

Technische Universität Dortmund

Fakultät Statistik

Wintersemester 2022/2023

Fallstudien I

Projekt 3

## **Auswertung eines Versuchsplans**

Dozent: Prof. Dr. Guido Knapp

M. Sc. Yassine Talleb

Caroline Baer

Louisa Poggel

Julia Keiter

Daniel Sipek

Gruppennummer: 1

01.12.2022

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Problemstellung</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Statistische Methoden</b>	<b>1</b>
3.1	Versuchsdesign . . . . .	1
3.2	Modell . . . . .	2
3.3	Multiple Vergleiche . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Statistische Auswertung</b>	<b>5</b>
4.1	Deskriptive Zusammenfassung der Daten . . . . .	5
4.2	Modellanalyse . . . . .	6
4.3	Multiple Vergleiche . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>9</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>10</b>
	<b>Anhang</b>	<b>11</b>

# 1 Einleitung

## 2 Problemstellung

Der vorliegende Datensatz *Hafer.xlsx* beinhaltet die Ergebnisse eines landwirtschaftlichen Versuchsplans. Bei diesem wurde der *Ertrag* von verschiedenen *Hafersorten* mit unterschiedlich starken *Behandlungen* mit Stickstoff gemessen.

Dazu wurden sechs *Blöcke* bzw. *Felder* in je drei main-plots für die *Hafersorten* Victory, Golden.rain und Marvellous aufgeteilt und diese dann wiederum in je vier sub-plots für die *Behandlung* mit 0.0 cwt, 0.2 cwt, 0.4 cwt und 0.6 cwt Stickstoff. Insgesamt liegen daher 72 Beobachtungen zu den jeweiligen *Erträgen* der 72 sub-plots vor. Die *Erträge* wurden dabei in  $\frac{1}{4}$  Pfund (im Folgenden nur mit Pfund abgekürzt) gemessen und jeder einzelne sub-plot hat die Größe von  $\frac{1}{80}$  Acre.

Bei den Variablen *Block*, *Hafersorte* und *Behandlung* handelt es sich um nominale Variablen, während die Variable *Ertrag* metrisch stetig ist.

Ziel des Berichts ist die Untersuchung des Versuchsplans in Form eines Split-Plot-Designs, sowie das Herausstellen möglicher signifikanter Unterschiede zwischen den *Sorten* und *Behandlungen*. Dazu wird ein gemischtes lineares Modell erstellt, um zu beurteilen, welche *Hafersorte* mit welcher *Stickstoff-Behandlung* den größten Einfluss auf einen möglichst hohen Ertrag hat.

## 3 Statistische Methoden

Die statistische Auswertung mit den hier aufgeführten Methoden wird mit der Software R Core Team (2022) Version 4.2.2 durchgeführt. Zusätzlich wichtige Pakete hierfür sind *readxl* von Wickham und Bryan (2022), *xtable* von Dahl et al. (2019), *ggplot2* von Wickham (2016) und *lmerTest* von Kuznetsova et al. (2017).

### 3.1 Versuchsdesign

Beim hier vorliegenden Versuchsdesign handelt es sich um einen Split-Plot-Plan (vgl. Saville und Wood (1991), Kap. 14). Dabei wurden sechs *Blöcke* in jeweils drei main- bzw. whole-Plots aufgeteilt und zu diesen je eine der drei *Hafersorten* zufällig zugewiesen.

Anschließend wurde jeder main-Plot in vier sub-Plots unterteilt und jedem sub-Plot eine Stufe der *Stickstoff-Behandlung* zufällig zugeordnet. Dementsprechend handelt es sich bei *Hafersorte* um den whole-Plot-Faktor und bei *Behandlung* um den sub-Plot-Faktor. In Abbildung 1 ist dargestellt, wie die Aufteilung und Randomisierung der Faktorstufen beispielsweise aussehen könnte.

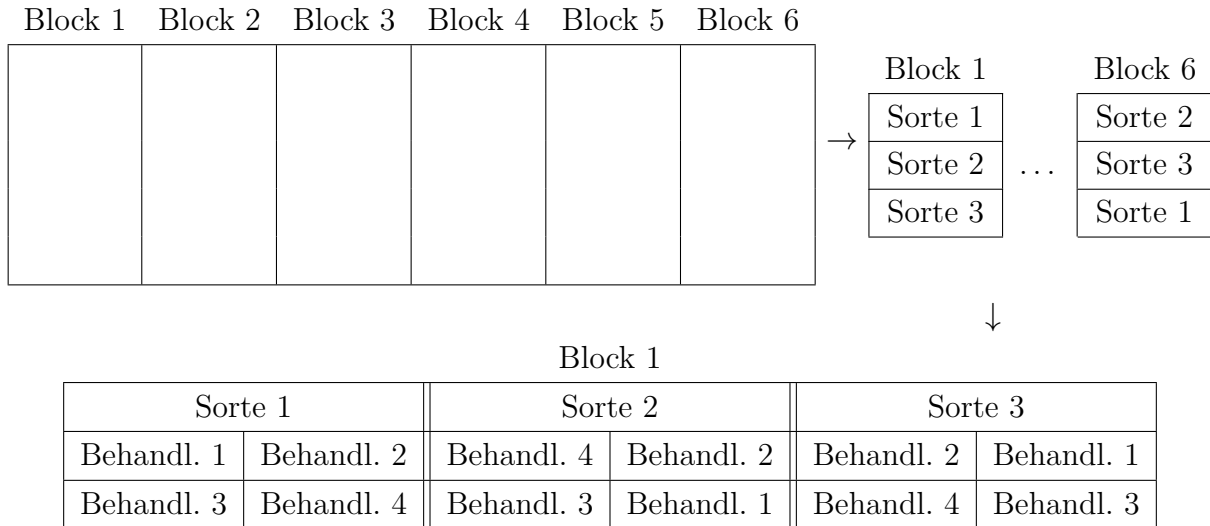


Abbildung 1: Versuchsaufbau nach Split-Plot-Plan

## 3.2 Modell

Das gemischte lineare Modell zum Split-Plot-Design hat die in Formel (1) angegebene Darstellungsform (vgl. Dean et al. (2017), Kap. 19.2)

