

Technische Universität Dortmund

Fakultät Statistik

Wintersemester 2022/2023

Fallstudien I

Projekt 3

Auswertung eines Versuchsplans

Dozent: Prof. Dr. Guido Knapp

M. Sc. Yassine Talleb

Caroline Baer

Louisa Poggel

Julia Keiter

Daniel Sipek

Gruppennummer: 1

01.12.2022

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Problemstellung	1
3	Statistische Methoden	2
3.1	Versuchsdesign	2
3.2	Modell	3
3.3	Multiple Vergleiche	6
4	Statistische Auswertung	7
4.1	Deskriptive Zusammenfassung der Daten	7
4.2	Modellanalyse	8
4.3	Multiple Vergleiche	10
5	Zusammenfassung	11
	Literaturverzeichnis	13
	Anhang	14

1 Einleitung

Dieser Bericht behandelt die Auswertung eines landwirtschaftlichen Versuchsplans im Split-Plot-Design anhand der Varianzanalyse eines gemischt linearen Modells.

Dazu wird zunächst das Versuchsdesign und das Ziel der Untersuchung ausführlicher in Kapitel 2 erörtert. Anschließend werden das Modell, die Hypothesen sowie die Methoden zur Varianzanalyse und multiplen Vergleiche genauer beschrieben (Kapitel 3), bevor diese dann in Kapitel 4 nach einer deskriptiven Zusammenfassung der Daten angewendet und ausgewertet werden. Zuletzt erfolgt in Kapitel 5 eine Übersicht der wichtigsten Ergebnisse und ein Ausblick hinsichtlich weiterer möglicher Untersuchungsaspekte.

2 Problemstellung

Der vorliegende Datensatz *Hafer.xlsx* beinhaltet die Ergebnisse eines landwirtschaftlichen Versuchsplans. Bei diesem wurde der *Ertrag* von verschiedenen *Hafersorten* mit unterschiedlich starken *Behandlungen* mit Stickstoff gemessen.

Dazu wurden sechs *Blöcke* bzw. *Felder* in je drei main-Plots für die *Hafersorten* Victory, Golden.rain und Marvellous aufgeteilt und diese dann wiederum in je vier sub-Plots für die *Behandlung* mit 0.0 cwt, 0.2 cwt, 0.4 cwt und 0.6 cwt Stickstoff. Insgesamt liegen daher 72 Beobachtungen zu den jeweiligen *Erträgen* der 72 sub-plots vor. Die *Erträge* wurden dabei in $\frac{1}{4}$ Pfund (im Folgenden nur mit Pfund abgekürzt) gemessen und jeder einzelne sub-Plot hat die Größe von $\frac{1}{80}$ Acre.

Bei den Variablen *Block*, *Hafersorte* und *Behandlung* handelt es sich um nominale Variablen, während die Variable *Ertrag* metrisch stetig ist.

Ziel des Berichts ist die Untersuchung des Versuchsplans in Form eines Split-Plot-Designs, sowie das Herausstellen möglicher signifikanter Unterschiede zwischen den *Sorten* und *Behandlungen*. Dazu wird ein gemischtes lineares Modell erstellt, um mittels Varianzanalyse zu beurteilen, ob die Wahl der *Hafersorte* oder *Behandlung* einen deutlichen Einfluss auf den *Ertrag* hat. Falls ein solcher vorliegen sollte, wird anhand von multiplen Vergleichen untersucht, welche *Hafersorte* oder welche *Stickstoff-Behandlung* einen signifikant anderen Effekt als die anderen Faktorstufen hat.

3 Statistische Methoden

Die statistische Auswertung mit den hier aufgeführten Methoden wird mit der Software R Core Team (2022) Version 4.2.2 durchgeführt. Zusätzlich wichtige Pakete hierfür sind `readxl` von Wickham und Bryan (2022), `xtable` von Dahl et al. (2019), `ggplot2` von Wickham (2016) und `lmerTest` von Kuznetsova et al. (2017).

3.1 Versuchsdesign

Beim hier vorliegenden Versuchsdesign handelt es sich um einen Split-Plot-Plan (vgl. Saville und Wood (1991), Kap. 14). Dabei wurden sechs *Blöcke* in jeweils drei main- bzw. whole-Plots aufgeteilt und zu diesen je eine der drei *Hafersorten* zufällig zugewiesen. Anschließend wurde jeder main-Plot in vier sub-Plots unterteilt und jedem sub-Plot eine Stufe der *Stickstoff-Behandlung* zufällig zugeordnet. Dementsprechend handelt es sich bei *Hafersorte* um den whole-Plot-Faktor und bei *Behandlung* um den sub-Plot-Faktor. In Abbildung 1 ist dargestellt, wie die Aufteilung und Randomisierung der Faktorstufen beispielsweise aussehen könnte.

