Elementy statystyki - DEST LIO

Zajęcia 3

Estymacja punktowa i regresja liniowa

Rozwiązanie Zadania 1 (a): Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ będzie próbą prostą z rozkładu Rayleigha o gęstości:

$$f_\lambda(x) = \frac{2}{\lambda} x \exp\left(-\frac{x^2}{\lambda}\right) I_{(0,\infty)}(x),\ \lambda > 0.$$

Wyznaczamy funkcję wiarogodności:

$$\begin{aligned}
L(\lambda; \mathbf{x}) &= f_\lambda(\mathbf{x}) \\
&= \prod_{i=1}^n f_\lambda(x_i) \\
&= \prod_{i=1}^n \frac{2}{\lambda} x_i \exp\left(-\frac{x_i^2}{\lambda}\right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^n \frac{2}{\lambda}\right)\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\left(\prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i^2}{\lambda}\right)\right) \\
&= \left(\frac{2}{\lambda}\right)^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right) \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_i^2\right).
\end{aligned}$$

Wprowadzamy pomocniczą funkcję $l(\lambda; \mathbf{x}) = \ln L(\lambda; \mathbf{x})$. Mamy

$$\begin{aligned}
l &= \ln L(\lambda; \mathbf{x}) \\
&= \ln\left(\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right) \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\right) \\
&= \ln\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n + \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) + \ln\exp\left(-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \\
&= n\ln 2 - n\ln\lambda + \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_i^2.
\end{aligned}$$

Wyznaczamy pochodną funkcji l względem λ:

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = 0 - \frac{n}{\lambda} + 0 + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Sprawdzamy warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji. Zatem przyrównujemy powyższą pochodną do zera i rozwiązujemy powstałe równanie:

$$\begin{aligned}
-\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 &= 0 \\
-n\lambda + \sum_{i=1}^n x_i^2 &= 0 \\
\hat{\lambda} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2.
\end{aligned}$$

Punkt $\hat{\lambda}$ jest punktem stacjonarnym. Badamy warunek dostateczny istnienia ekstremum:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda^2} = \frac{n}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^3}\sum_{i=1}^n x_i^2,$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda^2}(\hat{\lambda}) = \frac{n}{\hat{\lambda}^2} - \frac{2}{\hat{\lambda}^3}\sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{n}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2} - \frac{2}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^3}\sum_{i=1}^n x_i^2 = -\frac{n}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2} < 0.$$

Stąd funkcja l osiąga maksimum lokalne w punkcie $\hat{\lambda}$, więc $ENW(\lambda) = \hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.

Rozwiązanie Zadania 2 (a): Niech $Y_i = bx_i + \epsilon_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, gdzie ϵ_i to błędy losowe. Metoda najmniejszych kwadratów polega na minimalizacji sumy kwadratów

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2$$

względem parametru b. Rozważmy zatem funkcję

$$f(b) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - bx_i)^2.$$

Wyznaczamy pochodną funkcji f względem b:

$$f'(b) = 2\sum_{i=1}^{n} (Y_i - bx_i) \cdot (-x_i) = -2\sum_{i=1}^{n} Y_i x_i + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Sprawdzamy warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji. Zatem przyrównujemy powyższą pochodną do zera i rozwiązujemy powstałe równanie:

$$\begin{aligned}
-2\sum_{i=1}^{n} Y_i x_i + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= 0 \\
b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} Y_i x_i \\
\hat{b} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.
\end{aligned}$$

Punkt $\hat{b}$ jest punktem stacjonarnym. Badamy warunek dostateczny istnienia ekstremum:

$$f''(b) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0.$$

Stąd funkcja f osiąga minimum lokalne w punkcie $\hat{b}$, więc $EMNK(b) = \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$.