Ejercicio 1. INTERPOLACION vs AJUSTE DE DATOS

1. (Técnica interpolación datos) Se realizan mediciones en una bolsa de gas para evaluar el interés de su explotación. En una 1ª fase se sondea en tres puntos alineados equidistantes 1hm (1 hectómetro) entre cada dos consecutivos y se encuentra gas en las profundidades indicadas en la siguiente tabla (Tabla 1):

xi	0	1	2
fi	18.90	14.50	17.90

Se simula la sección de la bolsa de gas por una parábola dada por el polinomio p1(x) de grado 2 que interpola los datos de la tabla. Dar el vector c1 de coeficientes del polinomio p1(x):

1.1. Construir los vectores *xi* (nodos de interpolación) y f*i* (valores de la función que mide la profundidad a la que se encuentra gas en los nodos *xi*) y resolver el correspondiente sistema lineal asociado. Dar la expresión de la matriz H1 del sistema y el vector c1 solución de dicho sistema (con los coeficientes de p1(x)) ¿Qué dimensiones tiene H1?

1.2. Utilizando la simulación parabólica anterior, dar una estimación de a qué profundidad se espera encontrar gas en la abcisa 1.35.

2. (Técnica ajuste de datos) En una 2ª fase se recopilan más datos realizando perforaciones cada 0.2 hm en el intervalo [0,2] y midiendo a qué profundidad se encuentra gas. Las medidas obtenidas son las siguientes (Tabla 2)

xx	*0*	*0.2*	*0.4*	*0.6*	*0.8*	*1*	*1.2*	*1.4*	*1.6*	*1.8*	*2*
fxx	18.90	17.90	17.10	16.30	15.20	14.50	15.30	15.90	16.30	17.30	17.90

Se simula la sección de la bolsa de gas por una parábola dada por el polinomio p2(x) de grado 2 que ajusta los datos anteriores (en sentido mínimos cuadrados):.

2.1. Si H2 es la matriz de coeficientes del sistema sobredeterminado resultante ¿qué dimensiones tiene H2? Dar el vector c2 de coeficientes del polinomio p2(x).

2.2. Dibujar en una misma gráfica en el intervalo [-0.5,2.5] (usar como soporte x_aux=-0.5:0.01:2.5):

- La parábola que simula la bolsa de gas del apartado 1 (polinomio p1(x)) en azul;
- La parábola que simula la bolsa de gas del apartado 2 (polinomio p2(x)) en rojo;
- Los puntos xx, fxx con las mediciones de la Tabla 2, en * verde.

2.3. Utilizando las simulaciones proporcionadas por p1(x) y p2(x) ¿a qué profundidades se espera encontrar gas en x=1.4? Conociendo el valor exacto en el que se ha encontrado gas en ese punto (Tabla 2) ¿cuántas cifras decimales proporcionan cada una de dichas simulaciones?

2.4. Calcular los vectores de residuos R1=abs(p1(xx)-fxx) y R2=abs(p2(xx)-fxx) y los errores E1=norm(R1) y E2=norm(R2) que producen las simulaciones pl(x) y p2(x), respectivamente, de la bolsa respecto de las mediciones realizadas (Tabla 2). Comentar los resultados.

Determinar en cada caso, cuál es el error máximo y en qué posición se ha producido, atendiendo a la información disponible.

3. (Ajuste de datos con restricciones) Se trata ahora de simular la sección de la bolsa por un polinomio p3(x) de grado 2 que pasa exactamente por el punto inicial (0, 18.90) y que ajuste mejor posible el resto de datos de la Tabla 2 (en el sentido mínimos cuadrados):

- Dar la expresión de la matriz (*H3*) y el término independiente del sistema lineal sobredeterminado que hay que resolver para determinar dicha función y la expresión de dicho polinomio.
- Sobre la gráfica del apartado 3, añadir la gráfica de p3, añadiendo el punto (0, 18.90) con o rojo.
- Calcular el vector residuo R3 y su norma E3. Comparar los resultados de E2 y E3.

Ejercicio 2. Ajuste e interpolación de datos, gráfica, residuo y error.

xi	-2	-1	0	2	3
yi	0	1	1.2	0	3.1

1. ¿De qué grado será el polinomio u1(x) que interpola los datos de la tabla? Representar gráficamente dicho polinomio en el intervalo [-2, 3] en rojo y los puntos donde se interpola con asteriscos rojos.