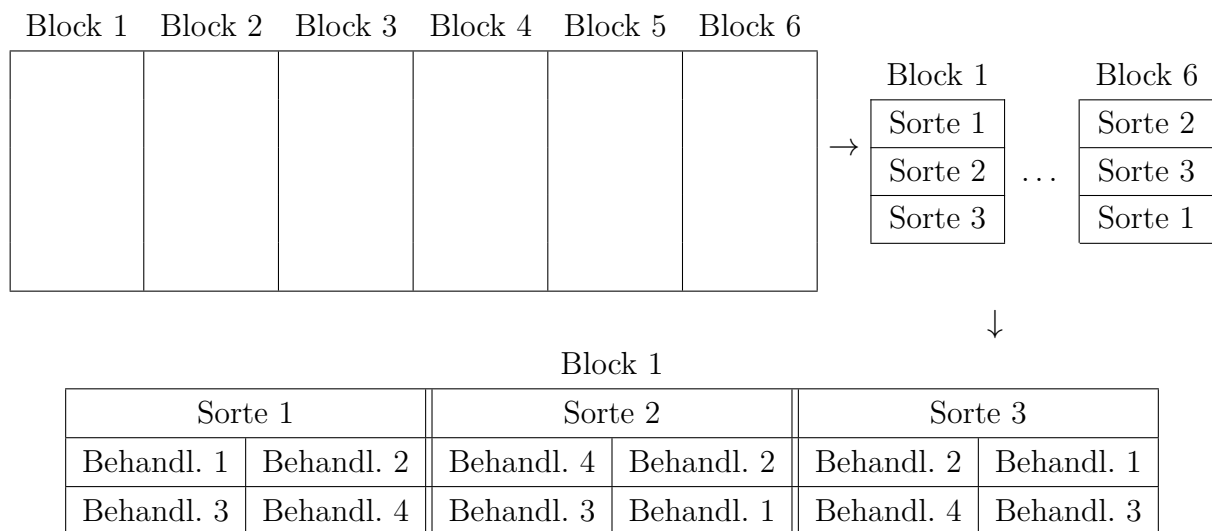


Abbildung 1: Versuchsaufbau nach Split-Plot-Plan

3.2 Modell

Das gemischte lineare Modell zum Split-Plot-Design hat die in Formel (1) angegebene Darstellungsform (vgl. Dean et al. (2017), Kap. 19.2)

$$y_{ijk} = \mu + \theta_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + e'_{ij} + e_{ijk} \quad (i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s, k = 1, \dots, t) \quad (1)$$

Dabei steht y_{ijk} im allgemeinen für den Wert der Zielvariablen bezüglich der i -ten Stufe des Block-Faktors, der j -ten Stufe des whole-Plot-Faktors und der k -ten Stufe des sub-Plot-Faktors. In dem hier vorliegenden Versuchsplan bezeichnet y_{ijk} den *Ertrag* von der j -ten *Hafersorte* im i -ten *Block*, die mit der k -ten Stufe *Stickstoff* behandelt wurde. Das allgemeine Mittel wird durch μ dargestellt und θ_i steht für den festen differentiellen Effekt des i -ten *Blocks*, während α_j für die festen differentiellen Effekte der j -ten Stufe des Faktors *Sorte* und β_k für die festen differentiellen Effekte der k -ten Stufe des Faktors *Behandlung* steht. Mit $(\alpha\beta)_{jk}$ wird die womöglich vorhandene Wechselwirkung von *Hafersorte* und *Behandlung* angegeben. Für den whole-Plot-Fehler e'_{ij} soll $e'_{ij} \sim N(0, \sigma_w^2)$ gelten und für den sub-Plot-Fehler $e_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2)$.

evtl. Kovarianzstruktur

Ebenfalls erfüllt sein müssen die Nebenbedingungen $\sum_{i=1}^r \theta_i = 0$, $\sum_{j=1}^s \alpha_j = 0$, $\sum_{k=1}^t \beta_k = 0$, sowie $\sum_{j=1}^s (\alpha\beta)_{jk} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, t$ und $\sum_{k=1}^t (\alpha\beta)_{jk} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, s$.

Das Modell wird in R modelliert mit `aov(Zielgröße ~ Blockfaktor + wholePlotFaktor * subPlotFaktor + Error(Blockfaktor/wholePlotFaktor), data = daten)`. Zur Untersuchung auf vorhandene Wechselwirkungen eignet sich insbesondere der Interaktionsplot der in R mithilfe von `interaction.plot()` ausgegeben werden kann (siehe Crawley (2012), Kap. 11.3.1). Dabei werden an der x-Achse die Stufen des sub-Plot-Faktors und an der y-Achse die Zielvariable abgetragen. Pro Stufe des whole-Plot-Faktors werden dann die Mittelwerte der zugehörigen Werte der Zielvariablen, dh. $\overline{y_{.jk}} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r y_{ijk}$, eingezeichnet. Falls keine Wechselwirkungen vorhanden sind, sind die in der Grafik eingezeichneten Linien parallel zueinander, da $\overline{y_{.jk}} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r (\mu + \theta_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk})$ ist und $\overline{y_{.j\tilde{k}}} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r (\mu + \theta_i + \alpha_{\tilde{j}} + \beta_k + (\alpha\beta)_{\tilde{j}k})$. Demnach beträgt der Unterschied zwischen den Linien von der j -ten und der \tilde{j} -ten Stufe des whole-Plot-Faktors für alle k Stufen des sub-Plot-Faktors gerade $\overline{y_{.jk}} - \overline{y_{.j\tilde{k}}} = \alpha_j + (\alpha\beta)_{jk} - (\alpha_{\tilde{j}} + (\alpha\beta)_{\tilde{j}k})$. Falls nun keine Wechselwirkung vorliegt, also $(\alpha\beta)_{jk} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, s, \forall k = 1, \dots, t$ gilt, so ist die Differenz für alle Stufen des sub-Plot-Faktors mit $\alpha_j - \alpha_{\tilde{j}}$ gleichgroß und die eingezeichneten Linien sind parallel.

Die Parameter werden dabei aufgrund des orthogonalen Versuchsplans wie in Kapitel 5.7 von Toutenburg (2003) mittels KQ-Methode geschätzt. Die Formeln (2) bis (4) zeigen dies am Beispiel des allgemeinen Mittels, wobei die Funktion $S(\varphi)$ für die zu minimierende Summe der Quadrate steht und φ für den zu schätzenden Parametervektor

$$\varphi = (\mu, \theta_1, \dots, (\alpha\beta)_{st})^\top.$$

$$S(\varphi) := \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t (y_{ijk} - \mu - \theta_i - \alpha_j - \beta_k - (\alpha\beta)_{jk})^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial S(\varphi)}{\partial \mu} = -2 \cdot \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t (y_{ijk} - \mu - \theta_i - \alpha_j - \beta_k - (\alpha\beta)_{jk}) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &= -2 \cdot \left(y_{...} - rst \cdot \mu - st \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^r \theta_i}_{=0} - rt \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^s \alpha_j}_{=0} - rs \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^t \beta_k}_{=0} - r \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t (\alpha\beta)_{jk}}_{=0} \right) \\ &\stackrel{\text{Nebenbed.'en}}{=} -2 \cdot (y_{...} - rst \cdot \mu) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\iff y_{...} = rst \cdot \mu \iff \mu = \frac{1}{rst} \cdot y_{...} = \overline{y_{...}} \end{aligned} \quad (4)$$

Somit ergeben sich die in Tabelle 1 dargestellten Parameter-Schätzungen.

