

# **Teoria da Decisão**

## **Técnicas para Tratamento de Restrições**

Prof. Lucas S. Batista

lusoba@ufmg.br

[www.ppgee.ufmg.br/~lusoba](http://www.ppgee.ufmg.br/~lusoba)

Universidade Federal de Minas Gerais  
Escola de Engenharia  
Graduação em Engenharia de Sistemas



## Sumário

1

### Técnicas para Tratamento de Restrições

- Problema de Otimização Restrita
- Métodos Baseados em Penalidade
- Outras Abordagens Propostas na Literatura



## Problema de Otimização Restrita

- Formulação geral de problemas de otimização restrita:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F} = \begin{cases} g_i(\mathbf{x}) \leq 0; & i = 1, \dots, p \\ h_j(\mathbf{x}) = 0; & j = 1, \dots, q \\ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \end{cases}$$



## Problema de Otimização Restrita

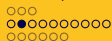
Duas considerações razoáveis:

- Estratégias rudimentares usualmente eliminam as soluções infactíveis. Embora muito simples, estão longe de assegurar eficácia e/ou eficiência. Muitas vezes, determinar uma solução factível representa um grande desafio. Por isso, essas técnicas devem ser evitadas!
- Na maioria dos casos, a solução ótima está na fronteira da região viável. Operadores inteligentes podem ser elaborados considerando-se essa premissa.



## Sumário

- 1 Técnicas para Tratamento de Restrições**
  - Problema de Otimização Restrita
  - Métodos Baseados em Penalidade
  - Outras Abordagens Propostas na Literatura



## Introdução

- A abordagem dos Métodos de Penalidade consiste na transformação do problema restrito original em um problema irrestrito equivalente.
- Dois problemas são ditos equivalentes se possuem a mesma solução.



## Introdução

Nos Métodos de Penalidade, penalidades são adicionadas à função objetivo:

- 1 **Métodos de penalidade interior ou métodos Barreira:** pontos gerados devem ser sempre viáveis e qualquer tentativa de sair da região factível é penalizada (não será visto!).
- 2 **Métodos de penalidade exterior ou métodos de Penalidade:** qualquer violação de alguma restrição é penalizada no valor da função objetivo.



## Métodos de Penalidade

Considerando que a solução ótima reside na fronteira da região factível:

- Nos métodos de penalidade exterior, a solução ótima é aproximada **externamente** por uma sequência de soluções do problema irrestrito transformado.





## Método de Penalidade Exterior

### Função de penalidade

Uma função de penalidade deve atender as seguintes condições:

$$\begin{cases} p(\mathbf{x}) > 0, & \text{se } \mathbf{x} \notin \mathcal{F} \\ p(\mathbf{x}) = 0, & \text{se } \mathbf{x} \in \mathcal{F} \end{cases}$$



## Método de Penalidade Exterior

### Função de penalidade

No caso de um problema com uma restrição de igualdade:

$$\begin{array}{ll} \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a } h(\mathbf{x}) = 0 \end{array} \Rightarrow \min f(\mathbf{x}) + \underbrace{u [h(\mathbf{x})]^2}_{p(\mathbf{x}, u)}$$

No caso de um problema com uma restrição de desigualdade:

$$\begin{array}{ll} \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a } g(\mathbf{x}) \leq 0 \end{array} \Rightarrow \min f(\mathbf{x}) + \underbrace{u \max [0, g(\mathbf{x})]^2}_{p(\mathbf{x}, u)}$$

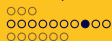


## Método de Penalidade Exterior

### Função de penalidade

De forma geral temos:

$$p(\mathbf{x}, u) = u \left\{ \sum_{i=1}^p \max [0, g_i(\mathbf{x})]^2 + \sum_{j=1}^q [h_j(\mathbf{x})]^2 \right\}$$



## Método de Penalidade Exterior

### Exemplo

Seja o problema  $\min f(x)$ , com  $f(x) = x$ , sujeito a  $g(x) = -x + 3 \leq 0$ .



## Método de Penalidade Exterior

### Exemplo

Seja o problema  $\min f(x)$ , com  $f(x) = x$ , sujeito a  $g(x) = -x + 3 \leq 0$ .

