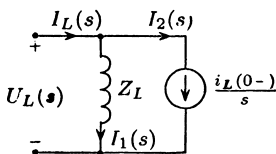


Рис. 8.4

Алгебраическую сумму напряжений в (8.16) трактуем как уравнение последовательного соединения элементов, а (8.17) — как уравнение параллельного соединения: операторные схемы замещения  $L$ -элемента, соответствующие уравнениям (8.16), (8.17), приведены на рисунке 8.4, где  $Z_L(s) = sL$  — операторное сопро-



тивление  $L$ -элемента ( $Y_L = 1 / (sL)$ ) — операторная проводимость).

**Вывод.** Операторные схемы (рис. 8.4) эквивалентны; они соответствуют правилам эквивалентного преобразования источника напряжения и источника тока, удовлетворяют законам Кирхгофа (например,  $I_L = I_1 + I_2$ ) и закону Ома (например,  $I_1 = U_L / Z_L$ ), независимое начальное условие учитывается либо источником напряжения величины  $Li_L(0-)$ , либо источником тока  $I_2 = i_L(0-) / s$ .

*Примечание.* В МКА аналогично было  $\dot{U}_L = Z_L \dot{I}_L$ , где  $Z_L = j\omega L$ , где в установившемся синусоидальном режиме ( $s = j\omega$ ); дополнительные источники отсутствовали.

#### 8.2.4. ОПЕРАТОРНАЯ СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ С-ЭЛЕМЕНТА

Уравнения емкостного элемента в  $t$ -области

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt + u_C(0-);$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt}$$

преобразуем по Лапласу:

$$U_C(s) = \frac{1}{Cs} I_C(s) + \frac{u_C(0-)}{s}; \quad (8.18)$$

$$I_C(s) = CsU_C(s) - Cu_C(0-). \quad (8.19)$$

Трактуем (8.18) как уравнение последовательного соединения элементов, а (8.19) — как уравнение параллельного соединения: операторные схемы замещения  $C$ -элемента, соответствующие уравнениям, приведены на рисунке 8.5а, где  $Z_C(s) = 1 / (Cs)$  — операторное сопротивление емкостного элемента ( $Y_C = 1 / Z_C = sC$  — операторная проводимость).

**Вывод.** Как операторные уравнения (8.18), (8.19), так и операторные схемы замещения эквивалентны; схемы соответствуют правилам преобразования источников, отвечают законам Кирхгофа (например,  $I_C = I_1 - I_2$ ) и Ома (например,  $I_1 = U_C / Z_C$ ); независимое начальное условие

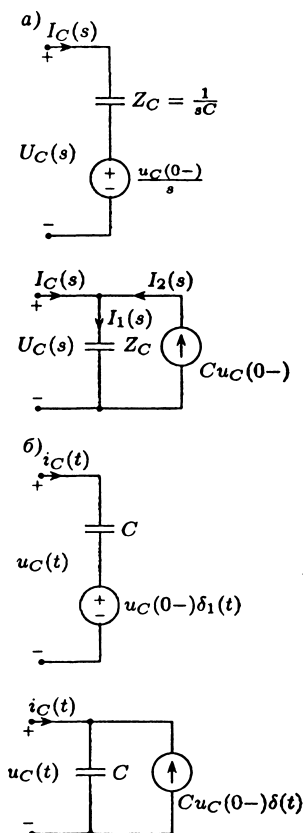


Рис. 8.5

учитывается введенным в операторную схему дополнительным источником.

*Примечание.* В МКА аналогично было  $\dot{I}_C = sC\dot{U}_C$ , где комплексная проводимость  $Y_C = j\omega C$  в установившемся синусоидальном режиме ( $s = j\omega$ ); дополнительные источники отсутствовали.

Формально перейдем от операторных схем замещения (рис. 8.5а) к приведенным на рисунке 8.5б схемам во временной области (которые, однако, фактически справедливы лишь для  $t > 0-$ ). В этих схемах  $C$  — незаряженный к моменту  $t = 0-$  емкостной элемент, а независимое начальное условие  $u_C(0-)$  учтено дополнительным источником, описываемым либо ступенчатой, либо импульсной функциями.

*Вывод.* Для  $t > 0$  независимое начальное условие всегда можно учесть, задавая эквивалентное воздействие.

Обобщая полученные в пп. 8.2.1–8.2.4 результаты, сделаем заключение о расчете цепей операторным методом.

### Выводы.

1. Анализ цепей операторным методом (ОМ) можно проводить по эквивалентным операторным схемам замещения, используя аналогию расчета  $R$ -цепей или расчету на основании МКА.

2. Для перехода от операторных уравнений и схем к уравнениям и схемам МКА достаточно исключить дополнительные источники и провести формальные замены  $U(s) \div \dot{U}$ ,  $I(s) \div \dot{I}$ ,  $s_{\text{ОМ}} \div s_{\text{МКА}} = j\omega$  в установившемся синусоидальном режиме.

### 8.2.5. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ

Обычно используют один из двух вариантов анализа.

Последовательность расчета по эквивалентным операторным схемам замещения.

1. Анализируют режим в цепи при  $t < 0$  (перед коммутацией) и находят независимые начальные условия  $u_{C_k}(0-), i_{L_k}(0-)$ .

2. Для  $t > 0$  составляют эквивалентную операторную схему, рассчитывают ее аналогично  $R$ -цепям (или МКА), находят изображение реакции  $F_{\text{вых}}(s)$ , а затем оригинал  $f_{\text{вых}}(t)$ .

Последовательность расчета по операторным уравнениям.

1. Как указано ранее, находят  $u_{C_k}(0-), i_{L_k}(0-)$ .

2. Для  $t > 0$  составляют по законам Кирхгофа систему независимых интегро-дифференциальных уравнений цепи; преобразуют ее по Лапласу; решая полученную таким образом систему алгебраических уравнений находят изображение реакции, а затем ее оригинал.

#### *Примечания.*

1. Расчет по операторным схемам менее трудоемок, так как возможно использование меньшего числа уравнений, однако при анализе, например, индуктивно-связанных цепей часто приходится применять расчет по операторным уравнениям.

2. Для контроля полученных результатов широко используют теоремы (8.13), (8.14).

3. Поскольку в теории цепей используется расширенное преобразование Лапласа (начиная с  $t = 0-$ ), то все дельта-функции, появляющиеся при  $t = 0$  в особых случаях коммутации (см. п. 4.2.4), при решении задач выявляются автоматически.

**Пример 5** (особый случай коммутации с мгновенным перезарядом емкостей). Схема приведена на рисунке 8.6а, причем  $u_0 = 10$  В,  $R_1 = R_2 = 1$  Ом,  $C_1 = 1$  Ф,  $C_2 = 4$  Ф. Найти  $u_{C_1}, i_{C_1}$  при  $t > 0$  операторным методом.

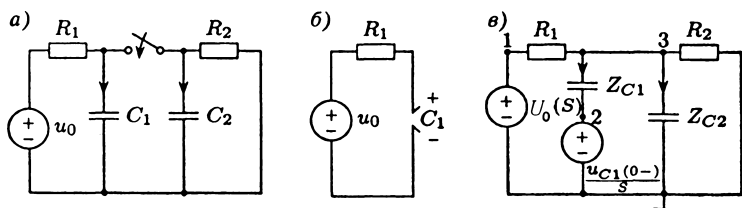


Рис. 8.6

По эквивалентной схеме цепи при  $t = 0-$ , изображенной на рисунке 8.6б, находим  $u_{C_1}(0-) = u_0 = 10$  В; кроме того, из анализа рисунка 8.6а очевидно, что  $u_{C_2}(0-) = 0$ .

Операторная схема замещения цепи для  $t > 0$  показана на рисунке 8.6в, где  $U_0(s) = 10/s$ ,  $Z_{C_1} = 1/s$ ,  $Z_{C_2} = 1/(4s)$ . Уравнения метода узловых напряжений имеют вид

$$\begin{cases} U_1^y(s) = U_0(s) = 10/s; \\ U_2^y(s) = u_{C_1}(0-)/s = 10/s; \\ (G_1 + Y_{C_1} + Y_{C_2} + G_2)U_3^y - G_1U_1^y - Y_{C_1}U_2^y = 0, \end{cases}$$

или в численном виде

$$(1 + s + 4s + 1)U_3^y = 10/s + 10,$$

откуда

$$U_{C_1}(s) = U_3^y = \frac{10 + 10s}{5(s + 0,4)s} = \frac{5}{s} + \frac{-3}{s + 0,4} \div u_{C_1}(t) = 5 - 3e^{-0,4t}.$$

Далее находим

$$\begin{aligned} I_{C_1}(s) &= \frac{U_3^y - U_2^y}{Z_{C_1}} = \frac{10 + 10s}{5(s + 0,4)} - 10 = \\ &= 2 + \frac{1,2}{s + 0,4} - 10 \div i_{C_1}(t) = -8\delta(t) + 1,2e^{-0,4t}. \end{aligned}$$

Как видим, выявлены как дельта-функция, описывающая ток мгновенного разряда емкости  $C_1$ , так и нарушение принципа непрерывности напряжения емкостного элемента, поскольку  $u_{C_1}(0-) = 10 \neq u_{C_1}(0+) = 2$ .

### 8.3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРЕМЫ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ

#### 8.3.1. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

На рисунке 8.7 изображен для  $t > 0$  график некоторого периодического сигнала  $f_{\Pi}(t)$ ; при этом  $T$  — период сигнала,  $f_1(t)$  — описание  $f_{\Pi}(t)$ ; в интервале  $0 < t < T$  (строго говоря, периодический сигнал рассматривается как периодический в интервале  $-\infty < t < \infty$ , поэтому сигнал  $f_{\Pi}(t)$  является квазипериодическим).

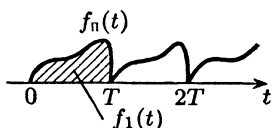


Рис. 8.7

Используя теорему запаздывания (8.12)

$$f(t - t_3) \div F(s)e^{-st_3}, \quad (8.20)$$

найдем изображение сигнала, показанного на рисунке 8.7:

$$\begin{aligned} f_{\Pi}(t) &= f_1(t) + f_1(t - T) + f_1(t - 2T) + \dots \div F_{\Pi}(s) = \\ &= F_1(s)(1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots) = F_1(s) / (1 - e^{-sT}), \end{aligned} \quad (8.21)$$

причем при выводе (8.21) использована формула убывающей геометрической прогрессии со знаменателем  $e^{-sT}$ .

*Примечание.* Прогрессия в (8.21) убывает, если модуль ее знаменателя  $|e^{-sT}| = |e^{-(\sigma + j\omega)T}| = e^{-\sigma T} < 1$ ; следовательно,  $\sigma = \text{Re } s > 0$  и изображение (8.21) следует рассматривать в области сходимости в правой полуплоскости аргумента  $s = \sigma + j\omega$ .

#### 8.3.2. ПОЛУЧЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПУТЕМ ОПИСАНИЯ СИГНАЛА СУММОЙ ПРОСТЕЙШИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Рассмотрим два примера.

**Пример 6.** Импульс  $u(t)$  прямоугольной формы, показанный на рисунке 8.8а, можно эквивалентно описать суммой двух ступенчатых функций (1 и 2):

$$u(t) = U_m \delta_1(t) - U_m \delta_1(t - t_n) \div U(s) = \frac{U_m(1 - e^{-st_n})}{s}.$$

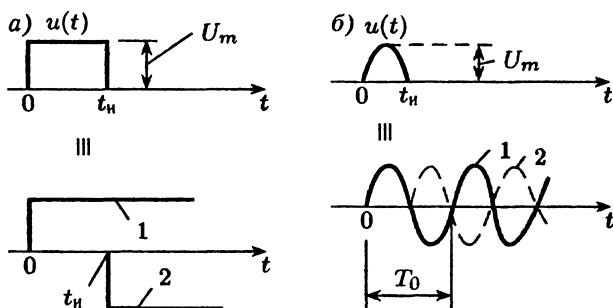


Рис. 8.8

**Пример 7.** Импульс  $u(t)$  синусоидальной формы, изображенный на рисунке 8.8б, эквивалентно описывается суммой двух односторонних синусоидальных функций (1 и 2):

$$u(t) = U_m \sin(\omega_0 t) \delta_1(t) + U_m \sin[\omega_0(t - t_n)] \delta_1(t - t_n) \div U(s) = \\ = \frac{U_m \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} (1 + e^{-st_n}),$$

где  $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi/t_n$ .

*Примечание.* Запись ступенчатых функций  $\delta_1(t - t_n)$  при использовании смещенных (запаздывающих) друг относительно друга составляющих в приведенных примерах обязательна, поскольку они показывают «начало действия» каждой составляющей.

### 8.3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ СИГНАЛОВ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ МЕТОДОМ ДВОЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Естественно, импульс кусочно-линейной формы  $f(t)$ , приведенный ранее на рисунке 4.13, можно описать суммой односторонних линейных функций (1, 2, 3), т. е. можно действовать аналогично способу в п. 8.3.2. Однако изложенный в п. 4.4.4 метод двойного дифференцирования позволяет упростить процедуру решения задачи.

Действительно, очевидны как простота получения второй производной кусочно-линейной функции

$$f''(t) = \sum A_k \delta(t - t_k),$$

так и простота записи изображения (с учетом  $\delta(t) \div 1$ ):

$$\mathcal{L}[f''(t)] = \sum A_k e^{-st_k}.$$

По теореме интегрирования оригинала (8.9) находим искомое изображение

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[f''(t)] = \frac{1}{s^2} \sum A_k e^{-st_k}.$$

*Примечание.* В случае разрывных кусочно-линейных функций уже при первом дифференцировании появляются дельта-функции, т. е.

$$\dot{f}_1'(t) = \tilde{f}_1'(t) + \sum B_k \delta(t - t_k),$$

где  $\tilde{f}_1'(t)$  — кусочно-постоянная составляющая в описании  $\dot{f}_1'(t)$ , которую и рекомендуется далее дифференцировать, получив

$$\dot{f}_1''(t) = \sum A_k \delta(t - t_k);$$

в этом случае по теореме интегрирования оригинала

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \sum A_k e^{-st_k} + \frac{1}{s} \sum B_k e^{-st_k}.$$

#### 8.4. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ЦЕПИ И ЕЕ СВЯЗЬ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ, ИМПУЛЬСНОЙ, ПЕРЕХОДНОЙ И ЧАСТОТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЦЕПИ

##### 8.4.1. ИЗОБРАЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛА НАЛОЖЕНИЯ, ВЫРАЖЕННОГО ЧЕРЕЗ ИМПУЛЬСНУЮ ХАРАКТЕРИСТИКУ ЦЕПИ

На основании теоремы свертки изображение интеграла (4.13) имеет вид

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) h(t - \tau) d\tau \div F_2(s) = H(s) F_1(s), \quad (8.22)$$

где  $f_1(t) \div F_1(s)$ ,  $f_2(t) \div F_2(s)$ ,  $h(t) \div H(s)$  — воздействие, реакция, импульсная характеристика цепи и их изображения (независимые начальные условия в цепи предполагаются нулевыми).

Из (8.22) следует метод определения переходной характеристики цепи  $h_1(t)$ , как реакции  $f_2(t)$  на единичное ступенчатое воздействие  $f_1(t) = \delta_1(t) \div F_1(s) = 1/s$  (в сравнении с п. 4.3.1 здесь единичный коэффициент  $F_{10}$ , выравнивающий размерность, для простоты записи опущен):

$$H_1(s) = \frac{H(s)}{s} \div h_1(t), \quad (8.23)$$

причем выражение (8.23) соответствует как формуле (4.11)

$$h(t) = h_1'(t);$$

$$h_1(t)|_{t>0} = \int_0^t h(t) dt,$$

так и теоремам интегрирования и дифференцирования оригинала (8.9) при нулевых начальных условиях.

#### 8.4.2. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ЦЕПИ И ЕЕ СВОЙСТВА

Отношение изображения реакции к изображению единственного в цепи воздействия при нулевых независимых начальных условиях называют передаточной функцией цепи:

$$H(s) = \frac{F_2(s)}{F_1(s)}. \quad (8.24)$$

*Вывод.* Из сравнения (8.22) и (8.24) следует, что передаточная функция цепи — это изображение по Лапласу импульсной характеристики цепи:

$$H(s) \div h(t). \quad (8.25)$$

Рассмотрим основные свойства передаточной функции (8.24), (8.25).

1. Из сравнения (8.24) с (8.23) вытекают как метод определения переходной характеристики по передаточ-



ной функции, так и связь изображений импульсной и переходной характеристик:

$$h_1(t) \div H_1(s) = \frac{H(s)}{s};$$

$$H(s) = sH_1(s) \div h(t).$$

2. Поскольку при нулевых начальных условиях все уравнения и схемы замещения операторного метода (см. выводы в п. 8.2.4) соответствуют уравнениям и схемам замещения МКА при формальных заменах  $U(s) \div \dot{U}$ ,  $I(s) \div \dot{I}$ ,  $s_{\text{ом}} \div s_{\text{МКА}}$ , то передаточная функция цепи и комплексная функция цепи — одно и то же:  $H(s)|_{s_{\text{ом}}} = H(s)|_{s_{\text{МКА}}}$ .

3. Так как в установившемся синусоидальном режиме обобщенная частота в МКА  $s = j\omega$ , то комплексная частотная характеристика цепи  $H(j\omega)$  связана с передаточной функцией формулой  $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$ .

4. Таким образом, виды, свойства и методы вычисления комплексной функции цепи справедливы и для передаточной функции (как входные функции  $Z_{\text{вх}}$ ,  $Y_{\text{вх}}$ , так и функции передачи  $Z_{k-0}$ ,  $Y_{n-0}$ ,  $H_{U_{m-0}}$ ,  $H_{I_{l-0}}$  определяются только параметрами цепи;  $Z_{\text{вх}} = 1 / Y_{\text{вх}}$ , но  $Z_{k-0} \neq 1 / Y_{k-0}$ ).

*Примечание.* Строго  $H(s)$  называют функцией цепи, поскольку наряду с собственно передаточными функциями (функциями передачи) существуют и входные функции.

5. Знаменатель любой передаточной функции цепи является характеристическим полиномом (характеристическим уравнением) цепи.

Действительно, в общем случае дифференциальное уравнение, связывающее реакцию  $f_2(t)$  с воздействием  $f_1(t)$ , имеет вид (3.1) в  $t$ -области:

$$a_n f_2^{(n)} + \dots + a_1 f_2'(t) + a_0 f_2(t) = b_m f_1^{(m)} + \dots + b_1 f_1'(t) + b_0 f_1(t). \quad (8.26)$$

Преобразуем (8.26) по Лапласу, считая нулевыми как независимые начальные условия, так и воздействие при  $t < 0$ . Тогда по теореме дифференцирования (8.9) при  $f(0-) = 0/(0-) = 0$  получим

$(a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0)F_2(s) = (b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0)F_1(s)$ ,  
откуда передаточная функция

$$\frac{F_2(s)}{F_1(s)} = H(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (8.27)$$

т. е. ХП, соответствующий (8.26), находится в знаменателе (8.27).

### 8.4.3. СВЯЗЬ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ С НУЛЯМИ И ПОЛЮСАМИ ВХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ЦЕПИ

Рассмотрим некоторый изображенный на рисунке 8.9 пассивный двухполюсник (ДП), подключенный к источнику (рассматривать будем как источник напряжения, так и источник тока, поэтому конкретный тип источника на рис. 8.9 не указан).

В  $t$ -области напряжение и ток ДП в общем случае связаны уравнением

$$a_n u^{(n)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = b_m i^{(m)} + \dots + b_1 i' + b_0 i. \quad (8.28)$$

Преобразовав (8.28) по Лапласу при нулевых независимых начальных условиях, найдем операторное входное сопротивление ДП:

$$\frac{U(s)}{I(s)} = Z(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b_m \prod_{(m)} (s - s_{0k})}{a_n \prod_{(n)} (s - s_k)}, \quad (8.29)$$

причем в (8.29)  $s_{0k}$ ,  $s_k$  — соответственно нули (корни числителя) и полюсы (корни знаменателя) дробно-рациональной функции  $Z(s)$ .

Из сравнения (8.28) и (8.29) заключаем:

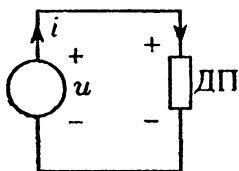


Рис. 8.9

1. Если воздействием является источник тока, то информация о характеристическом полиноме цепи находится слева в уравнении (8.28) и в знаменателе входного сопротивления (8.29), т. е. полюсы  $s_k$  являются собственными частотами (корнями ХП) цепи в так называемом режиме холостого хода

(поскольку источнику тока в схеме свободного режима соответствует ХХ).

2. Если воздействием является источник напряжения, то информация о характеристическом полиноме находится справа в (8.28) и числителе (8.29), т. е. в данном случае нули  $s_{0k}$  входного сопротивления — это корни ХП цепи в так называемом режиме короткого замыкания (поскольку источнику напряжения в схеме свободного режима соответствует КЗ).

*Следствие.* Чтобы найти собственные частоты цепи, достаточно схему свободного режима «разорвать» в любом месте и, присвоив накопителям сопротивления  $Z_L = sL$  и  $Z_C = 1 / (sC)$ , найти нули входного сопротивления  $Z(s)$  относительно «разорванных» выводов.

#### 8.4.4. МАТРИЦЫ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ И ИМПУЛЬСНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦЕПИ (ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ)

Уравнения состояния (3.24)

$$\left[ \frac{df_2(t)}{dt} \right] = [A][f_2(t)] + [B][f_1(t)]$$

преобразуем по Лапласу, считая нулевыми как независимые начальные условия, так и воздействия при  $t < 0$ :

$$s[F_2(s)] = [A][F_2(s)] + [B][F_1(s)],$$

откуда

$$(s[E] - [A])[F_2(s)] = [B][F_1(s)], \quad (8.30)$$

где  $[E]$  — единичная матрица, введенная здесь для выравнивания размерности матриц.