Tabelle 1: Schätzungen der Modellparameter

$\hat{\mu}$	$\hat{\theta}_i$	$\hat{\alpha}_j$	$\hat{\beta}_k$	$\widehat{(\alpha\beta)}_{jk}$
$\overline{y_{...}}$	$\overline{y_{i..}} - \overline{y_{...}}$	$\overline{y_{.j.}} - \overline{y_{...}}$	$\overline{y_{..k}} - \overline{y_{...}}$	$\overline{y_{.jk}} - \overline{y_{.j.}} - \overline{y_{..k}} + \overline{y_{...}}$

Für die Varianzanalyse (ANOVA) müssen nach Kapitel 11.1.2 von Crawley (2012) folgende Annahmen gelten.

- Es liegen gleiche Varianzen (Homoskedastizität) vor.
- Die Fehler sind unabhängig.
- Die Fehler sind normalverteilt.

Zur Überprüfung der Normalverteilung der Fehler werden die Residuen des whole-Plot-Fehlers und des sub-Plot-Fehlers mittels Quantile-Quantile-Plot betrachtet. Die Unabhängigkeit und Homoskedastizität der Fehler wird mittels Residualplot überprüft.

Bei der ANOVA werden die Quadratsummen, mittleren Quadratsummen, Freiheitsgrade und F-Statistiken bestimmt (vgl. Groß (2010), Kap. 19.2.1). In R wird eine nicht ganz vollständige Varianzanalysetafel mit der Anwendung der `summary()`-Funktion auf das `aov()`-Objekt ausgegeben, der im Vergleich zur vollständigen Tafel (vgl. Tabelle 2 und 3) unter anderem Angaben zum whole-Plot gesamt und gesamt fehlen.

Tabelle 2: Varianzanalysetafel

	Freiheitsgrade	Quadratsumme	mittlere Quadrats.	F-Statistik
Blockfaktor	$(r - 1)$	$SS\theta$	$MS\theta = \frac{SS\theta}{r-1}$	-
whole-Plot-Faktor	$(s - 1)$	SSA	$MSA = \frac{SSA}{s-1}$	$\frac{MSA}{MSE_W}$
whole-Plot-Residuen	$(r - 1)(s - 1)$	SSE_W	$MSE_W = \frac{SSE_W}{(r-1)(s-1)}$	-
whole-Plot gesamt	$rs - 1$	SSW	-	-
sub-Plot-Faktor	$(t - 1)$	SSB	$MSB = \frac{SSB}{t-1}$	$\frac{MSB}{MSE_S}$
Wechselwirkung	$(s - 1)(t - 1)$	$SS(AB)$	$MS(AB) = \frac{SS(AB)}{(s-1)(t-1)}$	$\frac{MS(AB)}{MSE_S}$
sub-Plot-Residuen	$s(r - 1)(t - 1)$	SSE_S	$MSE_S = \frac{SSE_S}{s(r-1)(t-1)}$	-
Gesamt	$rst - 1$	SSG	-	-

Tabelle 3: Definition der Quadratsummen

$SS\theta := st \cdot \sum_{i=1}^r \hat{\theta}_i^2 = st \cdot \sum_{i=1}^r (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2$
$SSA := rt \cdot \sum_{j=1}^s \hat{\alpha}_j^2 = rt \cdot \sum_{j=1}^s (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2$
$SSB := rs \cdot \sum_{k=1}^t \hat{\beta}_k^2 = rs \cdot \sum_{k=1}^t (\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...})^2$
$SS(AB) := r \cdot \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \widehat{(\alpha\beta)}_{jk}^2$ $= r \cdot \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t (\bar{y}_{.jk} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...})^2$
$SSW := t \cdot \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{...})^2$
$SSE_W := SSW - SS\theta - SSA$
$SSGesamt := \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2$
$SSE_S := SSGesamt - SSW - SSB - SS(AB)$

Um zu prüfen ob es signifikante Unterschiede zwischen den Stufen des whole-Plot-Faktors, sub-Plot-Faktors oder der Wechselwirkung gibt, werden die Hypothesen (5) bis (7) zum Niveau $\alpha = 5\%$ betrachtet. Wie in Kapitel XI von Hartung et al. (2009) beschrieben, wird die Hypothese H_0^A : „Alle Effekte der Stufen des whole-Plot-Faktors sind gleich“ abgelehnt falls gilt, dass die F-Statistik $\frac{MSA}{MSE_W} > F_{(s-1), (r-1)(s-1), 0.95}$ ist. Die Hypothese H_0^B : „Alle Effekte der Stufen des sub-Plot-Faktors sind gleich“ wird abgelehnt, falls $\frac{MSB}{MSE_S} > F_{(t-1), s(r-1)(t-1), 0.95}$ ist und H_0^{AB} wird abgelehnt, falls $\frac{MS(AB)}{MSE_S} > F_{(s-1)(t-1), s(r-1)(t-1), 0.95}$ gilt.

$$H_0^A : \alpha_1 = \dots = \alpha_s = 0 \quad vs. \quad H_1^A : \exists h \neq g \text{ mit } \alpha_h \neq \alpha_g, \quad h, g \in \{1, \dots, s\} \quad (5)$$

$$H_0^B : \beta_1 = \dots = \beta_t = 0 \quad vs. \quad H_1^B : \exists h \neq g \text{ mit } \beta_h \neq \beta_g, \quad h, g \in \{1, \dots, t\} \quad (6)$$

$$H_0^{AB} : (\alpha\beta)_{11} = \dots = (\alpha\beta)_{st} = 0 \quad vs. \quad (7)$$

$$H_1^{AB} : \exists h, g \text{ mit } (\alpha\beta)_{hg} \neq 0, \quad \forall h \in \{1, \dots, s\}, \forall g \in \{1, \dots, t\}$$

3.3 Multiple Vergleiche

Falls sich herausstellt, dass es einen Faktor mit signifikanten Unterschieden gibt, also die zugehörige Hypothese verworfen wird, kann mittels Zweistichproben-t-Test und Holm-Korrektur untersucht werden, welche Stufen dafür verantwortlich sind.

