UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

ENGENHARIA - GRADUAÇÃO

JULIA GABRIELA CUNHA PAULINO

JULIA GUIMARAES DE JESUS

SÉRIES

BRASÍLIA-DF

15/07/2024

AGRADECIMENTOS

Expressamos nossa sincera gratidão ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de auxílio financeiro e apoio concedidos durante a realização da nossa pesquisa sobre Séries, por meio do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME). Como bolsistas do CNPq, obtivemos oportunidades de aprofundamento nos nossos conhecimentos e exploração dos desafios e as possibilidades do aprendizado de séries da matéria de Cálculo 2, ampliando o nosso entendimento sobre cálculo. Os recursos fornecidos foram essenciais para o financiamento de despesas relacionadas à pesquisa. Essa assistência financeira possibilitou um ambiente propício para o crescimento acadêmico. Além disso, agradecemos também pela orientação e supervisão de qualidade proporcionadas pelo orientador Ary Medino. Seu suporte foi fundamental para o desenvolvimento do projeto de pesquisa, enriquecendo a experiência acadêmica e incentivando a paixão por pesquisas. Vale ressaltar que o suporte do CNPq não apenas facilitou a pesquisa, mas também contribuiu para o avanço científico do país como um todo. O investimento em projetos de pesquisa, como o nosso, fortalece a capacidade de inovação do Brasil e promove o desenvolvimento tecnológico e socioeconômico. Temos plena consciência de que sem o apoio fornecido por vocês, seria extremamente difícil realizar esse estudo de forma tão abrangente e profunda. Espero que o CNPq continue apoiando pesquisadores e contribuindo para o progresso científico e tecnológico do país. Sentindo-se orgulhosos pelo trabalho que realizam e pela contribuição inestimável que oferecem à comunidade científica.

JULIA GABRIELA CUNHA PAULINO

JULIA GUIMARAES DE JESUS

SÉRIES

Trabalho de Iniciação Científica realizado com o objetivo de conclusão de pesquisa, como requisito para conclusão da matéria de Seminário Tópicos Especiais pela Universidade de Brasília - UNB.

Pesquisa subsidiada pelo PICME (Programa de Iniciação Científica e Mestrado) em parceria com CNPq.

Orientador: Ary Medino

Brasília

2024

SUMÁRIO

1. **INTRODUÇÃO** 05

2. **SEQUÊNCIAS** 05

3. **SÉRIES** 06

4. **TESTES** 07

5. **SÉRIES DE TAYLOR E DE MACLAURIN** 08

6. **APLICAÇÕES DAS SÉRIES DE POTÊNCIAS** 09

7. **SÉRIES DE FOURIER** 10

8. **CONCLUSÃO** 11

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 12

1 INTRODUÇÃO

Sequências matemáticas são listas ordenadas de números que seguem um padrão específico. Cada número na sequência é chamado de termo. Esses padrões podem ser simples, como uma progressão aritmética, onde cada termo é obtido adicionando uma constante ao termo anterior, ou mais complexos, como uma sequência de Fibonacci, onde cada termo é a soma dos dois termos anteriores. As sequências matemáticas são amplamente estudadas em matemática pura e aplicada, pois têm diversas aplicações em áreas como estatística, análise numérica, teoria dos números, entre outras. Séries matemáticas são somas de uma sequência infinita de números ou termos. Uma série é representada pela soma dos termos de uma sequência. As séries matemáticas podem ser finitas ou infinitas. Quando a sequência tem um número finito de termos, a série é finita. Agora se a sequência tem um número infinito de termos, a série é infinita. As séries matemáticas desempenham um papel importante em diversas áreas da matemática e suas aplicações se estendem para além do campo puramente teórico, abrangendo física, estatística, economia, engenharia e muitas outras disciplinas.

