Отчёт о работе
по вычислительной математике и численным методам

Задание:

Найти тремя нижеуказанными способами численное решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t) \qquad (1)$$

где $Q(x,t)$=0, $D = \frac{l^2}{\tau}$,

на отрезке $[0,l]$ с краевыми условиями вида

$$l\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) - u(0,t) = 1$$

$$l\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0 \qquad (2)$$

с начальными условиями вида

$$u(x,0)=\begin{cases} 1, \left|x - \frac{2l}{3}\right| < \frac{l}{10} \\ 0, \left|x - \frac{2l}{3}\right| > \frac{l}{10} \end{cases} \qquad (3)$$

с относительной точностью $\varepsilon \sim 0.01$.

Обосновать выбор параметров численного метода.

Методы решения:

1. Построить методом Фурье представление задачи в виде ряда по собственным функциям. Численно найти собственные значения и сумму ряда с заданной точностью. Определить необходимое число суммируемых членов для достижения заданной точности.

2. Построить разностную аппроксимацию задачи на стандартной равномерной по x и t сетке с учетом граничных условий. Решить соответствующую разностную задачу явным методом Эйлера. Оценить значения параметров сетки, необходимые для достижения заданной точности, используя информацию, полученную в результате выполнения первого задания.

3. Решить разностную задачу методом Кранка-Николсона, применив метод прогонки для обращения трёхдиагональной матрицы. Оценить значения численных параметров. Провести сравнение результатов расчётов, объяснить различия.

Результаты представлены в виде графиков зависимости решения $u(x, t^*)$ от координаты x при заданных значениях времени t^*=2τ и 5τ; так же $u(x^*, t)$ от времени t при заданном значении координаты x^*=$2l/3$ на заданном интервале времени $[0, 5\tau]$ для каждого из указанных методов расчёта.

1.Метод Фурье

1.1.Получение аналитического решения.

Сначала избавимся от неоднородности граничных условий, представив решение в виде $u = v + w$,где $w(x,t) = w_1(x,t) + xw_1(x,t)$,удовлетворяющее неоднородным граничным условиям. Подставим её в (2):

$\begin{cases} lw_2 - w_1 = 1 \\ w_2 = 0 \end{cases}$,откуда находим $w = -1$

Подставив $u = v + w$ в исходное уравнение и начальные условия, начально-краевую задачу на v:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (4)$$

$$v(x,0) = \begin{cases} 2, \left|x - \frac{2l}{3}\right| < \frac{l}{10} \\ 1, \left|x - \frac{2l}{3}\right| > \frac{l}{10} \end{cases} \qquad (5)$$

С однородными граничными условиями:

$$l\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) - v(0,t) = 0$$

$$l\frac{\partial v}{\partial x}(l,t) = 0 \qquad (6)$$

Найдем частное решение однородного уравнения (4) в виде:

$$v_{\text{ч}}(x,t) = X(x)T(t) \qquad (7)$$

Подставим в (4):

$$XT' = DTX''$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T\prime}{DT} = -\lambda \qquad (8)$$

Так как $\frac{X''}{X}$ зависит только от x,а $\frac{T\prime}{DT}$ –только от t.Мы получили уравнение

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad (9)$$

С граничными условиями вида

$$lX'(0) - X(0) = 0 \qquad (10)$$

$$X'(l) = 0$$

Определим знак λ,для чего домножим скалярно на X и проинтегрируем по частям:

$$\int_0^l XX''dx + \lambda\int_0^l X^2dx = XX'\,|_0^l - \int_0^l X'^2dx + \lambda\int_0^l X^2dx = -\frac{1}{l}X^2(0) - \int_0^l X'^2dx + \lambda\int_0^l X^2dx = 0$$

$$\lambda = \frac{\frac{1}{l}X^2(0) + \|X'\|^2}{\|X\|^2} > 0$$

Общее решение (9) $X = c_1 cos\sqrt{\lambda}x + c_2 sin\sqrt{\lambda}x$ подставим в граничные условия (10):

$$\begin{cases} l\sqrt{\lambda}c_2 - c_1 = 0 \\ -c_1 sin\sqrt{\lambda}l + c_2 cos\sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases}$$

$$tg\sqrt{\lambda}l = \frac{1}{\sqrt{\lambda}l}$$

Обозначим $\sqrt{\lambda}l = y$.Уравнение $tg(y) = \frac{1}{y}$ можно решить графически, рис.1:

(а из соответствующей монотонности $tg(y) - \frac{1}{y}$ на промежутках видно, что можно решить численно двоичным поиском).

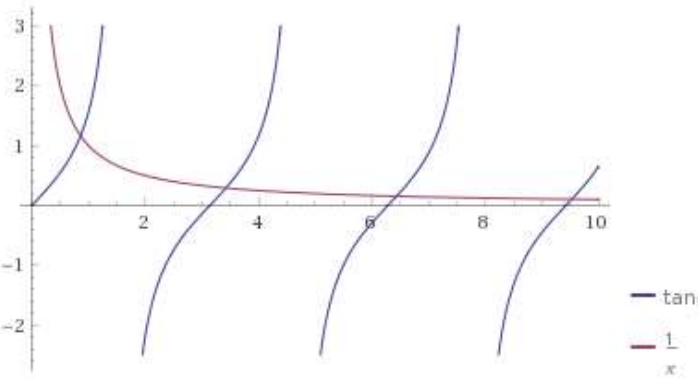


Рис.1.