Beim Zweistichproben-t-Test wird, wie in Kapitel 19.6.2 von Groß (2010) beschrieben, die Nullhypothese $H_0 : \bar{x} = \bar{z}$ für zwei Gruppen x und z aufgestellt. Im balancierten Modell ergibt sich wegen der gleichgroßen Gruppen die in Formel (8) dargelegte Teststatistik.

$$T = \sqrt{m} \cdot \frac{\bar{x} - \bar{z}}{\sqrt{s_x^2 + s_z^2}} \quad (8)$$

Hierbei ist m die Größe der Gruppen und $s_x^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{l=1}^m (x_l - \bar{x})^2$ die erwartungstreu geschätzte Varianz der Gruppe x . Die Teststatistik T ist unter der Nullhypothese t-verteilt mit $2m - 2$ Freiheitsgraden, sodass der Zweistichproben-t-Test ablehnt falls $|T| > t_{1-\frac{\alpha}{2}, 2m-2}$ gilt.

Da hier $h = p(p-1)\frac{1}{2}$ (mit p = Anzahl Faktorstufen) viele Vergleiche durchgeführt werden müssen, muss das Niveau der einzelnen Hypothesentestungen reduziert werden, damit insgesamt das multiple Niveau $\alpha = 0.05$ eingehalten wird (vgl. Groß (2010), Kap. 19.6). Dabei beschreibt das multiple Niveau, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass mindestens eine Hypothese fälschlicherweise abgelehnt wird, unabhängig davon wie viele wahr sind. Da die Bonferroni-Korrektur mit $\frac{\alpha}{h}$ als Niveau für die einzelnen Tests ziemlich konservativ ist und somit seltener ablehnt als eigentlich möglich, wird bei der hier durchgeführten Auswertung die Holm-Korrektur angewendet. Bei dieser Methode werden die p-Werte aufsteigend sortiert $p_{(1)} \leq \dots \leq p_{(h)}$ und wie in (9) transformiert (siehe Groß (2010), Kap. 19.6.1).

$$r_i := (h - i + 1) \cdot p_{(i)}, \quad \tilde{r}_i := \max_{j \leq i} r_j, \quad p_i^H = \begin{cases} \tilde{r}_i & , \text{ falls } \tilde{r}_i \leq 1 \\ 1 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (9)$$

In R wird dies durchgeführt durch den Aufruf von `pairwise.t.test(Zielvariable, Faktor, p.adjust.method = "holm")` und die ausgegebenen p-Werte können mit 0.05 verglichen werden.

4 Statistische Auswertung

4.1 Deskriptive Zusammenfassung der Daten

Der *Ertrag* liegt im arithmetischen Mittel bei 103.97 Pfund und im Median bei 102.50 Pfund (vgl. Tabelle 4). Insgesamt wurde unter den 72 sub-Plots der höchste *Ertrag* mit 174.00 Pfund und der niedrigste *Ertrag* mit 53.00 Pfund gemessen. Wie Tabelle 7 (S. 14) zu entnehmen ist, wurde der größte *Ertrag* ($y_{114} = 174$) auf *Feld* 1 mit der *Sorte* Victory und einer *Stickstoff-Behandlung* mit 0.6 cwt erreicht. Der kleinste *Ertrag* ($y_{611} = 53$) stammt von *Feld* 6 mit der *Hafersorte* Victory und 0.0 cwt, also keiner, *Behandlung* mit Stickstoff. Die Hälfte der Beobachtungen liegt zwischen 86.00 und 121.25 Pfund, sodass sich ein Interquartilsabstand von 35.25 Pfund ergibt.

Tabelle 4: Verteilung des *Ertrags*

Minimum	1. Quartil	Median	arithmetisches Mittel	3. Quartil	Maximum
53.00	86.00	102.50	103.97	121.25	174.00

Die Betrachtung der Mittelwerte in den Tabelle 9, 10 und 11 (S. 15) zeigt, dass die *Hafersorte* Marvellous mit 109.79 Pfund im Mittel von den *Sorten* den meisten *Ertrag* und *Victory* mit 97.63 Pfund den geringsten *Ertrag* bringt. Je stärker die *Behandlung* mit Stickstoff ist, desto größer ist der mittlere *Ertrag*. Von den *Blöcken* bringt *Feld* 1 den im Mittel größten *Ertrag* mit 135.33 Pfund und *Feld* 5 den kleinsten mit 90.92 Pfund.

Verdeutlicht wird dies außerdem in Abbildung 2, denn dort fällt sogleich auf, dass der *Ertrag* in *Block* 1 für alle *Sorten* tendenziell höher ist als bei den anderen *Blöcken*. Des Weiteren zeigt sich, dass der *Ertrag* mit stärkerer *Stickstoff-Behandlung* tendenziell steigt.

