# Teoria da Decisão

## Otimização Vetorial


Prof. Lucas S. Batista

lusoba@ufmg.br

www.ppgee.ufmg.br/∼lusoba

Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia
Graduação em Engenharia de Sistemas

## Sumário

## Problema de otimização multiobjetivo

- Problemas de otimização vetorial (ou multiobjetivo) são problemas de tomada de decisão multiobjetivo (MODM).
- Do ponto de vista metodológico, problemas multiobjetivo são caracterizados pela otimização de uma função vetorial.
- Do ponto de vista do decisor, deseja-se escolher a ação que otimiza simultaneamente todas as funções objetivo.

## Problema de otimização multiobjetivo

- Problemas de otimização multiobjetivo permitem uma modelagem mais flexível e realista do problema de otimização.
- Essa flexibilidade tem um preço: não há uma única solução definida, mas um conjunto de soluções de compromisso.
- A unidade de decisão deverá escolher entre o conjunto de alternativas aquela que se mostra mais interessante, segundo os critérios de decisão.

## Problema de otimização multiobjetivo

- Formulação geral de problemas de otimização multiobjetivo (MOP):

$$\min_{\boldsymbol{x}} \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m, \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F} = \begin{cases} g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0; & i = 1, \ldots, p \\ h_j(\boldsymbol{x}) = 0; & j = 1, \ldots, q \\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \end{cases}$$

# Problema de otimização multiobjetivo

- $m$ funções objetivo devem ser minimizadas simultaneamente.
- Como em geral são conflitantes (ou contraditórias), a melhora em um objetivo implica na piora de outro.
- Questões:
  1. Como definir as soluções de um MOP?
  2. Como comparar e ordenar tais soluções?

# Sumário

# Definições

## Dominância Pareto

Seja $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{F}$, dizemos que $\boldsymbol{x}_1$ Pareto domina (ou, simplesmente, domina) $\boldsymbol{x}_2$ se $f_k(\boldsymbol{x}_1) \leq f_k(\boldsymbol{x}_2)$ $\forall k \in \{1, ..., m\}$ e $\exists k$ tal que $f_k(\boldsymbol{x}_1) < f_k(\boldsymbol{x}_2)$[a], ou seja, em pelo menos um dos objetivos a desigualdade é atendida de forma estrita. Esta relação de dominância é escrita como $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) \prec \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)$.

[a] Representação vetorial: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)$ e $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) \neq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)$

## Soluções incomparáveis

Seja $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{F}$, dizemos que os mesmos são não dominados entre si, ou incomparáveis entre si, se $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) \nprec \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)$ e $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) \nprec \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)$.

## Definições

### Otimalidade local (Dominância Pareto)

O ponto $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{X}$ é localmente Pareto-ótimo em relação a $\boldsymbol{f}(\cdot) : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ se não existe $\boldsymbol{x} \in V_\epsilon(\boldsymbol{x}^*) \cap \mathcal{F}$ que domina $\boldsymbol{x}^*$.

### Otimalidade global (Dominância Pareto)

O ponto $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{X}$ é globalmente Pareto-ótimo em relação a $\boldsymbol{f}(\cdot) : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ se não existe $\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$ que domina $\boldsymbol{x}^*$.

## Definições

### Conjunto Pareto-ótimo

Dado um problema de otimização multiobjetivo, o seu conjunto Pareto-ótimo global é definido como:

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{F} \mid \nexists \boldsymbol{x} \in \mathcal{F} \text{ tal que } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \prec \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\}$$

O conjunto Pareto-ótimo contém as soluções não dominadas em relação ao conjunto $\mathcal{F}$.

Este conjunto é também nomeado *não-inferior*, *eficiente*, ou *não-dominado*.

## Definições

### Fronteira Pareto-ótima

A fronteira Pareto-ótima global $\mathcal{S}$ do problema de otimização multi-objetivo corresponde à imagem do conjunto Pareto-ótimo global no espaço de objetivos, isto é, $\mathcal{S} = \boldsymbol{f}(\mathcal{P})$:

$$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in \mathcal{P}\}$$

- A cardinalidade de $\mathcal{P}$ pode ser muito elevada ou mesmo igual a infinito.
- Do ponto de vista prático, é mais interessante estimar um conjunto de soluções eficientes de tamanho limitado, porém representativo de $\mathcal{P}$.

# Definições

## Conjunto Pareto-ótimo Aproximado

Se o algoritmo de otimização empregado não garante convergência global, então obtém-se uma *estimativa* do conjunto Pareto-ótimo global, i.e., $\widetilde{\mathcal{P}}$.

## Fronteira Pareto-ótima Aproximada

De forma análoga, obtém-se uma *estimativa* da fronteira Pareto-ótima global, i.e., $\widetilde{\mathcal{S}} = \boldsymbol{f}(\widetilde{\mathcal{P}})$.

