Relatório do Projeto 2 - Rede Trófica

Júlia Wotzasek Pereira - RA:120475
Matheus Augusto de Castro Santos - RA: 120869
Vinícius Santiago do Amaral - RA: 120640

Introdução

Quando trabalhamos no contexto da biomatemática, com ênfase para a interação entre populações, precisamos definir como cada população é descrita com relação ao seu próprio crescimento e ao crescimento das populações que com ela convivem.

Para dizer porém se a população de uma espécie afeta a outra, é comum que estabeleçamos um grafo orientado de acordo com o fluxo de energia de alimentação entre as espécies, o que é biologicamente conhecido como **rede trófica** ou **cadeia trófica**.

Para descrever uma população, devemos estabelecer uma equação diferencial que a descreva. Podemos construir nosso modelo, acompanhando o aprimoramento histórico que houve nas equações de modelagem, para justificar nosso modelo.

O modelo malthusiano, criado por Thomas Robert Malthus, considera que a população não possui qualquer forma de restrição ao seu crescimento, resultando em um crescimento exponencial:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t)$$

É um modelo que considera que a população cresce de forma exponencial, o que significa que uma população, dependendo de sua velocidade de crescimento, seria capaz de ocupar toda a superfície da Terra.

Esse modelo pode ser melhorado. Para isso, consideramos fatores limitantes a esse crescimento. Podemos considerar, por exemplo, espaço e recursos limitados, competição por recursos vitais intraespecíficos, doenças, predação. Refazemos então nossa lógica com a seguinte equação:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t) - \text{Fatores Limitantes}$$

O termo de fatores limitantes é, de fato, bastante abstrato. Um modelo um pouco mais claro dessa ideia, idealizado por Pierre François Verhulst, é o da equação logística, que traduz esse fator limitante como um termo de saturação:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N - \beta N(t)^2 = \alpha N \left(1 - \frac{N}{k}\right)$$

onde α será a taxa de crescimento da população e k é a capacidade ou saturação do ambiente, isto é, sua capacidade de suporte.

Esses modelos até agora estabelecidos consideram populações isoladas, não considerando explicitamente suas interações com outras populações, isto é, não considera interações como simbiose, predação, competição, entre outros.

Nesse contexto, surge o modelo *Lotka-Volterra*. Sejam $P(t)$ a população de predadores e $V(t)$ a população de presas. O seguinte conjunto de equações descreve o modelo:

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)(\alpha V(t) - \beta)$$
$$\frac{dV(t)}{dt} = V(t)(\lambda - \phi P(t))$$

1 Modelo

Para as simulações que serão feitas, utilizamos a seguinte rede trófica:

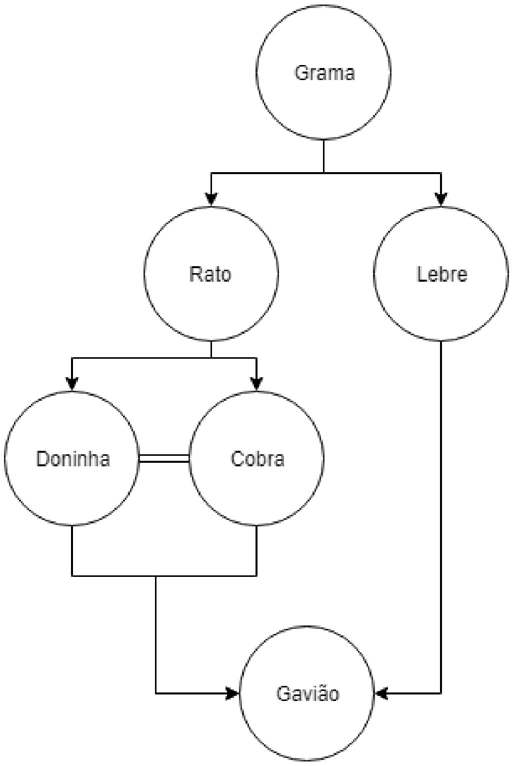

Figura 1 – Rede trófica. Setas simples indicam relações de predação e setas duplas são relações de competição

Para descrever a relação entre as espécies, definimos coeficientes com a seguinte regra:

- **-1:** Indica relação maléfica para a espécie que está descrita na linha da tabela.
- **0:** Indica que não há relação entre as espécies.
- **1:** Indica relação benéfica para a espécie que está descrita na linha da tabela.