Conceito de séries matemáticas é aplicado em uma ampla gama de áreas, incluindo: Física: Na física, as séries são usadas para modelar fenômenos naturais, como o movimento de partículas, o comportamento de campos elétricos e magnéticos, e a propagação de ondas. Engenharia: Em engenharia, as séries são aplicadas em análises estruturais, teoria de controle, processamento de sinais e telecomunicações, entre outras áreas, para resolver equações diferenciais e descrever sistemas dinâmicos. Economia e Finanças: Na economia e finanças, as séries são usadas para modelar séries temporais de dados, prever tendências econômicas, analisar mercados financeiros e avaliar riscos em investimentos. Computação: Em ciência da computação, as séries são aplicadas em algoritmos numéricos, métodos de otimização, análise de algoritmos e em diversos campos da inteligência artificial, como aprendizado de máquina e processamento de linguagem natural. Matemática Pura: Na matemática pura, as séries são estudadas em análise matemática, onde são exploradas propriedades de convergência e divergência, séries especiais (como séries de Fourier e séries de Taylor), e sua relação com outras áreas da matemática, como cálculo e álgebra. Essas são apenas algumas das muitas áreas onde o conceito de séries matemáticas é aplicado, destacando sua importância em diversos contextos científicos e práticos.

2 SEQUÊNCIAS

Em matemática, uma sequência é uma função definida em um conjunto contável totalmente ordenado. Seu tamanho é determinado pelo número de elementos que possui, podendo ser infinita ou finita. O comportamento dos termos de uma sequência pode ser crescente, decrescente, não crescente ou não decrescente. Além disso, as sequências podem ser recorrentes, onde cada termo é definido por uma relação com termos anteriores. Exemplos comuns incluem progressões aritméticas, progressões geométricas e a sequência de Fibonacci, esta última sendo recorrente. Na análise real, estudamos os limites das sequências de números reais.

Uma sequência oscilante é uma série de números que não se aproxima de um único limite, alternando entre valores positivos e negativos de maneira indefinida ou entre diferentes valores de forma irregular. Geralmente encontrada em matemática, em situações como séries divergentes ou sistemas dinâmicos não-lineares, essas sequências não exibem um padrão claro de convergência ou divergência, continuando a oscilar entre diferentes intervalos sem se aproximar de um valor específico.

3 SÉRIES

Séries matemáticas são somas infinitas de termos que seguem um padrão específico. Elas podem ser finitas, se tiverem um número limitado de termos, ou infinitas, se tiverem um número ilimitado de termos. Cada termo da série é geralmente calculado usando uma fórmula ou um padrão matemático. Por exemplo, a série aritmética é uma sequência de números onde cada termo é a soma do termo anterior com uma constante fixa. A série geométrica é uma sequência de números onde cada termo é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante fixa.

Tipos de séries matemáticas.

Séries de Potências: São séries em que cada termo é uma potência de uma variável, geralmente com expoentes crescentes. Elas são utilizadas na expansão de funções em séries, como a série de Taylor, que é uma representação de uma função como uma soma infinita de termos.

Séries Alternadas: São séries em que os termos alternam entre positivos e negativos. Um exemplo é a série alternada de Leibniz, utilizada para estimar o valor de certas expressões matemáticas.

Séries de Fourier: São usadas na análise de sinais e ondas periódicas. Elas representam funções periódicas como uma soma infinita de senos e cossenos.

Séries de Fibonacci: Uma série famosa em que cada termo é a soma dos dois termos anteriores. Esta série aparece em muitos contextos, incluindo biologia, teoria dos números e análise de algoritmos.

Além disso, é importante mencionar conceitos como convergência e divergência de séries, que indicam se uma série tem um valor finito quando somada ou se cresce para o infinito. A convergência de uma série é um conceito fundamental na análise matemática, com diversas técnicas para determinar se uma série converge e para calcular o valor ao qual ela converge, se aplicável.

