OSTBAYERISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE REGENSBURG

Formelsammlung Felder, Wellen und Leitungen

Wintersemster 21/22

Name:	Ayham Alhalaibi
Matrikelnummer:	MATNR
Letzte Änderung:	4. April 2022
Lizenz:	GPLv3

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 mathematische

Divergenz/Rotation/Gradient

div: macht aus einem Vektor ein Skalar.
rot: bildet ein Vektor auf Vektorfeld ab.
grad: bildet ein Skalar-/Gradientenfeld in ein Vektorfeld ab. Zeigt Richtung stärkster Zunahme des Feldes.

$$\operatorname{div}\vec{G} = \nabla\cdot\vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$$
$$= 0 \quad \Rightarrow \text{Volumen}$$
$$> 0 \quad \Rightarrow \text{Quelle}$$
$$< 0 \quad \Rightarrow \text{Senke}$$

$$\operatorname{rot}\vec{G} = \nabla\times\vec{G} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \\ \frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \\ \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} G = \nabla\cdot G = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Nabla Operator

$$\nabla = \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}\right)$$

Feldänderung bei Bewegung

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial G}{\partial z}\Delta z$$
$$= dG = \operatorname{grad} G\cdot d\vec{s}$$

1.2 Randbedingung

Dirichlet-RB	Funktion nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an (Bsp.: $\rho_r = 5V$)
Neumann-RB	Die Normalableitung der Fkt. nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an

1.3 Begriffe

	Begriff	Beschreibung
ρ	Raumladungsdichte	

1.4 Kartesische Koordinaten

Einheitsvektoren: $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$
Rechtssystem: $\vec{e_x}\times\vec{e_y} = \vec{e_z}$
Linienelemente: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$
Nabla Operator: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}$
Gradient: $\operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e_z}$
Divergenz: $\operatorname{div}\vec{D} \equiv \nabla\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$
Rotation: $\operatorname{rot}\vec{E} \equiv \nabla\times\vec{E} =$ $\left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right]\vec{e_x} + \left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right]\vec{e_y} + \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right]\vec{e_z}$

Laplace Operator: $\Delta = \frac{\partial^2\ldots}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\ldots}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\ldots}{\partial z^2}$

$$\Delta\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \Delta E_x\vec{e_x} + \Delta E_y\vec{e_y} + \Delta E_z\vec{e_z} =$$
$$= \left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right]\vec{e_x} + \left[\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right]\vec{e_y}$$
$$+ \left[\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right]\vec{e_z}$$

1.5 Zylinderkoordinaten

Variablen: r, α, z
Einheitsvektoren: $\vec{e_r}, \vec{e_\alpha}, \vec{e_z}$
Rechtssystem: $\vec{e_r}\times\vec{e_\alpha} = \vec{e_z}$
Linienelemente: $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\alpha^2 + dz^2}$
Volumenelemente: $dv = r dr d\alpha dz$
Nabla Operator: $\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\vec{e_\alpha} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}$
Gradient: $\operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\vec{e_\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e_z}$
Divergenz: $\operatorname{div}\vec{D} \equiv \nabla\vec{D} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\vec{D}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\vec{D}_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial\vec{D}_z}{\partial z}$
Rotation: $\operatorname{rot}\vec{E} \equiv \nabla\times\vec{E} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\alpha} - \frac{\partial E_\alpha}{\partial z}\right]\vec{e_r} + \left[\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}\right]\vec{e_\alpha} + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\alpha)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\alpha}\right]\vec{e_z}$
Laplace Operator: $\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial\ldots}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\ldots}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\ldots}{\partial z^2}$

$$\vec{E} = \left[\Delta E_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial E_\alpha}{\partial\alpha} - \frac{E_r}{r^2}\right]\vec{e_r}$$
$$+ \left[\Delta E_\alpha + \frac{2}{r^2}\frac{\partial E_r}{\partial\alpha} - \frac{E_\alpha}{r^2}\right]\vec{e_\alpha} + [\Delta E_z]\,\vec{e_z}$$

1.6 Kugelkoordinaten

Variablen: r, ϑ, α
Einheitsvektoren: $\vec{e_r}, \vec{e_\vartheta}, \vec{e_\alpha}$
Rechtssystem: $\vec{e_r}\times\vec{e_\vartheta} = \vec{e_\alpha}$
Linienelement: $ds = \sqrt{dr^2 + r^2\sin^2\vartheta d\alpha^2 + r^2 d\vartheta^2}$
Volumenelement: $dv = r^2\sin\vartheta dr d\vartheta d\alpha$
Nabla Operator: $\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\vec{e_\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\vec{e_\alpha}$
Gradient: $\operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\vec{e_\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\vec{e_\alpha}$
Divergenz: $\operatorname{div}\vec{D} \equiv \nabla\vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta\cdot D_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial D_\alpha}{\partial\alpha}$
Rotation:

$$\operatorname{rot}\vec{E} \equiv \nabla\times\vec{E} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial(\sin\vartheta\cdot E_\alpha)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial\alpha}\right]\vec{e_r}$$
$$+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial E_r}{\partial\alpha} - \frac{\partial rE_\alpha}{\partial r}\right]\vec{e_\vartheta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rE_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial\vartheta}\right]\vec{e_\alpha}$$