	Grama	Rato	Lebre	Doninha	Cobra	Gavião
Grama	+1	-1	-1	0	0	0
Rato	+1	-1	0	-1	-1	0
Lebre	+1	0	-1	0	0	-1
Doninha	0	+1	0	-1	-1	-1
Cobra	0	+1	0	-1	-1	-1
Gavião	0	0	+1	+1	+1	-1

Tabela 1 – Matriz qualitativa das relações inter e intraespecíficas

Destacamos esta matriz qualitativa para deixar mais intuitivo o entendimento dos coeficientes das equações. Com os coeficientes que usaremos, a matriz fica:

	Grama	Rato	Lebre	Doninha	Cobra	Gavião
Grama	α_{PP}	α_{PR}	α_{PL}	α_{PD}	α_{PC}	α_{PG}
Rato	α_{RP}	α_{RR}	α_{RL}	α_{RD}	α_{RC}	α_{RG}
Lebre	α_{LP}	α_{LR}	α_{LL}	α_{LD}	α_{LC}	α_{LG}
Doninha	α_{DP}	α_{DR}	α_{DL}	α_{DD}	α_{DC}	α_{DG}
Cobra	α_{CP}	α_{CR}	α_{CL}	α_{CD}	α_{CC}	α_{CG}
Gavião	α_{GP}	α_{GR}	α_{GL}	α_{GD}	α_{GC}	α_{GG}

Tabela 2 – Matriz qualitativa das relações inter e intraespecíficas

Com a nomenclatura de coeficientes definida, definimos às equações:

Equação da Grama

$$\frac{dP(t)}{dt} = \alpha_{PP}P(t)\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \alpha_{PR}R(t) + \alpha_{GL}L(t)$$

Equação do Rato

$$\frac{dR(t)}{dt} = \alpha_{RR}R(t) + \alpha_{RP}P(t) + \alpha_{RD}D(t) + \alpha_{RC}C(t)$$

Equação da Lebre

$$\frac{dL(t)}{dt} = \alpha_{LL}L(t) + \alpha_{LP}P(t) + \alpha_{LG}G(t)$$

Equação da Doninha

$$\frac{dD(t)}{dt} = \alpha_{DD}D(t) + \alpha_{DR}R(t) + \alpha_{DC}C(t) + \alpha_{DG}G(t)$$

Equação da Cobra

$$\frac{dC(t)}{dt} = \alpha_{CC}C(t) + \alpha_{CR}R(t) + \alpha_{CD}D(t) + \alpha_{CG}G(t)$$

Equação do Gavião

$$\frac{dG(t)}{dt} = \alpha_{GG}G(t) + \alpha_{GL}L(t) + \alpha_{GD}D(t) + \alpha_{GC}C(t)$$

Implementação do modelo

Para implementação do projeto e realização das simulações, foi criado um arquivo em Linguagem C para simular as interações no tempo dada uma matriz de coeficientes de relação entre as espécies, com saída para arquivo texto. O arquivo texto gerado com os dados foi usado para gerar os gráficos na linguagem Python.

Além disso, aproximou-se as interações com passo $\Delta t = 0.01$ para as derivadas, de acordo com o método de *Euler*.

Busca pelos coeficientes

Para que a rede trófica apresentasse um comportamento estável era necessário encontrar os coeficientes adequados para que nenhuma especie entrasse em colapso. Para isso, elaboramos uma matriz que continha valores aleatórios de coeficientes da ordem de $10-3$, e fizemos a simulação com estes coeficientes aleatórios.

Como esperado, a primeira simulação foi infrutífera. Daí fomos alterando manualmente os coeficientes e simulando até conseguir estabilizar a rede de forma adequada.

Simulações

Para todas as simulações a seguir foram utilizados valores iniciais de cada população estabelecidos arbitrariamente seguindo a tabela 3.

Espécie	Quantidade de Indivíduos
Grama	10
Rato	10
Lebre	10
Cobra	15
Gavião	15

Tabela 3 – Populações Iniciais

Simulação 1 - Modelo Estabilizado

Nesta primeira simulação estabelecemos valores inciais arbitrários estabelecidos anteriormente de cada população e utilizamos os coeficientes apresentados na tabela 4 para definir o grau da relação entre os indivíduos.