$$y_{ijk} = \mu + \theta_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + e'_{ij} + e_{ijk} \quad (i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s, k = 1, \dots, t) \quad (1)$$

Dabei steht  $y_{ijk}$  im allgemeinen für den Wert der Zielvariablen bezüglich der  $i$ -ten Stufe des Block-Faktors, der  $j$ -ten Stufe des whole-Plot-Faktors und der  $k$ -ten Stufe des sub-Plot-Faktors. In dem hier vorliegenden Versuchsplan bezeichnet  $y_{ijk}$  den *Ertrag* von der  $j$ -ten *Hafersorte* im  $i$ -ten *Block*, die mit der  $k$ -ten Stufe *Stickstoff* behandelt wurde. Das allgemeine Mittel wird durch  $\mu$  dargestellt und  $\theta_i$  steht für den festen differentiellen Effekt des  $i$ -ten *Blocks*, während  $\alpha_j$  für die festen differentiellen Effekte der  $j$ -ten Stufe des Faktors *Sorte* und  $\beta_k$  für die festen differentiellen Effekte der  $k$ -ten Stufe des Faktors *Behandlung* steht. Mit  $(\alpha\beta)_{jk}$  wird die womöglich vorhandene Wechselwirkung von *Hafersorte* und *Behandlung* angegeben. Für den whole-Plot-Fehler  $e'_{ij}$  soll  $e'_{ij} \sim N(0, \sigma_w^2)$  gelten und für den sub-Plot-Fehler  $e_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2)$ .

Ebenfalls erfüllt sein müssen die Nebenbedingungen  $\sum_{i=1}^r \theta_i = 0$ ,  $\sum_{j=1}^s \alpha_j = 0$ ,  $\sum_{k=1}^t \beta_k = 0$ ,

sowie  $\sum_{j=1}^s (\alpha\beta)_{jk} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, t$  und  $\sum_{k=1}^t (\alpha\beta)_{jk} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, s$ .

Zur Untersuchung auf vorhandene Wechselwirkungen eignet sich insbesondere der Interaktionsplot der in R mithilfe von `interaction.plot()` ausgegeben werden kann (siehe Crawley (2012), Kap. 11.3.1). Dabei werden an der x-Achse die Stufen des sub-Plot-Faktors und an der y-Achse die Zielvariable abgetragen. Pro Stufe des whole-Plot-Faktors werden dann die Mittelwerte der zugehörigen Werte der Zielvariablen, dh.  $\overline{y_{jk}} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r y_{ijk}$ , eingezeichnet. Falls keine Wechselwirkungen vorhanden sind, sind die in der Grafik eingezeichneten Linien parallel zueinander, da  $\overline{y_{jk}} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r (\mu + \theta_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk})$  ist und  $\overline{y_{\tilde{j}k}} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r (\mu + \theta_i + \alpha_{\tilde{j}} + \beta_k + (\alpha\beta)_{\tilde{j}k})$ . Demnach beträgt der Unterschied zwischen den Linien von der  $j$ -ten und der  $\tilde{j}$ -ten Stufe des whole-Plot-Faktors für alle  $k$  Stufen des sub-Plot-Faktors gerade  $\overline{y_{jk}} - \overline{y_{\tilde{j}k}} = \alpha_j - \alpha_{\tilde{j}}$ . Falls nun keine Wechselwirkung vorliegt, also  $(\alpha\beta)_{jk} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, s, \forall k = 1, \dots, t$  gilt, so ist die Differenz für alle Stufen des sub-Plot-Faktors mit  $\alpha_j - \alpha_{\tilde{j}}$  gleichgroß und die eingezeichneten Linien sind parallel.

Die Parameter werden dabei aufgrund des orthogonalen Versuchsplans wie in Kapitel 5.7 von Toutenburg (2003) mittels KQ-Methode geschätzt. Die Formeln (2) bis (4) zeigen dies am Beispiel des allgemeinen Mittels, wobei die Funktion  $S(\varphi)$  für die zu minimierende Summe der Quadrate steht und  $\varphi$  für den zu schätzenden Parametervektor  $\varphi = (\mu, \theta_1, \dots, (\alpha\beta)_{st})^\top$ .

$$S(\varphi) := \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t (y_{ijk} - \mu - \theta_i - \alpha_j - \beta_k - (\alpha\beta)_{jk})^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial S(\varphi)}{\partial \mu} = -2 \cdot \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t (y_{ijk} - \mu - \theta_i - \alpha_j - \beta_k - (\alpha\beta)_{jk}) \quad (3)$$

$$= -2 \cdot \left( y_{...} - rst \cdot \mu - st \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^r \theta_i}_{=0} - rt \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^s \alpha_j}_{=0} - rs \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^t \beta_k}_{=0} - r \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t (\alpha\beta)_{jk}}_{=0} \right)$$

*Nebenbed.'en*  $\stackrel{!}{=} -2 \cdot (y_{...} - rst \cdot \mu) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Leftrightarrow y_{...} = rst \cdot \mu \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{rst} \cdot y_{...} = \overline{y_{...}} \quad (4)$$

Somit ergeben sich die in Tabelle 1 dargestellten Parameter-Schätzungen.