# Ilustração dos conceitos

## Exemplo

Obtenha o conjunto e a fronteira Pareto-ótimos do problema a seguir. Esboce as soluções eficientes nos espaços $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

$$\min \begin{cases} f_1(x) = x - 1 \\ f_2(x) = (x-3)^2 + 1 \end{cases}$$

$$\text{s.a } x \geq 0, \; x \in \mathbb{R}$$

## Ordenação por dominância Pareto

### Exemplo

Considere a tabela a seguir:

| Solução | $f_1$ | $f_2$ |
|---|---|---|
| A | 8 | 5 |
| B | 9 | 2 |
| C | 12 | 1 |
| D | 11 | 2 |
| E | 16 | 2 |

**Tabela:** Conjunto de soluções de um problema com dois objetivos.

Compare as soluções usando o conceito de dominância Pareto.

## Ordenação por dominância Pareto

**Algoritmo 1:** Ordenação Pareto

```
N' = N;
currentRank ← 1;
while N ≠ ∅ do
    /* Há pontos a serem classificados */
    for i = 1 to |N'| do
        if y_i é não dominado then rank(y_i) ← currentRank;
    end
    for i = 1 to |N'| do
        if rank(y_i) = currentRank then
            Armazena y_i em um conjunto temporário;
            N ← N \ {y_i} ;
        end
    end
    currentRank ← currentRank + 1;
    N' ← N;
end
```

## Características da fronteira Pareto

### Ponto ideal ou solução utópica

A solução utópica $\boldsymbol{u}$ corresponde ao ponto no espaço de objetivos cujas coordenadas são dadas por $u_j = f_j(\boldsymbol{x}_j^*)$, $j = 1, \ldots, m$, com

$$\boldsymbol{x}_j^* = \arg\min f_j(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$$

ou ainda

$$u_j = \min\{y_j : \boldsymbol{y} \in \mathcal{S}\}$$

### Ponto nadir ou solução antiutópica

A solução antiutópica $\tilde{\boldsymbol{u}}$ corresponde aos piores valores para cada função-objetivo considerando apenas a fronteira Pareto-ótima, isto é:

$$\tilde{u}_j = \max\{y_j : \boldsymbol{y} \in \mathcal{S}\}$$

## Características da fronteira Pareto

Qual a forma da fronteira Pareto...

- quando a interseção entre $\boldsymbol{f}(\mathcal{F})$ e o hipercubo definido pelos pontos ideal e nadir é um conjunto convexo?
- quando a interseção entre $\boldsymbol{f}(\mathcal{F})$ e o hipercubo definido pelos pontos ideal e nadir não é um conjunto convexo?
- quando $\boldsymbol{f}(\mathcal{F})$ é desconexa?
- quando $\boldsymbol{f}(\mathcal{F})$ é multimodal?

## Sumário

# Métodos de decisão multiobjetivo

O decisor pode articular suas preferências em diferentes momentos:

- Decisão *a priori*;
- Decisão progressiva;
- Decisão *a posteriori*.

# Métodos de decisão multiobjetivo

## Decisão *a priori*

- O decisor é consultado uma única vez, antes do início do processo de otimização.
- Emprega-se uma técnica de decisão que agrega as preferências em uma única função objetivo global.
- Obtém-se uma única solução final (baixo esforço computacional).
- Exige que o decisor articule melhor suas preferências.
- E se o decisor não possui uma ideia clara das possíveis soluções do problema?

# Métodos de decisão multiobjetivo

## Decisão progressiva

- O decisor é consultado repetidas vezes ao longo do processo de otimização.
- Ele pode rearticular suas preferências de forma interativa.
- Essas preferências guiam a busca em direção a uma solução mais satisfatória.
- Permite obter informações quanto ao conjunto de soluções possíveis antes da tomada de decisão.
- Exige maior esforço computacional que na decisão *a priori*.

# Métodos de decisão multiobjetivo

## Decisão *a posteriori*

- O decisor é consultado após a obtenção de um conjunto discreto de soluções eficientes.
- Os estágios de otimização e decisão são independentes.
- O decisor pode definir suas preferências conhecendo “todas” as alternativas.
- Normalmente requer um alto custo computacional.

## Literatura Especializada


- Y. Collette and P. Siarry, Multiobjective Optimization: Principles and Case Studies, ser. Decision Engineering, Springer, 2003.
- V. Chankong, Y. Haimes, Multiobjective decision making: Theory and methodology, 1st ed., Dover Publications, 2008.
- K. Deb, Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms, Wiley, 2001.
- M. M. Kostreva, W. Ogryczak, A. Wierzbicki, *Equitable aggregation and multiple criteria analysis*, European Journal of Op. Res., 158, p. 362-377, 2004.
- K. M. Miettinen, Nonlinear Multiobjective Optimization, International Series in Operations Research & Management Science, Springer, 1998.


Inicio