Данное уравнение имеет бесконечно много решений, k-ое находится в интервале (πk,πk+$\pi/2$),k=0 ,1…

$$\sqrt{\lambda_k}l \to \pi k, \qquad \lambda_k \sim k^2 \text{ при } k \to \infty$$

Обозначим y_k=$\sqrt{\lambda_k}l$ эти решения.

$$X_k = \cos\sqrt{\lambda_k}x \cos\sqrt{\lambda_k}l + \sin\sqrt{\lambda_k}x \sin\sqrt{\lambda_k}l = cos\sqrt{\lambda_k}(x - l)$$

Найдем квадрат нормы X_k:

$$\|X_k\|^2 = \int_0^l X_k^2 dx = \int_0^l \left(\cos\sqrt{\lambda_k}(x-l)\right)^2 dx = \int_0^l \frac{1+\cos 2\sqrt{\lambda_k}x}{2} dx = \frac{l}{2} + \frac{1+\sin 2\sqrt{\lambda_k}(x-l)}{4\sqrt{\lambda_k}}\Big|_0^l$$

$$= \frac{l}{2} + \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_k}l}{4\sqrt{\lambda_k}} = \frac{l}{2} + \frac{l\sin\sqrt{\lambda_k}l\cos\sqrt{\lambda_k}l}{2\sqrt{\lambda_k}l} = \frac{l}{2}(1+\sin^2\sqrt{\lambda_k}l) = \|X_k\|^2$$

$$\|X_k\|^2 = \frac{l}{2}(1+\sin^2 y_k) \qquad (11)$$

Пусть v (x, t) - решение уравнения (4) с однородными граничными условиями. Разложим его по собственным функциям оператора Штурма-Лиувилля $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x)$$

Подставив в уравнение, для $T_k(t)$ получим:

$$T_k{}' + \lambda_k D T_k = 0$$

$$T_k = A_k e^{-D\lambda_k t}$$

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-D\lambda_k t} \cos\sqrt{\lambda_k}\,(x-l)$$

Коэффициенты A_k найдем из начального условия (5):

$$v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\sqrt{\lambda_k}\,(x-l) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) = \varphi(x)$$

$$A_k = \frac{1}{\|X_k\|^2}\int_0^l \varphi(x) X_k(x)dx$$

$$\int_0^l \varphi(x)X_k(x)dx = \int_0^{17l/30} \cos\sqrt{\lambda_k}\,(x-l)dx + \int_{23l/30}^{l} \cos\sqrt{\lambda_k}\,(x-l)dx + \int_{17l/30}^{23l/30} 2\cos\sqrt{\lambda_k}\,(x-l)dx =$$

$$= \int_0^l \cos\sqrt{\lambda_k}\,(x-l)dx + \int_{17l/30}^{23l/30} \cos\sqrt{\lambda_k}\,(x-l)dx = \frac{\sin\sqrt{\lambda_k}l}{\sqrt{\lambda_k}} + \frac{\sin\left(\frac{13}{30}\sqrt{\lambda_k}l\right) - \sin\left(\frac{7}{30}\sqrt{\lambda_k}l\right)}{\sqrt{\lambda_k}} =$$

$$= \frac{\sin\sqrt{\lambda_k}l}{\sqrt{\lambda_k}} + \frac{2\sin\left(\frac{l}{10}\sqrt{\lambda_k}\right)\cos\left(\frac{l}{3}\sqrt{\lambda_k}\right)}{\sqrt{\lambda_k}}$$

Тогда,с учетом (11):

$$A_k = \frac{2\left(sin\sqrt{\lambda_k}l + 2\,sin\left(\frac{l}{10}\sqrt{\lambda_k}\right)cos\left(\frac{l}{3}\sqrt{\lambda_k}\right)\right)}{l\sqrt{\lambda_k}(1+sin^2\sqrt{\lambda_k}l)} = \frac{2\left(\frac{cos\sqrt{\lambda_k}l}{\sqrt{\lambda_k}l} + 2\,sin\left(\frac{l}{10}\sqrt{\lambda_k}\right)cos\left(\frac{l}{3}\sqrt{\lambda_k}\right)\right)}{l\sqrt{\lambda_k}(1+sin^2\sqrt{\lambda_k}l)}$$

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l\sqrt{\lambda_k}(1+sin^2\sqrt{\lambda_k}l)}\left(\frac{cos\sqrt{\lambda_k}l}{\sqrt{\lambda_k}l} + 2\,sin\left(\frac{l}{10}\sqrt{\lambda_k}\right)cos\left(\frac{l}{3}\sqrt{\lambda_k}\right)\right)e^{-D\lambda_k t}\,cos\left(\sqrt{\lambda_k}(x-l)\right)$$

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{y_k(1+sin^2 y_k)}\left(\frac{cos\,y_k}{y_k} + 2\,sin\left(\frac{y_k}{10}\right)cos\left(\frac{y_k}{3}\right)\right)e^{-\frac{y_k{}^2}{\tau}t}\,cos\left(\frac{y_k}{l}(x-l)\right)$$

С учетом неоднородности граничных условий,

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{y_k(1+sin^2 y_k)}\left(\frac{cos\,y_k}{y_k} + 2\,sin\left(\frac{y_k}{10}\right)cos\left(\frac{y_k}{3}\right)\right)e^{-\frac{y_k{}^2}{\tau}t}\,cos\left(\frac{y_k}{l}(x-l)\right) - 1$$

1.2. Оценка необходимого числа членов ряда

Необходимая точность вычисления ряда ε ~ 0,01. С помощью оценки остатка ряда оценим число членов ряда.

Оценим количество суммирований при $x \in [0, l], t = 2\tau, t = 5\tau$, и отдельно при $x = 2l/3, t \in [0{,}5\tau]$.