Tabelle 1: Schätzungen der Modellparameter

$\hat{\mu}$	$\hat{\theta}_i$	$\hat{\alpha}_j$	$\hat{\beta}_k$	$\widehat{(\alpha\beta)_{jk}}$
$\overline{y_{...}}$	$\overline{y_{i...}} - \overline{y_{...}}$	$\overline{y_{.j.}} - \overline{y_{...}}$	$\overline{y_{..k}} - \overline{y_{...}}$	$\overline{y_{.jk}} - \overline{y_{.j.}} - \overline{y_{..k}} + \overline{y_{...}}$

Für die Varianzanalyse (ANOVA) müssen nach Kapitel 11.1.2 von Crawley (2012) folgende

Annahmen gelten.

- Innerhalb der Gruppen liegen gleiche Varianzen (Homoskedastizität) vor.
- Die Fehler sind unabhängig.
- Die Fehler sind normalverteilt.

Zur Überprüfung der Normalverteilung der Fehler werden die Residuen des whole-Plot-Fehlers und des sub-Plot-Fehlers mittels Quantile-Quantile-Plot betrachtet.

Bei der ANOVA werden die Quadratsummen, mittleren Quadratsummen, Freiheitsgrade und F-Statistiken bestimmt (vgl. Groß (2010), Kap. 19.2.1). In R wird eine nicht ganz vollständige Varianzanalysetafel mit der Anwendung der `summary()`-Funktion auf das `aov()`-Objekt ausgegeben, der im Vergleich zur vollständigen Tafel (vgl. Tabelle 2 und 3) unter anderem Angaben zum whole-Plot gesamt und gesamt fehlen.

Tabelle 2: Varianzanalysetafel

	Freiheitsgrade	Quadratsumme	mittlere Quadrats.	F-Statistik
Blockfaktor	$(r - 1)$	$SS\theta$	$MS\theta = \frac{SS\theta}{r-1}$	-
whole-Plot-Faktor	$(s - 1)$	$SSA$	$MSA = \frac{SSA}{s-1}$	$\frac{MSA}{MSE_W}$
whole-Plot-Residuen	$(r - 1)(s - 1)$	$SSE_W$	$MSE_W = \frac{SSE_W}{(r-1)(s-1)}$	-
whole-Plot gesamt	$rs - 1$	$SSW$	-	-
sub-Plot-Faktor	$(t - 1)$	$SSB$	$MSB = \frac{SSB}{t-1}$	$\frac{MSB}{MSE_S}$
Wechselwirkung	$(s - 1)(t - 1)$	$SS(AB)$	$MS(AB) = \frac{SS(AB)}{(s-1)(t-1)}$	$\frac{MS(AB)}{MSE_S}$
sub-Plot-Residuen	$s(r - 1)(t - 1)$	$SSE_S$	$MSE_S = \frac{SSE_S}{s(r-1)(t-1)}$	-
Gesamt	$rst - 1$	$SSG$	-	-

Tabelle 3: Definition der Quadratsummen

$SS\theta$	$:=$	$st \cdot \sum_{i=1}^r \hat{\theta}_i^2 = st \cdot \sum_{i=1}^r (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2$
$SSA$	$:=$	$rt \cdot \sum_{j=1}^s \hat{\alpha}_j^2 = rt \cdot \sum_{j=1}^s (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2$
$SSB$	$:=$	$rs \cdot \sum_{k=1}^t \hat{\beta}_k^2 = rs \cdot \sum_{k=1}^t (\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...})^2$
$SS(AB)$	$:=$	$r \cdot \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \widehat{(\alpha\beta)}_{jk}^2$ $= r \cdot \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t (\bar{y}_{.jk} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...})^2$
$SSW$	$:=$	$t \cdot \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{...})^2$
$SSE_W$	$:=$	$SSW - SS\theta - SSA$
$SSGesamt$	$:=$	$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2$
$SSE_S$	$:=$	$SSGesamt - SSW - SSB - SS(AB)$

Um zu prüfen ob es signifikante Unterschiede zwischen den Stufen des whole-Plot-Faktors,

sub-Plot-Faktors oder der Wechselwirkung gibt, werden die Hypothesen (5) bis (7) zum Niveau 5% betrachtet. Wie in Kapitel XI von Hartung et al. (2009) beschrieben, wird die Hypothese  $H_0^A$  : „Alle Effekte der Stufen des whole-Plot-Faktors sind gleich“ abgelehnt falls gilt, dass die F-Statistik  $\frac{MSA}{MSE_W} > F_{(s-1),(r-1)(s-1),0.95}$  ist. Die Hypothese  $H_0^B$  : „Alle Effekte der Stufen des sub-Plot-Faktors sind gleich“ wird abgelehnt, falls  $\frac{MSB}{MSE_S} > F_{(t-1),s(r-1)(t-1),0.95}$  ist und  $H_0^{AB}$  wird abgelehnt, falls  $\frac{MS(AB)}{MSE_S} > F_{(s-1)(t-1),s(r-1)(t-1),0.95}$  gilt.

$$H_0^A : \alpha_1 = \dots = \alpha_s = 0 \quad (5)$$

$$H_0^B : \beta_1 = \dots = \beta_t = 0 \quad (6)$$

$$H_0^{AB} : (\alpha\beta)_{11} = \dots = (\alpha\beta)_{st} = 0 \quad (7)$$

### 3.3 Multiple Vergleiche

Falls sich herausstellt, dass es einen Faktor mit signifikanten Unterschieden gibt, also die zugehörige Hypothese verworfen wird, kann mittels Zweistichproben-t-Test und Bonferroni-Korrektur untersucht werden, welche Stufen dafür verantwortlich sind.