По аналогии с определением передаточной функции (8.24) и теоремой свертки (8.22) найдем матричное уравнение:

$$[F_2(s)] = [H(s)][F_1(s)], \quad (8.31)$$

в котором  $[H(s)]$  называют матрицей передаточных функций от всех воздействий  $[F_1(s)]$  ко всем реакциям  $[F_2(s)]$ , т. е. в данном случае — ко всем переменным состояниям.

Для получения (8.31) умножим (8.30) слева на обратную матрицу  $(s[E] - [A])^{-1}$ :

$$[F_2(s)] = (s[E] - [A])^{-1}[B][F_1(s)],$$

т. е. матрица передаточных функций и соответствующая ей матрица импульсных характеристик  $[h(t)]$  описываются уравнением

$$[H(s)] = (s[E] - [A])^{-1}[B] \div [h(t)], \quad (8.32)$$

где в (8.32) элементы матриц  $[H_{11}(s)] \div h_{11}(t)$  используется для обозначения импульсной характеристики первой переменной состояния от первого воздействия  $[H_{12}(s)] \div h_{12}(t)$  — от второго воздействия, и т. д.

## 8.5. ТИПОВОЙ ПРИМЕР

В цепи (рис. 8.10а)  $R_1 = 2$  Ом;  $R_2 = 2$  Ом;  $L = 2$  Гн. Воздействие — входной ток; реакция — входное напряжение. Необходимо найти передаточную функцию цепи и реакцию на импульс (рис. 8.10б).

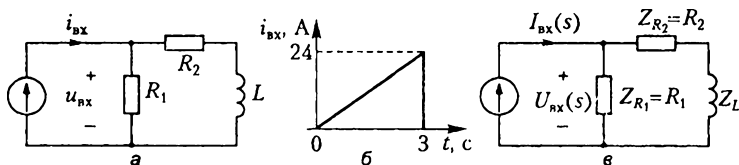


Рис. 8.10

1. Определяем ПФ цепи. Согласно (8.24), такую ПФ  $H(s) = U_{\text{вх}}(s) / I_{\text{вх}}(s)$ , являющуюся входным сопротивлением, можно найти по операторной схеме замещения цепи (рис. 8.10б):

$$Z_{\text{вх}}(s) = \frac{R_1(R_2 + sL)}{R_1 + R_2 + sL} = \frac{2(2 + 2s)}{4 + 2s} = \frac{2(s + 1)}{s + 2}. \quad (8.33)$$

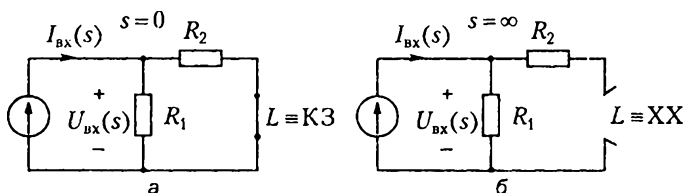


Рис. 8.11

2. Контролируем ПФ по эквивалентным схемам цепи на характерных частотах  $s = 0$  и  $s = \infty$ . На рисунке 8.11 изображены схемы цепи для проверки полученной ПФ.

Согласно (8.33), при  $s = 0$  имеем  $Z_{\text{вх}}(0) = 1$  Ом. По схеме (рис. 8.11а) при нулевой частоте (т. е. при постоянном токе) получаем аналогичное значение, поскольку на постоянном токе  $L$ -элемент эквивалентен короткозамкнутому участку цепи, т. е.  $Z_{\text{вх}}(0) = R_{\text{вх}} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 1$  Ом.

При  $s = \infty$  по выражению (8.33)  $Z_{\text{вх}}(\infty) = 2$  Ом; по схеме (рис. 8.11б), учитывая, что  $Z_L = \infty$ , т. е.  $L$ -элемент эквивалентен разорванному участку цепи — холостому ходу, входное сопротивление  $R_{\text{вх}} = R_1 = 2$  Ом.

Можно также проконтролировать полюс ПФ  $s_1 = -2$ , т. е. корень знаменателя ПФ, который определяет корень характеристического уравнения цепи. Очевидно, рассчитанное относительно накопителя эквивалентное сопротивление цепи (рис. 8.10а) в свободном режиме (когда источник тока ИТ  $\equiv \text{XX}$ ) будет  $R_0 = R_1 + R_2 = 4$  Ом. Тогда постоянная времени  $\tau = L / R_0 = 2/4 = 0,5$  с, следовательно, в цепи первого порядка  $s_1 = -1 / \tau = -2 \text{ с}^{-1}$ , что и было получено.

3. Находим реакцию на импульс. Из определения ПФ (8.24) следует, что изображение реакции  $F_2(s) = F_1(s)H(s)$ , т. е. для нашего случая можем записать, что

$$U_{\text{вх}}(s) = Z_{\text{вх}}(s)I_{\text{вх}}(s).$$

Воздействие имеет вид треугольного импульса (рис. 8.10б), который можно описать следующей суммой составляющих:

$$i_{\text{вх}}(t) = 8t\delta_1(t) - 8(t-3)\delta_1(t-3) - 24\delta_1(t-3).$$

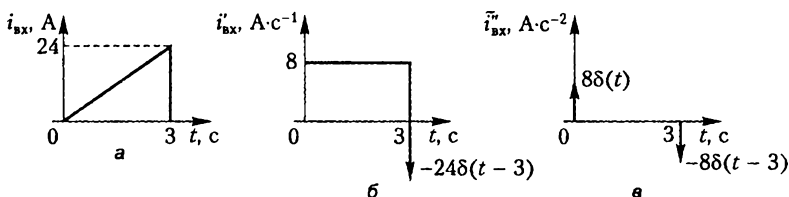


Рис. 8.12

Используя формулы изображений для единичной ступенчатой функции и линейной функции, а также *теорему запаздывания*, находим изображение

$$I_{\text{вх}}(s) = \frac{8}{s^2}(1 - e^{-3s}) - \frac{24}{s}e^{-3s}.$$

Этот же результат можно получить *методом двойного дифференцирования* входного сигнала (рис. 8.12а), который имеет кусочно-линейную форму. На рисунке 8.12б изображен график его первой производной  $i'_{\text{вх}}(t)$ , содержащий постоянную  $8 = 24 / 3$  в интервале  $0 < t < 3$  и *дельта-функцию* при  $t = 3$ , *высота* которой *бесконечна*, а *площадь* равна «-24» (действительно, производная от линейной функции равна отношению приращения функции  $\Delta i_{\text{вх}} = 24 - 0$  к приращению аргумента  $\Delta t = 3 - 0$ , а *производная в точке разрыва* функции *дает дельта-функцию* с коэффициентом, равным *величине разрыва*, т. е.  $0 - 24 = -24$ ). Вторая производная (рис. 8.12в) от двух разрывов (скачков)  $i'_{\text{вх}}(t)$  величиной 8 и -8 содержит две дельта-функции. На рисунке 8.12в не показана составляющая  $-24\delta(t - 3)$ , поэтому вместо  $i''_{\text{вх}}(t)$  введено обозначение  $\tilde{i}''_{\text{вх}}(t)$ .

Как известно, *изображение единичной импульсной функции*  $\delta(t) \div \Delta(s) = 1$ , следовательно, *по теореме запаздывания*  $-24\delta(t - 3) \div -24e^{-3s}$ . Для получения  $i_{\text{вх}}$  необходимо *проинтегрировать* дельта-функцию, изображенную на рисунке 8.12б, один раз, а изображенную на рисунке 8.12в — два раза. *Интегрированию в  $t$ -области соответствует деление на  $s$  в  $s$ -области*. В результате получим указанное ранее  $I_{\text{вх}}(s)$ .

Изображение реакции будет иметь следующий вид:

$$U_{\text{вх}}(s) = H(s)I_{\text{вх}}(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)} \left[ \frac{8}{s^2}(1 - e^{-3s}) - \frac{24}{s}e^{-3s} \right]. \quad (8.34)$$

Окончательно реакцию получаем, *раскладывая только дробно-рациональные* части изображения (8.34) на простые дроби и применяя теорему разложения:

$$\begin{aligned} U_{\text{вх}}(s) &= \left( \frac{8}{s^2} + \frac{4}{s} - \frac{4}{s+2} \right) (1 - e^{-3s}) - \left( \frac{24}{s} + \frac{24}{s+2} \right) e^{-3s} \div u_{\text{вх}}(t) = \\ &= (8t + 4 - 4e^{-2t})\delta_1(t) - [8(t-3) + \\ &+ 4 - 4e^{-2(t-3)}]\delta_1(t-3) - (24 + 24e^{-2(t-3)})\delta_1(t-3), \end{aligned}$$

причем здесь *обязательна* запись единичных ступенчатых функций  $\delta_1(t - t_3)$ , указывающих *начало и запаздывание* каждой из составляющих.

## 9.1. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ И ИХ СПЕКТРЫ

### 9.1.1. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ И УСЛОВИЯ ДИРИХЛЕ

Примеры периодических сигналов приведены на рисунке 9.1а–в.

Как известно, периодические сигналы обладают свойством

$$f(t) = f(t \pm T),$$

где  $T$  — период, т. е. наименьший интервал повторения функции.

Условно считаем, что периодическое воздействие приложено к цепи при  $t \rightarrow -\infty$ , т. е. к моменту времени  $t$  переходные процессы в цепи затухли и в цепи наблюдается установившийся (вынужденный) периодический режим (УПР). Для простоты индекс «вын» или «уст» при записи переменных опускаем.

Реальные периодические сигналы (точнее, описывающие их функции) удовлетворяют условиям Дирихле.

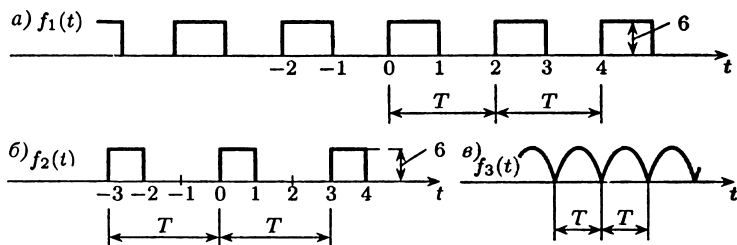


Рис. 9.1



1. В пределах периода сигналы непрерывны или имеют разрывы первого рода.

2. В пределах периода сигналы ограничены по уровню и имеют конечное число максимумов и минимумов.

### 9.1.2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМЫ РЯДОВ ФУРЬЕ

Периодический сигнал  $f(t)$ , удовлетворяющий условиям Дирихле, может быть разложен в сходящийся гармонический ряд Фурье (РФ) в диапазоне  $-\infty < t < \infty$ , причем частоты гармоник (т. е. синусоид) ряда  $\omega_k = k\omega_1$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ , кратны частоте первой (основной) гармоники  $\omega_1 = 2\pi / T_1 = 2\pi / T$ . Это означает, что период основной гармоники  $T_1 = T$  равен периоду сигнала. Число гармоник бесконечно, при этом сумма РФ равна  $f(t)$  в точках непрерывности и равна полусумме пределов  $f(t)$  слева и справа в точках разрыва первого рода (следовательно, вблизи разрывов  $f(t)$ , да и разрывов  $f'(t)$ , график суммы РФ отличается от  $f(t)$ , если не учитывать всю бесконечную совокупность гармоник РФ).

Синусно-косинусная форма РФ имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t), \quad (9.1)$$

где

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos k\omega_1 t dt; \quad (9.2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin k\omega_1 t dt. \quad (9.3)$$

Значение  $t_0$  — произвольно, а нулевая гармоника (постоянная составляющая) РФ

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = f_{cp} \quad (9.4)$$

соответствует среднему значению  $f(t)$  за период (т. е. высоте прямоугольника, имеющего равновеликую  $f(t)$  площадь за период).

Например, для сигнала  $f_1(t)$  на рисунке 9.1  $a_0 / 2 = 6 \cdot 1 / 2 = 3$ , а для сигнала  $f_2(t)$  имеем  $a_0 / 2 = 6 \cdot 1 / 3 = 2$ .

Преобразуем синусно-косинусную форму (9.1) к косинусной форме РФ. Для гармоники №  $k$  получим, используя преобразование к комплексным амплитудам (для синусоид одинаковых частот):

$$\begin{aligned} & a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t = \\ & = a_k \cos k\omega_1 t + b_k \cos(k\omega_1 t - 90^\circ) \div \\ & \div a_k + b_k e^{-j90^\circ} = a_k - jb_k = A_k e^{j\Phi_k} = \dot{A}_k, \end{aligned} \quad (9.5)$$

причем в соответствии с рисунком 9.2

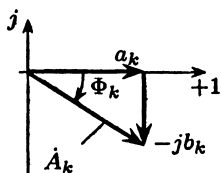


Рис. 9.2

$$\begin{aligned} A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \\ \Phi_k &= \arctg(-b_k / a_k), \end{aligned}$$

т. е.  $A_k$  определяет амплитуду, а  $\Phi_k$  — начальную фазу результирующей гармоники.

Таким образом, РФ в косинусной форме будет

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(k\omega_1 t + \Phi_k)). \quad (9.6)$$

Очевидны следующие свойства РФ симметричных сигналов.

1. РФ четных сигналов (рис. 9.3а), когда

$$f(t) = f(-t) \quad (9.7)$$

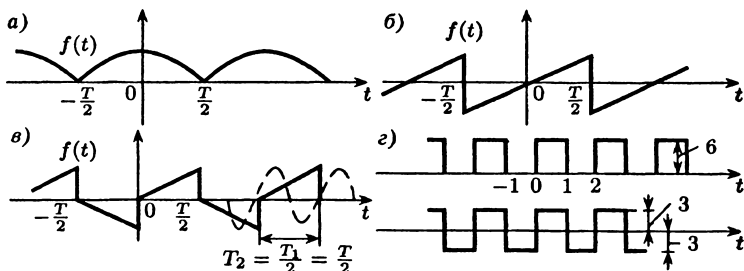


Рис. 9.3

не содержат синусоид в разложении (9.1), т. е. все коэффициенты  $b_k = 0$ , поскольку синусоида  $\sin \omega_k t$  не обладает свойством четности (9.7). Следовательно, в соответствии с формулой (9.5) и рисунком 9.2 у четных сигналов начальные фазы  $\Phi_k$  гармоник в выражении (9.6) равны либо 0, либо  $180^\circ$  (если  $a_k < 0$ ).

2. РФ нечетных сигналов (рис. 9.3б), когда

$$f(t) = -f(-t), \quad (9.8)$$

не содержат в разложении (9.1) косинусоид, т. е.  $a_k = 0$ , поскольку  $\cos k\omega_1 t$  не обладает свойством (9.8). В соответствии с формулой (9.5) и рисунком 9.2 у нечетных сигналов начальные фазы  $\Phi_k$  гармоник в выражении (9.6) равны либо  $90^\circ$ , либо  $-90^\circ$ .

3. РФ сигналов, симметричных относительно оси  $t$  при сдвиге на половину периода (рис. 9.3в), когда

$$f(t) = -f(t \pm T/2), \quad (9.9)$$

не содержат гармоник четных номеров ( $k = 0, 2, 4, \dots$ ), поскольку эти гармоники (см. показанную пунктиром на рис. 9.3в гипотетическую вторую гармонику) не обладают свойством (9.9).

На рисунке 9.3г в качестве примера приведен сигнал  $f(t)$ , у которого на основании формулы (9.4) среднее значение  $f_{\text{ср}} = a_0 / 2 = 3$ . Если рассмотреть график сигнала за вычетом среднего значения ( $f - 3$ ), то он обладает свойствами (9.8), (9.9), т. е. исходный сигнал  $f(t)$  не содержит косинусоид и гармоник четных номеров, кроме  $k = 0$ .

### 9.1.3. РЯД ФУРЬЕ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Преобразовав с помощью формул Эйлера РФ в форме (9.1), получим

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2} + b_k \frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [e^{jk\omega_1 t} (a_k - jb_k) + e^{-jk\omega_1 t} (a_k + jb_k)]. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Чтобы использовать в разложении (9.10) комплексные амплитуды из выражения (9.5), учтем, что на основании формул (9.2), (9.3) следует, что

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos k\omega_1 t dt = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(-k\omega_1 t) dt = a_{-k}; \quad (9.11)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin k\omega_1 t dt = -\frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(-k\omega_1 t) dt = -b_{-k}. \quad (9.12)$$

Подставив формулы (9.11), (9.12) в (9.10), получим

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [e^{jk\omega_1 t} (a_k - jb_k) + e^{j(-k)\omega_1 t} (a_{-k} - jb_{-k})],$$

откуда, обозначив  $\dot{A}_k = a_k - jb_k$  и переходя к суммированию от  $k = -\infty$  до  $k = +\infty$ , запишем с учетом выражения (9.5) РФ в комплексной форме:

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_1 t}, \quad (9.13)$$

причем  $a_0 / 2 = A_0 / 2$ ,  $\dot{A}_k = A_k e^{j\Phi_k} = a_k - jb_k$ .

#### 9.1.4. ДИСКРЕТНЫЕ СПЕКТРЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Множество комплексных амплитуд  $\{\dot{A}_k\}$  РФ в комплексной форме (9.13) называют дискретным спектром периодического сигнала  $f(t)$ ; соответственно множества амплитуд  $\{A_k\}$  и начальных фаз  $\{\Phi_k\}$  называют дискретными амплитудным и фазовым спектрами.

С учетом формул (9.11), (9.12) амплитудный спектр

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sqrt{a_{-k}^2 + b_{-k}^2} = A_{-k}$$

является четной функцией  $k$ , а фазовый спектр

$$\Phi_k = \arctg \frac{-b_k}{a_k} = -\arctg \frac{-b_{-k}}{a_{-k}} = -\Phi_{-k}$$

является нечетной функцией  $k$ .

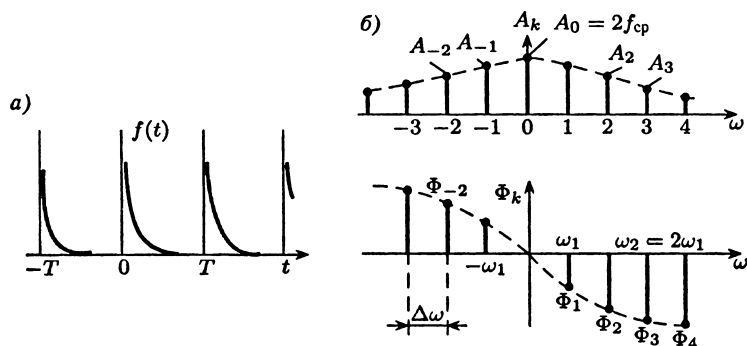


Рис. 9.4

В качестве примера рассмотрим спектр периодического сигнала  $f(t)$  в виде последовательности экспонент (рис. 9.4а), например, в интервале  $0 < t < T$  равных  $f(t) = e^{-2t} \div F(s) = 1 / (s + 2)$ . Тогда можно записать  $F(j\omega) = 1 / (j\omega + 2)$ , причем

$$|F(j\omega)| = 1 / \sqrt{\omega^2 + 2^2};$$

$$\arg F(j\omega) = -\arctg(\omega / 2).$$

На рисунке 9.4б пунктиром построены графики  $|F(j\omega)|$  и  $\arg F(j\omega)$ , которые в определенном масштабе являются огибающими, соответственно, спектров  $A_k$  и  $\Phi_k$ , показанных на рисунке 9.4б вертикальными отрезками прямых линий, причем для определенности частота первой (основной) гармоники  $\omega_1 = 1 \text{ с}^{-1}$ , т. е. период сигнала  $T = T_1 = 2\pi / \omega_1 = 6,28 \text{ с}$ .

*Примечания.*

1. Расстояние по оси частот между гармониками спектра будет  $\Delta\omega = \omega_1$ , т. е. равно частоте первой гармоники.

2. Спектр периодического сигнала называют дискретным, поскольку он существует лишь для дискретных значений частоты:  $0, \pm\omega_1, \pm2\omega_1, \pm3\omega_1, \dots$

3. Часто спектр называют линейчатым, так как его принято изображать отрезками прямых линий.

Перейдем к трактовке дискретных спектров. Преобразуем, используя формулу Эйлера, запись РФ в комплексной форме (9.13) для вещественной функции  $f(t)$ :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_1 t} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{j(k\omega_1 t + \Phi_k)} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \Phi_k) + j0, \end{aligned} \quad (9.14)$$

где равенство нулю мнимой части объясняется тем, что по условию  $f(t)$  — вещественная функция и, кроме того,  $\sin(k\ldots) + \sin(-k\ldots) = 0$ .

Таким образом, согласно (9.14), дискретный спектр характеризует представление периодического сигнала суммой гармоник; при этом амплитудный дискретный спектр  $\{A_k\}$  определяет амплитуды гармоник, а фазовый спектр  $\{\Phi_k\}$  — их начальные фазы.

*Примечания.*

1. В (9.6) была приведена иная, чем (9.14), косинусная форма описания РФ:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(k\omega_1 t + \Phi_k)),$$

однако выражения (9.6) и (9.14) тождественны, поскольку  $A_0 = a_0 = 2f_{cp}$  и, кроме того,

$$\begin{aligned} \cos(k\omega_1 t + \Phi_k) &= \cos((-k)\omega_1 t + \Phi_{-k}) = \\ &= 0,5[\cos(k\omega_1 t + \Phi_k) + \cos((-k)\omega_1 t + \Phi_{-k})]. \end{aligned}$$

2. Графики спектра синусоиды  $i(t) = I_m \cos(\omega_0 t + \alpha_i)$  как частного случая периодического сигнала содержат одну составляющую амплитудного спектра  $A_1 = I_m$  и одну — фазового спектра  $\Phi_1 = \alpha_i$  на частоте  $\omega_1 = \omega_0$  (для  $\omega > 0$ ).