1) $x \in [0, l]; t = 2\tau, t = 5\tau$

Обозначим $C_k(x) = \frac{2cos\left(\frac{y_k}{l}(x-l)\right)\left(sin\, y_k + 2\, sin\left(\frac{y_k}{10}\right) cos\left(\frac{y_k}{3}\right)\right)}{y_k(1+sin^2 y_k)}$ (множитель перед exp)

Оценим его сверху:

$$|C_k| \leq \frac{2}{y_k(1+sin^2 y_k)}\left(\frac{cos\, y_k}{y_k} + 2\, sin\left(\frac{y_k}{10}\right) cos\left(\frac{y_k}{3}\right)\right) \leq \frac{2}{y_k(1+sin^2 y_k)}\left(\frac{1}{y_k}+2\right) \leq \frac{2(1+2y_k)}{{y_k}^2} = \gamma_k$$

Последовательность γ_k убывающая, следовательно $\gamma_k \leq \gamma_0$.

Оценим y_0:$tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 < \frac{4}{\pi}, tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} > \frac{3}{\pi} => \frac{\pi}{4} < y_0 < \frac{\pi}{3}$

Тогда $\gamma_0 \leq \frac{2\left(1+\frac{2\pi}{3}\right)}{\pi^2} \cdot 16 \approx 10$

Учитывая,что $\pi k < y_k < \pi k + \pi/2$,и $\gamma_k \leq \gamma_0$,оценим остаток ряда:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} C_k e^{-\frac{{y_k}^2}{\tau}t} \leq \gamma_0 \sum_{k=k_0}^{\infty} e^{-\frac{(\pi k)^2}{\tau}t} \approx 10 \sum_{k=k_0}^{\infty} e^{-\frac{(\pi k)^2}{\tau}t} < 10 \sum_{n=k_0^2}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n}{\tau}t} = 10 e^{-\frac{\pi^2 {k_0}^2}{\tau}t} \frac{1}{1-e^{-\frac{\pi^2}{\tau}t}}$$

$$10 e^{-\frac{\pi^2 {k_0}^2}{\tau}t} \frac{1}{1-e^{-\frac{\pi^2}{\tau}t}} < 10 e^{-\frac{\pi^2 {k_0}^2}{\tau}t}$$

Оценим остаток ряда для $k_0 = 1$:

Для $t = 2\tau$: $10 e^{-\frac{\pi^2 {k_0}^2}{\tau}t} = 10 e^{-2\pi^2} \sim 2{,}7 \cdot 10^{-8} \ll \varepsilon$

Для $t = 5\tau$ неравенство $\sum_{k=1}^{\infty} |C_k| e^{-\frac{{y_k}^2}{\tau}t} \leq \varepsilon$ тем более выполнено.

Значит, для $x \in [0, l]; t = 2\tau, t = 5\tau$ необходимое число суммирований: N=1.

2) $x = 2l/3, t \in [0{,}5\tau]$.

$$v\left(\frac{2l}{3}, t\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{y_k(1+sin^2 y_k)}\left(\frac{cos\, y_k}{y_k} + 2\, sin\left(\frac{y_k}{10}\right) cos\left(\frac{y_k}{3}\right)\right) e^{-\frac{{y_k}^2}{\tau}t} \cos\frac{y_k}{3}$$

Так как exp дает быструю сходимость ряда, то наибольшая ошибка вычислений будет при t = 0.

$$v\left(\frac{2l}{3}, t\right) < v\left(\frac{2l}{3}, 0\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{y_k(1+sin^2 y_k)}\left(\frac{cos\, y_k}{y_k} + 2\, sin\left(\frac{y_k}{10}\right) cos\left(\frac{y_k}{3}\right)\right) \cos\frac{y_k}{3}$$

Учитывая, что $y_k \sim \pi k,$ остаток ряда можно оценить с помощью суммы интегралов :

$$\int_N^\infty \frac{cos\left(\frac{4\pi x}{3}\right) + cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right)}{(\pi x)^2} dx \ + \int_N^\infty \frac{sin\left(\frac{23\pi x}{30}\right) + 2sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) - sin\left(\frac{17\pi x}{30}\right)}{\pi x} dx < \varepsilon$$

Значение первого выражения $\ll$ второго, поэтому для оценки можно взять

$$\int_N^\infty \frac{sin\left(\frac{23\pi x}{30}\right) + 2sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) - sin\left(\frac{17\pi x}{30}\right)}{\pi x} dx < \varepsilon$$

Получаем, что необходимое для достижения заданной точности число суммирований: N~50

1.3.Оценка шагов.

Теперь оценим шаг по x для вычисления температуры в разных точках стержня для фиксированных моментов времени.

Для достаточной точности вычисления нужно чтобы на период функции $X_N = \cos\sqrt{\lambda_N}\,(x - l)$ (где N-требуемое кол-во суммирований) было хотя бы 10 точек по x:

$$\Delta x \sim \frac{2\pi}{10\sqrt{\lambda_N}}$$

Учитывая, что наибольшее количество суммирований ~50, а $\sqrt{\lambda_N} \sim \pi N,$ получаем:

$$\Delta x \sim 0{,}004$$

То есть по x требуется n_x = 250 шагов.

Далее, оценим число шагов по времени для фиксированного x*:* $|D\lambda_k \Delta t|$*<1*

$$\Delta t \sim \frac{1}{\lambda_k} \sim \frac{1}{(\pi k)^2} \approx 0{,}00004$$

Тогда, с учетом того, что наибольшее время равно *5*τ : $n_t \approx 125000.$

Шаг по x будет использоваться и в методах Эйлера и Кранка-Николсона, а шаг по времени для этих методов будет другой: он будет получен из критерия Куранта устойчивости метода Эйлера.

Для метода Эйлера получили (см. п. (2)), $n_t \approx 1250000$, поэтому при написании программы воспользуемся количеством шагов по времени из метода Эйлера для того, чтобы потом можно было построить разность получившихся разными методами графиков.