	Pod	Rato	Lebre	Doninha	Cobra	Gavião
Pod	0,018	-0,00032	-0,0025	0	0	0
Rato	0,00042	-0,0005	0	-0,0003	-0,00046	0
Lebre	0,00042	0	-0,0005	0	0	-0,00046
Doninha	0	0,00025	0	-0,00038	-0,00025	-0,00008
Cobra	0	0,00025	0	-0,00025	-0,00038	-0,00008
Gavião	0	0	0,00001	0,00001	0,00001	-0,0003

Tabela 4 – Matriz de Coeficientes Utilizados

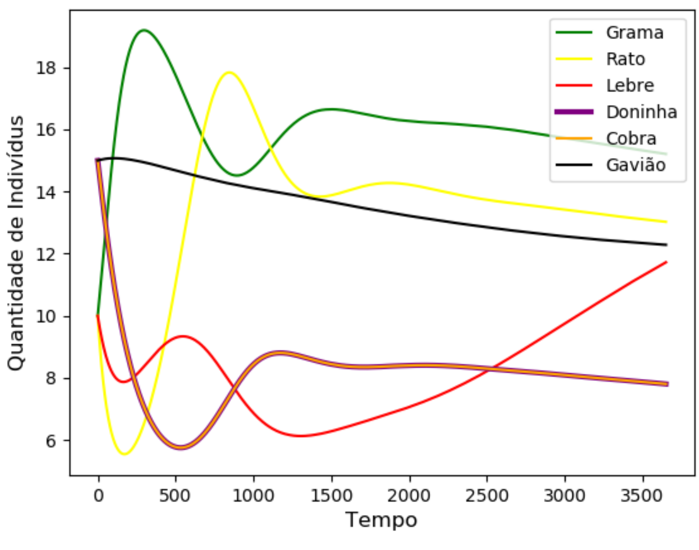

Figura 2 – 100 anos

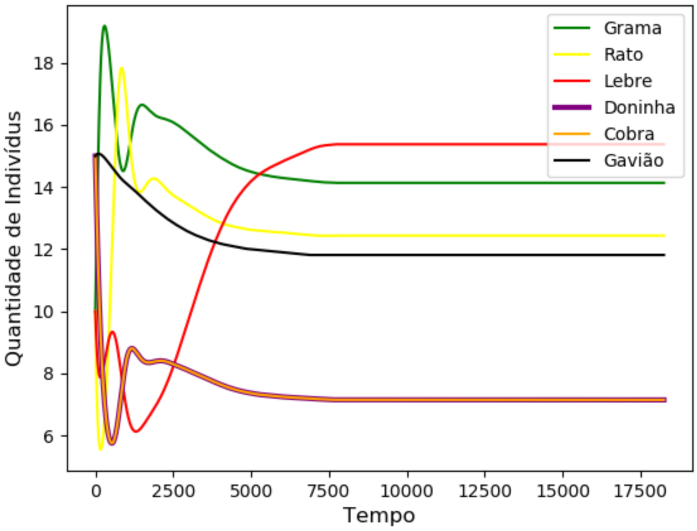

Figura 3 – 500 anos

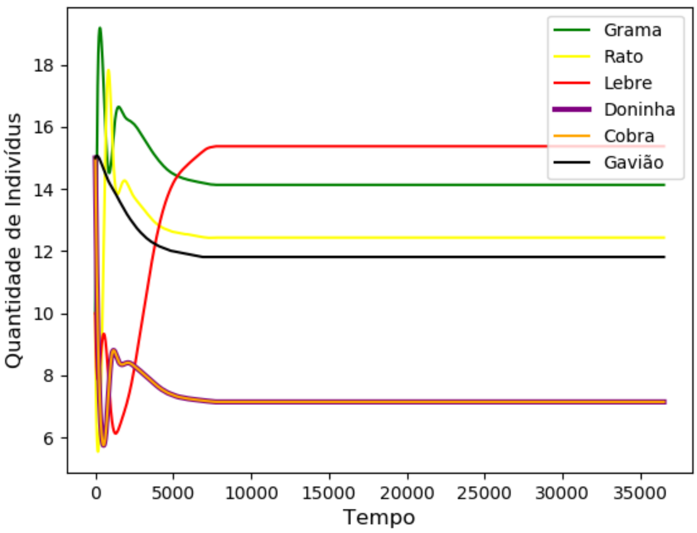

Figura 4 – 1000 anos

Como podemos notar nessa simulação base, com 100 anos não conseguimos notar ainda a estabilização das populações, porém, com 500 anos, essa estabilização se torna visível, e com 1000 ela é mantida. Com isso, todas as próximas simulações serão feitas alterando alguns detalhes dessa simulação base, visando simular possíveis perturbações a esse sistema estável.