## 4 Statistische Auswertung

### 4.1 Deskriptive Zusammenfassung der Daten

Der *Ertrag* liegt im arithmetischen Mittel bei 103.97 Pfund und im Median bei 102.50 Pfund (vgl. Tabelle 4). Insgesamt wurde unter den 72 sub-Plots der höchste *Ertrag* mit 174.00 Pfund und der niedrigste *Ertrag* mit 53.00 Pfund gemessen. Wie Tabelle 7 zu entnehmen ist, wurde der größte *Ertrag* ( $y_{114} = 174$ ) auf *Feld* 1 mit der *Sorte* Victory und einer *Stickstoff-Behandlung* mit 0.6 cwt erreicht. Der kleinste *Ertrag* ( $y_{611} = 53$ ) stammt von *Feld* 6 mit der *Hafersorte* Victory und 0.0 cwt, also keiner, *Behandlung* mit Stickstoff. Die Hälfte der Beobachtungen liegt zwischen 86.00 und 121.25 Pfund, sodass sich ein Interquartilsabstand von 35.25 Pfund ergibt.

Tabelle 4: Verteilung des *Ertrags*

Minimum	1. Quartil	Median	arithmetisches Mittel	3. Quartil	Maximum
53.00	86.00	102.50	103.97	121.25	174.00

Die Betrachtung der Mittelwerte in den Tabelle 9, 10 und 11 zeigt, dass die *Hafersorte* Marvellous mit 109.79 Pfund im Mittel von den *Sorten* den meisten *Ertrag* und Victory mit 97.63 Pfund den geringsten Ertrag bringt. Je stärker die *Behandlung* mit Stickstoff ist, desto größer ist der mittlere Ertrag. Von den *Blöcken* bringt *Feld 1* den im Mittel größten *Ertrag* mit 135.33 Pfund und *Feld 5* den kleinsten mit 90.92 Pfund.

Verdeutlicht wird dies außerdem in Abbildung 2, denn dort fällt sogleich auf, dass der *Ertrag* in *Block 1* für alle Sorten tendenziell höher ist als bei den anderen *Blöcken*. Des Weiteren zeigt sich, dass der *Ertrag* mit stärkerer *Stickstoff-Behandlung* tendenziell steigt.

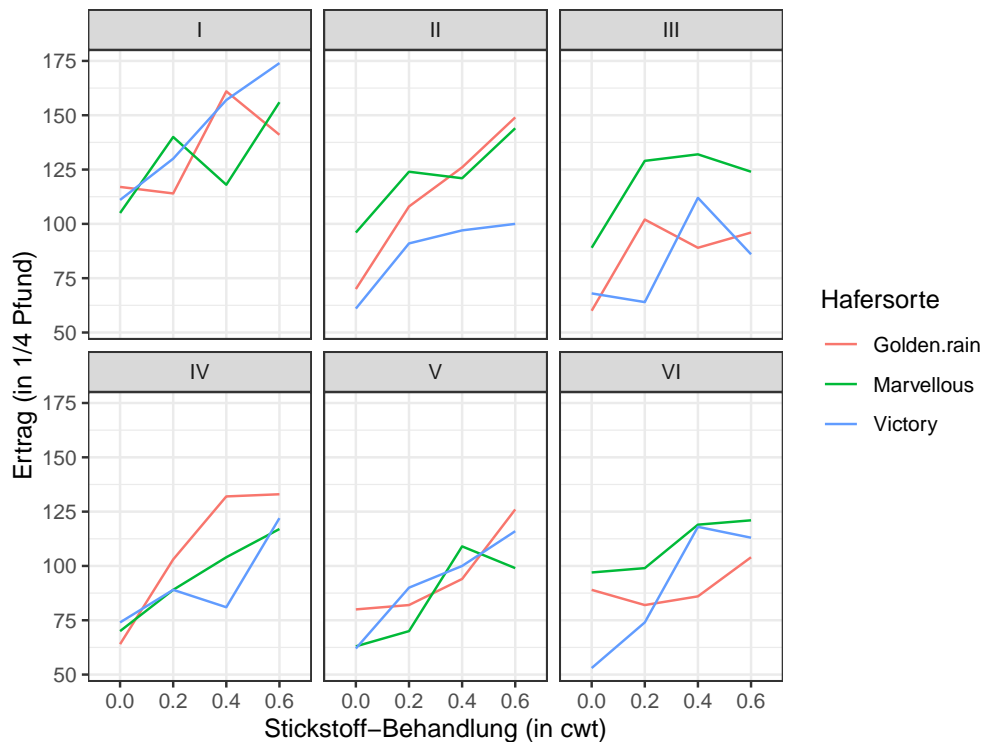


Abbildung 2: Erträge aufgeteilt nach *Block*, *Sorte* und *Behandlung*

## 4.2 Modellanalyse

Die Betrachtung des Interaktionsplots in Abbildung 3 zeigt, dass Wechselwirkungen vorliegen, da die Linien keine exakte Parallelität aufweisen. Dementsprechend hat das gemischte lineare Modell die in (8) angegebene Darstellung.