2. Se quiere ajustar los datos de la tabla por un polinomio u2(x) de grado dos. Dar los coeficientes de dicho polinomio en la base {1, x, x^2}. Calcular el vector de residuos y el error que produce dicho ajuste ¿En qué punto el residuo es mayor y cuánto vale?

3. Se quiere ajustar los datos de la tabla por una función del tipo $u3(x) = ax^2 + bsen(x)$. Dar los valores de a y b. Calcular el vector residuo (no mostrarlo) y el error.

4. Calcular la función del tipo $u4(x) = Ae^x + B\cos(x) + Cx^3$ que ajusta los datos de la tabla. Dar los valores de A, B y C. Calcular el vector residuo (no mostrarlo) y el error.

5. - Rellenar los datos pedidos en la tabla:

	Vector coeficientes funciones	Residuos máximos en datos tabla y en qué puntos se producen	Error global en datos tabla
Apartado 1			
Apartado 2			
Apartado 3			
Apartado 4			

- Dibujar la gráfica de las funciones de los apartados anteriores en distintos colores y los datos de la tabla en una misma figura.
- ¿Cuál de las funciones calculadas produce un error menor? ¿En qué puntos los residuos son mayores?

6. (Ajuste datos con restricción) Se ajustan los datos de la tabla por un polinomio de grado 2 con la condición de que p'(0)=1. Dar la matriz H y el vector término independiente B del sistema lineal sobredeterminado que resulta. ¿El error que producirá el ajuste es menor o mayor que el calculado en el apartado 2? Justificarlo y comprobarlo calculando el error del ajuste en este caso.

Ejercicio 3. Ajuste de datos e interpretación de los resultados

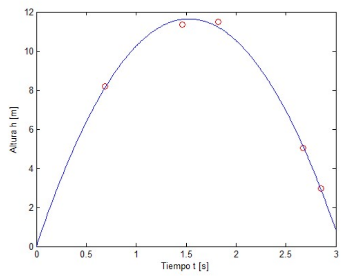
Lanzamos una piedra hacia arriba desde un punto a cierta altura y medimos (aprox.) su altura en varios instantes de tiempo. El tiempo (en segundos [s]) y las alturas (en metros [m]) se dan en la siguiente tabla

ti	0.69	1.46	1.82	2.67	2.85
hi	8.19	11.34	11.50	5.05	2.97

Sabiendo que la posición de la piedra responde a la siguiente ecuación $h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, Se desea determinar el valor de la velocidad inicial v_0 (en [m/s]) y la gravedad g (en [m/s^2]) a partir de los datos anteriores.

1. Ajustar los datos por una función del tipo dado (calcular v0 y g tal que la función h(t) del tipo dado ajuste lo mejor posible los datos) ¿Qué valores se obtienen para v0 y g?

- Calcular el residuo y el error ¿En qué punto se ha cometido el mayor error de medición (el residuo es mayor)? Dar una estimación de este valor máximo del error (m) ¿En qué punto se ha cometido el menor error de medición?
- ¿Desde qué altura inicial (aprox.) se ha lanzado la piedra? ¿Cuánto tiempo (aprox.) tarda en caer la piedra al suelo? ¿En qué instante (aprox.) la piedra alcanza su altura máxima, y cuál es esa altura?
- Dibujar la gráfica de los datos y el ajuste obtenido (similar a la siguiente).



2. Sabiendo que g=9.8 m/s2, resolver de nuevo el problema anterior pero ahora con v0 como única incógnita. ¿Qué valor obtenéis ahora para v0?
3. Si nos pidieran ajustar los datos de la tabla por un polinomio de grado 2 con la restricción de que en 0 vale 0.5 (la piedra se lanza desde una altura=0.5) ¿Qué sistema sobredeterminado habría que resolver, cuál sería la matriz H de coeficientes de las incógnitas y el vector de términos independientes?