Simulação 2 - Temporada de Caça

Utilizando os mesmo valores iniciais das populações e os coeficientes apresentados na tabela 4 acrescentamos uma temporada de caça aos gaviões que tem duração de 90 dias e ocorre a cada 365 dias. Para simular a ocorrência desta caça o coeficiente que controla a taxa de mortalidade do gavião foi dobrado quando a temporada incia e quando ela termina ele retorna ao seu valor original.

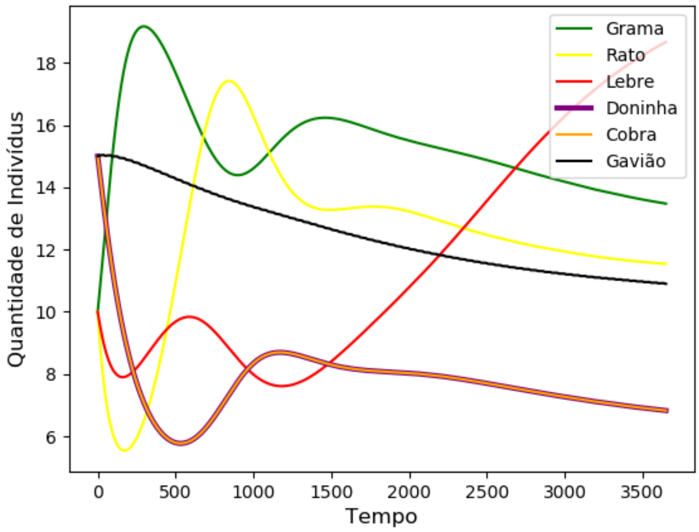

Figura 5 – 100 anos

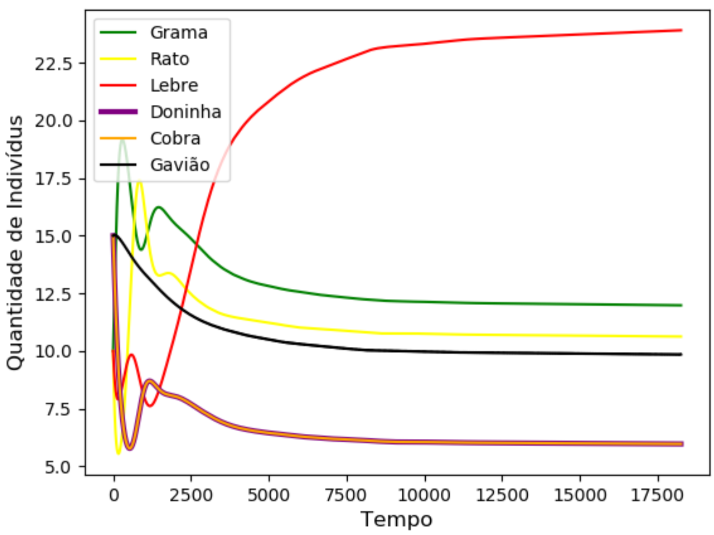

Figura 6 – 500 anos

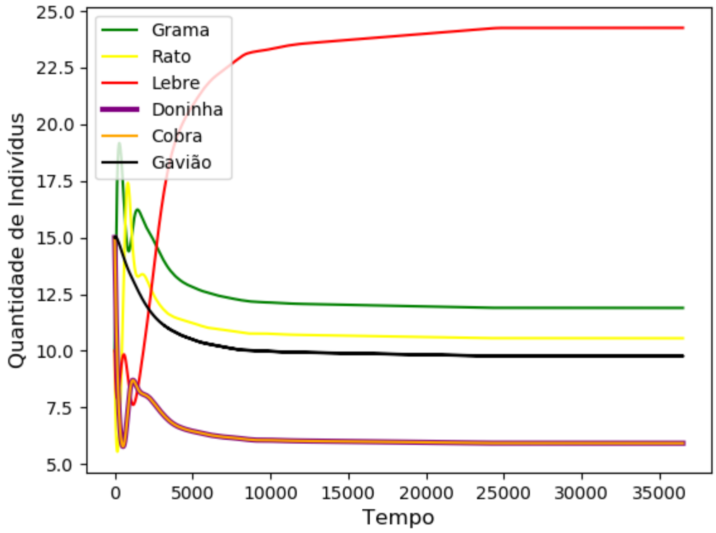

Figura 7 – 1000 anos

Com a temporada de caça aos gaviões, é interessante que avaliemos os três gráficos apresentados. No gráfico de 100 anos de simulação, podemos notar grande oscilação das populações. Destacamos que a queda da população de gaviões ocasiona o aumento das populações de grama e de lebre, sendo seguida por certa queda destas com a volta do aumento da população de gaviões, que é acompanhada pelo crescimento da população de ratos. Neste primeiro gráfico, parece que a população de lebres irá crescer muito e as outras populações irão decair à extinção.

