Elementy statystyki - DEST LIO

Zajęcia 5

Testy ilorazu wiarogodności

Definicja 1. *Testem ilorazu wiarogodności nazywamy test z obszarem krytycznym*

$$B = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} : \frac{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{x})}{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; \mathbf{x})} \geqslant k_\alpha \right\},$$

gdzie k_α jest najmniejszą stałą taką, że $\forall \theta \in \Theta_0 : \mathbb{P}_\theta(\mathbf{X} \in B) \leqslant \alpha$.

Uwaga 1. *Supremum funkcji wiarogodności osiągane jest dla $\theta = \hat{\theta}(\mathbf{x})$, gdzie $\hat{\theta}(\mathbf{X})$ jest estymatorem największej wiarogodności parametru θ.*

„Plan wyznaczania testu ilorazu wiarogodności”

(a) Wyznaczamy przestrzenie Θ, Θ_0.
(b) Wyznaczamy funkcję wiarogodności $L(\theta; \mathbf{x})$.
(c) $\sup_\Theta L, \sup_{\Theta_0} L$ ($\sup_\Theta L = L(ENW(\theta); \mathbf{x})$)
(d) Upraszczamy iloraz wiarogodności.
(e) Wyznaczamy obszar krytyczny.
(f) Wyznaczamy rozkład statystyki testowej przy założeniu prawdziwości H_0.
(g) Wyznaczamy wartość krytyczną.
(h) Zapisujemy ostateczną postać obszaru krytycznego.

Zadanie 1. Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ będzie próbą prostą z populacji o rozkładzie wykładniczym $Ex(\lambda)$, gdzie $\lambda > 0$ jest parametrem.

(a) Skonstruować test ilorazu wiarogodności, na poziomie istotności α ($\alpha \in (0,1)$), hipotezy zerowej $H_0 : \lambda = \lambda_0$, przeciwko hipotezie alternatywnej $H_1 : \lambda > \lambda_0$. **Wskazówka:** Przy prawdziwości hipotezy zerowej statystyka $2n\lambda_0\bar{X}$ ma rozkład $\chi^2(2n)$.

(b) Napisz funkcję `w.test()` realizującą test χ^2 w modelu wykładniczym. Funkcja powinna posiadać trzy argumenty: `x` - wektor zawierający dane, `lambda.zero` - wartość λ_0 z hipotezy zerowej oraz `alternative` - typ hipotezy alternatywnej, który ma mieć trzy możliwe wartości: `"two.sided"` (domyślna wartość), `"greater"`, `"less"`. Funkcja zwraca obiekt (listę) klasy `htest` (klasę obiektu w programie R nadaje się funkcją `class()`) o następujących elementach: `statistic` - wartość statystyki testowej, `parameter` - liczba stopni swobody, `p.value` - p-wartość, `alternative` - wybrany typ hipotezy alternatywnej, `method` - nazwa testu, `data.name` - nazwa zbioru danych. Dla klasy `htest`, w programie R istnieje przeciążona funkcja `print`, więc nie ma potrzeby jej tworzyć.
Wskazówka: Hipoteza zerowa testu χ^2 w modelu wykładniczym ma postać $H_0 : \lambda = \lambda_0$. Uwzględnia się trzy hipotezy alternatywne:
(1) $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$ (two.sided),
(2) $H_1 : \lambda > \lambda_0$ (greater),
(3) $H_1 : \lambda < \lambda_0$ (less).
Statystyka testowa T została wyprowadzona w punkcie (a), a hipotezom alternatywnym odpowiadają następujące obszary krytyczne:
(1) $B = \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) \geqslant \chi^2(1-\alpha/2, 2n) \text{ lub } T(\mathbf{x}) \leqslant \chi^2(\alpha/2, 2n)\}$ (dwustronny),
(2) $B = \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) \leqslant \chi^2(\alpha, 2n)\}$ (lewostronny),
(3) $B = \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) \geqslant \chi^2(1-\alpha, 2n)\}$ (prawostronny).
Dla powyższych typów obszaru krytycznego p-wartość obliczana jest w następujący sposób:
(1) $2\min\{P_0(T \geqslant T(\mathbf{x})), P_0(T \leqslant T(\mathbf{x}))\}$ (dwustronny),
(2) $P_0(T \leqslant T(\mathbf{x}))$ (lewostronny),
(3) $P_0(T \geqslant T(\mathbf{x}))$ (prawostronny),

gdzie P_0 informuje o wykorzystaniu podczas obliczeń rozkładu statystyki testowej przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej. W programie R przydatne mogą okazać się funkcje `pchisq()`, `match.arg()`, `names()`, `deparse()`, `substitute()`, `class()`.

(c) Jako rozkład teoretyczny danych w pliku `Awarie.txt` (patrz Zadanie 1 Zajęcia 4) przyjęto rozkład wykładniczy. Zweryfikuj dla tych danych, na poziomie istotności 0.05, układ hipotez $H_0 : \lambda = 0.001$, $H_1 : \lambda < 0.001$, dwoma sposobami: korzystając z obszaru krytycznego (patrz Wskazówka do punktu (b)), korzystając z p-wartości (funkcja w punkcie (b)). Czy podjęta została taka sama decyzja?
Wskazówka: Decyzje: Jeżeli $\mathbf{x} \in B$ lub p-wartość jest mniejsza lub równa poziomowi istotności α, to odrzucamy hipotezę zerową. W przeciwnym razie nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

```
# wartość statystyki testowej
110.136
# wartość krytyczna
124.3421

        Test chi-kwadrat w modelu wykładniczym

data:  Time$V1
T = 110.136, num df = 100, p-value = 0.2295
alternative hypothesis: less
```