### 9.1.5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РФ

На основании (9.2), (9.3), (9.5) комплексная амплитуда гармоники №  $k$  будет

$$\begin{aligned}\dot{A}_k &= A_k e^{j\Phi_k} = a_k - jb_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) (\cos k\omega_1 t - j \sin k\omega_1 t) dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt,\end{aligned}\quad (9.15)$$

причем в (9.15) момент  $t_0$  выбран равным нулю. Описание периодического сигнала внутри интервала интегрирования  $0 < t < T$  в (9.15) условно назовем первым импульсом  $f_1(t)$  (на рис. 9.5а он заштрихован). Таким образом, оказывается

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T; \\ 0, & t < 0, t > T. \end{cases}\quad (9.16)$$

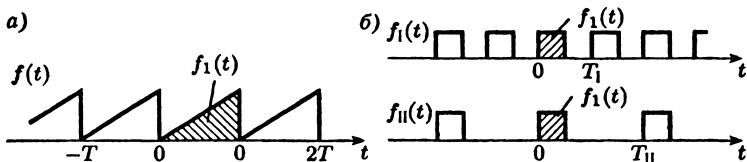


Рис. 9.5

С учетом (9.16) можно верхний предел в (9.15) расширить до  $\infty$ , если заменить  $f(t)$  на  $f_1(t)$ . Далее очевиден переход к формуле прямого преобразования Лапласа:

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt \Big|_{s=jk\omega_1},$$

следовательно,

$$\dot{A}_k = A_k e^{j\Phi_k} = a_k - jb_k = \frac{2}{T} F_1(s) \Big|_{s=jk\omega_1}. \quad (9.17)$$

**Вывод.** Коэффициенты РФ периодического сигнала  $f(t)$  можно найти, зная изображение по Лапласу  $F_1(s)$  условного первого импульса сигнала  $f_1(t)$ .

В качестве примера рассмотрим изображенные на рисунке 9.5б сигналы  $f_I$  и  $f_{II}$ , у которых первый импульс  $f_1$  одинаков, а периоды различны:  $T_{II} = 2T_I$ . На основании (9.17) имеем:

$$\dot{A}_{kI} = \frac{2}{T_I} F_1(s) \Big|_{s=jk\omega_{1I}=jk\frac{2\pi}{T_I}};$$

$$\dot{A}_{k\Pi} = \frac{2}{2T_I} F_1(s) \Big|_{s=jk\omega_{1\Pi}=jk\frac{2\pi}{2T_I}},$$

т. е. амплитудный спектр второго сигнала  $f_{\Pi}$ , у которого импульсы следуют вдвое реже, уменьшился в 2 раза, расстояние между гармониками дискретного спектра  $\Delta\omega_{\Pi} = \omega_{1\Pi} = 0,5\omega_{1I} = 0,5\Delta\omega_I$  тоже в 2 раза уменьшилось, следовательно, спектр стал гуще (частота заполнения спектра в 2 раза возросла). В пределе при  $T \rightarrow \infty$  амплитудный спектр  $f_{\Pi}(t)$  станет бесконечно малым;  $\Delta\omega_{\Pi} \rightarrow 0$ , т. е. спектр из дискретного превращается в сплошной, что соответствует переходу от периодического сигнала к одиночному импульсу и от РФ к интегралу Фурье.

## 9.2. МОЩНОСТЬ И ДЕЙСТВУЮЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ В УСТАНОВИВШЕМСЯ ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

### 9.2.1. МОЩНОСТЬ В УПР

Пусть пассивный двухполюсник (ДП), изображенный на рисунке 9.6а, находится в УПР, а его напряжение и ток разложены в РФ:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \cos(k\omega_1 t + \alpha_{uk}); \quad (9.18)$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \cos(k\omega_1 t + \alpha_{ik}), \quad (9.19)$$

причем в обозначениях (9.6) имеем в (9.19)  $I_0 = a_0 / 2$ ,  $I_{mk} = A_k$ ,  $\alpha_{ik} = \Phi_k$ .

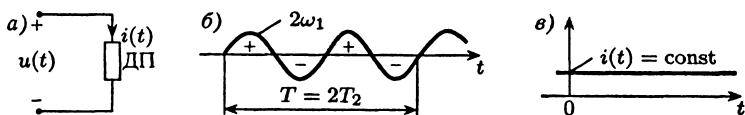


Рис. 9.6



Мгновенная мощность в ДП записывается как  $p(t) = u(t)i(t)$ . Средняя мощность за период (она же активная мощность, или просто — мощность) есть

$$P = P_a = P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt. \quad (9.20)$$

При подстановке (9.18), (9.19) в (9.20) учтем следующее.

1. В формуле (9.20) все интегралы вида

$$\int_0^T \cos(k\omega_1 t + \alpha_k) dt = 0,$$

поскольку площадь синусоиды за время, кратное ее периоду, равна нулю (см. например, на рис. 9.6б график второй гармоники с частотой  $\omega_2 = 2\omega_1$ ).

2. На основании формулы

$$\cos\beta\cos\delta = 0,5[\cos(\beta - \delta) + \cos(\beta + \delta)] \quad (9.21)$$

в (9.20) все интегралы от произведения гармоник (9.18), (9.19) с различными индексами  $k \neq n$  тоже равны нулю:

$$\int_0^T \cos(k\omega_1 t + \alpha_k) \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) dt = 0,$$

причем геометрическая трактовка этого тоже соответствует рисунку 9.6б.

3. В (9.20) необходимо учитывать только произведения гармоник (9.18), (9.19) с одинаковыми номерами.

В результате, с учетом (9.21) получим

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left( U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{U_{mk} I_{mk} \cos(\alpha_{uk} - \alpha_{ik})}{2} + \frac{U_{mk} I_{mk} \cos(2k\omega_1 t + \alpha_{uk} + \alpha_{ik})}{2} \right] \right) dt.$$

Интеграл от последнего слагаемого в этом выражении равен нулю (см. рис. 9.6б), поэтому, используя переход от амплитудных значений гармоник к действующим:

$$U_{mk} / \sqrt{2} = U_k, \quad I_{mk} / \sqrt{2} = I_k,$$

можем в итоге записать:

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k. \quad (9.22)$$

*Вывод.* Мощность в УПР равна сумме мощностей от каждой гармоники в отдельности (комбинированные мощности от гармоник с различными номерами отсутствуют).

### 9.2.2. ДЕЙСТВУЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЕ В УПР

Как известно, действующее значение переменной — это среднеквадратичное значение, имеющее энергетическую трактовку, т. е.

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}. \quad (9.23)$$

Рассматривая в (9.23)  $u^2(t) = u(t)u(t)$  и используя из п. 9.2.1 формулы (9.20), (9.22) с заменой  $i(t)$  на  $u(t)$ , можем записать:

$$U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2} = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{U_{mk}}{\sqrt{2}} \right)^2}; \quad (9.24)$$

и, аналогично, действующее значение периодического тока (9.19)

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk}^2}. \quad (9.25)$$

*Вывод.* Действующее значение переменной в УПР равно корню квадратному из суммы квадратов действующих значений отдельных гармоник разложения этой переменной в РФ.

*Примечания.*

1. Формулы (9.22), (9.24), (9.25) являются вариантами известного в математике равенства Парсеваля.

2. У постоянного тока (см. рис. 9.6в) мгновенное, среднее, амплитудное, максимальное и действующее значения одинаковы, поскольку

$$i(t) = 5 = \frac{1}{T} \int_0^T 5 dt = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T 5^2 dt}.$$

### 9.3. АНАЛИЗ УСТАНОВИВШИХСЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В ЦЕПИ

#### 9.3.1. ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ УПР С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РФ

Основная идея расчета: РФ воздействия можно трактовать как сумму элементарных воздействий и по методу наложения, используя метод комплексных амплитуд, найти реакцию от каждой гармоники воздействия в отдельности.

Рассмотрим детально последовательность анализа.

1. Периодическое воздействие  $f_{\text{вх}}(t)$  раскладываем в РФ. Он обычно быстро сходится (т. е. амплитуды гармоник быстро убывают с ростом №  $k$ ), поэтому на практике часто ограничиваются несколькими  $n$ -первыми гармониками и записывают таким образом «укороченный» ряд Фурье (отрезок ряда Фурье):

$$f_{\text{вх}}(t) \cong F_{0\text{вх}} + \sum_{k=1}^n F_{mk\text{вх}} \cos(k\omega_1 t + \alpha_{k\text{вх}}). \quad (9.26)$$

**Вывод.** Метод расчета с использованием «укороченного» РФ ( $n \neq \infty$ ) является приближенным.

2. Находим передаточную функцию цепи  $H(s) = F_{\text{вых}}(s) / F_{\text{вх}}(s)$  и заменой  $s = j\omega$  — частотные характеристики цепи  $H(j\omega)$ , а затем амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики (АЧХ и ФЧХ):

$$H(j\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)}, \quad (9.27)$$

с другой стороны, выполняется соотношение

$$H(j\omega) = \dot{F}_{m\text{вых}} / \dot{F}_{m\text{вх}} = F_{m\text{вых}} e^{j\alpha_{\text{вых}}} / F_{m\text{вх}} e^{j\alpha_{\text{вх}}} \quad (9.28)$$

при изменении частоты  $\omega = \omega_{ar}$  в установившемся синусоидальном режиме.

3. Используя (9.27), (9.28), определяем амплитуды и начальные фазы отдельных гармоник РФ реакции:

$$\begin{aligned} F_{mk_{\text{ВЫХ}}} &= F_{mk_{\text{ВХ}}} A(\omega)|_{\omega = k\omega_1}; \\ \alpha_{k_{\text{ВЫХ}}} &= \alpha_{k_{\text{ВХ}}} + \Phi(\omega)|_{\omega = k\omega_1}, \end{aligned} \quad (9.29)$$

затем по аналогии с (9.26) записываем «укороченный» РФ реакции:

$$f_{\text{ВЫХ}}(t) \cong F_{0_{\text{ВЫХ}}} + \sum_{k=1}^n F_{mk_{\text{ВЫХ}}} \cos(k\omega_1 t + \alpha_{k_{\text{ВЫХ}}}). \quad (9.30)$$

### Примечания.

1. Спектральный состав реакции (9.30) полностью соответствует спектральному составу воздействия (9.26), т. е. гармоник иных частот, кроме  $\omega_k = k\omega_1$ , нет.

2. Различные гармоники проходят через цепь, согласно (9.27)–(9.29), с различными коэффициентами передачи, зависящими от значения частоты  $k\omega_1$ ; так, при резонансе некоторые гармоники могут исчезнуть, а амплитуды и начальные фазы других могут измениться, т. е. форма периодической реакции может совершенно не соответствовать форме воздействия (но период  $T$  будет одинаков).

Необходимо отметить также очевидные свойства некоторых сигналов в УПР.

1. Если постоянная составляющая ( $A_0 / 2 = a_0 / 2 = f_{\text{ср}}$ ) на входе отсутствует, то она отсутствует и на выходе.

2. Если воздействие симметрично относительно оси времени  $t$  при сдвиге на половину периода, то и реакция удовлетворяет свойству (9.9).

3. Если воздействие непрерывно, то и реакция непрерывна.

### 9.3.2. ТОЧНЫЙ РАСЧЕТ РЕАКЦИИ В УПР (РФ В «ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ»)

В некоторых цепях убыль гармоник воздействия с ростом №  $k$  полностью компенсируется ростом АЧХ цепи (в так называемых «дифференцирующих цепях»). В этом случае на основании (9.29) на выходе приходится учиты-

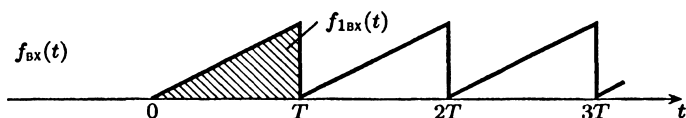


Рис. 9.7

вать десятки (и даже сотни) гармоник и метод, базирующийся на использовании РФ, становится неэффективным.

Основная идея рассматриваемого точного расчета УПР: свободная составляющая решения определяется корнями характеристического полинома (ХП) цепи, а вынужденная составляющая имеет математическую форму воздействия.

Последовательность расчета.

1. Предполагаем, что входной периодический сигнал  $f_{вх}(t)$  приложен к цепи, начиная с  $t = 0$  (рис. 9.7). Используя условно первый импульс воздействия  $f_{вх1}(t)$  аналогично (9.16) и рисунку 9.5а, находим изображение по Лапласу воздействия в целом:

$$\begin{aligned} f_{вх}(t) &= f_{вх1}(t) + f_{вх1}(t - T) + f_{вх1}(t - 2T) + \dots \div \\ &\div F_{вх1}(s)[1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots] = \frac{F_{вх1}(s)}{1 - e^{-sT}} = F_{вх}(s). \end{aligned} \quad (9.31)$$

2. Определяем передаточную функцию цепи и ее полюсы (корни знаменателя), т. е. корни ХП цепи  $n$ -го порядка:

$$\begin{aligned} \frac{F_{вых}(s)}{F_{вх}(s)} &= H(s) = \frac{B(s)}{D(s)} = \frac{B(s)}{d_n s^n + \dots + d_1 s + d_0} = \\ &= \frac{B(s)}{d_n \prod_{k=1}^n (s - s_k)}. \end{aligned} \quad (9.32)$$

3. Используя (9.31), (9.32), находим изображение реакции:

$$F_{вых}(s) = H(s)F_{вх}(s) = \frac{B(s)}{d_n \prod_{k=1}^n (s - s_k)} \frac{F_{вх1}(s)}{1 - e^{-sT}}. \quad (9.33)$$

Выделяем в (9.33) изображения свободной и вынужденной составляющих решения уравнений цепи:

$$F_{\text{вых}}(s) = F_{\text{вых св}}(s) + F_{\text{вых вын}}(s) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - s_k} + \frac{F_{\text{вых1}}(s)}{1 - e^{-sT}}, \quad (9.34)$$

где свободная составляющая определяется указанными в (9.32) корнями ХП цепи  $s_k$ , а вынужденная составляющая имеет математическую форму воздействия (9.31), т. е. должна быть периодической функцией  $f_{\text{вых вын}}(t)$  с периодом  $T$  и искомым описанием первого импульса  $f_{\text{вых1}}(t) = f_{\text{вых вын}}(t)$  в интервале первого периода при  $0 < t < T$ .

Коэффициенты  $A_k$  находят на основании теоремы разложения преобразования Лапласа, как обычно:

$$A_k = (s - s_k)F_{\text{вых}}(s)|_{s=s_k},$$

причем  $F_{\text{вых}}(s)$  на основании (9.33) известно.

4. Используя (9.33), (9.34), определяем изображение искомого описания периодической реакции в интервале  $0 < t < T$ :

$$\begin{aligned} F_{\text{вых1}}(s) &= [F_{\text{вых}}(s) - F_{\text{вых св}}(s)](1 - e^{-sT}) = \\ &= \frac{F_{\text{вх1}}(s)B(s)}{d_n \prod_{k=1}^n (s - s_k)} - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - s_k} (1 - e^{-sT}), \end{aligned} \quad (9.35)$$

а затем переходим к оригиналу первого импульса  $f_{\text{вых1}}(t)$ ; строим его график в пределах первого периода  $0 < t < T$  и, периодически продолжая график, получаем искомую периодическую реакцию  $f_{\text{вых вын}}(t)$ .

*Примечания.*

1. На практике переход к оригиналу от (9.35) может быть упрощен, так как в интервале  $0 < t < T$  составляющие (9.35) с сомножителем  $e^{-sT}$  можно не учитывать.

2. Полученный аналитический результат называют РФ в «замкнутой форме», поскольку он определяет точно всю сумму членов РФ периодической реакции.

3. В случае, если к цепи в момент  $t = 0$  приложено воздействие (9.31), можно на основании (9.34), (9.35) точно рассчитать переходный процесс.

## 9.4. ТИПОВОЙ ПРИМЕР

На вход дифференцирующей  $RC$ -цепи (рис. 9.8а) при  $R_1 = 1$  Ом,  $C_1 = 1$  Ф поступает периодический сигнал треугольной формы (рис. 9.8б).

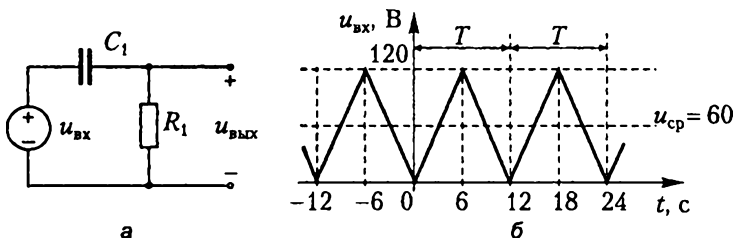


Рис. 9.8

Необходимо:

1) предсказать РФ; найти РФ для  $u_{\text{вх}}(t)$ , построить спектры и график суммы РФ, сравнив его с  $u_{\text{вх}}(t)$ ;

2) найти передаточную функцию цепи  $H(s)$  и частотные характеристики; сравнив ЧХ и спектр воздействия, предсказать  $u_{\text{вых}}(t)$ ;

3) найти РФ для  $u_{\text{вых}}(t)$  и сравнить график  $u_{\text{вых}}(t)$  с производной  $u_{\text{вх}}'(t)$ .

1. Определяем РФ входного сигнала.

Периодическое воздействие является *четным* сигналом, следовательно, РФ *не содержит синусоид* (т. е.  $b_k = 0$ ), а в (9.6) начальные фазы гармоник  $\Phi_k$  равны либо  $0^\circ$ , либо  $180^\circ$ . По графику входного сигнала вычисляем *среднее значение*  $u_{\text{вх}}(t)$  как отношение площади сигнала  $S_\Delta$  за период к величине этого периода:

$$u_{\text{ср}} = A_0 / 2 = S_\Delta / T = 120 \cdot 6 / 12 = 60 \text{ В.}$$

Поскольку входной сигнал без среднего значения (без постоянной составляющей  $u_{\text{ср}}$ ), т. е. сигнал  $[u_{\text{вх}}(t) - u_{\text{ср}}]$ , становится симметричным относительно оси  $t$  при сдвиге на половину периода (см. график сигнала относительно  $u_{\text{ср}}$  на рис. 9.8б), то РФ *не содержит гармоник четных номеров* ( $k = 2, 4, 6, \dots$ ).

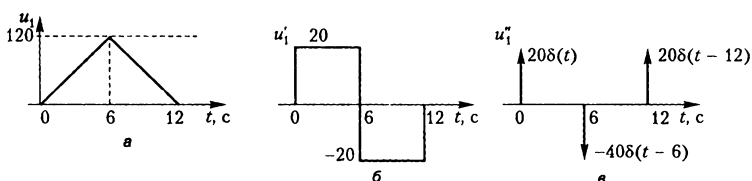


Рис. 9.9

Для определения коэффициентов РФ находим *изображение* по Лапласу  $F_1(s)$  *первого импульса*  $u_1(t)$  периодического сигнала, используя метод двойного дифференцирования, который описан в п. 4.4.4. На рисунке 9.9а представлен импульс  $u_1(t)$ , график его первой производной изображен на рисунке 9.9б. График второй производной  $u_1''(t)$ , показанный на рисунке 9.9в, содержит 3 дельта-функции. Как известно, изображение единичной импульсной функции  $\delta(t) \div \Delta(s) = 1$ . Для получения  $u_1(t)$  необходимо проинтегрировать два раза дельта-функции, изображенные на рисунке 9.9в. *Интегрированию* в  $t$ -области *соответствует деление* на  $s$  в  $s$ -области. В результате с учетом теоремы запаздывания получим изображение первого импульса:

$$F_1(s) = \frac{20}{s^2} (1 - 2e^{-6s} + e^{-12s}). \quad (9.36)$$

Комплексные амплитуды РФ в соответствии с (9.17) и (9.36) представим в следующем виде (при периоде  $T = 12$  с):

$$\begin{aligned} \dot{A}_{k\text{BX}} &= \frac{2}{T} F_1(s) \Big|_{s=jk\frac{2\pi}{T}} = \frac{2}{12} \frac{20}{-k^2\pi^2/36} (1 - 2e^{-jk\pi} + e^{-j2k\pi}) = \\ &= \frac{480}{k^2\pi^2} e^{-jk\pi} \sin^2 \frac{k\pi}{2}, \end{aligned}$$

причем амплитудный дискретный спектр

$$A_{k\text{BX}} = |\dot{A}_{k\text{BX}}| = \frac{480}{k^2\pi^2} \sin^2 \frac{k\pi}{2},$$

а фазовый спектр  $\Phi_{k\text{BX}} = \text{фаза } \dot{A}_{k\text{BX}} = -k\pi$ .

Значения  $A_k$  и  $\Phi_k$  приведены в таблице 9.1, а на рисунке 9.10а, б построены дискретные амплитудный и фазовый спектры входного сигнала, причем следует иметь в



Т а б л и ц а 9.1

$k$	$\omega_k$	$A_{kвх}$	$\Phi_{kвх}$
0	0	120	—
1	$\pi/6$	48,7	$-180^\circ$
2	$2\pi/6$	0	—
3	$3\pi/6$	5,4	$-180^\circ$
4	$4\pi/6$	0	—
5	$5\pi/6$	2,0	$-180^\circ$

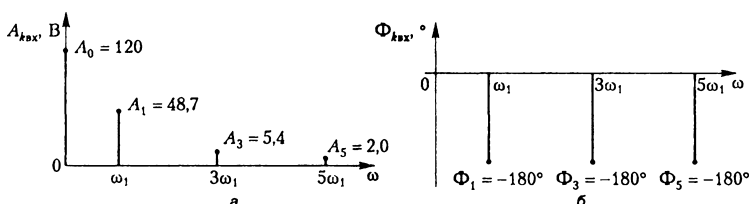


Рис. 9.10

виду, что  $A_0 = 2u_{cp} = 2 \cdot 60 = 120$  В, а частота первой гармоник  $\omega_1 \approx 0,5$  с<sup>-1</sup>.