$$y_{ijk} = \mu + \theta_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + e'_{ij} + e_{ijk} \quad (i = 1, \dots, 6, j = 1, \dots, 3, k = 1, \dots, 4) \quad (8)$$

Dabei bezeichnet  $y_{ijk}$  den *Ertrag* von der  $j$ -ten *Hafersorte* im  $i$ -ten *Block*, die mit der  $k$ -ten Stufe *Stickstoff* behandelt wurde. Das allgemeine Mittel wird durch  $\mu$  dargestellt und



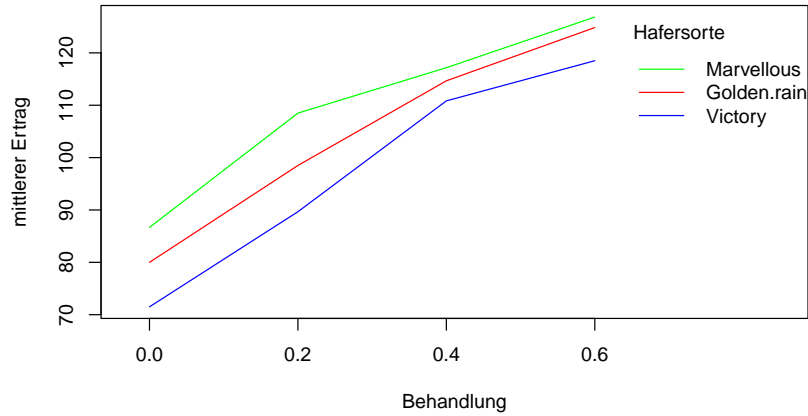


Abbildung 3: Interaktionsplot zur Beurteilung der Wechselwirkungen

$\theta_i$  steht für den festen differentiellen Effekt des  $i$ -ten *Blocks*, während  $\alpha_j$  für die festen differentiellen Effekte der  $j$ -ten Stufe des Faktors *Sorte* und  $\beta_k$  für die festen differentiellen Effekte der  $k$ -ten Stufe des Faktors *Behandlung* steht. Mit  $(\alpha\beta)_{jk}$  wird die vorhandene Wechselwirkung von *Hafersorte* und *Behandlung* angegeben.

In Tabelle 8 sind die mittels KQ-Methode bestimmten Schätzer angegeben, welche die Nebenbedingungen  $\sum_{i=1}^6 \theta_i = 0$ ,  $\sum_{j=1}^3 \alpha_j = 0$ ,  $\sum_{k=1}^4 \beta_k = 0$ , sowie  $\sum_{j=1}^3 (\alpha\beta)_{jk} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, 4$  und  $\sum_{k=1}^4 (\alpha\beta)_{jk} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, 3$  allesamt erfüllen.

Die Überprüfung der Normalverteilung der Residuen des whole- und sub-Plot-Fehlers anhand von Quantile-Quantile-Plots (siehe Abbildung 4) lässt darauf schließen, dass die Annahme beibehalten werden kann. Auch die Annahme der homoskedastischen Varianzen und Unabhängigkeit kann mit Blick auf Abbildung 5 nicht verworfen werden, sodass alle Annahmen für die ANOVA erfüllt sind.

Da die F-Statistik  $\frac{MSA}{MSE_W} = 1.4853 < F_{2,10,0.95} = 4.1028$  ist, wird die Hypothese  $H_0^A$  :

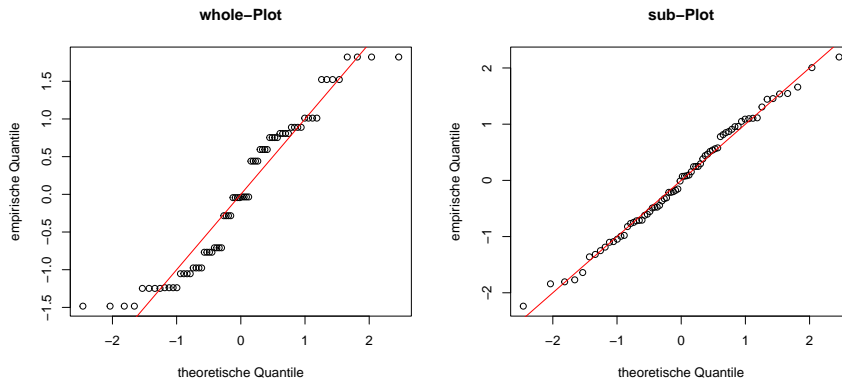


Abbildung 4: Quantile-Quantile-Plots der Residuen

„Alle Effekte der *Hafersorten* sind gleich“ beibehalten (vgl. Tabelle 5). Auch die Hypothese