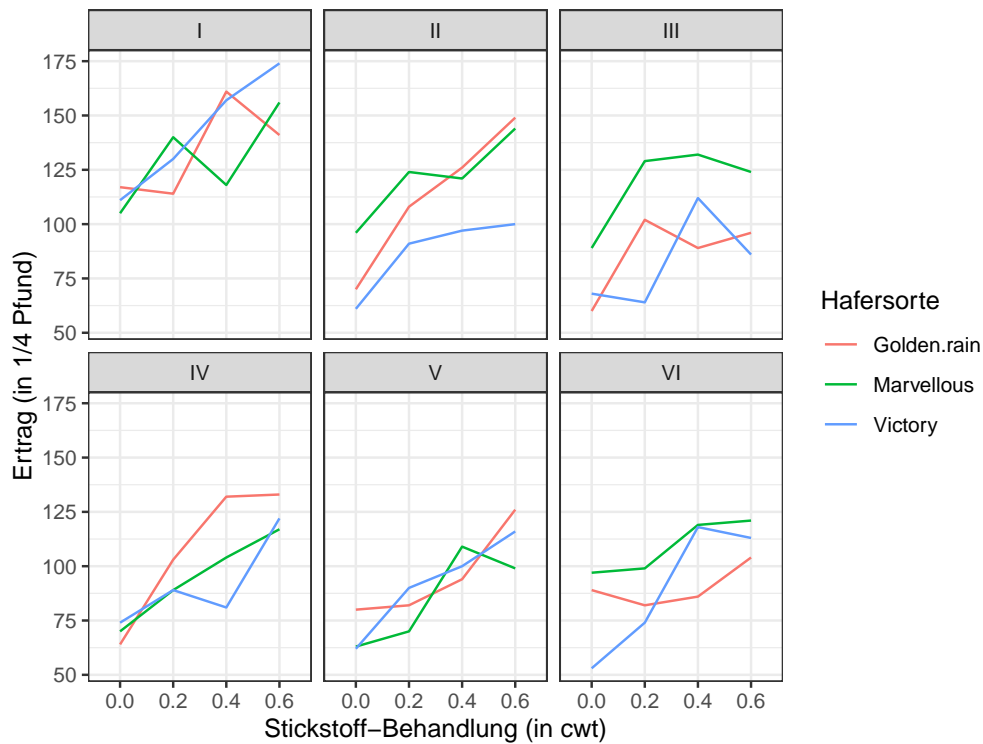


Abbildung 2: *Erträge aufgeteilt nach Block, Sorte und Behandlung*

4.2 Modellanalyse

Die Betrachtung des Interaktionsplots in Abbildung 3 zeigt, dass Wechselwirkungen vorliegen, da die Linien keine exakte Parallelität aufweisen. Dementsprechend hat das

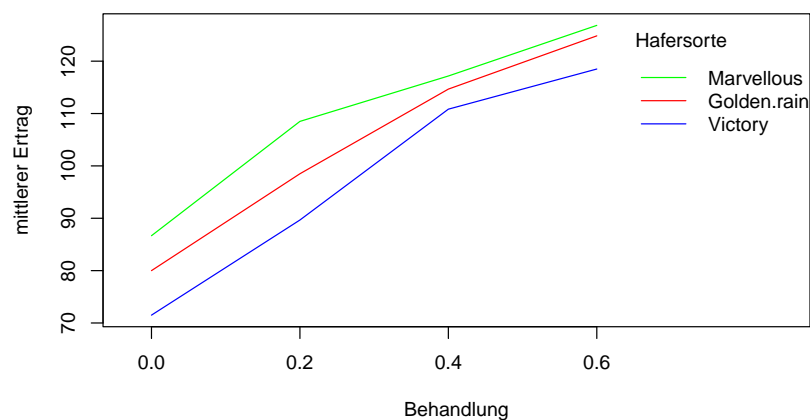


Abbildung 3: *Interaktionsplot zur Beurteilung der Wechselwirkungen*

gemischte lineare Modell die in (10) angegebene Darstellung.

$$y_{ijk} = \mu + \theta_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + e'_{ij} + e_{ijk} \quad (i = 1, \dots, 6, j = 1, \dots, 3, k = 1, \dots, 4) \quad (10)$$

Dabei bezeichnet y_{ijk} den *Ertrag* von der j -ten *Hafersorte* im i -ten *Block*, die mit der k -ten Stufe *Stickstoff* behandelt wurde. Das allgemeine Mittel wird durch μ dargestellt und θ_i steht für den festen differentiellen Effekt des i -ten *Blocks*, während α_j für die festen differentiellen Effekte der j -ten Stufe des Faktors *Sorte* und β_k für die festen differentiellen Effekte der k -ten Stufe des Faktors *Behandlung* steht. Mit $(\alpha\beta)_{jk}$ wird die vorhandene Wechselwirkung von *Hafersorte* und *Behandlung* angegeben.

In Tabelle 8 (S. 14) sind die mittels KQ-Methode bestimmten Schätzer angegeben, welche die Nebenbedingungen $\sum_{i=1}^6 \theta_i = 0$, $\sum_{j=1}^3 \alpha_j = 0$, $\sum_{k=1}^4 \beta_k = 0$, sowie $\sum_{j=1}^3 (\alpha\beta)_{jk} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, 4$ und $\sum_{k=1}^4 (\alpha\beta)_{jk} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, 3$ allesamt erfüllen.

Die Überprüfung der Normalverteilung der Residuen des whole- und sub-Plot-Fehlers anhand von Quantile-Quantile-Plots (siehe Abbildung 4) lässt darauf schließen, dass die Annahme beibehalten werden kann. Auch die Annahme der homoskedastischen Varianzen und Unabhängigkeit kann mit Blick auf Abbildung 5 nicht verworfen werden, sodass alle Annahmen für die ANOVA erfüllt sind.

evtl. Varianzschätzungen angeben inkl. Konfidenzintervall

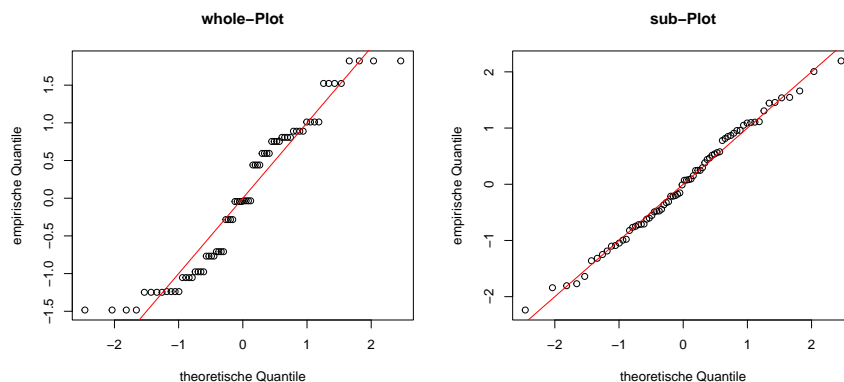


Abbildung 4: Quantile-Quantile-Plots der Residuen

Da die F-Statistik $\frac{MSA}{MSE_W} = 1.4853 < F_{2,10,0.95} = 4.1028$ ist, wird die Hypothese H_0^A : „Alle Effekte der *Hafersorten* sind gleich“ beibehalten (vgl. Tabelle 5). Auch die Hypothese H_0^{AB} : „Alle Effekte der Wechselwirkungen sind gleich“ lässt sich wegen $\frac{MS(AB)}{MSE_S} = 0.3028 < F_{6,45,0.95} = 2.3083$ nicht verwerfen. Aber die Hypothese H_0^B : „Alle Effekte der *Stickstoff-Behandlung* sind gleich“ wird abgelehnt, weil $\frac{MSB}{MSE_S} = 37.6857 > F_{3,45,0.95} = 2.8115$ gilt. Demnach gibt es mindestens eine Faktorstufe von der *Behandlung*, die sich signifikant von den anderen unterscheidet.