Laplace Operator: $\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\frac{\partial\ldots}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial\ldots}{\partial\vartheta}\right)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\ldots}{\partial\alpha^2}$ Laplace Operator in Kugelkoordinaten, angewandt auf einen Vektor:

$$\Delta\vec{E} = \left[\Delta E_r - \frac{2}{r^2}E_r - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta\cdot E_\vartheta)}{\partial\vartheta} - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial E_\alpha}{\partial\alpha}\right]\vec{e_r}$$
$$+ \left[\Delta E_\vartheta - \frac{E_\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial E_r}{\partial\vartheta} - \frac{2\cot\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial E_\alpha}{\partial\alpha}\right]\vec{e_\vartheta}$$
$$+ \left[\Delta E_\alpha - \frac{E_\alpha}{r^2\sin^2\vartheta} + \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial E_r}{\partial\alpha} + \frac{2\cot\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial E_\vartheta}{\partial\alpha}\right]\vec{e_\alpha}$$

1.7 Vergleich/Umrechnung

Kart.	Zyl.	Kug.
x	$r\cos\alpha$	$r\sin\vartheta\cos\alpha$
y	$r\sin\alpha$	$r\sin\vartheta\sin\alpha$
z	z	$r\cos\vartheta$
$\sqrt{x^2+y^2}$	r	
$\arctan\frac{y}{x}$	α	
z	z	
$dx\cos\alpha + dy\sin\alpha$	dr	
$dy\cos\alpha - dx\sin\alpha$	$rd\alpha$	
dz	dz	
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$		r
$\arctan\frac{y}{x}$		α
$\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$		ϑ
$dx\sin\vartheta\cos\alpha\ +$ $dy\sin\vartheta\sin\alpha\ +$ $dz\cos\vartheta$		dr
$dy\cos\alpha - dx\sin\alpha$		$r\sin\vartheta d\alpha$
$dx\cos\vartheta\cos\alpha\ +$ $dy\cos\vartheta\sin\alpha\ -$ $dz\sin\vartheta$		$rd\vartheta$

2 Maxwell'schen Gleichungen

2.1 Intergralform I, II

Gauß'sches Gesetz
Induktionsgesetz
Durchflutungsgesetz
Quellenfreiheit B-Feld
Zusammenhang

$$\oiint_{A_{\text{Hülle}}} \vec{D}d\vec{A} = Q_{\texttt{eing.}}$$
$$\oint_{\texttt{Rand}} \vec{E}d\vec{s} = -\frac{d\Phi_{\texttt{eing.}}}{dt}$$
$$\oint_{\texttt{Rand}} \vec{H}d\vec{s} = I_{\texttt{eing.}} + I_{\texttt{versch.}}$$
$$\oiint_{A_{\text{Hülle}}} \vec{B}d\vec{A} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon\cdot\vec{E} \qquad \vec{B} = \mu\cdot\vec{H}$$

Bei isotropen Stoffen sind ε u. μ Skalare:

$$\varepsilon = \varepsilon_0\cdot\varepsilon_r \qquad \mu = \mu_0\cdot\mu_r$$

2.2 Differentialform I, II

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho$$
$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$
$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$

2.3 stationäre Felder

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho \qquad \vec{D} = \varepsilon\cdot\vec{E}$$
$$\nabla\times\vec{E} = 0$$
$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} \qquad \vec{B} = \mu\cdot\vec{H}$$
$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$
$$\vec{J} = \kappa\vec{E}$$

3 Felder

3.1 Elektrostatik

ist ein wirbelfreies Feld. Elek. Ladungen sind Quellen des Feldes.

$$\operatorname{div}\vec{D} = \nabla\cdot\vec{D} = \rho \qquad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$
$$\operatorname{rot}\vec{E} = \nabla\times\vec{E} = 0 \qquad = \operatorname{rot}\operatorname{grad} E$$
$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$

3.1.1 Potetialgleichung

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$\Rightarrow$ **Poisson-Gleichung** mit $\rho = 0 \Rightarrow$ **Laplace-Gleichung**

$$\Delta\varphi + \underbrace{\frac{\operatorname{grad}\varepsilon\cdot\operatorname{grad}\varphi}{\varepsilon}}_{=0,\ wenn\ homogen} = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon}$$
$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon}$$