Ejercicio 4. Linealización de la relación y ajuste de datos. Ajustar los datos xi=[-1:0.5:1]'; yi=[1 2 1.5 1 0.5]'; con una función de la forma $u(x) = \dfrac{a\cos(x)}{be^x + 2}$

Escribir las ecuaciones resultantes de imponer que se verifiquen los datos de la tabla ¿Es un sistema lineal?
1. Operar y transformar las ecuaciones anteriores de forma que produzcan ecuaciones lineales de la forma acos(xi)-bexp(xi)yi=2yi.
- Dar la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes del sistema lineal resultante. Calcular y dar los valores de a y b.
- Dibujar la gráfica de la función aproximante junto con los puntos de la tabla.
- Calcular el vector de residuos (abs(u(xi)-yi) y el error ¿En qué nodo el residuo es menor?
2. Repetir el apartado anterior considerando ahora que aproximamos los inversos de yi (1./yi) por una función del tipo $u(x) = \dfrac{be^x + 2}{a\cos(x)}$. Notar que también se puede escribir

$$u(x) = \frac{be^x + 2}{a\cos(x)} = \frac{b}{a}\frac{e^x}{\cos(x)} + \frac{1}{a}\frac{2}{\cos(x)} = A\frac{e^x}{\cos(x)} + B\frac{2}{\cos(x)} \approx \frac{1}{y} \quad \text{(con A=b/a y B=1/a)}$$

3. ¿Cuál de las dos aproximaciones proporciona menor error?

Ejercicio 5. Ajuste de datos con pesos. Se consideran los datos de la tabla:

xi	-2	-1	0	1	2
yi	26	15	11	4	9
wi	1/3	1/2	1	1/2	1/3

1. Se desea ajustar (mínimos cuadrados) los datos (xi,yi) de la tabla mediante una parábola $p1(x) = a + bx + cx^2$. Calcular los valores a,b y c.

2. Supongamos que a medida que se alejan del punto x=0, los datos experimentales obtenidos tienen menos precisión, lo que se tendrá en cuenta en el ajuste considerando el vector de pesos wi. Por ello, se calcula la parábola p2(x) que mejor ajusta con pesos wi (en el sentido de mínimos cuadrados) los datos de la tabla. Como en el apartado 1, dar los coeficientes del polinomio ¿Coinciden con los del apartado 1?

3. Representar en una misma gráfica las parábolas de los apartados anteriores junto con los datos que se ajustan ('*r'). Comentar los resultados.

Ejercicio 6.

Se desea construir una autopista que comunique las poblaciones A,B,C,D y E cuyas coordenadas (xi,yi) se incluyen en la tabla. La vía debe pasar exactamente por las dos poblaciones principales A y B y pasar los más cerca posible del resto de poblaciones (sentido mínimos cuadrados). Por razones técnicas, el trazado en planta de la vía debe tener la forma de un polinomio de grado 3.

	A	B	C	D	E
xi	0	5	1	2	4
yi	0	0	1	2	1

1. ¿Cuántos parámetros libres tendrá un polinomio de grado 3 que pasa por A y B? Comprobar que la familia de polinomios de grado 3 que pasan por A y B admiten la forma u(x)=ax(-5+x)+bx(-25+x^2).

2. - Calcular los coeficientes del polinomio anterior que pasa lo más cerca posible (sentido mínimos cuadrados) de C, D y E.

- Calcular las distancias d_1, d_2, d_3 (di=|u(xi)-yi|, teniendo en cuenta que cada unidad en nuestro "plano" representa 10 km en la realidad).

3. Pensar el problema anterior, ahora teniendo en cuenta que el pueblo D tiene el triple de habitantes que C y que E (esto es, el dato D 'pesa' el triple que los datos C y de E). Plantear el problema de minimización resultante.

- Calcular los coeficientes de la función resultante.
- Si calculásemos ahora las distancias di, la relativa a la población D ¿sería mayor o menor que la del apartado anterior?

Ejercicio 7.

1. Resolver con Matlab los siguientes sistemas sobredeterminados:

$$\begin{cases} a+3b= & 1 \\ 2a+4b= & 6 \\ 3a+7b= & 8 \end{cases} \quad (1) \qquad\qquad \begin{cases} a+3b= & 1 \\ a+2b= & 3 \\ 3a+7b= & 8 \end{cases} \quad (2)$$

¿Proporcionan la misma solución? Calcular los correspondientes vectores de residuos y comparar. Aparentemente los sistemas lineales anteriores son equivalentes ¿qué puede estar pasando?

2. Escribir qué problema de minimización se está resolviendo en cada caso.