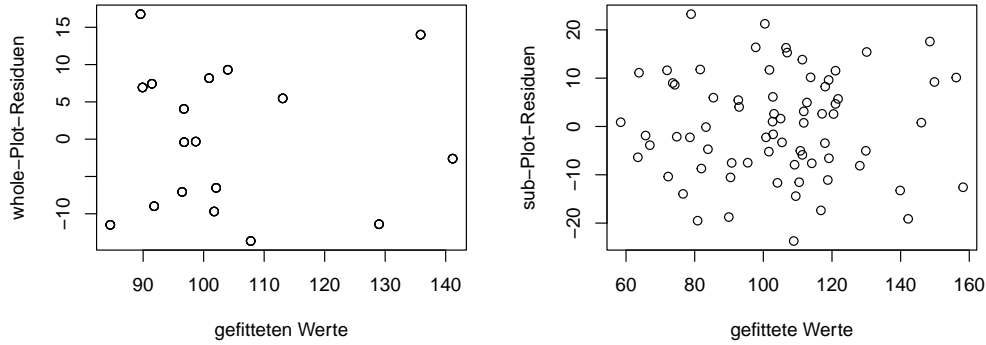


Abbildung 5: Residualplots

Tabelle 5: Varianzanalysetafel

	Freiheitsgrade	Quadratsumme	mittlere Quadrats.	F-Statistik
Block	5	15875.28	-	-
Haftersorte	2	1786.36	893.18	1.4853
whole-Plot-Residuen	10	6013.306	601.33	-
Behandlung	3	20020.50	6673.50	37.6857
Wechselwirkung	6	321.75	53.625	0.3028
sub-Plot-Residuen	45	7968.75	177.08	-
Gesamt	71	51985.94	-	-

4.3 Multiple Vergleiche

Um nun zu untersuchen welche Stufen der *Behandlung* mit Stickstoff sich zum Niveau $\alpha = 5\%$ signifikant von den anderen unterscheidet, wird der Zweistichproben-t-Test mit Holm-Korrektur auf den Faktor *Behandlung* angewendet. Dabei ergibt sich die in (11) angegebene Teststatistik, mit $s_g^2 = \frac{1}{rs-1} \cdot \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (y_{ijk} - \bar{y}_{..k})^2$.

$$\sqrt{(rs)} \cdot \frac{\bar{y}_{..g} - \bar{y}_{..h}}{\sqrt{s_g^2 + s_h^2}}, \quad g \neq h \in \{1, \dots, t\} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{(6 \cdot 3)} \cdot \frac{\bar{y}_{..g} - \bar{y}_{..h}}{\sqrt{s_g^2 + s_h^2}}, \quad g \neq h \in \{1, \dots, 4\} \quad (11)$$

Tabelle 6 verdeutlicht, dass zwischen den Faktorstufen 0.0 cwt und 0.4 cwt (p-Wert = $4.2 \cdot 10^{-5}$), 0.0 cwt und 0.6 cwt (p-Wert = $3.6 \cdot 10^{-7}$), sowie 0.2 cwt und 0.6 cwt (p-Werte = 0.0047) signifikante Unterschiede vorliegen, da ihre p-Werte unter dem multiplen Niveau $\alpha = 0.05$ liegen.

Tabelle 6: Zweistichproben-t-Test mit Holm-Korrektur

	0.0 cwt	0.2 cwt	0.4 cwt
0.2 cwt	0.0264	-	-
0.4 cwt	$4.2 \cdot 10^{-5}$	0.0750	-
0.6 cwt	$3.6 \cdot 10^{-7}$	0.0047	0.209

Eine erneute Betrachtung der Verteilung des *Ertrags* in Abhängigkeit der *Behandlung* in Abbildung 6 zeigt, dass die Steigerung des *Ertrags* mit größer werdender Stärke der *Stickstoff-Behandlung* dazu führt, dass *Behandlungsstufen* mit einer Differenz von mehr als 0.2 cwt signifikant verschieden sind.