Таким образом, ограничившись несколькими первыми гармониками РФ, входной периодический сигнал *приближенно* можно представить в виде

$$u_{вх}(t) \cong \tilde{u}_{вх}(t) = 60 + 48,7 \cos\left(\frac{\pi}{6}t - 180^\circ\right) + 5,4 \cos\left(\frac{3\pi}{6}t - 180^\circ\right) + 2,0 \cos\left(\frac{5\pi}{6}t - 180^\circ\right). \quad (9.37)$$

При построении графика суммы ряда Фурье ограничимся только тремя первыми членами ряда (9.37), поскольку амплитуды гармоник быстро убывают (пропорционально  $k^2$ ). К среднему значению сигнала, равному 60 В, т. е. к нулевой гармонике («0»), добавим первую гармонику («1»), имеющую амплитуду  $A_1 = 48,7$  В и начальную фазу  $\Phi_1 = -180^\circ$  (рис. 9.10). Период первой гармоники  $T_1 = T = 12$  с, поэтому фазовому сдвигу  $\Phi_1 = -180^\circ$  соответствует смещение максимума первой гармоники

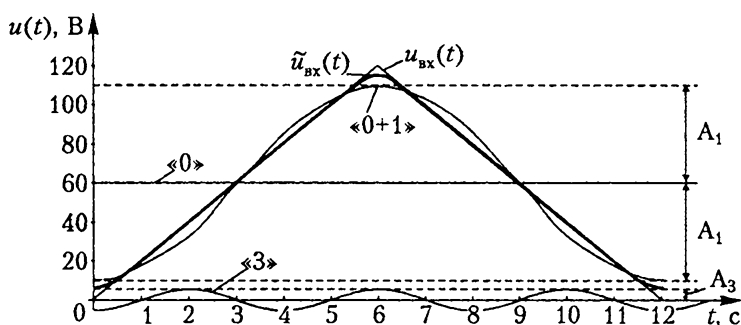


Рис. 9.11

(относительно момента  $t = 0$ ) на время  $T_1 / 2 = 6$  с. Третья гармоника имеет амплитуду  $A_3 = 5,4$  В и начальную фазу  $\Phi_3 = -180^\circ$ . При построении графика третьей гармоники («3») на рисунке 9.11 учтем, что ее период  $T_3 = T_1 / 3 = 4$  с, поэтому фазе  $\Phi_3$  соответствует смещение максимума гармоники на  $T_3 / 2 = 2$  с.

Из сравнения графика суммы ряда Фурье  $\tilde{u}_{\text{вх}}(t)$  и входного сигнала  $u_{\text{вх}}(t)$  видим, что в «изломах» графика  $u_{\text{вх}}(t)$  сходимость РФ ухудшается.

## 2. Находим ПФ и ЧХ цепи.

Вычислим ПФ, используя формулу делителя напряжений для схемы рисунка 9.8а:

$$H(s) = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = \frac{R_1}{R_1 + Z_C} = \frac{1}{1 + 1/s} = \frac{s}{s + 1}. \quad (9.38)$$

Комплексная частотная характеристика цепи

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{j\omega}{j\omega + 1}.$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{A_{\text{числитель}}}{A_{\text{знаменатель}}} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 1^2}}.$$

Фазочастотная характеристика

$$\Phi(\omega) = \Phi_{\text{числитель}} - \Phi_{\text{знаменатель}} = 90^\circ - \arctg \omega / 1.$$

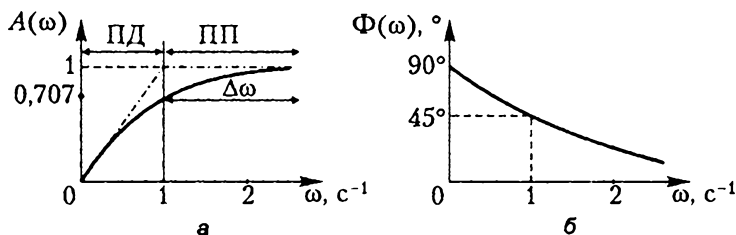


Рис. 9.12

На рис. 9.12а, б жирными линиями показаны графики АЧХ и ФЧХ, а штрих-пунктиром изображены касательные к АЧХ при  $\omega \rightarrow 0$  и при  $\omega \rightarrow \infty$ , которые отражают идеализацию АЧХ соответственно в интервалах нижних и верхних частот. В данном случае при  $\omega < 1$  в НЧ-интервале идеализированная АЧХ  $A(\omega) \approx \omega$ , что соответствует передаточной функции  $H(s) \approx s$ , т. е.  $u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{вх}}'(t)$ . Таким образом, НЧ-интервал является частотной *полосой дифференцирования* (ПД), откуда и вытекает название дифференцирующей RC-цепи. При  $\omega > 1$  в ВЧ-интервале идеализированная АЧХ  $A(\omega) \approx 1$ , что соответствует *полосе пропускания* (ПП).

Ширина полосы пропускания дифференцирующей RC-цепи, определяемая по уровню  $0,707A_{\text{max}}$ , также равна  $\Delta\omega = [1, \infty]$ . Поэтому на выход проходят практически без искажения гармоники РФ  $u_{\text{вх}}(t)$  с частотами  $\omega_k \geq 1 \text{ с}^{-1}$ . Нулевая гармоника входного сигнала на выход не проходит (так как C-элемент эквивалентен ХХ при  $\omega = 0$ ). Первая гармоника ( $\omega_1 \approx 0,5 \text{ с}^{-1}$ ) и нулевая, имеющие, согласно (9.37), наибольшие амплитуды, лежат в полосе дифференцирования, следовательно, *можно предположить*, что выходной сигнал будет похож на производную от входного, т. е.  $u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{вх}}'(t)$ .

### 3. Находим РФ выходного сигнала.

Амплитуды и начальные фазы гармоник выходного напряжения найдем из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} A_{k\text{вых}} &= A_{k\text{вх}} A(k\omega_1); \\ \Phi_{k\text{вых}} &= \Phi_{k\text{вх}} + \Phi(k\omega_1). \end{aligned}$$

Т а б л и ц а 9.2

$k$	$k\omega_1, \text{с}^{-1}$	$A_{\text{вх}}, \text{В}$	$\Phi_{\text{вх}}, ^\circ$	$A(k\omega_1), \text{В}$	$\Phi(k\omega_1), ^\circ$	$A_{\text{вых}}, \text{В}$	$\Phi_{\text{вых}}, ^\circ$
0	0	120	—	0	—	0	—
1	$\pi/6$	48,7	-180	0,46	62	22,4	-118
3	$3\pi/6$	5,4	-180	0,84	32	4,5	-148
5	$5\pi/6$	2,0	-180	0,93	21	1,9	-159

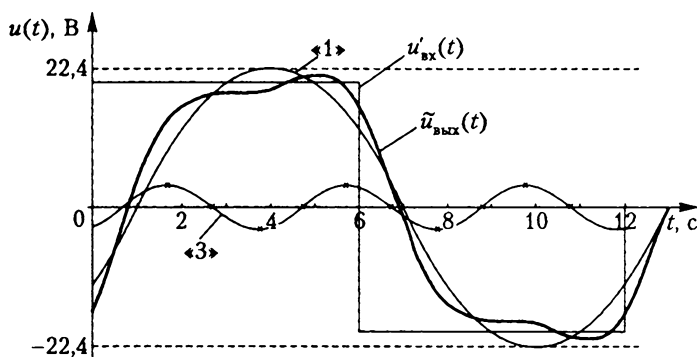


Рис. 9.13

Для этого необходимо вычислить значения АЧХ и ФЧХ функции передачи цепи для требуемых частот  $k\omega_1$ . Результаты всех вычислений сведены в таблицу 9.2.

Таким образом, выходной сигнал можно записать в виде отрезка ряда Фурье:

$$u_{\text{вых}}(t) \cong \tilde{u}_{\text{вых}}(t) = 22,4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t - 118^\circ\right) + 4,5 \cos\left(\frac{3\pi}{6}t - 148^\circ\right) + 1,9 \cos\left(\frac{5\pi}{6}t - 159^\circ\right).$$

На рисунке 9.13 построены графики производной  $u'_{\text{вх}}(t)$  и суммы РФ  $\tilde{u}_{\text{вых}}(t)$ , позволяющие сделать вывод, что действительно наблюдается определенный эффект дифференцирования заданного входного сигнала:  $u_{\text{вых}}(t) = u'_{\text{вх}}(t)$ .

# ГЛАВА 10 СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

## 10.1. АПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ И ИХ СПЕКТРЫ

### 10.1.1. ПЕРЕХОД ОТ РЯДОВ К ИНТЕГРАЛУ ФУРЬЕ И ОТ ДИСКРЕТНЫХ СПЕКТРОВ К СПЛОШНЫМ

Примеры аperiodических (т. е. неperiodических) сигналов приведены на рисунке 10.1.

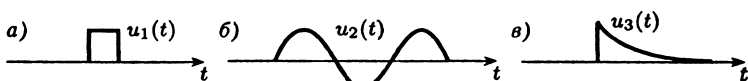


Рис. 10.1

Основная идея приведенных ниже преобразований в том, что аperiodический сигнал можно условно считать периодическим с периодом  $T \rightarrow \infty$ .

Периодический сигнал  $f(t)$  опишем рядом Фурье в комплексной форме:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{jk\omega_1 t} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_1 t} (a_k - jb_k) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_1 t} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) (\cos k\omega_1 t - j \sin k\omega_1 t) dt,
 \end{aligned}$$

причем пределы интегрирования выбраны так, чтобы при  $T \rightarrow \infty$  перейти к интегрированию во всем временном диапазоне.

Очевидно, имеем

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_1 t} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (10.1)$$

Устремляя период  $T \rightarrow \infty$ , переходим к аperiodическому сигналу. При этом частотный интервал между гармониками ряда Фурье периодического сигнала становится бесконечно малым, так как  $\Delta\omega = \omega_1 = 2\pi / T \rightarrow d\omega$ , следовательно, дискретный спектр превращается в сплошной и в (10.1) можно произвести следующие замены:

$$1/T \rightarrow d\omega / (2\pi), \quad k\omega_1 \rightarrow \omega, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}, \quad \int_{-T/2}^{T/2} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}.$$

В результате переходим к интегралу Фурье для аperiodического сигнала:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

причем второй интеграл описывает прямое преобразование Фурье:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (10.2)$$

а первый — обратное преобразование:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (10.3)$$

Условно обозначают:  $f(t) \div F(j\omega)$ , где  $f(t)$  — оригинал, или сигнал (точнее, функция времени, описывающая сигнал);  $F(j\omega)$  — спектр, или изображение по Фурье.

*Примечание.* Для сходимости несобственного интеграла (10.2) подынтегральная функция должна быть абсолютно интегрируемой

$$F(j\omega) \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-j\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = S_{|f|},$$

т. е. площадь  $S_{|f|}$  модуля оригинала должна быть конечной.

**Вывод.** Спектр  $F(j\omega)$  имеют только абсолютно интегрируемые функции  $f(t)$ .

**Следствие.** Поскольку дельта-функция  $\delta(t)$  имеет конечную площадь (равную 1), то можно найти спектр:

$$\delta(t) \div \Delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt,$$

откуда по свойству «выборки»:

$$\Delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{0} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \div \delta(t),$$

т. е. спектр дельта-функции равен единице на любой частоте  $\omega$ .

### 10.1.2. ОДНОСТОРОННЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Если сигнал  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ , то от формул (10.2), (10.3) двухстороннего преобразования Фурье можно перейти к одностороннему преобразованию:

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (10.4)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (10.5)$$

Для преобразования Лапласа имеем

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt; \quad (10.6)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} F(s) e^{st} ds. \quad (10.7)$$

**Вывод.** Из сравнения (10.4), (10.5) с (10.6), (10.7) следует, что одностороннее преобразование Фурье является частным случаем преобразования Лапласа, если аргумент (оператор) преобразования Лапласа изменяется вдоль мнимой оси, т. е.  $s = j\omega$  (следовательно,  $C = 0$ ):

$$F(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega}. \quad (10.8)$$

**Следствие.** Все формулы, таблицы, теоремы, методы расчета, схемы замещения операторного метода распространяются на преобразование Фурье при замене  $s = j\omega$ .

Возникает вопрос: если преобразование Фурье справедливо для более узкого класса функций, чем преобразование Лапласа, то в чем его преимущества? Отметим следующие достоинства преобразования Фурье.

1. От изображения по Лапласу перейти к оригиналу можно не всегда, а от изображения по Фурье — всегда (хотя и приближенно); например в случае полюсов дробной или комплексной кратности

$$F_1(s) = \frac{A}{(s+2)^{3/4}}; \quad F_2(s) = \frac{B}{(s+2)^{3+j4}(s+2)^{3-j4}},$$

аналитически найти оригинал невозможно.

2. По сигналу можно многое сказать о спектре (и наоборот).

3. Сравнивая спектр сигнала с полосой пропускания цепи, можно предсказать изменение формы сигнала на выходе.

4. В цепях высокого порядка спектральный метод расчета переходных процессов во многих случаях не уступает операторному.

### 10.1.3. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА

Спектр — это комплексная функция частоты:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos \omega t - j \sin \omega t) dt,$$

следовательно, его можно представить в показательной или алгебраической формах:

$$F(j\omega) = B(\omega) + jM(\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)}.$$

Вещественный спектр сигнала

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(-\omega) dt = B(-\omega) \quad (10.9)$$



является четной функцией частоты  $\omega$ . Очевидно, нечетные сигналы вещественного спектра не имеют.

**Мнимый спектр**

$$M(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = -M(-\omega) \quad (10.10)$$

является нечетной функцией  $\omega$ .

*Примечания.*

1. Формулы (10.9), (10.10) называют тригонометрическими формами прямого преобразования Фурье.

2. Четные сигналы  $f(t) = f(-t)$  не имеют мнимого спектра, т. е. наблюдается полная аналогия со свойствами рядов Фурье четных ( $b_k = 0$ ) и нечетных ( $a_k = 0$ ) периодических сигналов.

3. Дельта-функция была введена нами как четная функция, следовательно, она мнимого спектра не имеет; действительно,  $\delta(t) \div \Delta(j\omega) = 1$ .

**Амплитудный спектр**

$$A(\omega) = |F(j\omega)| = \sqrt{B^2(\omega) + M^2(\omega)} = A(-\omega)$$

является четной функцией, а фазовый спектр

$$\Phi(\omega) = \arctg[M(\omega) / B(\omega)] = -\Phi(-\omega)$$

нечетной функцией частоты  $\omega$ .

Дадим трактовку спектральным характеристикам, используя формулу обратного преобразования Фурье для вещественной функции  $f(t)$ :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{j[\omega t + \Phi(\omega)]} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cos[\omega t + \Phi(\omega)] d\omega + \\ &+ j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin[\omega t + \Phi(\omega)] d\omega; \end{aligned} \quad (10.11)$$

однако второе слагаемое (мнимая часть) в (10.11) равно нулю, так как, во-первых,  $f(t)$  — вещественная функция

по условию, а во-вторых, интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю.

*Выводы* (из анализа первого слагаемого в (10.11)).

1. Спектр сигнала  $F(j\omega)$  — это представление сигнала  $f(t)$  совокупностью элементарных гармоник (синусоид), причем амплитудный спектр определяет амплитуды этих гармоник, а фазовый спектр — их начальные фазы.

2. Строго, в (10.11) амплитуды гармоник равны  $A(\omega)d\omega / (2\pi)$ , т. е. являются бесконечно малыми, а следовательно, амплитудный спектр  $A(\omega)$  характеризует относительное распределение бесконечно малых амплитуд гармоник в функции от частоты; поэтому правильнее называть и  $F(j\omega)$ , и  $A(\omega)$  спектральными плотностями.

*Примечание.* Из (10.11) следует, что размерность спектра  $[F(j\omega)] = [f] / [\omega] = [f] \cdot [t] = [S_f]$  равна размерности площади сигнала.

Найдем начальное значение спектра:

$$F(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j0t} dt \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = S_f. \quad (10.12)$$

*Вывод.* Значение спектра на нулевой частоте равно площади сигнала.

#### 10.1.4. СВЯЗЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ И ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Как известно, частотные характеристики цепи  $H(j\omega)$  связаны с передаточной функцией  $H(s)$ , которая является изображением по Лапласу импульсной характеристики  $h(t)$ , следующей формулой:

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt \Big|_{s=j\omega}. \quad (10.13)$$

Поскольку  $t = 0h(t)$  при  $t < 0$ , нижний предел в (10.13) можно расширить до  $-\infty$  и перейти к двухстороннему преобразованию Фурье:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{j\omega t} dt \div h(t). \quad (10.14)$$

**Вывод.** Из (10.14) следует, что частотные характеристики являются спектром импульсной характеристики цепи.

**Следствие.** Все свойства четности спектральных характеристик справедливы и для частотных характеристик цепи, т. е.  $A(\omega) = A(-\omega)$ ,  $\Phi(\omega) = -\Phi(-\omega)$ ...

Отметим различия между спектральными и частотными характеристиками.

1. Спектр сигнала — это представление сигнала бесконечной суммой гармоник (синусоид).

2. Частотные характеристики определяют, как синусоидальные сигналы различных частот «проходят» через цепь в установившемся синусоидальном режиме.

#### 10.1.5. СВЯЗЬ СПЕКТРА ОДИНОЧНОГО ИМПУЛЬСА СО СПЕКТРОМ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА ТОЙ ЖЕ ФОРМЫ

Считаем, что периодический сигнал  $f_{\Pi}(t)$  в пределах условно «первого» периода ( $0 \leq t \leq T$ ) описывается однократным импульсом  $f_1(t)$ , как показано, например, на рисунке 10.2.

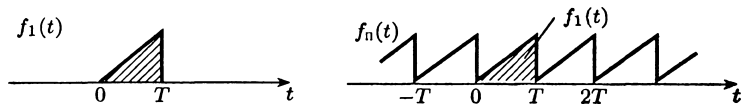


Рис. 10.2

Как известно, дискретный спектр  $\dot{A}_k = A_k e^{j\Phi_k} = a_k - jb_k$  периодического сигнала  $f_n(t)$  связан с изображением по Лапласу  $F_1(s)$  «первого» импульса  $f_1(t)$  формулой

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} F_1(s) \Big|_{s=jk\omega_1 = jk2\pi/T} \quad (10.15)$$

Производя в (10.15) замену  $s = j\omega$ , переходим к спектру

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} F_1(j\omega) \Big|_{\omega=k\omega_1 = k2\pi/T}, \quad (10.16)$$

где  $f_1(t) \div F_1(s) \div F_1(j\omega)$ .

**Вывод.** Сплошной спектр  $F_1(j\omega) = A_1(\omega) e^{j\Phi_1(\omega)}$  одиночного импульса  $f_1(t)$  с точностью до коэффициента  $2/T$  является огибающей дискретного спектра  $A_k$  сигнала  $f_n(t)$ , составленного из периодической последовательности указанных одиночных импульсов.

**Следствие.** Из (10.16) получим

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{T} A_1(\omega) \Big|_{\omega=k\omega_1}; \\ \Phi_k &= \Phi_1(\omega) \Big|_{\omega=k\omega_1}, \end{aligned} \quad (10.17)$$

т. е., зная графики амплитудного  $A_1(\omega)$  и фазового  $\Phi_1(\omega)$  спектров одиночного импульса, можно по их значениям на частотах  $\omega = k\omega_1$  определить на основании (10.17) значения амплитудного и фазового дискретных спектров ( $A_k$  и  $\Phi_k$ ) периодического сигнала  $f_{II}(t)$ .

## 10.2. СПЕКТРЫ НЕКОТОРЫХ АБСОЛЮТНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИГНАЛОВ

### 10.2.1. СПЕКТР ИМПУЛЬСА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

График «прямоугольного» импульса  $u(t)$  и его эквивалентное описание суммой смещенных ступенчатых функций (I и II) приведены на рисунке 10.3. Находим изображение по Лапласу сигнала

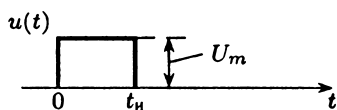
$$U(s) = U_m \delta_1(t) - U_m \delta_1(t - t_n) \div U(s) = \frac{U_m}{s} (1 - e^{-st_n}),$$

а затем заменой  $s = j\omega$  спектр

$$\begin{aligned} U(j\omega) &= \frac{U_m}{j\omega} (1 - e^{-j\omega t_n}) = \frac{U_m}{j\omega} e^{-0,5j\omega t_n} (e^{0,5j\omega t_n} - e^{-0,5j\omega t_n}) = \\ &= 2 \frac{U_m}{\omega} e^{-0,5j\omega t_n} \sin(0,5\omega t_n). \end{aligned}$$

Далее определяем амплитудный спектр

$$A(\omega) = |U(j\omega)| = \frac{2U_m}{\omega} |\sin(0,5\omega t_n)| \quad (10.18)$$



III

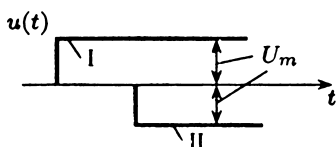


Рис. 10.3

и фазовый спектр (учитывая, что фаза произведения комплексных функций равна сумме фаз сомножителей)

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= \text{Arg} U(j\omega) = \\ &= \text{Фаза } U(j\omega) = -0,5\omega t_n + \\ &+ \text{Arg}[\sin(0,5\omega t_n)].\end{aligned}\quad (10.19)$$

При этом:

1) (10.18), (10.19) записаны только для  $\omega > 0$ ;

2) аргумент (т. е. фаза) второго слагаемого в (10.19) равна  $\pi \div 180^\circ$ , если комплексная функция  $\sin(0,5\omega t_n) < 0$ .

Начальное значение амплитудного спектра (с учетом замены  $\sin \beta \rightarrow \beta$  при малых  $\beta$ )  $A(0) = 2U_m(0,5t_n) = U_m t_n = S_{\Pi}$ , т. е. равно площади прямоугольного импульса, как указано в (10.12).