4 TESTES

Testes são ferramentas importantes para determinar se uma série converge ou diverge. Aqui estão alguns dos testes mais comuns usados para analisar a convergência das séries matemáticas:

Teste da divergência é um dos testes mais simples e úteis para analisar a convergência ou divergência de uma série infinita. Ele afirma o seguinte: Se o limite da sequência dos termos da série não for igual a zero, então a série diverge. Em outras palavras, se os termos da série não tendem para zero à medida que a série avança, então a série não pode convergir. No entanto, é importante observar que o oposto não é necessariamente verdadeiro: se os termos da série tendem para zero, isso não garante que a série converge. O teste da divergência é frequentemente utilizado para determinar a divergência de uma série rapidamente, especialmente quando o limite dos termos da série é facilmente identificável. No entanto, ele não fornece informações sobre a convergência da série quando o limite dos termos é zero. É importante ressaltar que o teste da divergência só pode ser aplicado em séries cujos termos são não negativos. Se a série contiver termos negativos, o teste da divergência não é válido. Em tais casos, outros testes, como o teste da razão ou o teste da raiz, devem ser considerados para determinar a convergência ou divergência da série.

Teste da integral é um método poderoso para analisar a convergência de certas séries infinitas, especialmente aquelas cujos termos são não negativos e decrescentes, procedimento básico: formular a série; escolher uma função; avaliar a integral indefinida; avaliar a integral definida; analisar o resultado obtido, se a integral definida converge (ou seja, tem um valor finito), então a série original também converge, se a integral definida diverge (ou seja, é infinita), então a série original também diverge. Este teste é particularmente útil quando a série em questão não pode ser facilmente comparada com uma série conhecida ou quando outros métodos de teste, como o teste da razão ou o teste da raiz, não são aplicáveis. No entanto, ele não é útil para todas as séries e requer a habilidade de escolher uma função adequada para associar à série.

Teste da série P é um método usado para determinar a convergência ou divergência de uma série infinita da forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Onde p é um número real positivo. Aqui está como o teste funciona:

Se p>1, então a série converge.

Se $p \leq 1$, então a série diverge.

O teste da série P é bastante útil e fornece uma maneira rápida de determinar a convergência ou divergência de uma série infinita específica. No entanto, não é necessariamente aplicável a todas as séries.

Teste da comparação, permite determinar o comportamento de convergência ou divergência de uma série comparando-a com uma série conhecida cujo comportamento já foi estabelecido. Este teste é especialmente útil quando você não consegue determinar diretamente a convergência ou divergência de uma série, mas consegue encontrar uma série conhecida que se comporta de maneira semelhante. No entanto, é importante escolher a série de comparação de forma adequada, de modo que ela seja mais fácil de analisar do que a série original.

Teste da comparação no contexto dos limites é uma técnica utilizada para determinar a convergência ou divergência de uma série infinita quando não é possível realizar a comparação direta com uma série conhecida. é uma generalização do teste da comparação e é útil quando não é possível determinar diretamente se uma série converge ou diverge por comparação direta. Ele fornece uma maneira de relacionar o comportamento de uma série com outra série conhecida por meio do cálculo do limite da razão entre seus termos.

Teste da série alternada é um método utilizado para determinar a convergência de uma série infinita cujos termos alternam entre positivos e negativos. Se os termos diminuírem em magnitude e tenderem a zero, então a série converge.

Teste da Razão e Teste da Raiz, ambos são usados para séries cujos termos são não negativos. O teste da razão envolve calcular o limite da razão entre os termos sucessivos da série, enquanto o teste da raiz envolve calcular o limite da raiz enésima dos termos da série. Se esses limites forem menores do que 1, então a série converge.

5 SÉRIE DE TAYLOR E MACLAURIN

Essas séries são usadas em muitas áreas da matemática e física, incluindo análise de funções complexas, cálculo de integrais, aproximação de soluções de equações diferenciais, entre outros. Elas fornecem uma maneira eficaz de aproximar funções complicadas por meio de polinômios simples, facilitando a análise e o cálculo em muitos contextos diferentes.