Quando analisamos o gráfico de 500 anos notamos, por outro lado, que há estabilização das populações, com uma alta população de lebres, e fato, mas estável, resultado esse corroborado pelo gráfico de 1000 anos de simulação.

Simulação 3 - Doença em uma espécie

Para esta simulação adicionamos a ocorrência de uma doença na cadeia. Esta doença é transmitida do rato para os seus consumidores. Para isso quando t atinge o valor de 36500 inicia-se o período em que a doença irá afetar a população de cobras e de doninhas, de modo que a taxa de mortalidade de cada uma aumenta 10 vezes.

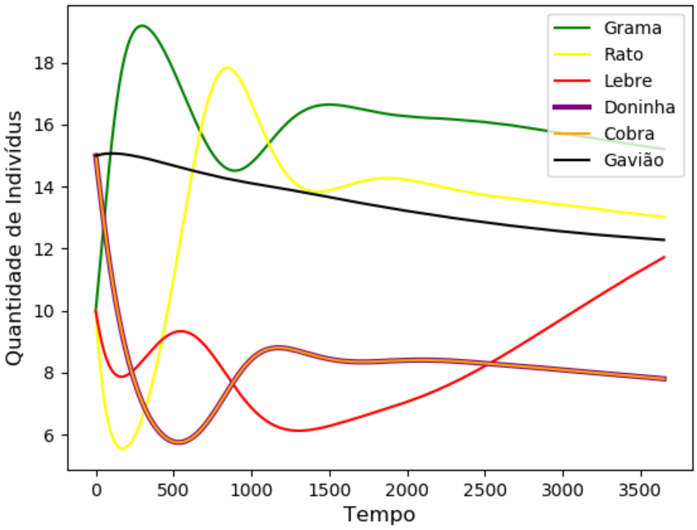

Figura 8 – 100 anos

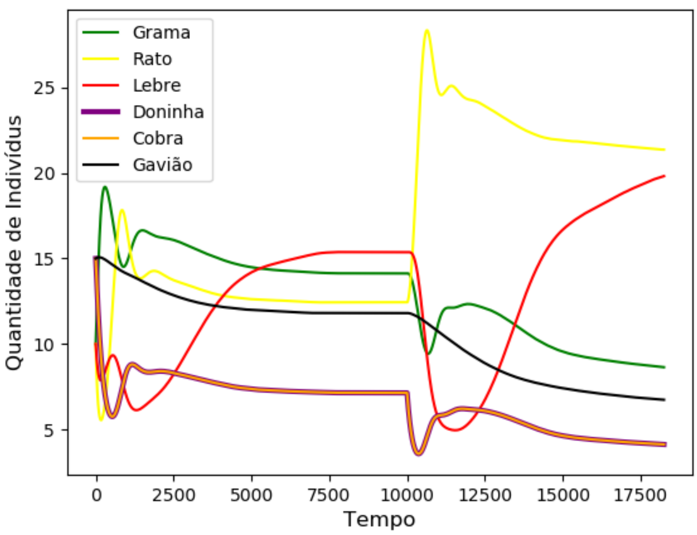

Figura 9 – 500 anos

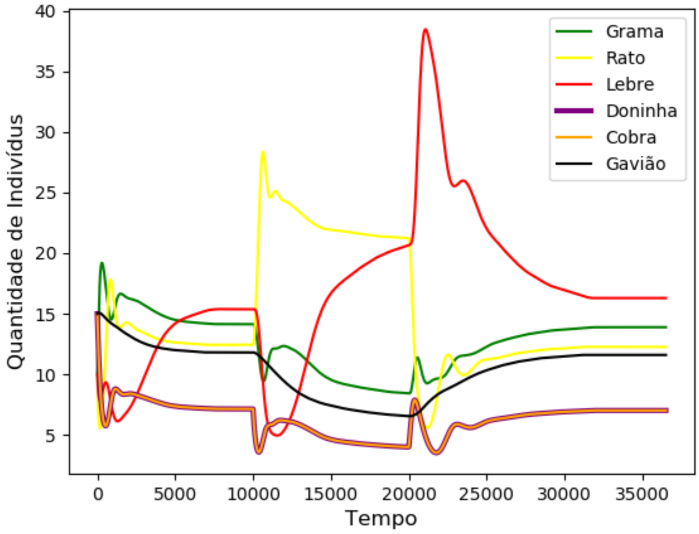

Figura 10 – 1000 anos

Como a doença é introduzida no sistema com $t = 36500$, o gráfico de 100 anos é semelhante ao gráfico da simulação base 3.