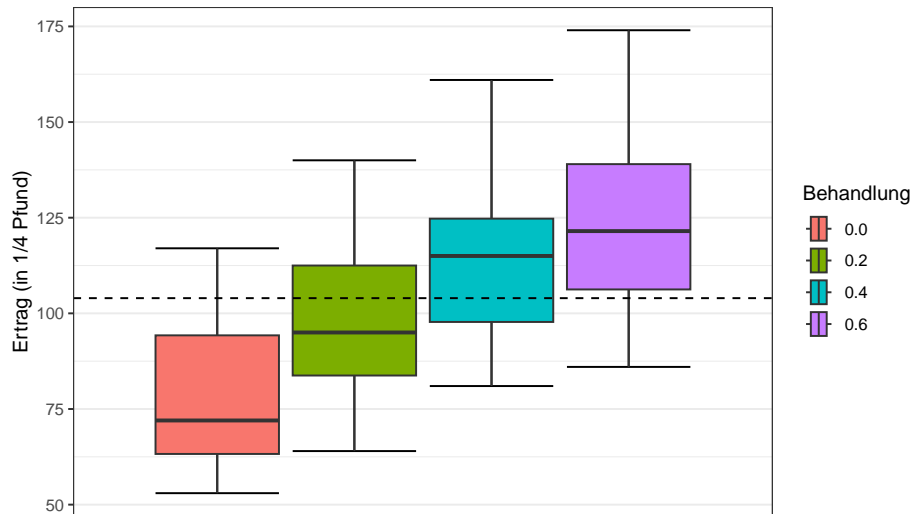


Abbildung 6: Verteilung des *Ertrags* in Abhängigkeit der *Behandlung*

5 Zusammenfassung

Die Analyse des Versuchsplans *Hafer.xlsx* im Split-Plot-Design mit zugehörigem gemischt linearem Modell hat ergeben, dass die *Hafersorte* sowie die Wechselwirkungen von *Hafer-sorte* und *Behandlung* zum Niveau $\alpha = 5\%$ keine signifikanten Unterschiede aufweisen. Für den Faktor *Behandlung* ließ sich mit dem F-Test der ANOVA jedoch nachweisen, dass der *Ertrag* von den verschiedenen Stärken der *Stickstoff-Behandlung* unterschiedlich beeinflusst wird. Eine genauere Untersuchung mittels Zweistichproben-t-Test und Holm-Korrektur hat gezeigt, dass diejenigen Stufen der *Behandlung*, die eine Differenz von mehr als 0.2 cwt haben, zum multiplen Niveau $\alpha = 5\%$ signifikant verschiedene Effekte haben.

Allgemein steigt der *Ertrag* mit zunehmender Stärke der *Stickstoff-Behandlung* und ist im Mittel bei der *Hafersorte* Marvellous am höchsten und bei Victory am kleinsten.

Ausblick: ...

Literaturverzeichnis

Literatur

- Crawley, Michael J. (2012). „Analysis of Variance“. In: *The R Book*. 2. Aufl. John Wiley & Sons, Ltd, S. 498–536. ISBN: 9781118448908. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781118448908.ch11>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118448908.ch11>.
- Dahl, David B. et al. (2019). *xtable: Export Tables to LaTeX or HTML*. R package version 1.8-4. URL: <https://CRAN.R-project.org/package=xtable>.
- Dean, Angela, Daniel Voss und Danel Draguljić (2017). „Split-Plot Designs“. In: *Design and Analysis of Experiments*. Springer International Publishing: Cham, S. 703–764. ISBN: 978-3-319-52250-0. DOI: 10.1007/978-3-319-52250-0_19. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-52250-0_19.
- Groß, Jürgen (2010). *Grundlegende Statistik mit R. Eine anwendungsorientierte Einführung in die Verwendung der Statistik Software R*. 1. Aufl. Vieweg+Teubner Verlag Wiesbaden. ISBN: 978-3-8348-1039-7. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-8348-9677-3>.
- Hartung, Joachim, Bärbel Elpelt und Karl-Heinz Klösener (2009). *Statistik. Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*. 15. Aufl. Oldenbourg Verlag: München.
- Kuznetsova, Alexandra, Per B. Brockhoff und Rune H. B. Christensen (2017). „lmerTest Package: Tests in Linear Mixed Effects Models“. In: *Journal of Statistical Software* 82(13), S. 1–26. DOI: 10.18637/jss.v082.i13.
- R Core Team (2022). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. URL: <https://www.R-project.org/>.
- Saville, David J. und Graham R. Wood (1991). „Split Plot Design“. In: *Statistical Methods: The Geometric Approach*. Springer New York: New York, NY, S. 354–379. ISBN: 978-1-4612-0971-3. DOI: 10.1007/978-1-4612-0971-3_14. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0971-3_14.
- Toutenburg, Helge (2003). *Lineare Modelle. Theorie und Anwendungen*. 2. Aufl. Physica Heidelberg: Heidelberg. ISBN: 978-3-7908-1519-1. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-57348-4>.
- Wickham, Hadley (2016). *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Springer-Verlag New York. ISBN: 978-3-319-24277-4. URL: <https://ggplot2.tidyverse.org>.
- Wickham, Hadley und Jennifer Bryan (2022). *readxl: Read Excel Files*. R package version 1.4.1. URL: <https://CRAN.R-project.org/package=readxl>.

Anhang

Tabelle 7: Darstellung des Ertrags im Split-Plot-Plan

Feld	Hafersorte	Behandlung mit Stickstoff			
		1 (=0.0 cwt)	2 (=0.2 cwt)	3 (=0.4 cwt)	4 (=0.6 cwt)
1	1 (=Victory)	$y_{111} = 111$	$y_{112} = 130$	$y_{113} = 157$	$y_{114} = 174$
	2 (=Golden.rain)	$y_{121} = 117$	$y_{122} = 114$	$y_{123} = 161$	$y_{124} = 141$
	3 (=Marvellous)	$y_{131} = 105$	$y_{132} = 140$	$y_{133} = 118$	$y_{134} = 156$
2	1 (=Victory)	$y_{211} = 61$	$y_{212} = 91$	$y_{213} = 97$	$y_{214} = 100$
	2 (=Golden.rain)	$y_{221} = 70$	$y_{222} = 108$	$y_{223} = 126$	$y_{224} = 149$
	3 (=Marvellous)	$y_{231} = 96$	$y_{232} = 124$	$y_{233} = 121$	$y_{234} = 144$
3	1 (=Victory)	$y_{311} = 68$	$y_{312} = 64$	$y_{313} = 112$	$y_{314} = 86$
	2 (=Golden.rain)	$y_{321} = 60$	$y_{322} = 102$	$y_{323} = 89$	$y_{324} = 96$
	3 (=Marvellous)	$y_{331} = 89$	$y_{332} = 129$	$y_{333} = 132$	$y_{334} = 124$
4	1 (=Victory)	$y_{411} = 74$	$y_{412} = 89$	$y_{413} = 81$	$y_{414} = 122$
	2 (=Golden.rain)	$y_{421} = 64$	$y_{422} = 103$	$y_{423} = 132$	$y_{424} = 133$
	3 (=Marvellous)	$y_{431} = 70$	$y_{432} = 89$	$y_{433} = 104$	$y_{434} = 117$
5	1 (=Victory)	$y_{511} = 62$	$y_{512} = 90$	$y_{513} = 100$	$y_{514} = 116$
	2 (=Golden.rain)	$y_{521} = 80$	$y_{522} = 82$	$y_{523} = 94$	$y_{524} = 126$
	3 (=Marvellous)	$y_{531} = 63$	$y_{532} = 70$	$y_{533} = 109$	$y_{534} = 99$
6	1 (=Victory)	$y_{611} = 53$	$y_{612} = 74$	$y_{613} = 118$	$y_{614} = 113$
	2 (=Golden.rain)	$y_{621} = 89$	$y_{622} = 82$	$y_{623} = 86$	$y_{624} = 104$
	3 (=Marvellous)	$y_{631} = 97$	$y_{632} = 99$	$y_{633} = 119$	$y_{634} = 121$