Найдем узлы (нули) амплитудного спектра — значения  $\omega_{yk}$ , в которых  $A(\omega) = 0$  и происходит смена знака сомножителя спектра  $\sin(0,5\omega t_n)$ , т. е.  $\Phi(\omega)$  скачком изменяется на  $180^\circ$  в соответствии с (10.19):

$$\sin(0,5\omega_{yk}t_n) = 0,$$

откуда  $0,5\omega_{yk}t_n = k\pi$ , следовательно,  $\omega_{yk} = k2\pi / t_n$  при  $k = 1, 2, 3, \dots$ , как показано на графиках амплитудного и фазового спектров, изображенных на рисунке 10.4. Так, на частоте первого узла  $\omega_{y1} = 2\pi / t_n$  линейная составляющая

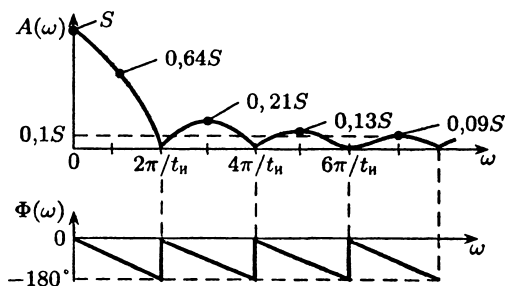


Рис. 10.4

(первое слагаемое) в (10.19) принимает значение  $-\pi \div -180^\circ$ , но здесь же  $\sin(0,5\omega t_n)$  изменяет знак, т. е.  $\Phi(\omega)$  изменяется скачком от  $-180^\circ$  до  $0^\circ$  и т. д. при  $k = 2, 3, \dots$

Посередине между узлами, т. е. при значениях частоты  $\pi / t_n, 3\pi / t_n, 5\pi / t_n, 7\pi / t_n, \dots$ , имеем  $|\sin(0,5\omega t_n)| = 1$  и амплитудный спектр  $2U_m t_n / \pi$  и равен, соответственно,  $2U_m t_n / \pi \approx 0,64S_{\Pi}; 0,21S_{\Pi}; 0,13S_{\Pi}; 0,09S_{\Pi}, \dots$ , как показано на рисунке 10.4.

**Выводы** (из анализа спектров (рис. 10.4)).

1.  $A(0) = S_{\Pi}$ .
2. Если длительность импульса  $t_n$  уменьшить в 2 раза, спектр в 2 раза расширится (по оси  $\omega$ ).
3. Огибающая спектра  $2U_m / \omega$  убывает пропорционально частоте  $\omega$ .
4. Ширина спектра по грубому критерию «первого лепестка» (узла) составляет  $\Delta\omega_{\Pi} \approx 2\pi / t_n$  для  $\omega > 0$ , а по амплитудному «десятипроцентному» критерию ( $0,1S_{\Pi}$ ) почти в 3 раза больше, т. е.  $\Delta\omega_{\Pi} = 6\pi / t_n$ .

*Примечание.* Графики спектров на рисунке 10.4б приведены лишь для положительных значений частоты  $\omega > 0$ , при продолжении графиков в область  $\omega < 0$  следует учитывать свойства четности:  $A(\omega) = A(-\omega)$ ,  $\Phi(\omega) = -\Phi(-\omega)$ .

### 10.2.2. СПЕКТР ИМПУЛЬСА ТРЕУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

График рассматриваемого равностороннего «треугольного» импульса  $u(t)$  приведен на рисунке 10.5а, причем  $U_m$  — амплитуда,  $t_n$  — длительность импульса.

Используя отраженный на рисунке 10.5а метод двойного дифференцирования и формулу  $\delta(t - t_0) \div 1 e^{-st_0}$ , находим изображение по Лапласу треугольного импульса:

$$U(s) = \frac{2U_m}{s^2 t_n} (1 - 2e^{-0,5st_n} + e^{-st_n}),$$

а затем спектр сигнала (заменой  $s = j\omega$ ):

$$\begin{aligned} U(j\omega) &= \frac{2U_m}{-\omega^2 t_n} e^{-j\omega t_n / 2} (e^{j\omega t_n / 2} - 2 + e^{-j\omega t_n / 2}) = \\ &= \frac{2U_m}{-\omega^2 t_n} e^{-j\omega t_n / 2} (e^{j\omega t_n / 4} - e^{-j\omega t_n / 4})^2 \end{aligned}$$

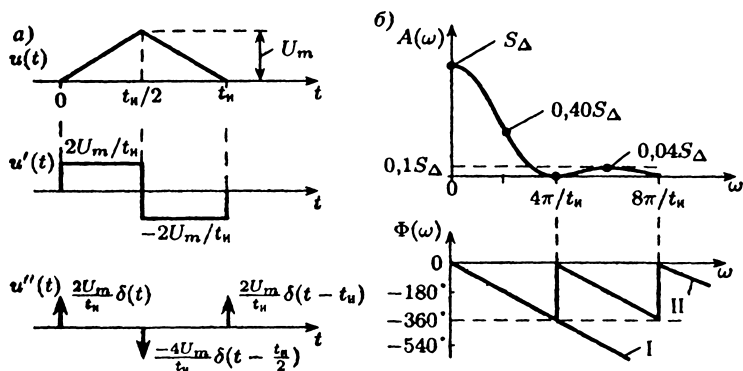


Рис. 10.5

или

$$U(j\omega) = \frac{2U_m}{-\omega^2 t_n} e^{\frac{-j\omega t_n/2}{2}} \left( 2j \sin \frac{\omega t_n}{4} \right)^2 = \frac{8U_m}{\omega^2 t_n} e^{\frac{-j\omega t_n/2}{2}} \sin^2 \frac{\omega t_n}{4}. \quad (10.20)$$

Далее определяем амплитудный спектр

$$A(\omega) = \frac{8U_m}{\omega^2 t_n} \sin^2 \frac{\omega t_n}{4} \quad (10.21)$$

и фазовый спектр (для  $\omega > 0$ )

$$\Phi(\omega) = \text{Arg} U(j\omega) = -\frac{\omega t_n}{2}, \quad (10.22)$$

причем (10.22) в отличие от (10.19) содержит только линейно изменяющуюся составляющую, поскольку в (10.20)  $\sin^2(\omega t_n / 4) > 0$  и, следовательно, фаза  $\text{Arg}(\sin^2(\omega t_n / 4)) = 0$ .

Из (10.21) находим, что начальное значение амплитудного спектра (с учетом  $\sin^2 \beta \rightarrow \beta^2$  при  $\beta \rightarrow 0$ ) будет

$$A(0) = \frac{8U_m}{\omega^2 t_n} \left( \frac{\omega t_n}{4} \right)^2 \Big|_{\omega \rightarrow 0} = U_m \frac{t_n}{2} = S_\Delta,$$

т. е. равно площади сигнала.

Определяем узлы (нули) амплитудного спектра из условия  $\omega_{yk} t_n / 4 = k\pi$ , откуда  $\omega_{yk} = k4\pi / t_n$  при  $k = 1, 2, 3, \dots$  Посередине между узлами при значениях  $\omega$ , равных  $2\pi / t_n, 6\pi / t_n, \dots$ , имеем  $\sin^2 \omega t_n / 4 = 1$ , т. е. значе-

ния огибающей амплитудного спектра  $8U_m / (\omega^2 t_n)$  соответственно приближенно равны  $0,40S_\Delta$ ;  $0,04S_\Delta$ ; ..., как показано на рисунке 10.5б. Фазовый спектр (10.22) можно изображать (рис. 10.5б) либо непрерывной линейной функцией I, либо, например, разрывной II с величиной скачка в  $360^\circ \div 2\pi$ .

*Выводы.*

1.  $A(0) = S_\Delta$ .

2. При уменьшении  $t_n$  спектр становится шире.

3. Огибающая амплитудного спектра  $8U_m / (t_n \omega^2)$  убывает пропорционально  $\omega^2$ , т. е. быстрее, чем у прямоугольного импульса.

4. Ширина спектра по критерию «первого лепестка» и по 10% -му амплитудному критерию приблизительно одинакова и составляет  $\Delta\omega_\Delta = 4\pi / t_n$ .

### 10.3. ШИРИНА СПЕКТРА И ЕЕ СВЯЗЬ С ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ И КРУТИЗНОЙ СИГНАЛА

#### 10.3.1. ФОРМУЛА РЕЛЕЯ И КРИТЕРИИ ШИРИНЫ СПЕКТРА

Найдем энергию сигнала

$$W_f = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt; \quad (10.23)$$

действительно, если считать, что  $f(t) = i(t)$  — ток, протекающий по сопротивлению  $R = 1$  Ом, то под интегралом  $Ri^2$  подразумевается потребляемая в  $R$ -элементе мощность.

Преобразуем (10.23), используя обратное преобразование Фурье,

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega;$$

далее изменяем последовательность интегрирования, учитывая, что  $t$  во втором интеграле можно считать параметром:

$$W_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)F(-j\omega)d\omega,$$



причем здесь  $F(-j\omega)$  — прямое преобразование Фурье по аргументу  $(-j\omega)$ . Произведение сопряженных функций  $F(j\omega)F(-j\omega)$  равно квадрату модуля функции, т. е. в данном случае — квадрату амплитудного спектра. В результате получим формулу Релея

$$W_f = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega)d\omega. \quad (10.24)$$

**Вывод.** Квадрат амплитудного спектра  $A^2(\omega)$  характеризует относительное распределение энергии сигнала в спектре.

На (10.24) базируется энергетический критерий ширины спектра сигнала: шириной спектра  $\Delta\omega$  называется диапазон частот около максимума  $A^2(\omega)$ , причем в этом диапазоне сосредоточено  $n\%$  энергии сигнала (обычно  $n = 90$  или  $95\%$ ).

В качестве примера на рисунке 10.6 изображены график «прямоугольного» импульса и график квадрата его амплитудного спектра (качественно).

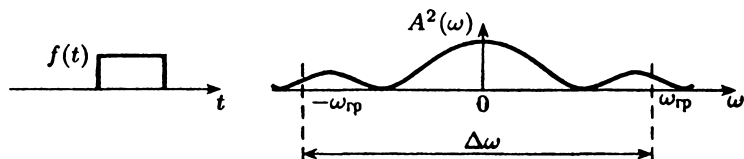


Рис. 10.6

Для определения граничных частот  $\omega_{гр}$  ширины спектра приходится решать интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{гр}}^{\omega_{гр}} A^2(\omega)d\omega = 0,01nW_f.$$

Энергетический критерий является строгим, но трудоемким, поэтому на практике применяют нестрогий, но простой амплитудный критерий ширины спектра сигнала, фактически использованный в п. 10.2: шириной спектра  $\Delta\omega$  называют диапазон частот в районе максимума

амплитудного спектра  $A(\omega)$ , причем вне этого диапазона  $A(\omega) < nA_{\max}$  (обычно  $n = 5$  или  $10\%$ ).

На практике также широко используют самый простой, но очень грубый критерий ширины спектра по значению первого лепестка (первого узла) амплитудного спектра сигнала. Однако в ряде случаев (см. п. 10.2) этот критерий противоречит данным других критериев, кроме того, амплитудные спектры некоторых сигналов не имеют узлов (т. е. нулей), например  $f(t) = e^{-10t}\delta_1(t) \div F(s) = 1 / (s + 10)$ , а следовательно,  $F(j\omega) = 1 / (j\omega + 10)$ , т. е. амплитудный спектр  $A(\omega) = 1 / \sqrt{\omega^2 + 10^2} \rightarrow 0$  лишь при  $\omega \rightarrow \infty$ .

#### Примечания.

1. Если в практических расчетах учитывать только диапазон частот, относящийся к ширине спектров сигналов, ошибки расчетов обычно будут небольшими.

2. Поскольку спектр одиночного импульса является огибающей дискретного спектра периодического сигнала аналогичной формы, все критерии ширины спектра могут быть использованы и для периодических сигналов.

3. Спектр дельта-функции  $\Delta(j\omega) = 1$ , следовательно, квадрат амплитудного спектра  $A^2(\omega) = 1$  на любой частоте, т. е. ширина спектра дельта-функции бесконечна; энергия дельта-функции

$$W_\delta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega) d\omega \rightarrow \infty,$$

и дельта-функцию физически реализовать невозможно.

### 10.3.2. СВЯЗЬ ШИРИНЫ СПЕКТРА С ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ СИГНАЛА

Рассмотрим (рис. 10.7) некоторый одиночный импульс  $f_1(t)$  длительностью  $t_n$ , спектр которого  $F_1(j\omega)$  имеет ширину  $\Delta\omega$  (для простоты считаем  $f_1(t)$  четной функцией).

Пусть имеется второй сигнал  $f_2(t)$  подобной формы, но иной длительности:  $f_2(t) = f_1(at)$ , причем для определенности на рисунке 10.7 принято  $a = 2$ , следовательно, импульс  $f_2$  в 2 раза короче, чем  $f_1$  (действительно,  $f_2$  в момент  $t$  равен значению  $f_1$  при  $2t$ ).

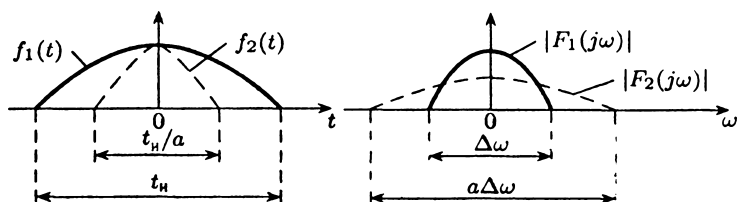


Рис. 10.7

По теореме подобия находим спектр

$$F_2(j\omega) = \frac{1}{a} F_1(j\omega/a),$$

т. е. на рисунке 10.7 у второго сигнала значения амплитудного спектра уменьшились в 2 раза, но спектр стал в 2 раза шире (действительно, значение  $F_2$  на частоте  $\omega$  пропорционально значению  $F_1$  на частоте  $\omega/2$ ).

*Выводы.*

1. Чем короче сигнал, тем шире его спектр.
2. Для сигналов подобной формы произведение длительности сигнала на ширину его спектра есть величина постоянная:

$$t_n \Delta\omega = \text{const.} \quad (10.25)$$

*Примечания.*

1. Дельта-функция — самый короткий сигнал (с нулевой длительностью) — имеет спектр бесконечной ширины.

2. Чем шире полоса пропускания цепи, тем быстрее в ней идут переходные процессы (действительно, частотная характеристика  $H(j\omega)$  — это спектр импульсной характеристики  $h(t)$ , которая, в свою очередь, определяет продолжительность свободных процессов в цепи, а полоса пропускания — это в некотором смысле аналог ширины спектра).

3. Значения const в (10.25) для сигналов различной формы и различных критериев ширины спектра приведены в справочниках; так, const для «прямоугольного и треугольного» импульсов будут, соответственно,  $2,96\pi$  и  $1,84\pi$  при 90%-ном энергетическом критерии.

### 10.3.3. ПОНЯТИЕ О СВЯЗИ ШИРИНЫ СПЕКТРА С КРУТИЗНОЙ СИГНАЛА

Допустим, имеем два сигнала треугольной формы, одинаковой длительности и высоты, но один из «треугольников» равнобедренный, а второй — нет. Оказывается, у неравнобедренного треугольного импульса ширина спектра больше, так как один из «фронтов» сигнала круче, чем «фронты» у равнобедренного треугольника.

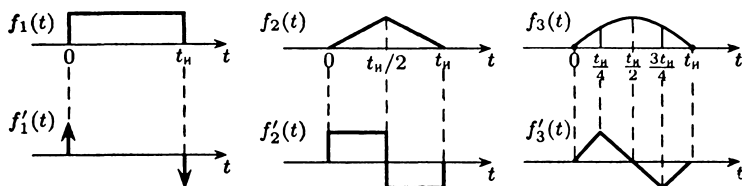


Рис. 10.8

Рассмотрим (рис. 10.8) три сигнала одинаковой длительности, но различной крутизны (различной степени гладкости), и найдем их изображения по Лапласу, а затем — спектры:

$$f(t) \div F(s) \div F(j\omega).$$

Для наиболее крутого из рассматриваемых сигналов (кусочно-постоянного) имеем

$$f_1(t) \div F_1(s) = \frac{1}{s} [...], \quad F_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega} [...],$$

где в квадратных скобках выделена неанализируемая здесь часть изображения и спектра сигнала.

Для сигнала кусочно-линейной формы получим

$$f_2(t) \div F_2(s) = \frac{1}{s^2} [...], \quad F_2(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2} [...].$$

Для наиболее гладкого сигнала кусочно-параболической формы имеем

$$f_3(t) \div F_3(s) = \frac{1}{s^3} [...], \quad F_3(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^3} [...].$$

*Примечания.*

1. Амплитудный спектр самого гладкого сигнала  $f_3(t)$  имеет множитель, убывающий пропорционально  $\omega^3$  (т. е. быстрее, чем у остальных сигналов), а самого негладкого (самого крутого) —  $f_1(t)$  — пропорционально  $\omega$  (т. е. наиболее медленно).

2. Даже у самого крутого сигнала  $f_1(t)$  амплитудный спектр убывает достаточно быстро, что в явной форме свидетельствует о высокой сходимости спектра (преобразования Фурье).

3. Поскольку спектр одиночного импульса является огибающей дискретного спектра периодического сигнала, то ряд Фурье тоже быстро сходится.

4. Степень гладкости сигнала оценивается по степени разрывности его производной; очевидно,  $f_3(t)$  — самый гладкий сигнал из рассматриваемых, так как у него разрывной будет  $f_3''(t)$ , а  $f_1(t)$  — самый крутой сигнал, поскольку у него разрывной является нулевая производная, т. е. сам сигнал.

*Выводы.*

1. Чем круче сигнал, тем шире его спектр.
2. Самым крутым из рассматриваемых в теории цепей сигналов является дельта-функция  $\delta(t) \div \Delta(j\omega) = 1$ ; ширина ее спектра бесконечна.

## 10.4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ОТЫСКАНИЯ СИГНАЛА ПО СПЕКТРУ

### 10.4.1. ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ СИГНАЛА ПО ЕГО АМПЛИТУДНОМУ И ФАЗОВОМУ СПЕКТРАМ

Из формул (10.17)

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \frac{2}{T} A_1(\omega) \Big|_{\omega=k\omega_1=k2\pi/T} \\ \Phi_k &= \Phi_1(\omega) \Big|_{\omega=k\omega_1=k2\pi/T} \end{aligned} \right\},$$

связывающих спектр  $F_1(j\omega) = A_1(\omega)e^{j\Phi_1(\omega)}$  неизвестного одиночного импульса  $f_1(t)$  с дискретным спектром

$\dot{A}_k = A_k e^{j\Phi_k}$  сигнала  $f_{\Pi}$ , составленного из периодической последовательности импульсов, вытекает простой метод приближенного вычисления сигнала  $f_1(t)$  по его спектру.

1. Строят графики амплитудного  $A_1(\omega)$  и фазового  $\Phi_1(\omega)$  спектров искомого одиночного импульса  $f_1(t)$ .

2. Выбрав произвольно достаточно большой период  $T$ , по указанным формулам определяют на частотах  $k\omega_1 = k2\pi / T$  амплитуды и начальные фазы  $A_k$  и  $\Phi_k$  гармоник ряда Фурье сигнала  $f_{\Pi}(t)$ , составленного из периодически повторяющихся импульсов  $f_1(t)$ .

3. Записывают ряд Фурье, ограничиваясь обычно тремя-семью первыми (наиболее значительными по амплитуде) гармониками

$$f_{\Pi}(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{3...7} A_k \cos(k\omega_1 t + \Phi_k)$$

и затем вычерчивают график  $f_{\Pi}(t)$  в пределах условно «первого периода», т. е. в интервале  $0 < t < T$ . Это и будет искомым одиночный импульс  $f_1(t)$ .

Отметим, что если на границах периода  $T$  построенный график  $f_1(t)$  практически затухает, то значение  $T$  выбрано правильно, если же не затухает, необходимо увеличить  $T$  и повторить расчет.

Описанный метод является простым в использовании и достаточно точным.

#### 10.4.2. СВЯЗЬ СИГНАЛА С ЕГО ВЕЩЕСТВЕННЫМ И МНИМЫМ СПЕКТРАМИ

Пусть сигнал  $f(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ . По обратному преобразованию Фурье для вещественной функции  $f(t)$  имеем

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [B(\omega) + jM(\omega)] (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [B(\omega) \cos \omega t - M(\omega) \sin \omega t] d\omega + j0, \end{aligned} \quad (10.26)$$

причем мнимая часть в (10.26) равна нулю, во-первых, так как  $f(t)$  — по условию вещественная функция, а во-вторых, под интегралом при записи мнимой части находится нечетная функция, которая интегрируется в симметричных пределах.

По условию имеем

$$f(-t) \equiv 0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [B(\omega) \cos \omega t + M(\omega) \sin \omega t] d\omega; \quad (10.27)$$

тогда получим, суммируя (10.26), (10.27),

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (10.28)$$

и, вычитая,

$$f(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (10.29)$$

Поскольку в (10.28), (10.29) интегрируются четные функции, пределы интегрирования можно сократить вдвое:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} M(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (10.30)$$

**Вывод.** Если сигнал  $f(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ , то на основании (10.30) он обязан иметь и вещественный и мнимый спектры; они жестко связаны соотношением (10.27), т. е. один спектр однозначно определяет другой. Жесткой является также связь между амплитудными и фазовыми спектрами (для сигналов, изображение которых не содержит нулей и полюсов в правой полуплоскости). Поскольку частотные характеристики — это спектр импульсной характеристики, то АЧХ — ФЧХ — ВЧХ — МЧХ также жестко связаны. Поэтому при синтезе цепей и сигналов нельзя произвольно задавать какие-либо два спектра независимо друг от друга.

*Примечания.*

1. Выражения (10.30) называют тригонометрическими формами обратного преобразования Фурье.

2. Дельта-функция  $\delta(t)$  была введена как четная функция  $f(t) = f(-t)$ , поэтому ее спектр  $\Delta(j\omega) = 1$  не содержит мнимой составляющей.

### 10.4.3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ПРИ ОТЫСКАНИИ СИГНАЛА ПО ЕГО ВЕЩЕСТВЕННОМУ ИЛИ МНИМОМУ СПЕКТРАМ

Формулу (10.30) преобразуем к виду

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} B(\omega) e^{-s\omega} d\omega \Big|_{s=jt},$$

где интеграл соответствует преобразованию Лапласа  $\mathcal{L}$  от вещественного спектра, т. е.

$$f(t) = \frac{2}{\pi} = |\operatorname{Re} \mathcal{L}[B(\omega)]|_{s=jt}. \quad (10.31)$$

Аналогично, преобразовав по Лапласу мнимый спектр, можно получить формулу

$$f(t) = \frac{2}{\pi} = |\operatorname{Im} \mathcal{L}[M(\omega)]|_{s=jt}. \quad (10.32)$$

На практике производят кусочно-линейную аппроксимацию графиков  $B(\omega)$  или  $M(\omega)$ , методом двойного дифференцирования находят их изображения по Лапласу  $\mathcal{L}[B(\omega)]$  или  $\mathcal{L}[M(\omega)]$ , а затем производят операции, указанные в (10.31), (10.32).

