Tema 2. Interpolación

Problemas Interpolación Clásica Tipo: En los Ejercicios 1, 2 y 3 se consideran los datos (xi, yi) de la siguiente Tabla 1 (4 datos)

xi	0	0.25	0.5	0.75
yi	1	-1	2	0

que se van a interpolar por distintos tipos de funciones (dependientes de 4 parámetros).

Ejercicio 1: Polinomio $u(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$.

Ejercicio 2: Funciones no polinomiales:

a) $u2(x) = c_1 + c_2 \cos(2\pi x) + c_3 sen(2\pi x) + c_4 \cos(4\pi x)$.

b) $u3(x) = c_1 \exp(x) + c_2 \cos(x) + c_3 x^3 + c_4 \dfrac{1}{1+x^2}$.

Ejercicio 3: Polinomios con restricciones:

a) Polinomio de grado mínimo u4(x) con derivada 0 en x=0.

b) Polinomio de grado mínimo u5(x) con derivada 1 en x=0.

El método de resolución (problema tipo) consiste en plantear adecuadamente el correspondiente **sistema lineal *Hc=b***, cuya solución (**c=H\b**) proporciona el vector c con los coeficientes de la función interpolante. Para ello es fundamental:
- Escribir la forma general de las funciones interpolantes a considerar ¿De cuántos parámetros se dispone para interpolar los datos?
- Identificar la matriz **H** de **coeficientes de las incógnitas** del sistema lineal.
- Identificar el vector **b** de **términos independientes** del sistema lineal.

Ejercicio 1. (Interpolación polinomial clásica) Calcular el polinomio $u(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ (o polinomio de menor grado) que interpola los datos de la Tabla 1. Dibujar la gráfica del polinomio en el intervalo [0, 0.75] y los puntos donde interpola. Para ello:

1. Datos a interpolar: Crear los vectores columna xi y yi con los datos de la tabla.
2. Sistema Lineal: Generar la matriz H y el vector b del sistema lineal, Hc=b, al que se llega imponiendo las condiciones de interpolación:
   - Las columnas de H se obtienen evaluando los elementos de la base del espacio interpolador $\{1, x, x^2, x^3\}$ en los nodos xi.
   - b es el vector que contiene los términos independientes, en este caso los valores yi (b=yi).
3. Resolver el sistema lineal para obtener los coeficientes del polinomio. Se puede utilizar el comando c=*H\b* (o c=*inv(H)*b* si la matriz H es inversible produce el mismo resultado).
4. Pintar la gráfica del polinomio interpolador en el intervalo [0, 0.75] y los puntos donde se interpola. Para ello:
   - Crear un vector xx (desde 0 hasta 0.75, con un salto de 0.01).
   - Evaluar el polinomio interpolador en el vector xx (los coeficientes del polinomio interpolador son las componentes del vector solución c): *uxx=c(1)+c(2)*xx+c(3)*xx.^2+c(4)*xx.^3.*
   - Dibujar la gráfica del polinomio interpolador *uxx* (en verde 'g'), junto con los puntos donde se interpola *(xi,yi)* (con círculos rojos 'ro') ¿Pasa la gráfica por los puntos donde se interpola?

```
%1. Datos a interpolar
xi=[0:0.25: 0.75]';
yi=[1 -1 2 0] ';
%2. Matriz de coeficientes del sistema y vector término independiente:
H=[xi.^0 xi.^1 xi.^2 xi.^3];
b=yi;
%3. Resolución del sistema: Coeficientes de la función interpolante
c=H\b;
%Gráficas
xx=0:0.01:0.75
uxx=c(1)*xx.^0+c(2)*xx.^1+c(3)*xx.^2+c(4)*xx.^3;
%También usando comando polyval de Matlab: uxx=polyval(c(end :-1 :1),xx); Cuidado orden elementos en vector coeficientes del polinomio
plot(xx,uxx,'g',xi,yi,'ro')
```

Ejercicio 2. (Funciones no polinomiales) Interpolar los datos (xi, yi) de la Tabla 1 considerando los tipos de funciones interpolantes que se indican a continuación. Representar conjuntamente las gráficas de las funciones interpolantes en el intervalo [0, 0.75] (con distinto color) y los puntos donde se interpola (círculos rojos).

a) $u2(x) = c_1 + c_2 \cos(2\pi x) + c_3 sen(2\pi x) + c_4 \cos(4\pi x)$.

b) $u3(x) = ae^x + b\cos(x) + cx^3 + d\dfrac{1}{1+x^2}$. (Cuidado con notación b,c)

Matrices de coeficientes de los sistemas resultantes:
(a) H2=[xi.^0 cos(2*pi*xi) sin(2*pi*xi) cos(4*pi*xi)];
(b) H3=[exp(xi) cos(xi) xi.^3 1./(1+xi.^2)];

Ejercicio 3 (Funciones/Polinomios con restricciones). Interpolar los datos (xi, yi) de la Tabla 1 considerando los tipos de funciones interpolantes que se indican a continuación:

a) Un polinomio u4(x) de grado mínimo con derivada 0 en x=0 (u4'(0)=0) ¿Cuál es el grado del polinomio?.

b) Un polinomio u5(x) de grado mínimo con derivada 1 em x=0 (u5'(0)=1) ¿Grado del polinomio?

En cada caso:
- Dar previamente la <u>expresión general de las funciones interpolantes</u> admisibles y e<u>scribir el sistema lineal</u> Hc=b que hay que resolver.
- Resolver los correspondientes sistemas lineales y representar conjuntamente las gráficas de las funciones interpolantes (en distinto color) y los puntos donde se interpola.