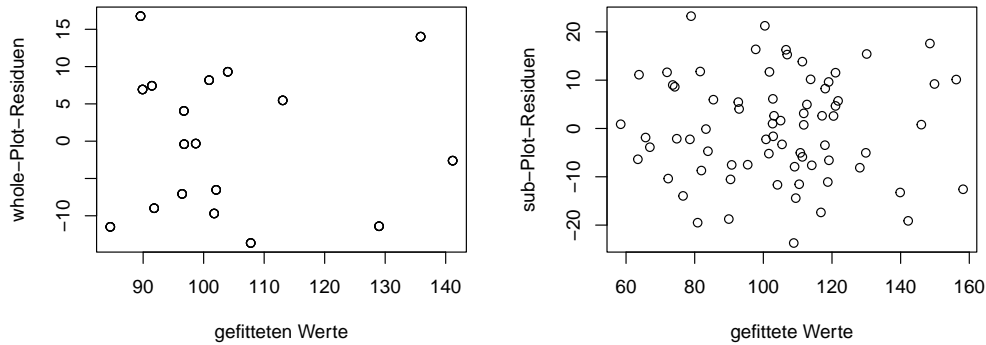


Abbildung 5: Residualplots

$H_0^{AB}$  : „Alle Effekte der Wechselwirkungen sind gleich“ lässt sich wegen  $\frac{MS(AB)}{MSE_S} = 0.3028 < F_{6,45,0.95} = 2.3083$  nicht verwerfen. Aber die Hypothese  $H_0^B$  : „Alle Effekte der *Stickstoff-Behandlung* sind gleich“ wird abgelehnt, weil  $\frac{MSB}{MSE_S} = 37.6857 > F_{3,45,0.95} = 2.8115$  gilt. Demnach gibt es mindestens eine Faktorstufe von der *Behandlung*, die sich signifikant von den anderen unterscheidet.

Tabelle 5: Varianzanalysetafel

	Freiheitsgrade	Quadratsumme	mittlere Quadrats.	F-Statistik
Block	5	15875.28	-	-
Hafersorte	2	1786.36	893.18	1.4853
whole-Plot-Residuen	10	6013.306	601.33	-
Behandlung	3	20020.50	6673.50	37.6857
Wechselwirkung	6	321.75	53.625	0.3028
sub-Plot-Residuen	45	7968.75	177.08	-
Gesamt	71	51985.94	-	-

### 4.3 Multiple Vergleiche

Um nun zu untersuchen welche Stufen der *Behandlung* mit Stickstoff sich zum Niveau  $\alpha = 5\%$  signifikant von den anderen unterscheidet, wird der Zweistichproben-t-Test mit Holm-Korrektur auf den Faktor *Behandlung* angewendet. Tabelle 6 verdeutlicht, dass zwischen den Faktorstufen 0.0 cwt und 0.4 cwt (p-Wert =  $5.0 \cdot 10^{-5}$ ), 0.0 cwt und 0.6 cwt (p-Wert =  $3.6 \cdot 10^{-7}$ ), sowie 0.2 cwt und 0.6 cwt (p-Werte = 0.007) signifikante Unterschiede vorliegen, da ihre p-Werte unter dem multiplen Niveau  $\alpha = 0.05$  liegen.

Tabelle 6: Zweistichproben-t-Test mit Holm-Korrektur

	0.0 cwt	0.2 cwt	0.4 cwt
0.2 cwt	0.053	-	-
0.4 cwt	$5.0 \cdot 10^{-5}$	0.225	-
0.6 cwt	$3.6 \cdot 10^{-7}$	0.007	1.000

Eine erneute Betrachtung der Verteilung des *Ertrags* in Abhängigkeit der *Behandlung* in Abbildung 6 zeigt, dass die Steigerung des *Ertrags* mit größer werdender Stärke der *Stickstoff-Behandlung* dazu führt, dass *Behandlungsstufen* mit einer Differenz von mehr als 0.2 cwt signifikant verschieden sind.