Метод является приближенным, так как:

- 1) используется аппроксимация графиков;
- 2) на практике не учитывают высокочастотную зону спектра, следовательно, на основании теоремы

$$f(0+) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} j\omega F(j\omega)$$

максимальная погрешность будет иметь место в начале процесса.

### 10.4.4. НЕВОЗМОЖНОСТЬ РЕАЛИЗАЦИИ ИДЕАЛЬНОГО ФИЛЬТРА НИЖНИХ ЧАСТОТ (ФНЧ)

Рассмотрим идеальный ФНЧ, простейший вариант частотных характеристик которого приведен на рисунке 10.9а, где частота среза  $\omega_{\text{ср}}$  определяет границу полосы пропускания фильтра.

Таким образом, обобщенную частотную характеристику ФНЧ можно записать так:



$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_{\text{ср}}; \\ 0, & |\omega| > \omega_{\text{ср}}. \end{cases} \quad (10.33)$$

*Примечания.*

1. Частотные характеристики  $RLC$ -цепей описываются дробно-рациональными функциями частоты  $j\omega$ , в то время как (10.33) не является дробно-рациональной функцией, следовательно,  $RLC$ -цепями нельзя реализовать идеальный ФНЧ.

2. Импульсная характеристика  $h(t) = 0$  при  $t < 0$ , следовательно, на основании п. 10.4.2 составляющие частотных характеристик (АЧХ, ФЧХ, ВЧХ, МЧХ) должны быть жестко связаны и задавать АЧХ  $A(\omega)$  независимо от ФЧХ  $\Phi(\omega)$ , как это сделано на рисунке 10.9а, нельзя.

Выясним, к чему приводит такое независимое задание АЧХ и ФЧХ. Найдем импульсную характеристику идеального ФНЧ, используя обратное преобразование Фурье от (10.33):

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\text{ср}}}^{\omega_{\text{ср}}} 1 e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi jt} (e^{j\omega_{\text{ср}} t} - e^{-j\omega_{\text{ср}} t}) = \frac{\omega_{\text{ср}}}{\pi} \frac{\sin \omega_{\text{ср}} t}{\omega_{\text{ср}} t}. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Очевидно,  $h(0) = \omega_{\text{ср}} / \pi$ , если раскрыть в (10.34) неопределенность. Узлы (нули) в (10.34) имеют место при  $\sin \omega_{\text{ср}} t_k = 0$ , т. е. в моменты  $t_k = k\pi / \omega_{\text{ср}}$  при  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  График выражения (10.34), справедливого для любого момента времени  $t$ , приведен на рисунке 10.9б.

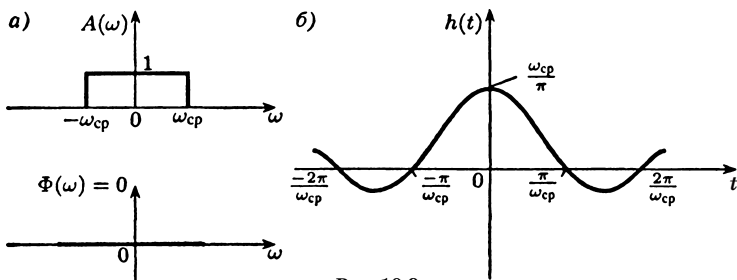


Рис. 10.9

**Вывод** (из анализа рис. 10.9б): реакция, т. е. импульсная характеристика,  $h(t) \neq 0$  при  $t < 0$ , хотя воздействие  $\delta(t)$  приложено к цепи при  $t = 0$ ; следовательно, нарушено условие физической осуществимости и идеальный ФНЧ реализовать невозможно.

## 10.5. СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ

### 10.5.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАСЧЕТА И ОЦЕНКИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Рассмотрим следующие приложения метода.

#### 1. Приближенный расчет переходных процессов спектральным методом.

На основании теоремы свертки находят спектр реакции:

$$F_{\text{вых}}(j\omega) = F_{\text{вх}}(j\omega)H(j\omega), \quad (10.35)$$

где  $F_{\text{вх}}(j\omega)$  — спектр воздействия;  $H(j\omega)$  — обобщенная частотная характеристика цепи.

Обычно на практике на основании (10.35) определяют амплитудный и фазовый спектры реакции:

$$\begin{aligned} A_{\text{вых}}(\omega) &= A_{\text{вх}}(\omega)A(\omega); \\ \Phi_{\text{вых}}(\omega) &= \Phi_{\text{вх}}(\omega) + \Phi(\omega), \end{aligned}$$

а затем, если необходимо, по графикам  $A_{\text{вых}}(\omega)$  и  $\Phi_{\text{вых}}(\omega)$  рассчитывают вещественный и мнимый спектры:

$$\begin{aligned} B_{\text{вых}}(\omega) &= A_{\text{вых}}(\omega)\cos[\Phi_{\text{вых}}(\omega)]; \\ M_{\text{вых}}(\omega) &= A_{\text{вых}}(\omega)\sin[\Phi_{\text{вых}}(\omega)], \end{aligned} \quad (10.36)$$

причем очень часто (в цепях высокого порядка) вычисления (10.36) выполняют, используя графики амплитудного  $A_{\text{вх}}(\omega)$  и фазового  $\Phi_{\text{вх}}(\omega)$  спектров воздействия  $f_{\text{вх}}(t)$ , а также графики АЧХ и ФЧХ цепи.

Далее одним из трех приближенных методов, описанных в п. 10.4, по спектру реакции (по  $A_{\text{вых}}$  и  $\Phi_{\text{вых}}$ , или по  $B_{\text{вых}}$ , или по  $M_{\text{вых}}$ ) находят саму реакцию  $f_{\text{вых}}(t)$ .

## 2. Приближенный расчет импульсной характеристики спектральным методом.

Поскольку частотные характеристики цепи  $H(j\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)} = B(\omega) + jM(\omega)$  являются спектром импульсной характеристики цепи  $h(t)$ , то, зная графики АЧХ и ФЧХ, или ВЧХ, или МЧХ, можно одним из трех указанных в п. 10.4 методов приближенно определить  $h(t)$ .

## 3. Приближенная оценка реакции по значению АЧХ цепи на нулевой частоте.

Спектр сигнала при  $\omega = 0$  равен площади сигнала. Поэтому на основании (10.35), (10.36)  $A_{\text{вых}}(0) = A_{\text{вх}}(0)A(0)$ , т. е. если начальное значение АЧХ  $A(0) = 0$ , то суммарная площадь реакции равна нулю; если  $A(0) = k$ , то площадь реакции в  $k$  раз отличается от площади воздействия.

## 4. Приближенная оценка реакции по значению АЧХ цепи на бесконечной частоте.

С учетом (10.35) на основании теоремы о начальном значении имеем:

$$f_{\text{вых}}(0+) = \lim_{\omega \rightarrow 0} j\omega F_{\text{вх}}(j\omega)H(j\omega) = f_{\text{вх}}(0+)H(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0},$$

$$\omega \rightarrow \infty,$$

следовательно, если значение АЧХ на бесконечной частоте  $A(\infty) = 0$ , то скачок воздействия  $f_{\text{вх}}(0+)$  на выход не пройдет; если  $A(\infty) = k$ , то скачок реакции  $f_{\text{вых}}(0+)$  в  $k$  раз отличается от скачка воздействия.

## 5. Оценка изменения формы сигнала, проходящего через цепь, путем сравнения спектра воздействия с частотными характеристиками (ЧХ) цепи.

Обычно ЧХ цепи можно приближенно разбить на частотные зоны (интервалы) неискажения, дифференцирования, интегрирования, двойного дифференцирования, двойного интегрирования и т. д. Если спектр входного сигнала располагается в основном в одной из этих зон, можно предсказать изменение формы реакции на выходе цепи. Далее этот вопрос рассматривается подробнее.

### 10.5.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИДЕАЛЬНЫХ НЕИСКАЖАЮЩИХ, ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИХ И ИНТЕГРИРУЮЩИХ ЦЕПЕЙ

Идеальная неискажающая цепь реализует операцию

$$f_{\text{ВЫХ}}(t) = k f_{\text{ВХ}}(t - t_3), \quad (10.37)$$

т. е. условие пропускания сигналов без искажения допускает изменение уровня проходящих сигналов в  $k$  раз и их сдвиг на  $t_3$  — время запаздывания.

Преобразуем (10.37) по Лапласу:  $F_{\text{ВЫХ}}(s) = k F_{\text{ВХ}}(s) e^{-st_3}$ , откуда передаточная функция идеальной неискажающей цепи

$$H(s) = \frac{F_{\text{ВЫХ}}(s)}{F_{\text{ВХ}}(s)} = k e^{-st_3},$$

обобщенная частотная характеристика  $H(j\omega) = k e^{-j\omega t_3}$ , АЧХ  $A(\omega) = |H(j\omega)| = k$ , ФЧХ  $\Phi(\omega) = -\omega t_3$ .

Графики АЧХ и ФЧХ идеальной неискажающей цепи приведены на рисунке 10.10а.

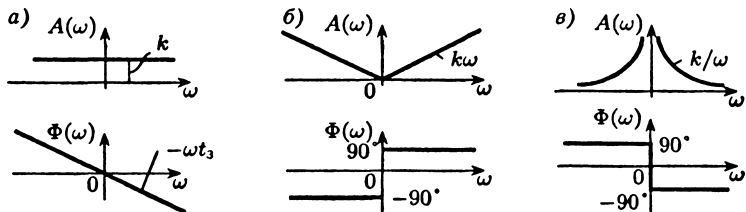


Рис. 10.10

**Вывод.** АЧХ неискажающей цепи — постоянна (не зависит от частоты), а ФЧХ линейна, причем наклон ФЧХ определяет время запаздывания  $t_3$  проходящих сигналов  $t_3 = |\Delta\Phi| / \Delta\omega$  (приращение  $\Delta\Phi$  измеряют в радианах).

Идеальная дифференцирующая цепь реализует операцию

$$F_{\text{ВЫХ}}(t) = k f'_{\text{ВХ}}(t).$$

Преобразовав по Лапласу условие дифференцирования (при нулевых начальных условиях), имеем:

$$F_{\text{вых}}(s) = ksF_{\text{вх}}(s),$$

откуда получаем передаточную функцию идеальной дифференцирующей цепи  $H(s) = ks$ , частотную характеристику  $H(j\omega) = jk\omega$ , АЧХ  $A(\omega) = k|\omega|$ , ФЧХ  $\Phi(\omega) = +90^\circ$  для области  $\omega > 0$  и  $\Phi(\omega) = -90^\circ$  для  $\omega < 0$ . Графики АЧХ и ФЧХ приведены на рисунке 10.10б.

**Вывод.** При  $\omega > 0$  АЧХ идеальной дифференцирующей цепи линейно возрастает, а ФЧХ равна  $+90^\circ$ .

Идеальная интегрирующая цепь реализует операцию

$$f_{\text{вых}}(t) = k \int_0^t f_{\text{вх}}(t) dt.$$

Преобразовав по Лапласу при нулевых начальных условиях операцию идеального интегрирования, находим передаточную функцию  $H(s) = k/s$ , затем обобщенную частотную характеристику  $H(j\omega) = k/(j\omega)$ , АЧХ  $A(\omega) = k/|\omega|$  и ФЧХ  $\Phi(\omega) = -90^\circ$  (для  $\omega > 0$ ). Графики АЧХ и ФЧХ идеальной интегрирующей цепи приведены на рисунке 10.10в.

**Вывод.** При  $\omega > 0$  АЧХ идеальной интегрирующей цепи описывается гиперболой, а ФЧХ равна  $-90^\circ$ .

### Примечания.

1. При двухкратном дифференцировании и интегрировании сигналов передаточные функции, соответственно,  $ks^2$  и  $k/s^2$ .

2. При построении графиков частотных характеристик и спектров на практике обычно ограничиваются диапазоном положительных частот ( $\omega > 0$ ).

3. Очень часто АЧХ цепей удается приближенно разбить на частотные интервалы (зоны, диапазоны), в которых график асимптотически приближается к функциям  $k$  (т. е. const), или  $k\omega$ , или  $k/\omega$ , что соответствует зонам неискажения (т. е. пропускания), или дифференцирования, или интегрирования; при этом передаточные функции, приближенно описывающие цепь в этих зонах, будут, соответственно, равны  $k$ , или  $ks$ , или  $k/s$ .

### 10.5.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕАЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩЕЙ RC-ЦЕПИ

Схема цепи, называемой на практике дифференцирующей RC-цепью, приведена на рисунке 10.11а. Проведем общий анализ передаточных (передающих) свойств этой цепи в  $t$ -области при условиях:

$$1) u_{\text{ВЫХ}}(t) \ll u_{\text{ВХ}}(t);$$

$$2) u_C(0-) = 0.$$

Очевидно, что сигнал на выходе цепи

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = u_R(t) = Ri(t) = RCu_C'(t) \approx RCu_{\text{ВХ}}'(t) = \tau u_{\text{ВХ}}'(t),$$

поскольку на основании первого условия  $u_C(t) \approx u_{\text{ВХ}}(t)$ .

*Выводы.*

1. При малых уровнях выходного сигнала цепь приблизительно реализует операцию дифференцирования.

2. Чем меньше постоянная времени цепи  $\tau$ , тем ярче эффект дифференцирования.

Проведем вначале в частотной, а затем во временной областях анализ прохождения прямоугольного импульса  $u_{\text{ВХ}}(t)$  (рис. 10.11б) через исследуемую цепь.

Передаточная функция цепи будет

$$H(s) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(s)}{U_{\text{ВХ}}(s)} = \frac{R}{R + Z_C} = \frac{RCs}{RCs + 1} = \frac{s}{s + 1/\tau},$$

откуда обобщенная частотная характеристика

$$H(j\omega) = j\omega / (j\omega + 1/\tau);$$

$$\text{АЧХ } A(\omega) = |H(j\omega)| = \omega / \sqrt{\omega^2 + (1/\tau)^2} \quad \text{при } \omega > 0.$$

Приближенно разобьем АЧХ на частотные интервалы  $\omega < 1/\tau$  и  $\omega > 1/\tau$ . При этом учитываем, что в приближен-

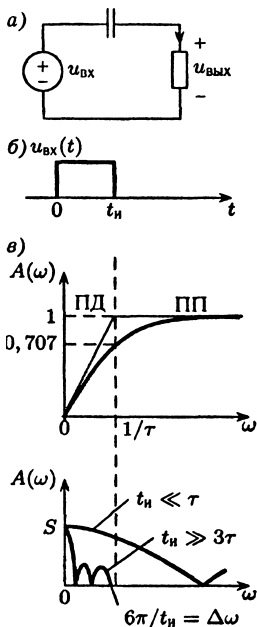


Рис. 10.11

ных расчетах, для качественной (грубой) оценки результатов широко используется соотношение  $\sqrt{a^2 + b^2} \cong \max\{a, b\}$ , поскольку уже при  $b < a / 2$  имеем  $\sqrt{a^2 + b^2} \approx a$  с погрешностью меньше, чем 12%.

*Низкочастотная (НЧ) зона  $\omega < 1 / \tau$ .*

Пренебрегая  $\omega$  в сравнении с  $1 / \tau$  в приведенных формулах, получим: АЧХ  $A(\omega) \approx \tau\omega$ , что соответствует полюсе дифференцирования (ПД) с передаточной функцией  $H(s) \approx \tau s$ .

*Высокочастотная (ВЧ) зона  $\omega > 1 / \tau$ .*

Пренебрегая  $1 / \tau$  в сравнении с  $\omega$ , получим АЧХ цепи  $A(\omega) \approx 1$ , что соответствует зоне неискажения (полосе пропускания) с передаточной функцией  $H(s) \approx 1$ .

На рисунке 10.11в АЧХ, построенная приближенно по частотным интервалам, показана тонкой линией, а уточненная — жирной линией.

*Примечание.* Полоса пропускания (ПП) цепи, рассчитанная по «критерию  $0,707A_{\max}$ », в точности соответствует зоне неискажения, а частота среза  $\omega_{\text{ср}} = 1 / \tau$  — частоте «стыка» частотных интервалов.

Сравним АЧХ цепи с амплитудным спектром прямоугольного импульса для  $\omega > 0$ , как показано на рисунке 10.11в. Рассмотрим два вида импульсов: «короткий» ( $t_{\text{и}} \ll \tau$ ) и «длинный» ( $t_{\text{и}} \gg 3\tau$ ); данные о спектре прямоугольного импульса были получены в п. 10.2.1 (см. рис. 10.4).

*Выводы* (на основании анализа рис. 10.11в).

1. Спектр «длинного» импульса ( $6\pi / t_{\text{и}} < 1 / \tau$ , т. е.  $t_{\text{и}} > 6\pi \approx 18\tau$ ) располагается в полосе дифференцирования, поэтому на выходе цепи будет ярко выражен «эффект дифференцирования» входного прямоугольного импульса.

2. Спектр «короткого» импульса ( $t_{\text{и}} < \tau$ ) в основном располагается в полосе пропускания, следовательно, изменение формы реакции в сравнении с воздействием будет незначительным.

*Примечания.*

1. Поскольку значение АЧХ на нулевой частоте  $A(0) = 0$ , суммарная площадь реакции должна быть нулевой.

2. Поскольку АЧХ  $A(\infty) = 1$ , скачки (разрывы) воздействия полностью пройдут на выход.

3. Кроме того, при АЧХ  $A(0) = 0$  реакция не может содержать постоянную составляющую, т. е. на выходе будет наблюдаться «спад полков (горизонтальных участков) воздействия».

Сравним полученные данные частотного анализа с непосредственным рассмотрением процессов в цепи во временной области (рис. 10.12).

Реакция цепи на единичное ступенчатое воздействие, приведенная в нижней части рисунка 10.12а, общеизвестна: при  $t = 0+$   $C$ -элемент эквивалентен короткозамкнутому участку (КЗ), поэтому скачок воздействия полностью проходит на выход; при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. в установившемся режиме при постоянном воздействии  $C$ -элемент эквивалентен холостому ходу (ХХ), т. е. разомкнутому участку цепи, поэтому сигнал на выход не проходит; переходный процесс описывается уравнением  $u_{\text{вых}}(t) = \exp(-t / \tau) \delta_1(t)$ .

Прямоугольный импульс на входе цепи можно представить суммой двух сигналов ступенчатой формы (1 и 2), как показано в верхней части рисунка 10.12б. График «идеальной» производной входного сигнала  $u'_{\text{вх}}(t)$  описывается двумя смещенными во времени дельта-функциями, т. е. двумя бесконечно короткими (узкими) импульсами. Используя метод наложения и изображенную на рисунке 10.12а реакцию на ступенчатое воздействие, стро-

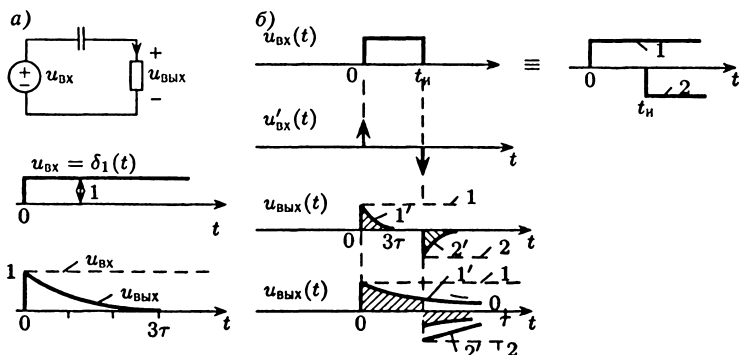


Рис. 10.12



им графики выходного сигнала (заштрихованы в нижней части рисунка 10.12б, где тонкими линиями также показаны элементарные реакции 1' и 2' от ступенчатых воздействий 1 и 2). Как видим, при  $t_{\text{и}} \gg 3\tau$ , т. е. при действии «длинного» прямоугольного импульса на входе, на выходе ярко выражен «эффект дифференцирования», поскольку реакция имеет форму двух коротких импульсов. Если же  $t_{\text{и}} \ll \tau$ , т. е. при действии «короткого» (в сравнении с постоянной времени  $\tau$ ) импульса на входе, форма сигнала на выходе  $u_{\text{вых}}(t)$  незначительно отличается от  $u_{\text{вх}}(t)$ . Следует обратить внимание, что суммарная площадь реакции равна нулю, а скачки воздействия полностью проходят на выход, что и было «предсказано» ранее.

**Вывод.** Данные временного и частотного анализов хорошо согласуются.

*Примечание.* Воздействующий «прямоугольный» импульс является самым крутым (негладким) из реально существующих сигналов, поэтому «предсказание» частотным (спектральным) методом реакции при таком воздействии является наиболее сложным.

#### 10.5.4. ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕАЛЬНОЙ ИНТЕГРИРУЮЩЕЙ RC-ЦЕПИ

Схема интегрирующей RC-цепи приведена на рисунке 10.13а. Проведем вначале общий анализ передаточных свойств этой цепи при условиях:

- 1)  $u_{\text{вых}}(t) \ll u_{\text{вх}}(t)$ ;
- 2)  $u_C(0-) = 0$ .

Очевидно, сигнал на выходе цепи будет

$$u_{\text{вых}}(t) = u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = \frac{1}{CR} \int_0^t u_R(t) dt \approx \frac{1}{\tau} \int_0^t u_{\text{вх}}(t) dt,$$

поскольку на основании первого условия  $u_{\text{вх}}(t) \approx u_R(t)$ .

**Выводы.**

1. При малых уровнях реакции цепь приближенно реализует операцию интегрирования воздействия.