Matrices de coeficientes y vectores de términos independientes de los sistemas resultantes:
(a) H5=[xi.^0 xi.^2 xi.^3 xi.^4]; b5=yi;
(b) H4=[xi.^0 xi.^2 xi.^3 xi.^4]; b4=yi-xi;

Ejercicio 4.

1. Se quiere interpolar la función f(x)=2*sinh(x) en los puntos 1, 3 y 5 por un polinomio p1(x) de grado 2:
1.0. Datos a interpolar (xi=[1 3 5]'; yi=2*sinh(xi);).
1.1. Generar la matriz H1 y el vector b1 del sistema lineal H1*c1=b1, al que se llega planteando el correspondiente problema de interpolación. Resolver el sistema lineal y dar los valores de los coeficientes del polinomio resultante.
1.2. Dibujar en una misma ventana gráfica (comando subplot) en el intervalo [1,5]: En subplot(1,2,1), la gráfica de la función original f(x) (verde), de p1(x) (rojo) y de los puntos donde se interpola (*rojo). En subplot(1,2,2), el error de interpolación (abs(f(x)-p1(x))). Poner título a cada gráfica (*Función original y polinomio interpolador* y *Error de interpolación*). Para pintar las gráficas utilizar un vector auxiliar de puntos en el intervalo [1,5] (por ejemplo xx=1:0.001:5).
¿Cuál es el valor máximo del error a partir de sus valores en xx?
¿Cuál es el valor mínimo del error y en qué puntos se alcanza?
1.3. Si se aproximase f(3.1) por p1(3.1) ¿cuántas cifras decimales significativas se obtendrían?

2. Se quiere calcular el polinomio p2(x) de grado 2 cuya derivada en 1 es cero, $p2(x) = c_1 + c_2(x-1)^2$, que interpola a f(x) en los puntos 1 y 5: Generar la matriz H2 y el vector b2 del sistema lineal H2*c2=b2, al que se llega planteando el correspondiente problema de interpolación. Resolver el sistema lineal y dar los valores de los coeficientes del polinomio resultante.

Ejercicio 5. Ejecutar los comandos xi=pi*[-1.5:1:1.5]', yi=cos(xi).

a) Interpolar la tabla de datos {xi,yi} mediante un polinomio p(x) de grado mínimo, ¿cuál es este grado? Dibujar la gráfica del polinomio p(x) en el intervalo [-5, 5] ('b.' en azul) junto con los valores de la tabla ('ro' en rojo).

b) Interpolar la misma tabla de datos con un polinomio p2(x) de grado mínimo que además verifique la condición p2(0)=1 ¿qué grado tiene p2(x)? Dibujar la gráfica del polinomio p2(x) en el intervalo [-5, 5] ('g.' en verde), con los valores de la tabla (en rojo), junto con el punto $(0,1)$ ('sr' cuadrado rojo).

*Nota: p2(x)=1+c1*x+c2*x^2+c3*x^3+c4*x^4.*

(H2=[xi.^1 xi.^2 xi.^3 xi.^4]; b2=yi-1. Otra opción añadir nuevo dato de interpolación a la tabla inicial y aumentar en 1 el grado del polinomio)

c) Pintar en una misma gráfica los errores de interpolación e(x)=abs(cos(x)-p(x)) (en azul) y e2(x)=abs(cos(x)-p2(x)) (en verde) en el intervalo [-5, 5]. Comentar los resultados.

Ejercicio 6. Condiciones interpolación Taylor (Ver problema en diapositivas Tema 2). Se considera el problema de interpolación consistente en hallar una función $u(x) \in U$, siendo U el espacio de funciones generado por la base $\{1, e^x, e^{-x}\}$, que interpole en el sentido de Taylor a una función f(x) en el punto x=a. Esto es: encontrar c1, c2 y c3 de forma que u(x)=c1+c2*exp(x)+c3*exp(-x) verifique u(a) = f(a)=fa, u'(a)=f'(a) =f1a, u''(a)=f''(a)=f2a, con a, fa, f1a, f2a valores dados.

1. Crear una función matlab *function c=fun(a,fa,f1a,f2a)* que implemente el cálculo de los coeficientes c(1), c(2), c(3) de la función interpolante u(x)= c(1)+ c(2)exp(x)+ c(3)exp(-x) en términos de los valores dados de la función f(x). (Argumentos entrada: a, fa,f1a, f2a. Argumento salida: vector c, con c=[c(1), c(2), c(3)]').
2. Aplicar la función del apartado anterior para interpolar la función f(x) = sin(x), con a = 0, por una función u(x) del tipo indicado. Calcular el vector c.

   2.1. Dar una estimación del valor de f(0.1) utilizando la función interpoladora considerada (u(0.1)). Calcular el error relativo y el nº de cifras decimales significativas que se obtienen con esta estimación.

   2.2. Dibujar en una misma gráfica la función f(x) (en verde) y su función interpoladora u(x) (en rojo) en el intervalo [-0.5,0.5].

   2.3. Dibujar la gráfica del error relativo que se comete al simular f(x) por u(x) en el intervalo [-0.5,0.5], utilizando una escala adecuada. Etiquetar la gráfica con el título "Error relativo". Comentar la gráfica. Indicar el valor máximo del error en el vector de puntos auxiliar utilizado para hacer las gráficas.

   2.4. Dibujar la gráfica del nº de cifras significativas obtenidas al simular f(x) por u(x) en el intervalo [-0.5,0.5], etiquetando la gráfica con el título "Nº de cifras significativas". Comentar la gráfica.