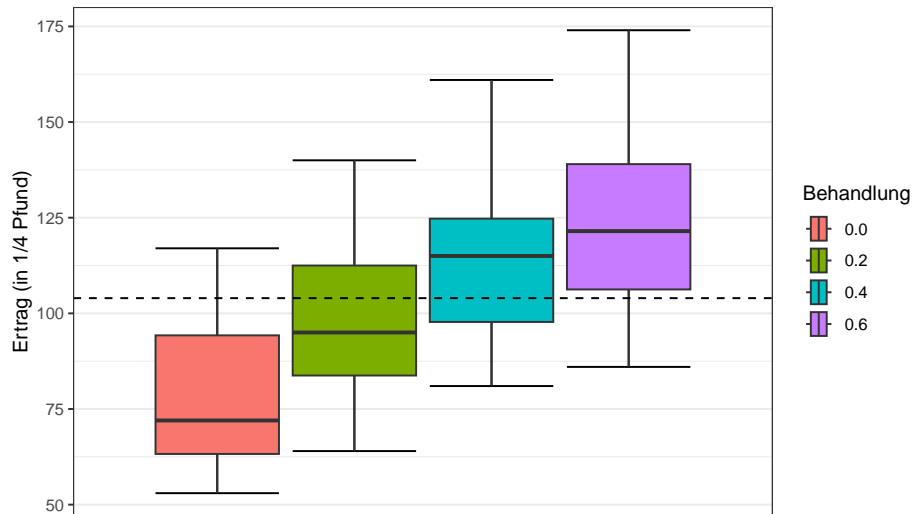


Abbildung 6: Verteilung des Ertrags in Abhängigkeit der Behandlung

## 5 Zusammenfassung

# Literaturverzeichnis

## Literatur

- Crawley, Michael J. (2012). „Analysis of Variance“. In: *The R Book*. 2. Aufl. John Wiley & Sons, Ltd, S. 498–536. ISBN: 9781118448908. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781118448908.ch11>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118448908.ch11>.
- Dahl, David B. et al. (2019). *xtable: Export Tables to LaTeX or HTML*. R package version 1.8-4. URL: <https://CRAN.R-project.org/package=xtable>.
- Dean, Angela, Daniel Voss und Danel Draguljić (2017). „Split-Plot Designs“. In: *Design and Analysis of Experiments*. Springer International Publishing: Cham, S. 703–764. ISBN: 978-3-319-52250-0. DOI: 10.1007/978-3-319-52250-0\_19. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-52250-0\\_19](https://doi.org/10.1007/978-3-319-52250-0_19).
- Groß, Jürgen (2010). *Grundlegende Statistik mit R. Eine anwendungsorientierte Einführung in die Verwendung der Statistik Software R*. 1. Aufl. Vieweg+Teubner Verlag Wiesbaden. ISBN: 978-3-8348-1039-7. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-8348-9677-3>.
- Hartung, Joachim, Bärbel Elpelt und Karl-Heinz Klösener (2009). *Statistik. Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*. 15. Aufl. Oldenbourg Verlag: München.
- Kuznetsova, Alexandra, Per B. Brockhoff und Rune H. B. Christensen (2017). „lmerTest Package: Tests in Linear Mixed Effects Models“. In: *Journal of Statistical Software* 82(13), S. 1–26. DOI: 10.18637/jss.v082.i13.
- R Core Team (2022). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. URL: <https://www.R-project.org/>.
- Saville, David J. und Graham R. Wood (1991). „Split Plot Design“. In: *Statistical Methods: The Geometric Approach*. Springer New York: New York, NY, S. 354–379. ISBN: 978-1-4612-0971-3. DOI: 10.1007/978-1-4612-0971-3\_14. URL: [https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0971-3\\_14](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0971-3_14).
- Toutenburg, Helge (2003). *Lineare Modelle. Theorie und Anwendungen*. 2. Aufl. Physica Heidelberg: Heidelberg. ISBN: 978-3-7908-1519-1. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-57348-4>.
- Wickham, Hadley (2016). *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Springer-Verlag New York. ISBN: 978-3-319-24277-4. URL: <https://ggplot2.tidyverse.org>.
- Wickham, Hadley und Jennifer Bryan (2022). *readxl: Read Excel Files*. R package version 1.4.1. URL: <https://CRAN.R-project.org/package=readxl>.

# Anhang

Tabelle 7: Darstellung des Ertrags im Split-Plot-Plan

Feld	Hafersorte	Behandlung mit Stickstoff			
		1 (=0.0 cwt)	2 (=0.2 cwt)	3 (=0.4 cwt)	4 (=0.6 cwt)
1	1 (=Victory)	$y_{111} = 111$	$y_{112} = 130$	$y_{113} = 157$	$y_{114} = 174$
	2 (=Golden.rain)	$y_{121} = 117$	$y_{122} = 114$	$y_{123} = 161$	$y_{124} = 141$
	3 (=Marvellous)	$y_{131} = 105$	$y_{132} = 140$	$y_{133} = 118$	$y_{134} = 156$
2	1 (=Victory)	$y_{211} = 61$	$y_{212} = 91$	$y_{213} = 97$	$y_{214} = 100$
	2 (=Golden.rain)	$y_{221} = 70$	$y_{222} = 108$	$y_{223} = 126$	$y_{224} = 149$
	3 (=Marvellous)	$y_{231} = 96$	$y_{232} = 124$	$y_{233} = 121$	$y_{234} = 144$
3	1 (=Victory)	$y_{311} = 68$	$y_{312} = 64$	$y_{313} = 112$	$y_{314} = 86$
	2 (=Golden.rain)	$y_{321} = 60$	$y_{322} = 102$	$y_{323} = 89$	$y_{324} = 96$
	3 (=Marvellous)	$y_{331} = 89$	$y_{332} = 129$	$y_{333} = 132$	$y_{334} = 124$
4	1 (=Victory)	$y_{411} = 74$	$y_{412} = 89$	$y_{413} = 81$	$y_{414} = 122$
	2 (=Golden.rain)	$y_{421} = 64$	$y_{422} = 103$	$y_{423} = 132$	$y_{424} = 133$
	3 (=Marvellous)	$y_{431} = 70$	$y_{432} = 89$	$y_{433} = 104$	$y_{434} = 117$
5	1 (=Victory)	$y_{511} = 62$	$y_{512} = 90$	$y_{513} = 100$	$y_{514} = 116$
	2 (=Golden.rain)	$y_{521} = 80$	$y_{522} = 82$	$y_{523} = 94$	$y_{524} = 126$
	3 (=Marvellous)	$y_{531} = 63$	$y_{532} = 70$	$y_{533} = 109$	$y_{534} = 99$
6	1 (=Victory)	$y_{611} = 53$	$y_{612} = 74$	$y_{613} = 118$	$y_{614} = 113$
	2 (=Golden.rain)	$y_{621} = 89$	$y_{622} = 82$	$y_{623} = 86$	$y_{624} = 104$
	3 (=Marvellous)	$y_{631} = 97$	$y_{632} = 99$	$y_{633} = 119$	$y_{634} = 121$