2. Чем больше постоянная времени, тем ярче эффект интегрирования.

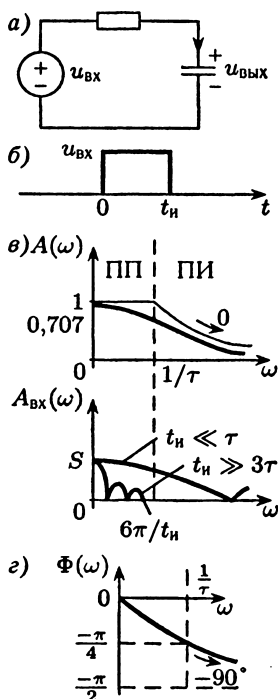


Рис. 10.13

Проведем анализ прохождения прямоугольного импульса (рис. 10.13б) через интегрирующую  $RC$ -цепь.

Получим, что передаточная функция

$$H(s) = Z_c / (R + Z_c) = 1 / (1 + RCs) = (1/\tau) / (s + 1/\tau),$$

частотная характеристика

$$H(j\omega) = (1/\tau) / (j\omega + 1/\tau),$$

$$\text{АЧХ } A(\omega) = (1/\tau) / \sqrt{\omega^2 + (1/\tau)^2},$$

$$\text{ФЧХ } \Phi(\omega) = -\arctg \omega\tau.$$

Приблизительно разобьем АЧХ на частотные интервалы  $\omega \ll 1/\tau$  и  $\omega > 1/\tau$ . В НЧ-зоне, пренебрегая  $\omega$  в сравнении с  $1/\tau$ , получим АЧХ  $A(\omega) \approx 1$ , что соответствует зоне неискажения (полосе пропускания) с передаточной функцией  $H(s) \approx 1$ .

В ВЧ-зоне ( $\omega > 1/\tau$ ), пренебрегая  $1/\tau$  в сравнении с  $\omega$ , получим АЧХ цепи  $A(\omega) = 1/(\tau\omega)$ , что соответствует полосе интегрирования (ПИ) с передаточной функцией  $H(s) = 1/(\tau s)$ .

На рисунке 10.13в АЧХ, построенная приближенно по частотным интервалам, показана тонкими линиями, а уточненная — жирной линией.

*Примечание.* Полоса пропускания (ПП), рассчитанная по «критерию  $A_{\text{max}}/\sqrt{2}$ », полностью соответствует зоне неискажения, а частота среза  $\omega_{\text{ср}} = 1/\tau$  — частоте стыка частотных интервалов.

Сравним АЧХ цепи  $A(\omega)$  с амплитудным спектром  $A_{\text{вх}}(\omega)$  прямоугольного импульса для  $\omega > 0$ , показанным на рисунке 10.13в. Как и ранее, рассматриваем «длинный»

(продолжительный во времени) сигнал прямоугольной формы ( $t_n \gg 3\tau$ ) и «короткий» сигнал на входе ( $t_n \ll \tau$ ).

*Выводы.*

1. Спектр «длинного» импульса в основном располагается в полосе пропускания ( $\Delta\omega_{\Pi} = 6\pi / t_n < \Delta\omega_{\text{ПП}} = 1 / \tau$ ;  $t_n > 18\tau$ ), следовательно, изменение формы сигнала на выходе будет незначительным.

2. Спектр «короткого» импульса ( $t_n \ll \tau$ ) воздействия в основном располагается в полосе интегрирования, поэтому на выходе цепи будет ярко выражен эффект интегрирования проходящих сигналов.

*Примечания.*

1. Поскольку  $A(0) = 1$ , площадь реакции равна площади воздействия.

2. Поскольку  $A(\infty) = 0$ , выходной сигнал обязан быть непрерывным.

3. Время запаздывания  $t_3$  проходящего через цепь сигнала, спектр которого располагается в полосе пропускания (т. е. «длинного» импульса), оценивается в соответствии с п. 10.5.2 по наклону ФЧХ  $\Phi(\omega) = -\arctg \omega\tau$  на низких частотах (см. рис. 10.13з); уравнение касательной к ФЧХ при  $\omega = 0$ , очевидно, имеет вид  $-\omega\tau \cong -\omega t_3$ , т. е.  $t_3 \cong \tau$ , а при оценке  $t_3$  в целом по полосе пропускания на основании рисунка 10.13з получим оценку времени запаздывания  $t_3 \cong |\Delta\Phi| / \Delta\omega_{\text{ПП}} = 0,25\pi / (1 / \tau) \cong 0,75\tau$ .

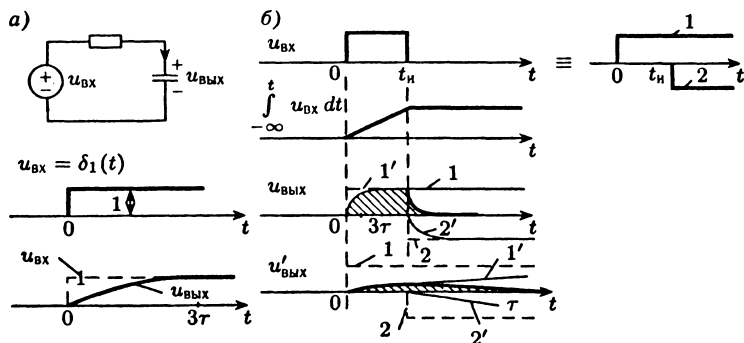


Рис. 10.14

Сравним данные анализа в частотной области с данными анализа процессов непосредственно во временной области (рис. 10.14).

Реакция цепи на единичное ступенчатое воздействие приведена в нижней части рисунка 10.14а: при  $t = 0+$   $C$ -элемент эквивалентен КЗ, скачок воздействия на выход не проходит, реакция  $u_C(t)$  действительно описывается непрерывной функцией; при  $t \rightarrow \infty$   $C$ -элемент эквивалентен ХХ, следовательно,  $u_{\text{вых}} = u_{\text{вх}} = 1$ ; переходный процесс описывается уравнением

$$u_{\text{вых}}(t) = [1 - \exp(-t / \tau)]\delta_1(t).$$

Прямоугольный импульс  $u_{\text{вх}}$  представляем суммой смещенных ступенчатых функций 1 и 2, как показано в верхней части рисунка 10.14б. Затем на рисунке 10.14б приведен график «идеального интеграла» от  $u_{\text{вх}}$ : это кусочно-линейная функция, постоянная при  $t > t_{\text{и}}$ . Используя метод наложения и изображенную на рисунке 10.14а реакцию на ступенчатое воздействие, строим графики выходного сигнала (заштрихованы в нижней части рис. 10.14б, где тонкими линиями также изображены элементарные реакции 1' и 2' от воздействий 1 и 2). Как видим, при действии на входе «длинного» прямоугольного импульса ( $t_{\text{и}} \gg 3\tau$ ) реакция претерпевает незначительные искажения: если же на входе действует «короткий» импульс ( $t_{\text{и}} \ll \tau$ ), график реакции «напоминает» график «идеального интеграла», но уровень сигнала на выходе невелик.

**Вывод.** Данные временного и частотного анализов хорошо согласуются.

*Примечание.* Время запаздывания  $t_3$  сигналов, проходящих через цепи с незначительными искажениями, часто оценивают по окончании переходных процессов (на действие элементарной составляющей входного сигнала), т. е. по смещению во времени вынужденной составляющей реакции; однако для импульса прямоугольной формы этот вариант оценки непригоден; если использовать здесь оценку  $t_3$  по достижению  $u_{\text{вых}}$  половинного уровня нарастания (спада) «фронта» реакции, то  $t_3 \approx 0,7\tau$ .

## 10.6. СПЕКТРЫ ЕДИНИЧНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ФУНКЦИИ И АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

### 10.6.1. СПЕКТР $\delta_1(t)$ . ПОНЯТИЕ ОБ ОСОБЫХ СПЕКТРАХ

Единичная ступенчатая функция  $\delta_1(t)$ , график которой изображен на рисунке 8.14а, не является абсолютно интегрируемой функцией, так как площадь под графиком бесконечна. Поэтому, используя изображение по Лапласу  $\delta_1(t) \div \Delta_1(s) = 1/s$ , находить спектр заменой  $s = j\omega$  нельзя. Однако полюс изображения ( $s_1 = 0$ ) находится в начале координат и в правую полуплоскость не переходит, поэтому спектр  $\delta_1(t)$  все же существует, но является особым и отыскивается по формуле

$$\Delta_{10}(j\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \Delta_1(s) \Big|_{s = \sigma + j\omega}. \quad (10.38)$$

Используя (10.38), получим, избавляясь от мнимости в знаменателе:

$$\Delta_{10}(j\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma + j\omega} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} - \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{j\omega}{\sigma^2 + \omega^2} = B(\omega) + jM(\omega).$$

Очевидно, мнимый спектр

$$jM(\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{-j\omega}{\sigma^2 + \omega^2} = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{s} \Big|_{s=j\omega}$$

как раз получается из изображения путем указанной выше простой замены  $s = j\omega$ . Однако в соответствии с п. 10.4.2 любой сигнал, начинающийся с момента  $t = 0$ , обязан иметь и вещественный, и мнимый спектры.

Перейдем к отысканию вещественного спектра:

$$B(\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} = \begin{cases} 0, & |\omega \neq 0| \\ \infty, & |\omega = 0| \end{cases}.$$

Предположим, что выражение  $B(\omega)$  — это дельта-функция в частотной области, т. е.  $B(\omega) = K\delta(\omega)$ . Тогда коэффициент  $K$  определяет площадь дельта-функции, т. е. площадь под графиком вещественного спектра. Найдем эту площадь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\sigma}\right)^2} d\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} d(x) = \arctg x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,$$

т. е. наше предположение оказалось правильным.

**Вывод.** Спектр единичной ступенчатой функции является особым и определяется формулой

$$\Delta_{10}(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \neq \frac{1}{s} \Big|_{s=j\omega}.$$

*Примечания:*

1. Спектр  $F(j\omega)$  абсолютно интегрируемых сигналов (имеющих конечную площадь) получают из их изображений по Лапласу  $F(s)$  заменой  $s = j\omega$ .

2. У незатухающих неабсолютно интегрируемых сигналов, например вида  $\delta_1(t) \div 1/s$ ,  $t\delta_1(t) \div 1/s^2$ ,  $\sin\omega_0 t \delta_1(t) \div \omega_0/(s^2 + \omega_0^2)$ , в изображении которых нет полюсов в правой полуплоскости, но хотя бы один из полюсов находится на мнимой оси, спектр является особым и отыскивается по формуле, аналогичной (10.38).

3. Расходящиеся, неограниченно нарастающие сигналы, изображение по Лапласу которых имеет хотя бы один полюс в правой полуплоскости, спектра не имеют; к таким, например, относятся сигналы вида

$$e^{\beta t} \delta_1(t) \div \frac{1}{s - \beta};$$

$$e^{\beta t} \sin\omega_0 t \div \frac{\omega_0}{(s - \beta)^2 + \omega_0^2}.$$

### 10.6.2. СПЕКТРЫ АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ (СВЯЗЬ СПЕКТРА РАДИОИМПУЛЬСА СО СПЕКТРОМ ВИДЕОИМПУЛЬСА)

Амплитудно-модулированный (АМ) сигнал описывается выражением

$$f_{\text{AM}}(t) = f(t)\cos(\omega t + \alpha),$$

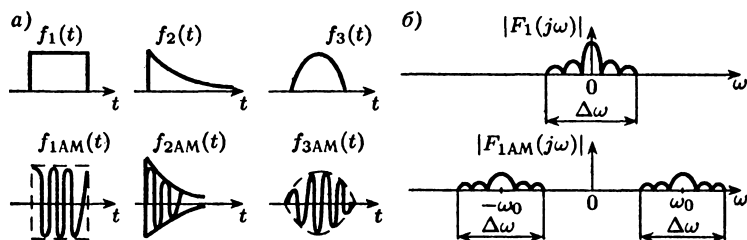


Рис. 10.15

где  $f_{AM}$  — амплитудно-модулированный сигнал, или радиоимпульс;  $f(t)$  — видеоимпульс, т. е. огибающая радиоимпульса;  $\omega_0$  — несущая (частота АМ-сигнала), т. е. частота заполнения видеоимпульса. Примеры видеоимпульсов приведены на рисунке 10.15а сверху, а соответствующих радиоимпульсов — снизу.

Найдем изображение по Лапласу АМ-сигнала (для простоты считаем  $\alpha = 0$ ):

$$\begin{aligned} f_{AM}(t) &= f(t) \cos \omega_0 t = 0,5 f(t) (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \div F_{AM}(s) = \\ &= 0,5 [F(s - j\omega_0) + F(s + j\omega_0)], \end{aligned} \quad (10.39)$$

здесь использованы формулы Эйлера и теорема сдвига преобразования Лапласа.

Если видеоимпульс является абсолютно интегрируемым сигналом, то заменой  $s = j\omega$  в (10.39) получим спектр АМ-сигнала:

$$f_{AM}(t) \div F_{AM}(j\omega) = 0,5 [F(j(\omega - \omega_0)) + F(j(\omega + \omega_0))]. \quad (10.40)$$

На рисунке 10.15б изображены амплитудный спектр прямоугольного импульса  $f_1(t)$ , представленного на рисунке 10.15а, и построенный в соответствии с (10.40) амплитудный спектр соответствующего АМ-сигнала  $f_{1AM}(t)$ , представленный также на рисунке 10.15б.

**Вывод.** Если спектр  $|F_1(j\omega)|$  видеоимпульса группируется относительно нулевой частоты (т. е. в основном сосредоточен в области НЧ), то спектр  $|F_{1AM}(j\omega)|$  радиоимпульса, имея ту же форму, группируется относительно несущей  $\pm\omega_0$ .

*Примечание.* Эффект переноса спектра в частотной области широко используется в радиотехнике, когда видеосигналы с одинаковой шириной спектра  $\Delta\omega$ ; удается «разделить» в частотной области путем использования различных несущих  $\omega_0$  у различных передающих станций; на приемной станции используют полосовой пропускающий фильтр с полосой пропускания  $\Delta\omega$ , перестраиваемый на желаемую частоту приема  $\omega_0$ ; далее выделенный АМ-сигнал выпрямляют (т. е. «отсекают»  $f_{\text{AM}}(t) < 0$ ) и, используя ФНЧ (или «фильтр пробку», т. е. полосовой заграждающий фильтр, настроенный на  $\omega_0$ ), выделяют огибающую  $f(t)$ , т. е. восстанавливают исходный видеосигнал передающей станции.

## 10.7. ТИПОВОЙ ПРИМЕР

На вход интегрирующей  $RC$ -цепи (рис. 10.16а) при  $R = 1$  Ом,  $C = 1$  Ф поступает сигнал — импульс треугольной формы (рис. 10.16б).

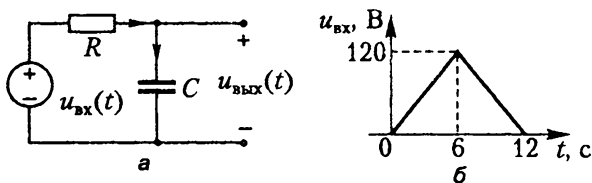


Рис. 10.16

Необходимо:

- 1) найти спектр для  $u_{\text{вх}}(t)$ , построить графики амплитудного и фазового спектров, оценить ширину спектра  $\Delta\omega$ ;
- 2) найти передаточную функцию цепи  $H(s)$  и частотные характеристики; оценить время запаздывания  $t_3$ , вносимое цепью; сравнив ЧХ и спектр воздействия, предсказать  $u_{\text{вых}}(t)$ ;
- 3) найти  $u_{\text{вых}}(t)$  аналитически и сделать выводы.

1. Определяем спектр входного сигнала.

Для этого воспользуемся выражением (10.20), полученным в п. 10.2.2. Тогда на основании (10.20) спектр  $u_{\text{вх}}(t)$  будет



$$\begin{aligned}
 U_{\text{вх}}(j\omega) &= U_{\text{вх}}(s)|_{s=j\omega} = \frac{20}{-\omega^2}(1 - 2e^{-j6\omega} + e^{-j12\omega}) = \\
 &= \frac{20}{-\omega^2}e^{-j6\omega}(e^{j6\omega} - 2 + e^{-j6\omega}) = \frac{80}{\omega^2}e^{-j6\omega}\sin^2 3\omega, \quad (10.41)
 \end{aligned}$$

причем из (10.41) амплитудный спектр

$$A_{\text{вх}}(\omega) = |U_{\text{вх}}(j\omega)| = \frac{80}{\omega^2} \sin^2 3\omega,$$

а фазовый спектр  $\Phi_{\text{вх}}(\omega) = \arg U_{\text{вх}}(j\omega) = -6\omega$ .

Вычислим значения амплитудного и фазового спектров в характерных точках. При  $\omega = 0$  спектр  $A(\omega)$  равен площади сигнала

$$S_{\text{вх}} = 720 = A(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{80}{\omega^2} \sin^2 3\omega = 80 \cdot 9 = 720 \text{ В}\cdot\text{с}.$$

В узлах, где  $\sin^2 3\omega = 0$ , т. е. при  $\omega = k\pi / 3$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ , имеем  $A(\omega) = 0$ .

В точках, где  $\sin^2 3\omega = 1$ , т. е. при  $\omega_k = k\pi / 6$ , где  $k = 1, 3, 5, \dots$ , значения  $A(\omega) = 80 / \omega^2$ ; они приведены в таблице 10.1. На рисунке 10.17а, б построены графики амплитудного и фазового спектров.

Т а б л и ц а 10.1

$\omega$	$A_{\text{вх}}(\omega)$	$\Phi_{\text{вх}}(\omega)$
0	720	0
$\pi / 6$	288	-180
$\pi / 3$	0	-360
$3\pi / 6$	32	-180
$2\pi / 3$	0	-360
$\infty$	0	0

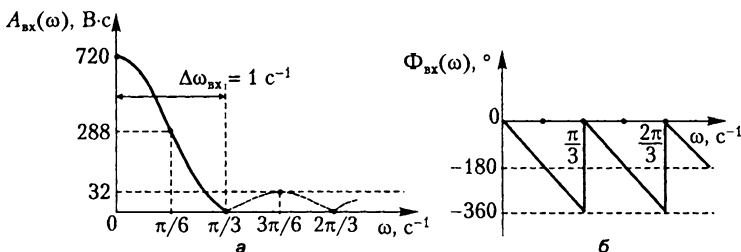


Рис. 10.17

По графику амплитудного спектра находим *ширину спектра*, используя *десятипроцентный амплитудный критерий*:

$$\Delta\omega_{\text{вх}} \approx 2\pi / 6 = 4\pi / t_{\text{и}} = 1 \text{ рад/с},$$

т. е. значение  $\Delta\omega_{\text{вх}}$  приблизительно совпадает с шириной спектра, определяемой по критерию «первого лепестка».

2. Находим ПФ и ЧХ цепи.

Вычислим ПФ, используя формулу делителя напряжений для схемы на рисунке 10.16а,

$$H(s) = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{1/s}{1 + 1/s} = \frac{1}{s + 1}.$$

Комплексная частотная характеристика цепи

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega + 1}.$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{A_{\text{числителя}}}{A_{\text{знаменателя}}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1^2}}.$$

Фазочастотная характеристика

$$\Phi(\omega) = \arg H(j\omega) = \Phi_{\text{числителя}} - \Phi_{\text{знаменателя}} = 0^\circ - \arctg(\omega / 1).$$

На рисунке 10.18 жирными линиями показаны АЧХ и ФЧХ, а штрих-пунктиром изображены «асимптоты» к АЧХ ( $1$  и  $1/\omega$ ) при  $\omega \rightarrow 0$  и при  $\omega \rightarrow \infty$ , которые отражают идеализацию АЧХ соответственно в интервалах нижних и верхних частот.

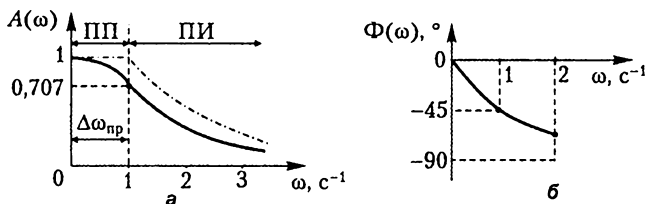


Рис. 10.18

При  $\omega < 1$  в НЧ-интервале идеализированная АЧХ  $A(\omega) \approx 1$ , что соответствует ПФ  $H(s) \approx 1$ , т. е. в идеале  $u_{\text{вых}}(t) \approx u_{\text{вх}}(t)$ . Таким образом, НЧ-интервал является *полосой пропускания* (ПП).

При  $\omega > 1$  в ВЧ-интервале идеализированная АЧХ  $A(\omega) \approx 1 / \omega$ , что соответствует ПФ  $H(s) = 1 / s$ , т. е.

$$u_{\text{вых}}(t) \approx \int_0^t u_{\text{вх}}(t) dt.$$

Следовательно, ВЧ-интервал является *полосой интегрирования* (ПИ), откуда и вытекает название *интегрирующей RC-цепи*. Ширина полосы пропускания цепи, определяемая по уровню  $0,707A_{\text{max}}$ , равна  $\Delta\omega_{\text{пр}} = 1 \text{ с}^{-1}$  и совпадает с шириной спектра входного сигнала, поэтому он практически без искажения проходит на выход. Время запаздывания проходящего сигнала оцениваем по наклону ФЧХ в зоне малых  $\omega$ :

$$t_3 = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta\omega} \approx \frac{\frac{\pi}{6}}{0,5} \approx 1 \text{ с}.$$

Поскольку  $AЧХ(0) = 1$ , то *площадь выходного сигнала равна площади входного*, т. е.  $S_{\text{вых}} = S_{\text{вх}}$ . Так как  $AЧХ(\infty) = 0$ , то *выходной сигнал должен быть непрерывным*. Таким образом, *главный вывод*:

$$u_{\text{вых}}(t) \approx u_{\text{вх}}(t - t_3) = u_{\text{вх}}(t - 1). \quad (10.42)$$

3. Используя операторный метод, точно рассчитаем  $u_{\text{вых}}(t)$  и оценим корректность сделанного предварительного вывода (10.42).