Tabelle 8: Schätzer der Parameter

$\hat{\mu}$	103.97	$\hat{\alpha}_1$	0.53	$\widehat{(\alpha\beta)}_{11}$	0.08	$\widehat{(\alpha\beta)}_{24}$	-2.38
$\hat{\theta}_1$	31.36	$\hat{\alpha}_2$	5.82	$\widehat{(\alpha\beta)}_{12}$	-0.92	$\widehat{(\alpha\beta)}_{31}$	-1.54
$\hat{\theta}_2$	3.28	$\hat{\alpha}_3$	-6.35	$\widehat{(\alpha\beta)}_{13}$	-0.08	$\widehat{(\alpha\beta)}_{32}$	-2.87
$\hat{\theta}_3$	-8.06	$\hat{\beta}_1$	-24.58	$\widehat{(\alpha\beta)}_{14}$	0.92	$\widehat{(\alpha\beta)}_{33}$	2.96
$\hat{\theta}_4$	-5.81	$\hat{\beta}_2$	-5.08	$\widehat{(\alpha\beta)}_{21}$	1.46	$\widehat{(\alpha\beta)}_{34}$	1.46
$\hat{\theta}_5$	-13.06	$\hat{\beta}_3$	10.25	$\widehat{(\alpha\beta)}_{22}$	3.79		
$\hat{\theta}_6$	-7.72	$\hat{\beta}_4$	19.42	$\widehat{(\alpha\beta)}_{23}$	-2.88		

Tabelle 9: Mittelwerte bzgl. *Block* und *Sorte*

Block	Victory (=1)	Golden.rain (=2)	Marvellous (=3)
1	$\overline{y_{11.}} = 143.00$	$\overline{y_{12.}} = 133.25$	$\overline{y_{13.}} = 129.75$
2	$\overline{y_{21.}} = 87.25$	$\overline{y_{22.}} = 113.25$	$\overline{y_{23.}} = 121.25$
3	$\overline{y_{31.}} = 82.50$	$\overline{y_{32.}} = 86.75$	$\overline{y_{33.}} = 118.50$
4	$\overline{y_{41.}} = 91.50$	$\overline{y_{42.}} = 108.00$	$\overline{y_{43.}} = 95.00$
5	$\overline{y_{51.}} = 92.00$	$\overline{y_{52.}} = 95.50$	$\overline{y_{53.}} = 85.25$
6	$\overline{y_{61.}} = 89.50$	$\overline{y_{62.}} = 90.25$	$\overline{y_{63.}} = 109.00$
Sorten-Mittelwerte	$\overline{y_{.1.}} = 97.63$	$\overline{y_{.2.}} = 104.50$	$\overline{y_{.3.}} = 109.79$

Tabelle 10: Mittelwerte bzgl. *Block* und *Behandlung*

Block	0.0 cwt	0.2 cwt	0.4 cwt	0.6 cwt	Block-Mittelwerte
1	$\overline{y_{1.1}} = 111.00$	$\overline{y_{1.2}} = 128.00$	$\overline{y_{1.3}} = 145.33$	$\overline{y_{1.4}} = 157.00$	$\overline{y_{1..}} = 135.33$
2	$\overline{y_{2.1}} = 75.67$	$\overline{y_{2.2}} = 107.67$	$\overline{y_{2.3}} = 114.67$	$\overline{y_{2.4}} = 131.00$	$\overline{y_{2..}} = 107.25$
3	$\overline{y_{3.1}} = 72.33$	$\overline{y_{3.2}} = 98.33$	$\overline{y_{3.3}} = 111.00$	$\overline{y_{3.4}} = 102.00$	$\overline{y_{3..}} = 95.92$
4	$\overline{y_{4.1}} = 69.33$	$\overline{y_{4.2}} = 93.67$	$\overline{y_{4.3}} = 105.67$	$\overline{y_{4.4}} = 124.00$	$\overline{y_{4..}} = 98.17$
5	$\overline{y_{5.1}} = 68.33$	$\overline{y_{5.2}} = 80.67$	$\overline{y_{5.3}} = 101.00$	$\overline{y_{5.4}} = 113.67$	$\overline{y_{5..}} = 90.92$
6	$\overline{y_{6.1}} = 79.67$	$\overline{y_{6.2}} = 85.00$	$\overline{y_{6.3}} = 107.67$	$\overline{y_{6.4}} = 112.67$	$\overline{y_{6..}} = 96.25$

Tabelle 11: Mittelwerte bzgl. *Sorte* und *Behandlung*

Sorte	0.0 cwt	0.2 cwt	0.4 cwt	0.6 cwt
Victory (=1)	$\overline{y_{.11}} = 71.50$	$\overline{y_{.12}} = 89.67$	$\overline{y_{.13}} = 110.83$	$\overline{y_{.14}} = 118.50$
Golden.rain (=2)	$\overline{y_{.21}} = 80.00$	$\overline{y_{.22}} = 98.50$	$\overline{y_{.23}} = 114.67$	$\overline{y_{.24}} = 124.83$
Marvellous (=3)	$\overline{y_{.31}} = 86.67$	$\overline{y_{.32}} = 108.50$	$\overline{y_{.33}} = 117.17$	$\overline{y_{.34}} = 126.83$
Behandlungs-Mittelwerte	$\overline{y_{..1}} = 79.39$	$\overline{y_{..2}} = 98.89$	$\overline{y_{..3}} = 114.22$	$\overline{y_{..4}} = 123.39$