1.4.Оценка точности вычисления λ_k

По рис.1 видно, что трансцендентное уравнение на собственные значения можно решить двоичным поиском. Оценим точность, с которой требуется вычислить значения $\sqrt{\lambda_k}$. Так как во всех выражениях $\sqrt{\lambda_k}$ умножается либо на t, либо на x, точность их вычисления должна быть не меньше, чем наименьшая ошибка: $\delta = \frac{\Delta t}{5\tau} \sim 2 \cdot 10^{-6}$

2. Явный метод Эйлера

Сделаем масштабное преобразование координаты и времени:$x \to \frac{x}{l}, t \to \frac{t}{\tau}$

Аппроксимируем функцию $u(x,t)$ в некоторый момент времени t_0ее значениями $u(x_k,t_0)$ в точках между узлами таблицы $x_k = h\left(k+\frac{1}{2}\right),\ k = 0 \dots n_x - 1, h = \frac{l}{n_x}$.

Тогда первую производную в средней точке $\hat{x}_k = kh$ можно аппроксимировать как

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\hat{x}_k, t_0) \approx \frac{u(x_{k+1},t_0) - u(x_k,t_0)}{h}$$

Вторая производная в точке x_k может быть аппроксимирована как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_k,t_0) \approx \frac{1}{h^2}\big(u(x_{k+1},t_0) - 2u(x_k,t_0) + u(x_{k-1},t_0)\big)$$

Определим значения функции $u(x_{-1},t_0)$ и $u(x_N,t_0)$ из граничных условий:

$$u(0,t) = \frac{u(x_{-1},t) + u(x_0,t)}{2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{u(x_0,t) - u(x_{-1},t)}{h}$$

Обозначим $u(x_k,t) = u_k$. Подставим в граничные условия:

$$\begin{cases} \frac{1}{h}(u_0 - u_{-1}) = 1 + \frac{1}{2}(u_{-1} + u_0) \\ u_{n_x} = u_{n_x-1} \end{cases}$$

$$u_{-1} = \frac{u_0(2-h) - 2h}{2+h}, \qquad u_N = u_{N-1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,t_0) \approx \frac{u_1}{h^2} - \frac{u_0(2+3h)}{h^2(2+h)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{n_x-1},t_0) \approx \frac{-u_{n_x-1} - u_{n_x-2}}{h^2}$$

Здесь h - параметр задачи, задаваемый числом шагов n_x.

Таким образом можно построить конечномерную аппроксимацию оператора Штурма-Лиувилля $L = \frac{d^2}{dx^2}$ с граничными условиями (2).

Аппроксимация оператора $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_k,t) \approx \frac{1}{h^2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1})$$

Тогда само уравнение в векторной форме может быть переписано в виде (u - вектор из значений функции $u(x_k,t)$):

$$\frac{du}{dt} = Au + B \qquad (12)$$

$$u(x_k,0) = \varphi(x_k)$$

$\varphi(x_k)$-таблица функции, описывающей начальные условия.

A-матрица оператора, аппроксимирующего оператор $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

$$A=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} \frac{-(2+3h)}{2+h} & 1 & 0 & \cdots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & -2 & & \vdots & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & & \\ \vdots & & & & -2 & 1 & 0 \\ & & & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B=\frac{-2}{h(2+h)}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

Уравнение (12) в интегральной форме:

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\int_t^{t+\Delta t}(Au(\tau)+B)d\tau=u(t)+\int_t^{t+\Delta t}Au(\tau)d\tau+B\Delta t$$

Вычислим интеграл приближенно по формуле прямоугольников:

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\int_t^{t+\Delta t}Au(\tau)d\tau+B\Delta t=u(t)+(Au(t)+B)\Delta t+O(\Delta t^2)$$

$$u(t+\Delta t)=(E+A\Delta t)u(t)+O(\Delta t^2)$$

Если применить оператор $(E+A\Delta t)$ к собственному вектору матрицы A, получим:

$$u_\lambda(t+\Delta t)=u_\lambda(t)+\lambda\Delta\mathrm{t}\,u_\lambda(t)$$

Если применить m раз:

$$u_\lambda(m\Delta t)=u_\lambda(0)(1+\lambda\Delta\mathrm{t})^m$$

Откуда получаем условие устойчивости метода Эйлера: $|1+\lambda\Delta\mathrm{t}|<1$

$$|\Delta\mathrm{t}|<\frac{2}{max|\lambda|}$$

Где $max|\lambda|$-модуль наибольшего собственного значения аппроксимирующего оператора.

Это называется условием Куранта.

Для аппроксимирующего оператора $max|\lambda|\sim\frac{4}{h^2}$, тогда $\Delta\mathrm{t}<\frac{h^2}{2}$.

В данном случае, если по x имеем $n_x=250$ точек, получаем шаг по времени $\Delta\mathrm{t}\leq 8\cdot 10^{-6}$. Для t = 5τ возьмем n_t = 5·4·250·250=1250000 шагов по t.