Согласно (10.41), изображение входного импульса

$$U_{\text{вх}}(s) = \frac{20}{s^2} (1 - 2e^{-6s} + e^{-12s}), \quad (10.43)$$

следовательно, изображение выходного сигнала

$$\begin{aligned} U_{\text{вых}}(s) &= H(s)U_{\text{вх}}(s) = \frac{20}{s^2(s+1)} (1 - 2e^{-6s} + e^{-12s}) = \\ &= \left( \frac{20}{s^2} - \frac{20}{s} + \frac{20}{s+1} \right) (1 - 2e^{-6s} + e^{-12s}). \end{aligned}$$

Оригинал реакции цепи

$$u_{\text{вых}}(t) = [20t - 20 + 20e^{-t}] \delta_1(t) - 2[20(t - 6) - 20 + 20e^{-(t-6)}] \delta_1(t - 6) + [20(t - 12) - 20 + 20e^{-(t-12)}] \delta_1(t - 12),$$

как видим, состоит из трех смещенных во времени частей подобной формы. В каждой части *первые два слагаемых* — *вынужденная*, а последнее слагаемое — *свободная составляющая* от действия соответствующих частей входного сигнала (10.43).

На рисунке 10.19 пунктиром показана сумма вынужденных составляющих:

1 — равная  $20t - 20$  при  $0 < t < 6$ ;

2 — равная  $20t - 20 - 2[20(t - 6) - 20] = -20t + 260$  при  $6 < t < 12$ ;

3 — равная 0 при  $12 < t$ .

Добавление свободных составляющих

1а — равной  $20e^{-t} \delta_1(t)$ ;

2а — равной  $-40e^{-(t-6)} \delta_1(t - 6)$ ;

3а — равной  $20e^{-(t-12)} \delta_1(t - 12)$

дает график  $u_{\text{вых}}(t)$ .

На рисунке 10.19 показан также график  $u_{\text{вх}}(t)$ . Из сравнения графиков воздействия и реакции следует, что *вывод* (10.42) вполне *корректен*.

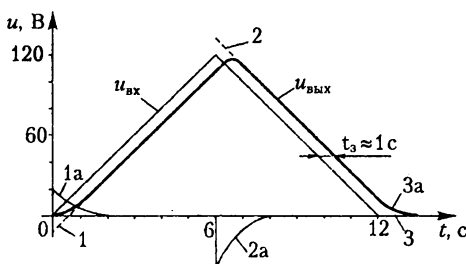


Рис. 10.19



## ЛИТЕРАТУРА

1. Основы теоретической электротехники / Ю. А. Бычков, В. М. Золотницкий, Э. П. Чернышев, А. Н. Белянин. — СПб. : Лань, 2009. — 592 с.
2. Сборник задач по основам теоретической электротехники / Ю. А. Бычков, В. М. Золотницкий, Э. П. Чернышев [и др.]. — СПб. : Лань, 2011. — 400 с.
3. Справочник по основам теоретической электротехники / под ред. Ю. А. Бычкова, В. М. Золотницкого, Е. Б. Соловьевой, Э. П. Чернышева. — СПб. : Лань, 2012. — 368 с.
4. *Демирчян, К. С.* Теоретические основы электротехники : в 2-х т. / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин. — СПб. : Питер, 2009. — 944 с.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	6
<b>Глава 1. Основные понятия и законы теории цепей .....</b>	<b>7</b>
1.1. Ток, напряжение, энергия и мощность в цепи .....	7
1.1.1. Ток в электрической цепи .....	7
1.1.2. Напряжение .....	8
1.1.3. Согласованная полярность .....	9
1.1.4. Энергия и мощность .....	10
1.2. Резистивный элемент и его характеристики .....	11
1.2.1. Определение резистивного элемента .....	11
1.2.2. Вольт-амперная характеристика резистивного элемента .....	12
1.2.3. Энергетические характеристики R-элемента .....	14
1.3. Идеализированные источники электромагнитной энергии .....	14
1.3.1. Источник напряжения .....	14
1.3.2. Источник тока .....	16
1.4. Индуктивный элемент цепи и его характеристики .....	18
1.4.1. Определение индуктивного элемента цепи .....	18
1.4.2. Вольт-амперная характеристика L-элемента .....	19
1.4.3. Энергетические характеристики L-элемента .....	20
1.4.4. Принцип (закон) непрерывности потокосцепления L-элемента .....	21
1.5. Емкостной элемент цепи и его характеристики ..	23
1.5.1. Определение C-элемента цепи .....	23
1.5.2. Вольт-амперная характеристика C-элемента .....	23

1.5.3. Энергетические характеристики C-элемента .....	24
1.5.4. Принцип (закон) непрерывности заряда C-элемента .....	26
1.6. Геометрия цепей .....	27
1.6.1. Основные понятия геометрии цепей .....	27
1.6.2. Основные понятия топологии цепей .....	29
1.7. Законы Кирхгофа .....	31
1.7.1. Закон токов Кирхгофа .....	31
1.7.2. Число независимых уравнений ЗТК .....	32
1.7.3. Закон напряжений Кирхгофа .....	33
1.7.4. Число независимых уравнений ЗНК .....	34
1.8. Типовой пример .....	35
<b>Глава 2. Анализ резистивных цепей .....</b>	<b>38</b>
2.1. Эквивалентные преобразования структуры цепи .....	38
2.1.1. Эквивалентные преобразования источников .....	38
2.1.2. Теорема замещения .....	40
2.2. Анализ резистивных цепей сложной структуры .....	41
2.2.1. Метод наложения .....	41
2.2.2. Метод узловых напряжений .....	41
2.2.3. Метод контурных токов .....	45
2.3. Теоремы об эквивалентных источниках .....	48
2.4. Типовые примеры .....	51
<b>Глава 3. Анализ переходных процессов в линейных цепях во временной области при постоянных воздействиях .....</b>	<b>56</b>
3.1. Дифференциальные уравнения и свойства линейности динамических цепей ....	56
3.1.1. Уравнения линейных цепей .....	56
3.1.2. Первое свойство линейности уравнений цепи — принцип пропорциональности (однородности) .....	57
3.1.3. Второе свойство линейности — принцип дифференцируемости (стационарности) ..	58
3.1.4. Третье свойство линейности — принцип наложения (суперпозиции, аддитивности) ..	59
3.2. Общая характеристика классического метода анализа переходных процессов во временной области .....	60
3.2.1. Понятие о коммутации и переходных процессах .....	60
3.2.2. Общая характеристика свободной составляющей решения уравнений цепи и свободных режимов в цепи .....	61

3.2.3. Вынужденная составляющая . . . . .	62
3.2.4. Законы коммутации, начальные условия и порядок цепи . . . . .	63
3.3. Анализ переходных процессов в разветвленных цепях первого порядка . . . . .	65
3.3.1. Расчет свободной составляющей . . . . .	65
3.3.2. Расчет вынужденного (установившегося) режима . . . . .	66
3.3.3. Расчет независимых начальных условий . . . . .	67
3.3.4. Расчет зависимых начальных условий . . . . .	67
3.3.5. Определение постоянной интегрирования, запись решения и построение его графика . . . . .	67
3.4. Анализ переходных процессов в цепях высокого порядка по уравнениям состояния . . . . .	69
3.4.1. Общая характеристика уравнений состояния . . . . .	69
3.4.2. Методика составления уравнений состояний . . . . .	69
3.4.3. Аналитическое решение уравнений состояния . . . . .	71
3.5. Численный расчет переходных процессов . . . . .	74
3.5.1. Понятие о численном решении уравнений состояния . . . . .	74
3.5.2. Численный расчет переходных процессов по дискретным резистивным схемам замещения . . . . .	75
3.6. Переходные процессы в простых $RC$ - и $RL$ -цепях . . . . .	76
3.6.1. Свободный режим в $RC$ -цепи . . . . .	76
3.6.2. Подключение последовательной $RC$ -цепи к источнику постоянного напряжения . . . . .	78
3.6.3. Свободный режим в $RL$ -цепи . . . . .	80
3.6.4. Подключение последовательной $RL$ -цепи к источнику постоянного напряжения . . . . .	81
3.7. Переходные процессы в последовательной $RLC$ -цепи . . . . .	83
3.7.1. Уравнения последовательного $RLC$ -контура . . . . .	83
3.7.2. Общая характеристика свободных режимов и частот собственных колебаний в цепи . . . . .	86
3.7.3. Расчет вынужденной составляющей и начальных условий . . . . .	89
3.7.4. Подключение идеальной $LC$ -цепи к источнику постоянного напряжения . . . . .	89



3.7.5. Свободный режим в идеальном $LC$ -контуре .....	90
3.7.6. Подключение последовательной $RLC$ -цепи к источнику (случай комплексных собственных частот) .....	91
3.7.7. Свободный режим в $RLC$ -контуре (случай комплексных корней ХП) .....	92
3.7.8. Подключение последовательного $RLC$ -контура к источнику (случай простых вещественных корней ХП) .....	93
3.7.9. Свободный режим в последовательной $RLC$ -цепи (случай простых вещественных корней ХП) .....	94
3.7.10. Подключение последовательной $RLC$ -цепи к источнику (случай кратных собственных частот) .....	95
3.8. Типовой пример .....	96

#### **Глава 4. Применение обобщенных функций для анализа переходных процессов при воздействии сигналов произвольной формы .....**

<b>4.1. Единичная ступенчатая функция .....</b>	<b>98</b>
4.1.1. Определение .....	98
4.1.2. Применение единичной ступенчатой функции .....	99
<b>4.2. Единичная импульсная функция (дельта-функция) .....</b>	<b>100</b>
4.2.1. Определение .....	100
4.2.2. Свойства дельта-функций .....	102
4.2.3. Применение дельта-функций .....	103
4.2.4. Особые случаи коммутации .....	104
<b>4.3. Переходная и импульсная характеристики цепи .....</b>	<b>107</b>
4.3.1. Переходная характеристика .....	107
4.3.2. Импульсная характеристика .....	108
<b>4.4. Определение реакции при воздействии произвольной формы .....</b>	<b>109</b>
4.4.1. Интеграл свертки (интеграл наложения, выраженный через импульсную характеристику цепи) .....	109
4.4.2. Интеграл Дюамеля (интеграл наложения, выраженный через переходную характеристику цепи) .....	111
4.4.3. Семейства стандартных воздействий и соответствующих характеристик цепи ..	112

4.4.4. Определение реакции при воздействии кусочно-линейной формы .....	114
4.5. Типовой пример .....	116
<b>Глава 5. Анализ линейных цепей в установившемся синусоидальном режиме .....</b>	<b>119</b>
5.1. Основные понятия синусоидальных напряжений и токов .....	119
5.1.1. Основные определения .....	119
5.1.2. Среднее и действующее значения синусоидальных токов и напряжений ...	121
5.1.3. Задача анализа установившегося синусоидального режима .....	122
5.2. Метод комплексных амплитуд .....	124
5.2.1. Представление синусоидальных функций через экспоненты с мнимым аргументом .....	124
5.2.2. Законы Кирхгофа в комплексной форме записи .....	128
5.2.3. Элементы электрической цепи в установившемся синусоидальном режиме .....	130
5.2.4. Комплексное сопротивление произвольного двухполюсника. Закон Ома в комплексной форме .....	136
5.3. Анализ простых цепей в установившемся синусоидальном режиме. Комплексная схема замещения .....	138
5.3.1. Установившийся синусоидальный режим в последовательной $RLC$ -цепи ....	138
5.3.2. Установившийся синусоидальный режим в параллельной $RLC$ -цепи .....	140
5.3.3. О расчете установившегося синусоидаль- ного режима в разветвленных $RLC$ -цепях	141
5.4. Мощность в установившемся синусоидальном режиме .....	143
5.4.1. Мгновенная, активная, реактивная и полная мощности пассивного двухполюсника .....	143
5.4.2. Коэффициент мощности и его технико- экономическое значение .....	145
5.4.3. Комплексная форма записи мощности ...	146
5.4.4. Условие передачи максимума активной мощности в нагрузку .....	147
5.5. Резонансные явления в электрических цепях. Частотные характеристики .....	148

5.5.1. Резонанс в последовательном <i>RLC</i> -контуре	148
5.5.2. Частотные характеристики последовательного <i>RLC</i> -контура	150
5.5.3. Нормировка частотных характеристик	152
5.5.4. Комплексные функции и частотные характеристики	153
5.6. Типовой пример	155
<b>Глава 6. Трехфазные цепи</b>	<b>158</b>
6.1. Основные понятия трехфазных цепей	158
6.1.1. Трехфазная система напряжений, трехфазный генератор	158
6.1.2. Соотношение между фазными и линейными напряжениями симметричного трехфазного генератора	160
6.1.3. Трехфазная цепь и основные схемы соединения	162
6.2. Расчет трехфазных цепей	164
6.2.1. Расчет трехфазной цепи при соединении нагрузки звездой	164
6.2.2. Расчет трехфазной цепи при соединении нагрузки треугольником	167
6.3. Мощность трехфазной цепи	169
6.4. Типовой пример	170
<b>Глава 7. Цепи с взаимной индукцией</b>	<b>172</b>
7.1. Основные понятия и определения	172
7.1.1. Явление взаимной индукции. Взаимная индуктивность и индуктивность рассеяния	172
7.1.2. Коэффициент связи, согласное и встречное включения индуктивно связанных элементов	175
7.2. Расчет цепей с взаимной индукцией	178
7.2.1. Последовательное соединение индуктивно связанных катушек	178
7.2.2. Параллельное соединение индуктивно связанных катушек	179
7.2.3. Расчет разветвленных цепей с взаимной индукцией	181
7.2.4. Исключение индуктивной связи	182
7.3. Трансформатор в линейном режиме	184
7.3.1. Основные соотношения	184
7.3.2. Совершенный трансформатор без потерь	185
7.3.3. Идеальный трансформатор	186
7.4. Типовой пример	187

**Глава 8. Применение преобразования Лапласа**

<b>для анализа переходных процессов</b> <b>в цепях . . . . .</b>	<b>190</b>
8.1. Связь формы сигналов с полюсами их изображений по Лапласу . . . . .	190
8.1.1. Общая характеристика преобразуемых по Лапласу сигналов . . . .	190
8.1.2. Применение теоремы разложения для отыскания оригиналов . . . . .	191
8.1.3. Свойства и теоремы преобразования Лапласа . . . . .	195
8.1.4. Связь формы оригинала с полюсами изображения (таблица соответствия оригиналов и изображений) . . . . .	196
8.2. Операторный метод расчета переходных процессов . . . . .	199
8.2.1. Законы Кирхгофа в операторной форме . .	199
8.2.2. Операторная схема замещения R-элемента . . . . .	200
8.2.3. Операторная схема замещения L-элемента . . . . .	200
8.2.4. Операторная схема замещения C-элемента . . . . .	201
8.2.5. Расчет переходных процессов в цепях операторным методом . . . . .	203
8.3. Использование теоремы запаздывания для описания изображений импульсных сигналов . .	205
8.3.1. Изображение периодических сигналов . .	205
8.3.2. Получение изображений путем описания сигнала суммой простейших составляющих . . . . .	205
8.3.3. Определение изображений сигналов кусочно-линейной формы методом двойного дифференцирования . . . . .	206
8.4. Передаточная функция цепи и ее связь с дифференциальным уравнением, импульсной, переходной и частотными характеристиками цепи . . . . .	207
8.4.1. Изображение интеграла наложения, выраженного через импульсную характеристику цепи . . . . .	207
8.4.2. Передаточная функция цепи и ее свойства . . . . .	208
8.4.3. Связь собственных частот с нулями и полюсами входного сопротивления цепи . . . . .	210

8.4.4. Матрицы передаточных функций и импульсных характеристик цепи (использование преобразования Лапласа для решения уравнений состояния) . . . . .	211
8.5. Типовой пример . . . . .	212
<b>Глава 9. Анализ установившихся периодических режимов в цепях . . . . .</b>	<b>216</b>
9.1. Периодические сигналы и их спектры . . . . .	216
9.1.1. Периодические сигналы и условия Дирихле . . . . .	216
9.1.2. Тригонометрические формы рядов Фурье . . . . .	217
9.1.3. Ряд Фурье в комплексной форме . . . . .	219
9.1.4. Дискретные спектры периодических сигналов . . . . .	220
9.1.5. Использование преобразования Лапласа для отыскания коэффициентов РФ . . . . .	222
9.2. Мощность и действующие значения переменных в установившемся периодическом режиме . . . . .	224
9.2.1. Мощность в УПР . . . . .	224
9.2.2. Действующее значение в УПР . . . . .	226
9.3. Анализ установившихся периодических режимов в цепи . . . . .	227
9.3.1. Приближенный расчет УПР с использованием РФ . . . . .	227
9.3.2. Точный расчет реакции в УПР (РФ в «замкнутой форме») . . . . .	228
9.4. Типовой пример . . . . .	231
<b>Глава 10. Спектральный метод анализа цепей . . . . .</b>	<b>237</b>
10.1. Аperiodические сигналы и их спектры . . . . .	237
10.1.1. Переход от рядов к интегралу Фурье и от дискретных спектров к сплошным . . . . .	237
10.1.2. Одностороннее преобразование Фурье как частный случай преобразования Лапласа . . . . .	239
10.1.3. Спектральные характеристики аperiodического сигнала . . . . .	240
10.1.4. Связь спектральных и частотных характеристик . . . . .	242
10.1.5. Связь спектра одиночного импульса со спектром периодического сигнала той же формы . . . . .	243
10.2. Спектры некоторых абсолютно интегрируемых сигналов . . . . .	244
10.2.1. Спектр импульса прямоугольной формы . . . . .	244

10.2.2. Спектр импульса треугольной формы . .	246
10.3. Ширина спектра и ее связь с длительностью и крутизной сигнала . . . . .	248
10.3.1. Формула Релея и критерии ширины спектра . . . . .	248
10.3.2. Связь ширины спектра с длительностью сигнала . . . . .	250
10.3.3. Понятие о связи ширины спектра с крутизной сигнала . . . . .	252
10.4. Приближенные методы отыскания сигнала по спектру . . . . .	253
10.4.1. Приближенный расчет сигнала по его амплитудному и фазовому спектрам . . .	253
10.4.2. Связь сигнала с его вещественным и мнимым спектрами . . . . .	254
10.4.3. Использование преобразования Лапласа при отыскании сигнала по его вещественному или мнимому спектрам .	256
10.4.4. Невозможность реализации идеального фильтра нижних частот (ФНЧ) . . . . .	256
10.5. Спектральный метод анализа переходных процессов в цепях . . . . .	258
10.5.1. Основные положения расчета и оценки переходных процессов в цепях спектральным методом . . . . .	258
10.5.2. Характеристики идеальных неискажающих, дифференцирующих и интегрирующих цепей . . . . .	260
10.5.3. Характеристики реальной дифференцирующей $RC$ -цепи . . . . .	262
10.5.4. Характеристики реальной интегрирующей $RC$ -цепи . . . . .	265
10.6. Спектры единичной ступенчатой функции и амплитудно-модулированных сигналов . . . . .	269
10.6.1. Спектр $\delta_1(t)$ . Понятие об особых спектрах . . . . .	269
10.6.2. Спектры амплитудно-модулированных сигналов (связь спектра радиоимпульса со спектром видеоимпульса) . . . . .	270
10.7. Типовой пример . . . . .	272
Литература . . . . .	277

*Юрий Александрович БЫЧКОВ  
Владимир Михайлович ЗОЛОТНИЦКИЙ  
Елена Борисовна СОЛОВЬЕВА  
Эдуард Павлович ЧЕРНЫШЕВ*

## **ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРЕТИЧЕСКУЮ ЭЛЕКТРОТЕХНИКУ**

**Курс подготовки бакалавров**

*Учебное пособие*

Зав. редакцией  
инженерно-технической литературы *Е. В. Баженова*  
Корректор *Т. С. Спирина*  
Верстка *С. Ю. Малахов*  
Подготовка иллюстраций *А. П. Маркова*  
Выпускающие *Н. А. Крылова, С. Ю. Гаганов*

ЛР № 065466 от 21.10.97  
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10  
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**  
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com  
196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, д. 1, лит. А.  
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72.  
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

### **ГДЕ КУПИТЬ**

#### **ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:**

*Для того, чтобы заказать необходимые Вам книги, достаточно обратиться  
в любую из торговых компаний Издательского Дома «ЛАНЬ»:*

**по России и зарубежью. «ЛАНЬ-ТРЕЙД».**  
192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13  
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82; тел./факс: (812) 412-54-93  
e-mail: trade@lanbook.ru; ICQ: 446-869-967; www.lanpbl.spb.ru/price.htm  
**в Москве и в Московской области. «ЛАНЬ-ПРЕСС».**  
109263, Москва, 7-я ул. Текстильщиков, д. 6/19  
тел.: (499) 178-65-85; e-mail: lanpress@lanbook.ru  
**в Краснодаре и в Краснодарском крае. «ЛАНЬ-ЮГ».**  
350901, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1  
тел.: (861) 274-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

#### **ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:**

*интернет-магазин*  
**Издательство «Лань»:** <http://www.lanbook.com>  
*магазин электронных книг*  
**Global F5:** <http://globalf5.com/>

Подписано в печать 06.10.16.  
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108<sup>1/32</sup>.  
Печать офсетная. Усл. п. л. 15,12. Тираж 200 экз.

Заказ № 289-16.

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленного оригинал-макета.  
в ПАО «Т8 Издательские Технологии».  
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.



Мы будем благодарны Вам  
за пожелания по издаваемой нами литературе,  
а также за предложения по изданию книг  
новых авторов или переизданию  
уже существующих трудов.

Мы заинтересованы в сотрудничестве  
с высшими учебными заведениями  
и открыты для Ваших предложений  
по улучшению нашего взаимодействия.

Теперь Вы можете звонить нам бесплатно  
из любых городов России по телефону

**8-800-700-40-71**

Дополнительную информацию  
и ответы на вопросы Вы также можете получить,  
обратившись по электронной почте:

**market@lanbook.ru**