Tabelle 8: Schätzer der Parameter

$\hat{\mu}$	103.97	$\hat{\alpha}_1$	0.53	$\widehat{(\alpha\beta)}_{11}$	0.08	$\widehat{(\alpha\beta)}_{24}$	-2.38
$\hat{\theta}_1$	31.36	$\hat{\alpha}_2$	5.82	$\widehat{(\alpha\beta)}_{12}$	-0.92	$\widehat{(\alpha\beta)}_{31}$	-1.54
$\hat{\theta}_2$	3.28	$\hat{\alpha}_3$	-6.35	$\widehat{(\alpha\beta)}_{13}$	-0.08	$\widehat{(\alpha\beta)}_{32}$	-2.87
$\hat{\theta}_3$	-8.06	$\hat{\beta}_1$	-24.58	$\widehat{(\alpha\beta)}_{14}$	0.92	$\widehat{(\alpha\beta)}_{33}$	2.96
$\hat{\theta}_4$	-5.81	$\hat{\beta}_2$	-5.08	$\widehat{(\alpha\beta)}_{21}$	1.46	$\widehat{(\alpha\beta)}_{34}$	1.46
$\hat{\theta}_5$	-13.06	$\hat{\beta}_3$	10.25	$\widehat{(\alpha\beta)}_{22}$	3.79		
$\hat{\theta}_6$	-7.72	$\hat{\beta}_4$	19.42	$\widehat{(\alpha\beta)}_{23}$	-2.88		

Tabelle 9: Mittelwerte bzgl. *Block* und *Sorte*

Block	Victory (=1)	Golden.rain (=2)	Marvellous (=3)
1	$\overline{y_{11.}} = 143.00$	$\overline{y_{12.}} = 133.25$	$\overline{y_{13.}} = 129.75$
2	$\overline{y_{21.}} = 87.25$	$\overline{y_{22.}} = 113.25$	$\overline{y_{23.}} = 121.25$
3	$\overline{y_{31.}} = 82.50$	$\overline{y_{32.}} = 86.75$	$\overline{y_{33.}} = 118.50$
4	$\overline{y_{41.}} = 91.50$	$\overline{y_{42.}} = 108.00$	$\overline{y_{43.}} = 95.00$
5	$\overline{y_{51.}} = 92.00$	$\overline{y_{52.}} = 95.50$	$\overline{y_{53.}} = 85.25$
6	$\overline{y_{61.}} = 89.50$	$\overline{y_{62.}} = 90.25$	$\overline{y_{63.}} = 109.00$
Sorten-Mittelwerte	$\overline{y_{.1.}} = 97.63$	$\overline{y_{.2.}} = 104.50$	$\overline{y_{.3.}} = 109.79$

Tabelle 10: Mittelwerte bzgl. *Block* und *Behandlung*

Block	0.0 cwt	0.2 cwt	0.4 cwt	0.6 cwt	Block-Mittelwerte
1	$\overline{y_{1.1}} = 111.00$	$\overline{y_{1.2}} = 128.00$	$\overline{y_{1.3}} = 145.33$	$\overline{y_{1.4}} = 157.00$	$\overline{y_{1..}} = 135.33$
2	$\overline{y_{2.1}} = 75.67$	$\overline{y_{2.2}} = 107.67$	$\overline{y_{2.3}} = 114.67$	$\overline{y_{2.4}} = 131.00$	$\overline{y_{2..}} = 107.25$
3	$\overline{y_{3.1}} = 72.33$	$\overline{y_{3.2}} = 98.33$	$\overline{y_{3.3}} = 111.00$	$\overline{y_{3.4}} = 102.00$	$\overline{y_{3..}} = 95.92$
4	$\overline{y_{4.1}} = 69.33$	$\overline{y_{4.2}} = 93.67$	$\overline{y_{4.3}} = 105.67$	$\overline{y_{4.4}} = 124.00$	$\overline{y_{4..}} = 98.17$
5	$\overline{y_{5.1}} = 68.33$	$\overline{y_{5.2}} = 80.67$	$\overline{y_{5.3}} = 101.00$	$\overline{y_{5.4}} = 113.67$	$\overline{y_{5..}} = 90.92$
6	$\overline{y_{6.1}} = 79.67$	$\overline{y_{6.2}} = 85.00$	$\overline{y_{6.3}} = 107.67$	$\overline{y_{6.4}} = 112.67$	$\overline{y_{6..}} = 96.25$

Tabelle 11: Mittelwerte bzgl. *Sorte* und *Behandlung*

Sorte	0.0 cwt	0.2 cwt	0.4 cwt	0.6 cwt
Victory (=1)	$\overline{y_{.11}} = 71.50$	$\overline{y_{.12}} = 89.67$	$\overline{y_{.13}} = 110.83$	$\overline{y_{.14}} = 118.50$
Golden.rain (=2)	$\overline{y_{.21}} = 80.00$	$\overline{y_{.22}} = 98.50$	$\overline{y_{.23}} = 114.67$	$\overline{y_{.24}} = 124.83$
Marvellous (=3)	$\overline{y_{.31}} = 86.67$	$\overline{y_{.32}} = 108.50$	$\overline{y_{.33}} = 117.17$	$\overline{y_{.34}} = 126.83$
Behandlungs-Mittelwerte	$\overline{y_{..1}} = 79.39$	$\overline{y_{..2}} = 98.89$	$\overline{y_{..3}} = 114.22$	$\overline{y_{..4}} = 123.39$