A série de Taylor é uma representação de uma função matemática como uma soma infinita de termos polinomiais. Ela é usada para aproximar funções complicadas por meio de polinômios mais simples. A ideia fundamental é que, para uma função $f(x)$ suficientemente suave e para um ponto a, dentro do domínio de $f(x)$, a função pode ser aproximada localmente por um polinômio. Este polinômio é obtido considerando a função e suas derivadas em torno do ponto a. A série de Taylor de uma função $f(x)$ centrada em $x=a$ é dada por:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots$$

Essa série converge para a função f(x) em uma vizinhança de x=a, sob certas condições de regularidade da função. Quanto mais termos da série são considerados, mais precisa é a aproximação da função original.

Teoricamente, a série de Maclaurin é uma forma especializada da série de Taylor, onde o ponto de expansão é a = 0 Em outras palavras, é uma expansão de uma função em torno da origem. Para uma função f(x) suficientemente suave, a série de Maclaurin é dada por:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Essa série é especialmente útil para simplificar a representação de funções em torno da origem, facilitando a análise e o cálculo. Muitas vezes, quando estudamos funções em cálculo e análise, começamos considerando a série de Maclaurin para obter uma compreensão inicial de suas propriedades.

6 APLICAÇÕES DAS SÉRIES DE POTÊNCIAS

Séries de potências são representações de funções como somas infinitas de termos polinomiais, onde cada termo é uma função de potência de uma variável independente. Em outras palavras, uma série de potências é uma expressão matemática da forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n$$

Onde f(x) é a função representada pela série, x é a variável independente, c é o ponto central da expansão (pode ser qualquer valor real), e an são os coeficientes da série. Cada termo na série é um polinômio em x, onde n é um número inteiro não negativo. As séries de potências têm uma ampla gama de aplicações em diversas áreas da matemática, física, engenharia e outras disciplinas. Aqui estão algumas das principais aplicações:

Análise de Funções: As séries de potências são usadas para representar funções complexas como somas infinitas de termos polinomiais. Isso permite uma análise mais detalhada e uma compreensão mais profunda do comportamento das funções.

Solução de Equações Diferenciais: Muitas equações diferenciais podem ser resolvidas usando séries de potências. A técnica de substituição de séries permite transformar uma equação diferencial em uma equação algébrica para os coeficientes da série de potências, que podem então ser determinados de forma sistemática.

Física Matemática: As séries de potências são usadas extensivamente na modelagem de fenômenos físicos. Por exemplo, na mecânica quântica, muitas vezes as funções de onda são representadas como séries de potências.

Engenharia e Ciências Aplicadas: Em engenharia e ciências aplicadas, as séries de potências são usadas em uma variedade de contextos, como na análise de circuitos elétricos, na teoria de controle, na mecânica dos fluidos e em muitas outras áreas.

Probabilidade e Estatística: Em estatística, séries de potências são usadas em modelos de séries temporais e em processos estocásticos para representar padrões e tendências ao longo do tempo.

Computação Numérica: As séries de potências são usadas em algoritmos de computação numérica para calcular funções matemáticas complexas de forma eficiente e precisa.

Essas são apenas algumas das muitas aplicações das séries de potências. Sua versatilidade e capacidade de representar funções de forma aproximada ou exata as tornam uma ferramenta poderosa em uma variedade de disciplinas científicas e técnicas.

7 SÉRIES DE FOURIER

As séries de Fourier são uma maneira de representar funções periódicas como uma soma infinita de funções seno e cosseno (ou, de maneira equivalente, como uma soma infinita de exponenciais complexas). Elas são amplamente utilizadas na análise de sinais e sistemas, especialmente em problemas relacionados à análise de Fourier e processamento de sinais. A ideia fundamental por trás das séries de Fourier é que muitas funções periódicas podem ser decompostas em componentes senoidais. A série de Fourier de uma função f(x) periódica com período 2π é dada por:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

Onde a0, an e bn são os coeficientes de Fourier, que são calculados usando integrais da função f(x) multiplicada por funções seno e cosseno. As séries de Fourier têm uma ampla gama de aplicações, incluindo:

Análise de Sinais: Usadas para decompor sinais periódicos em suas frequências componentes, facilitando a análise e a síntese de sinais.