3. Метод Кранка-Николсона

Используем аппроксимацию, которую использовали в явном методе Эйлера в методе Кранка-Николсона.

$$u(t+\Delta t) = u(t) + \int_t^{\Delta t} (Au(\tau) + B) d\tau$$

В методе Кранка-Николсона интеграл аппроксимируется по формуле трапеций:

$$\int_t^{\Delta t} f(\tau) d\tau = \Delta t \left(\frac{f(t) + f(t+\Delta t)}{2} \right) + O(\Delta t^3)$$

$$u(t+\Delta t) = u(t) + \int_t^{\Delta t} \big(Au(\tau) + F(\tau)\big) d\tau =$$

$$= u(t) + \frac{\Delta t}{2}\big(Au(t) + Au(t+\Delta t)\big) + \frac{\Delta t}{2}\big(F(t) + F(t+\Delta t)\big) + O(\Delta t^3)$$

$$\left(E - \frac{\Delta t}{2} A\right) u(t+\Delta t) = \left(E + \frac{\Delta t}{2} A\right) u(t) + \frac{\Delta t}{2}\big(F(t) + F(t+\Delta t)\big) + O(\Delta t^3)$$

В нашей задаче $F(t) = B = const.$ Тогда получим:

$$\left(E - \frac{\Delta t}{2} A\right) u(t+\Delta t) \approx \left(E + \frac{\Delta t}{2} A\right) u(t) + B$$

Метод Кранка-Николсона для этого уравнения:

1) $g = \left(E + \frac{\Delta t}{2} A\right) u(t) + B$ за O(N)
2) $\left(E - \frac{\Delta t}{2} A\right) G \approx g \quad => G$ методом прогонки за O(N)
3) $u(t+\Delta t) = G$

Зная u(t), можно вычислить значение выражения справа за линейное число операций, поскольку A - трехдиагональная матрица. С известным правым значением, данное равенство является системой линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, которую можно решить методом прогонки за ~N операций (вместо того, чтобы искать обратную матрицу).

Этот метод неявный, т.к. на каждом шаге решается система линейных уравнений.

Так как метод Кранка-Николсона является устойчивым, для вычислений, для сравнения можно взять те же оценки шагов по x и t, как и в методе Эйлера.

3.1. Метод прогонки для трехдиагональной матрицы.

$$\mathrm{A}x = g, \text{где } A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & & 0 \\ c_1 & a_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = g_1 \\ \dots \\ c_{k-1}x_{k-1} + a_kx_k + b_kx_{k+1} = g_k \ , \ k = 2, \dots n-1 \\ \dots \\ a_1x_1 + b_1x_2 = g_n \end{cases}$$

Дополним эту систему уравнениями: $x_k = qx_{k+1} + p_k$, $k = 2, \dots n-1$, так, чтобы решение исходной системы совпадало с решением расширенной и наоборот. Требование метода на матрицу А: $a_1 \neq 0$.

Первое уравнение исходной системы: $x_1 = -\frac{b_1}{a_1}x_2 + \frac{g_1}{a_1}$ должно совпадать с первым добавленным: $q_1 = -\frac{b_1}{a_1},\ p_1 = \frac{g_1}{a_1}$.

Подставим x_{k-1} из добавленных уравнений в k-е уравнение исходной системы:

$$c_{k-1}(q_{k-1}x_k + p_{k-1}) + a_kx_k + b_kx_{k+1} = g_k$$

Получаем рекуррентную зависимость:

$$x_k = -\frac{b_k}{c_{k-1}q_{k-1} + a_k}x_{k+1} + \frac{g_k - c_{k-1}p_{k-1}}{c_{k-1}q_{k-1} + a_k} = q_kx_{k+1} + p_k$$

$$q_k = -\frac{b_k}{c_{k-1}q_{k-1} + a_k}, \qquad p_k = \frac{g_k - c_{k-1}p_{k-1}}{c_{k-1}q_{k-1} + a_k} \ , \qquad k = 2 \dots n-1$$

Из двух последних уравнений получаем: $x_n = \frac{g_n - c_{n-1}p_{n-1}}{c_{n-1}q_{n-1} + a_n}$

Алгоритм:

Прямой ход прогонки:

$$q_1 = -\frac{b_1}{a_1},\ p_1 = \frac{g_1}{a_1} \ \Rightarrow q_k = -\frac{b_k}{c_{k-1}q_{k-1}+a_k},\ p_k = \frac{g_k - c_{k-1}p_{k-1}}{c_{k-1}q_{k-1}+a_k} \ , \qquad k = 2 \dots n-1$$

Обратный ход прогонки:

$$x_n = \frac{g_n - c_{n-1}p_{n-1}}{c_{n-1}q_{n-1} + a_n} \ \Rightarrow \ x_k = q_kx_{k+1} + p_k, \qquad k = 1 \dots n-1$$

4. Результаты.

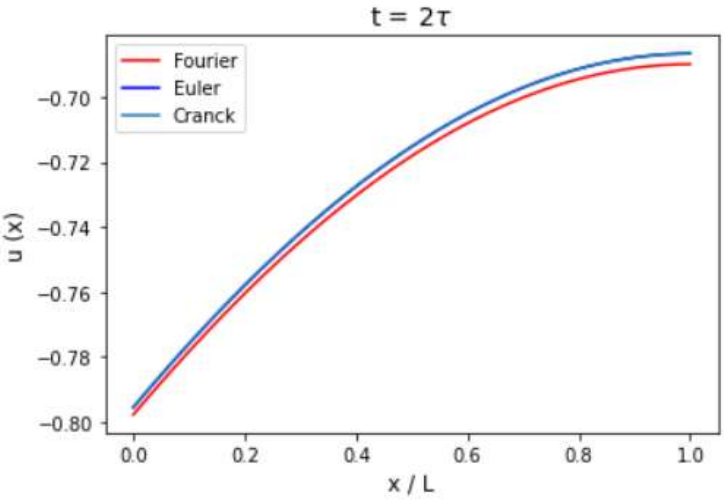
4.1.