### Solução

Usando  $p(x) = \max[0, g(x)]^2$ , tem-se:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 3 \\ (3 - x)^2, & x < 3 \end{cases}$$

Para  $x < 3$ ,  $f(x) + p(x, u) = x + u(3 - x)^2$ . Assim:

$$\frac{df}{dx} = 1 - 2u(3 - x) = 0 \rightarrow x^* = 3 - \frac{1}{2u}$$

Com  $u \rightarrow \infty$ , temos  $x^* \rightarrow 3^-$ .

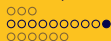


## Método de Penalidade Exterior

### Exemplo

Aplique o método de penalidade exterior ao problema a seguir considerando  $u = 1, 10, 100$ .

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) &= (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \\ \text{s.a } h(\mathbf{x}) &= x_1 - 2 = 0 \end{aligned}$$



## Método de Penalidade Exterior

---

### Algoritmo 1: Método de Penalidade Exterior

---

**Input:**  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ ,  $u_0 > 0$ , função objetivo  $f(\cdot)$  e restrições  $\mathbf{g}(\cdot)$  e  $\mathbf{h}(\cdot)$

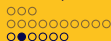
```
1  $k \leftarrow 0$ ;  
2 while  $\neg$  critério de parada do  
3   Começando de  $\mathbf{x}_k$ , encontre  $\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \arg \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}, u_k)$ ;  
4    $u_{k+1} \leftarrow \alpha u_k$ , com  $\alpha > 1$  ;  
5    $k \leftarrow k + 1$ ;  
6 end
```

---

## Sumário

- 1 **Técnicas para Tratamento de Restrições**
  - Problema de Otimização Restrita
  - Métodos Baseados em Penalidade
  - Outras Abordagens Propostas na Literatura



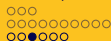


## Métodos de Reparo

- Métodos de Reparo transformam uma solução inviável em uma factível.

### métodos de reparo

- essas estratégias são fortemente dependentes do problema e da representação do mesmo;
- as estratégias devem ser cuidadosamente elaboradas para evitar a perda de diversidade e/ou a capacidade de exploração do espaço de busca;
- podem ser caras computacionalmente.



## Operadores de Variação Inteligentes

- Operadores de variação inteligentes sempre geram soluções factíveis a partir de alternativas viáveis.

### operadores inteligentes

- necessariamente dependem do problema e da representação do mesmo;
- em geral, são difíceis de projetar, mas melhoram significativamente a eficiência do algoritmo de otimização;
- operadores especializados na geração de soluções nas proximidades da “fronteira” são usualmente elaborados.



## Seleção por Torneio Binário

- A estratégia de Seleção por Torneio Binário compara a solução atual com a nova alternativa gerada, priorizando a factibilidade:

### seleção por torneio binário

- se ambas as soluções são viáveis, escolhe-se a melhor;
- se apenas uma é viável, esta vence a competição;
- se ambas são inviáveis, vence a alternativa com menor violação.

A medida de violação das restrições pode ser obtida via  $p(\mathbf{x})$ .



## Seleção por Torneio Binário Modificado

- A estratégia de Seleção por Torneio Binário compara a solução atual com a nova alternativa gerada, priorizando a factibilidade:

### seleção por torneio binário modificado

- se ambas as soluções são viáveis, escolhe-se uma aleatoriamente;
- se apenas uma é viável, esta vence a competição;
- se ambas são inviáveis, vence a alternativa com menor violação.

A medida de violação das restrições pode ser obtida via  $p(\mathbf{x})$ .



## Stochastic Ranking

- A estratégia SR estabelece uma relação de compromisso entre função objetivo e factibilidade:

### stochastic ranking

- se  $g_i(\mathbf{x}_1)$  e  $g_i(\mathbf{x}_2) \leq 0 \ \forall i \parallel rand() \leq p_f$ ,
  - $\mathbf{x}_{new} = best(f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2))$ ;
- caso contrário,
  - $\mathbf{x}_{new} = best(p(\mathbf{x}_1), p(\mathbf{x}_2))$ ;

Geralmente emprega-se  $0.4 < p_f < 0.9$ .

## Literatura Especializada



Singiresu S. Rao, Engineering Optimization: Theory and Practice, Wiley, 4th ed., 2009.



J. Dréo, P. Siarry, A. Pétrowski, E. Taillard, Metaheuristics for Hard Optimization: Methods and Case Studies, Springer, 2006.