Processamento de Sinais: Aplicadas em comunicações, processamento de imagens, processamento de áudio e em muitas outras áreas para filtragem, modulação e demodulação de sinais.

Teoria das Ondas: Utilizadas na descrição de fenômenos ondulatórios, como ondas sonoras, ondas eletromagnéticas e ondas mecânicas.

Matemática Aplicada: Aplicadas em problemas de valor de contorno, equações diferenciais parciais e em muitos outros problemas matemáticos relacionados à física, engenharia e ciências aplicadas.

8 CONCLUSÃO

Ao concluir este trabalho, podemos perceber que as séries matemáticas desempenham um papel crucial em diversas áreas do conhecimento, oferecendo não apenas um conjunto poderoso de ferramentas analíticas, mas também uma linguagem unificada para descrever uma variedade de fenômenos naturais e sistemas complexos.

Exploramos a vastidão das séries matemáticas, desde séries aritméticas simples até séries de potências e séries de Fourier, cada uma com suas próprias propriedades e aplicações únicas. Através de testes de convergência e métodos analíticos, somos capazes de determinar a convergência ou divergência de séries e avaliar sua utilidade em contextos específicos.

Esses conceitos não só são fundamentais para o avanço da matemática pura, mas também desempenham um papel essencial em campos aplicados, como física, engenharia, ciência da computação e muito mais. A série de Fourier, por exemplo, é crucial na análise de sinais e sistemas, enquanto as séries de potências são amplamente empregadas na solução de equações diferenciais e na modelagem de fenômenos físicos.

Ao compreendermos e dominarmos as séries matemáticas, capacitamo-nos a resolver uma ampla gama de problemas complexos, desde a previsão do comportamento de sistemas dinâmicos até a otimização de processos industriais. Sua aplicação prática é evidente em tecnologias modernas, como comunicações sem fio, processamento de sinais digitais, tomografia computadorizada e muito mais.

Portanto, podemos concluir que as séries matemáticas não são apenas um conjunto de conceitos abstratos, mas sim uma ferramenta essencial para a compreensão e aprimoramento do mundo ao nosso redor, impulsionando inovações e avanços em todas as disciplinas científicas e tecnológicas.

REFERÊNCIAS

STEWART, J. **Calculo Volume 2**. [s.l: s.n.].

ELON LAGES LIMA; APLICADA, P. E. **Análise real**. Rio De Janeiro (Rj): Instituto De Matematica Pura E Aplicada, 2009.

Série (matemática) – Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_(matem%C3%A1tica)>. Acesso em: 13 maio. 2024.

Séries | Cálculo integral | Matemática. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/math/integral-calculus/ic-series>. Acesso em: 13 maio. 2024.

LÍDIA, A.; SANTOS, T.; FIGUEIRA. **UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**. [s.l: s.n.]. Disponível em: <https://matematica.icen.ufpa.br/images/tccs/TCC_FACMAT_03.pdf>.

DE MESTRADO, D.; DE JANEIRO, R. **UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -PROFMAT SOBRE O USO DAS SÉRIES NA MATEMÁTICA VINÍCIUS NUNES SOUZA**. [s.l: s.n.]. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5992&id2=171053522>.

Séries. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/superior/series/series1.php>. Acesso em: 20 maio. 2024.

VALLE, M. **Cálculo III Aula 14 -Sequências e Séries**. [s.l: s.n.]. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/MA311/Aula14.pdf>. Acesso em: 20 maio. 2024.

DA, G.; MARQUES, C. **Licenciatura em ciências · USP/ Univesp**. [s.l: s.n.]. Disponível em: <https://midia.atp.usp.br/plc/plc0001/impressos/plc0001_15.pdf>. Acesso em: 12 junho. 2024.