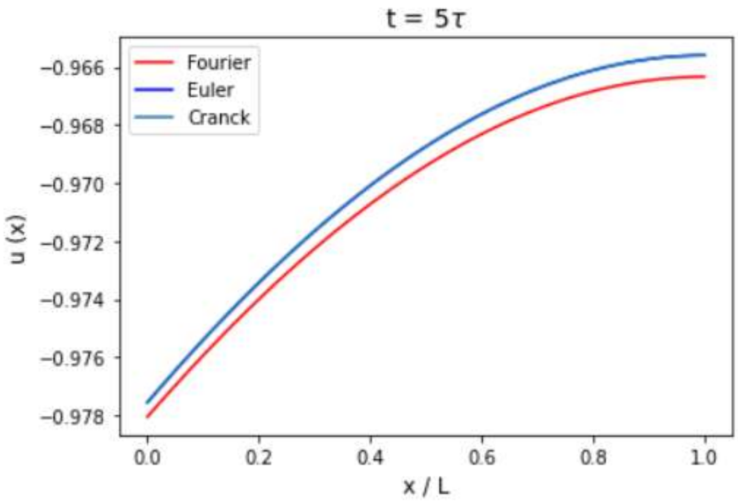
Параметры: n_x - шаги по координате, n_t – шаги по времени (в 5τ), $dx = \frac{1}{n_x}$ и $dt = \frac{5}{n_t}$ – соответствующие значения шагов.

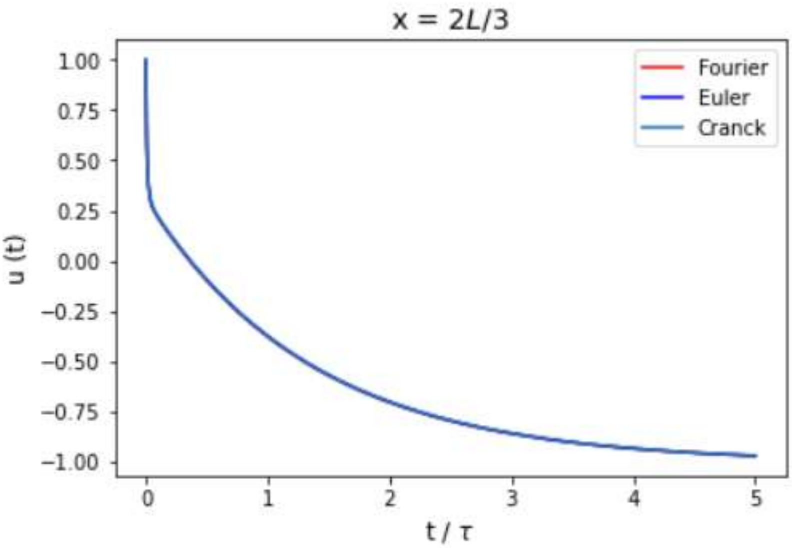
$n_x = 250$, $n_t = 1.25 \cdot 10^6$, $dx = 0.004$, $dt = 4 \cdot 10^{-6}$- для всех методов.

- Метод Фурье:

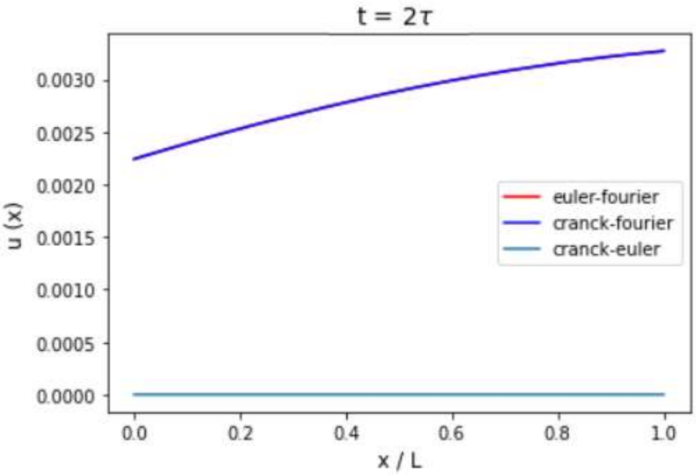
  Наибольшее количество членов ряда: N=50, точность вычисления собственных значений $\varepsilon_\lambda = 2 \cdot 10^{-6}$.

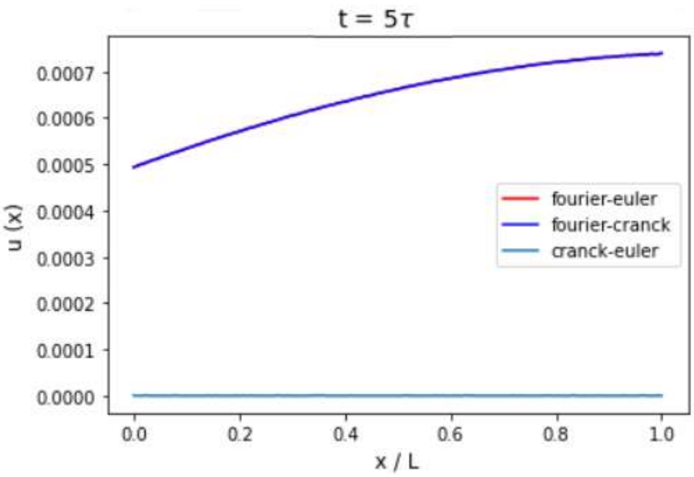


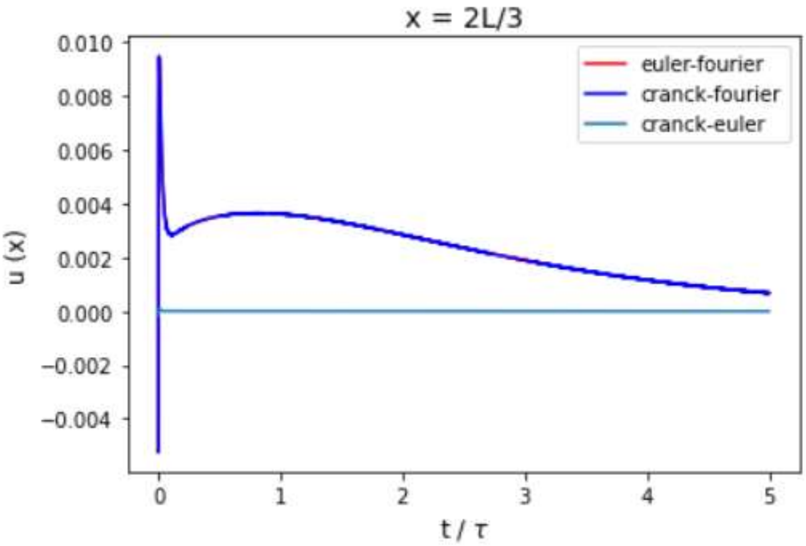




- Разность результатов:







Наибольшее различие результатов лежит в пределах заданной погрешности: $\varepsilon \sim 0.01$. По всем графикам разностей видно, что результаты, полученные методами Эйлера и Кранка, практически неразличимы, а результат суммирования ряда Фурье лежит ниже их. Как можно видеть по графику для $x = 2l/3$, наибольшая погрешность достигается для t в окрестности нуля, как было показано в 1.2.

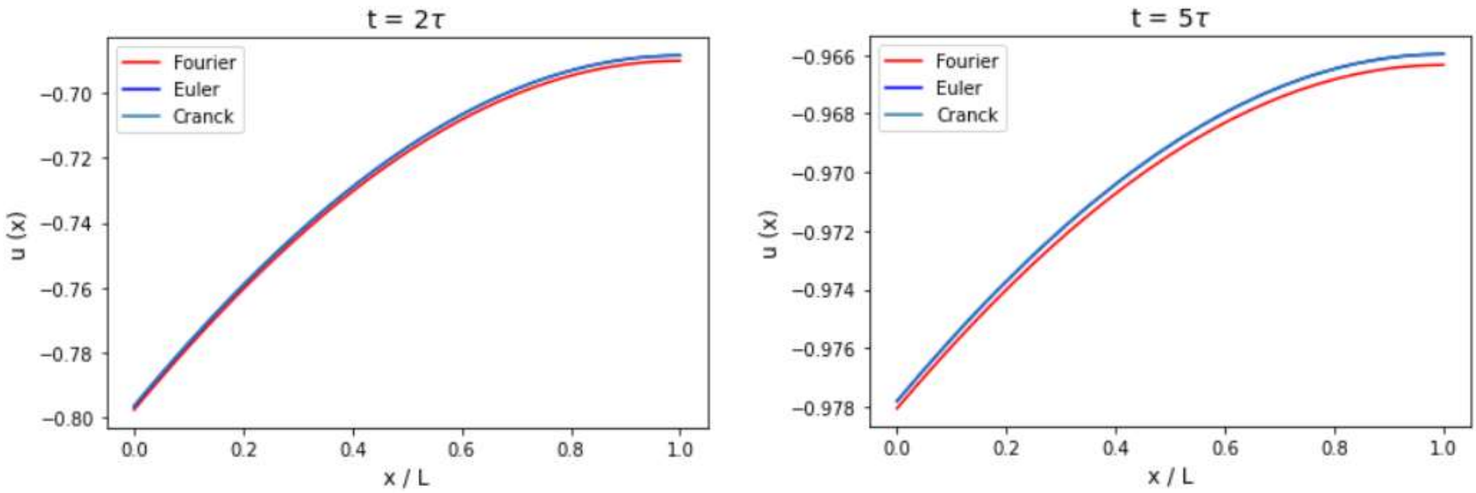
Для увеличения точности вычислений в фиксированных $t = 2\tau; 5\tau$ можно увеличить значение n_x. Соответственно, увеличится и значение n_t (см. метод Эйлера). Для уменьшения ошибки вычисления в точке $x = 2l/3$ увеличим количество суммирований ряда Фурье (п. 1.2).

4.2.

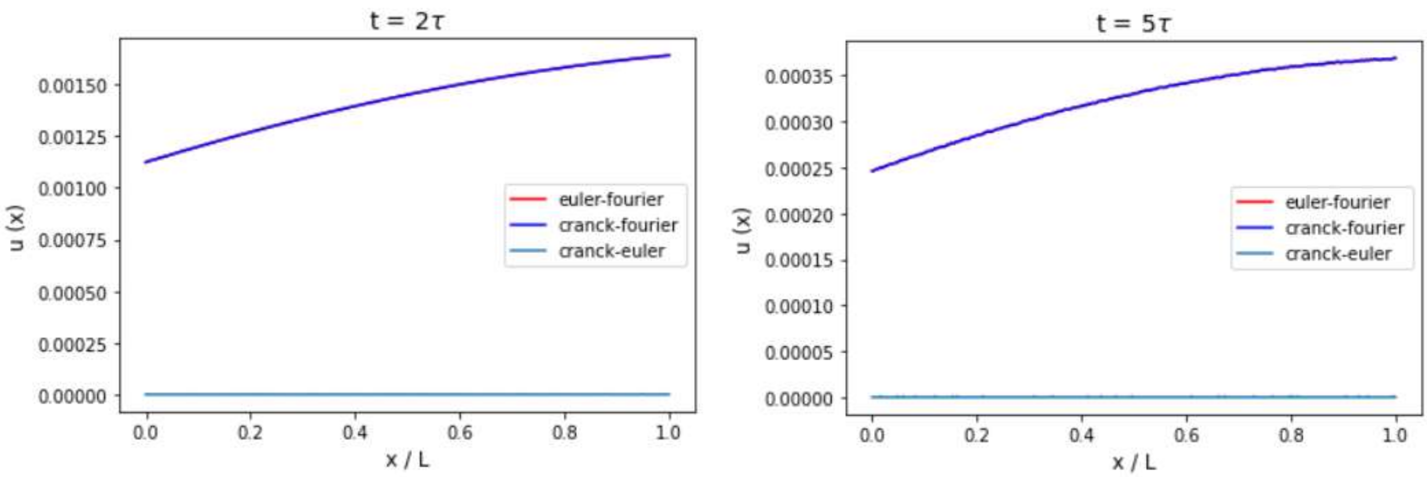
Параметры: $n_x = 500$, $n_t = 5 \cdot 10^6$, $dx = 0.002$, $dt = 10^{-6}$- для всех методов.

