Elementy statystyki - DEST LIO

Zajęcia 4

Estymacja przedziałowa

Rozwiązanie Zadania 1 (a):
Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ będzie próbą prostą z rozkładu wykładniczego $Ex(\lambda)$, $\lambda > 0$ jest nieznanym parametrem. Funkcja gęstości tego rozkładu ma postać:

$$f_\lambda(x) = \lambda \exp(-\lambda x) I_{(0,\infty)}(x).$$

Wskazówka: $2\lambda n\bar{X} \sim \chi^2(2n)$, gdzie $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

(1) Wyznaczamy funkcję centralną.
Na podstawie wskazówki otrzymujemy:

$$Q(\mathbf{X}, \lambda) = 2\lambda n\bar{X} \sim \chi^2(2n).$$

(2) Wyznaczamy stałe a i b tak, aby $P(a < Q < b) = 1 - \alpha$, gdzie $\alpha \in (0,1)$. Postąpimy standardowo i wyznaczymy te stałe z warunków $P(Q \leqslant a) = P(Q \geqslant b) = \frac{\alpha}{2}$. Mamy

$$\begin{aligned}
P(Q \leqslant a) &= \frac{\alpha}{2} \\
F_Q(a) &= \frac{\alpha}{2} \\
a &= F_Q^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
a &= \chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, 2n\right),
\end{aligned}$$

gdzie $\chi^2(\alpha, p)$ jest kwantylem rzędu α z rozkładu chi-kwadrat z p stopniami swobody. Podobnie wyznaczamy stałą b:

$$\begin{aligned}
P(Q \geqslant b) &= \frac{\alpha}{2} \\
1 - P(Q < b) &= \frac{\alpha}{2} \\
1 - F_Q(b) &= \frac{\alpha}{2} \\
F_Q(b) &= 1 - \frac{\alpha}{2} \\
b &= F_Q^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\
b &= \chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 2n\right).
\end{aligned}$$

(3) Rozwiązujemy poniższą nierówność względem λ:

$$\begin{gathered}
a < Q < b \\
a < 2\lambda n\bar{X} < b \\
\frac{a}{2n\bar{X}} < \lambda < \frac{b}{2n\bar{X}}.
\end{gathered}$$

Zatem przedział ufności dla parametru λ na poziomie ufności $1 - \alpha$ ma postać:

$$\left(\frac{\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, 2n\right)}{2n\bar{X}}, \frac{\chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 2n\right)}{2n\bar{X}}\right).$$