- Метод Фурье:

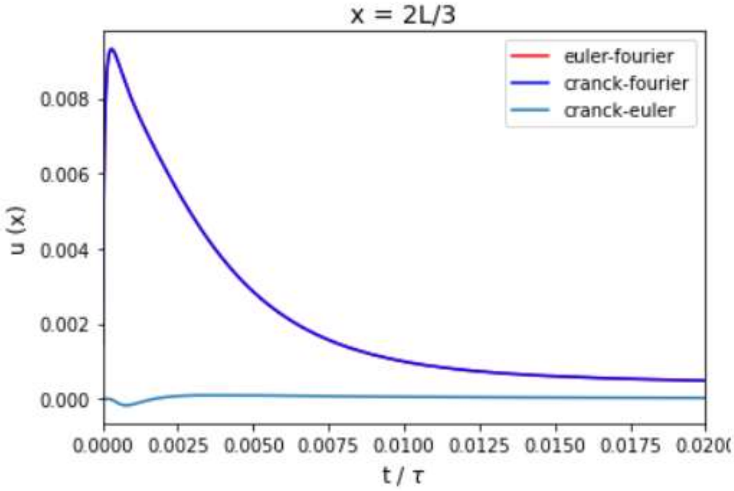
Наибольшее количество членов ряда: N=100, точность вычисления собственных значений $\varepsilon_\lambda = 0.5 \cdot 10^{-6}$.

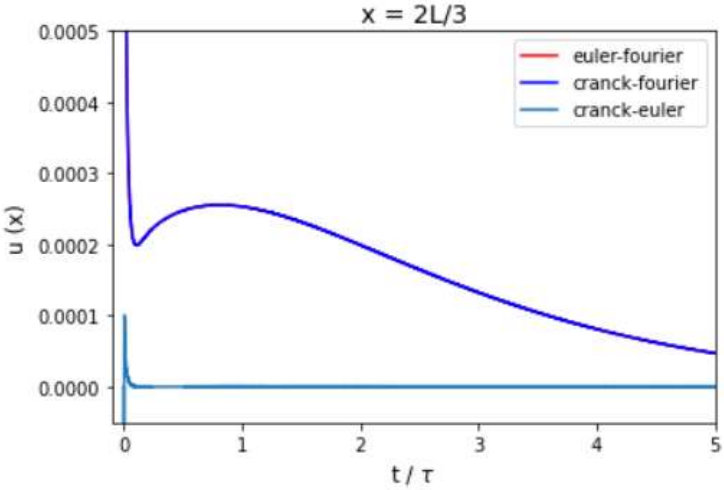


- Разность результатов:



Различие результатов расчета в фиксированном t уменьшилось в 2 раза по сравнению с предыдущим набором параметров.





Погрешность расчета методом Фурье в окрестности t = 0 практически не изменилась, а при удалении от неё (t/τ > 0.01) уменьшилась в ~20 раз. Это может быть связано с отсутствием сходимости анализируемого ряда при t = 0 в 1.2.

Вывод.

Все полученные результаты совпадают в пределах заданных погрешностей.

Для случаев t = 2τ и 5τ графики решения методом Эйлера и Кранка почти неразличимы (что и ожидалось, т.к. оба метода основаны на аппроксимации оператора $\frac{d^2}{dx^2}$ и решении линейных уравнений), в то же время решение методом Фурье находится немного ниже их. Т.к. метод Фурье построен с точностью порядка $\sim 10^{-8}$ (см. п. 1.2, остатки ряда), а разница между графиками порядка 10^{-3}, то неточными являются результаты полученные методом Эйлера и Кранка. Т.к. решения методом Эйлера и Кранка при фиксированном t почти совпадают (с точностью до$\sim 10^{-6}$) то нужно уменьшить dx, и, следовательно, dt – п. 4.1. Уменьшение ошибки оказалось пропорциональным уменьшению шага.

Было также получено, что уменьшение dt и увеличение количества членов ряда Фурье (N) уменьшают ошибку при t/τ > 0.01. Ошибка в окрестности центра не уменьшается при увеличении N, это является следствием плохой сходимости ряда. Для таких значений t лучше использовать другие методы, а не вычисление ряда Фурье.

В ходе работы была найдена граница устойчивости метода Эйлера (dt): при $dt \le 0.5 \cdot (dx)^2$ решение является устойчивым. При $dt > 0.5 \cdot (dx)^2$ решение неустойчиво, что подтверждает верность наших оценок.

Было замечено, что быстрее всего (при равном количестве пространственных и временных шагов) считает метод Фурье, затем метод Эйлера, и метод Кранка-Николсона. Это можно объяснить тем, что в методе Фурье максимальная сложность вычисления во вложенном цикле ~ Nn_t, где N - число суммирований, n_t - число временных шагов. В методе Эйлера сложность ~ $n_t n_x$, так как на каждом шаге есть умножение трехдиагональной матрицы на вектор, и наконец в методе Кранка ~ $8 n_t n_x$, так как на каждом шаге система решается методом прогонки (п. 3.1).