No gráfico de 500 anos o efeito da doença é mais claro, pois há um aumento rápido da população de ratos com a diminuição dos seus consumidores -cobras e doninhas- mortos pela doença. Com isso todas as outras populações caem, pois, como são consumidores secundários, diminuir as populações de cobra e doninha é bastante danoso. Com a diminuição dessas populações, é natural que a de gaviões também diminua, pois diminuiu seu alimento e, com sua diminuição, aumenta a população de lebres, que perdeu seu principal consumidor.

No gráfico de 1000 anos, notamos que a população de lebres, após um pico, volta a se equilibrar com as outras populações e a de ratos também volta ao normal, com o término da epidemia.

Simulação 4 - Desmatamento

Com o objetivo de simular a ocorrência de um desmatamento, nesta simulação a cada iteração a partir de *t=10000* diminuímos em 0.001 a quantidade de grama até que atingisse 0, no caso quando o desmatamento atinge seu máximo.

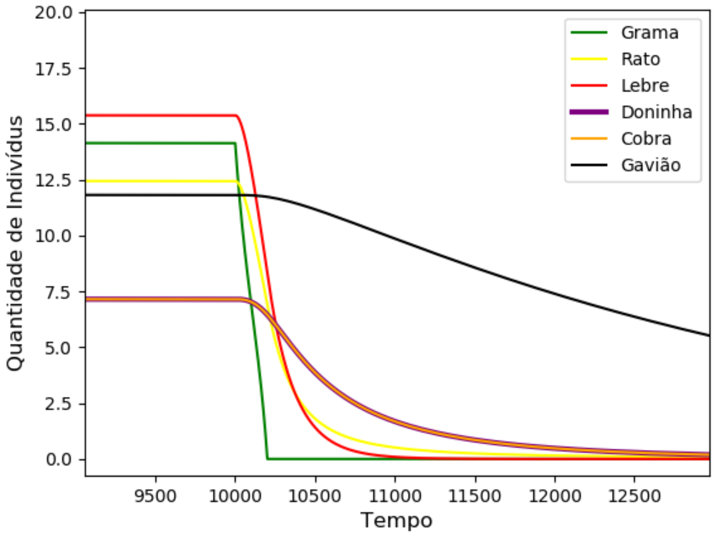

Figura 11 – Zoom no período de decrescimento da grama

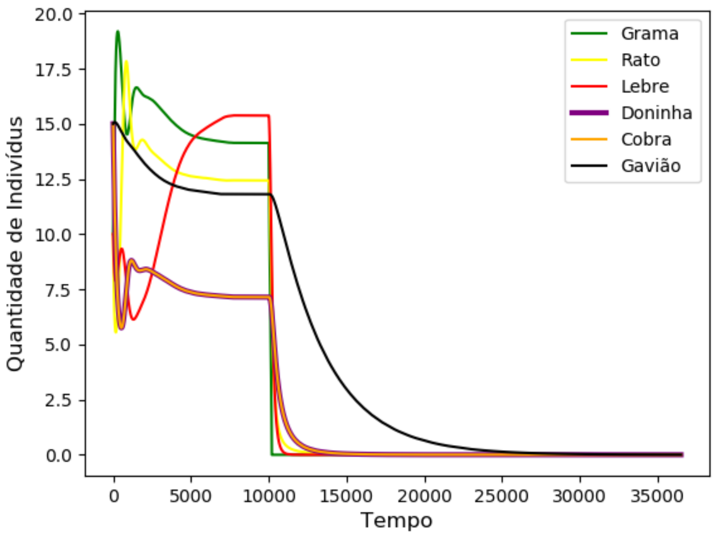

Figura 12 – 1000 anos

A simulação de desmatamento teve, *a priori*, a intenção de ser leve, isto é, ter uma taxa de retirada da grama sutil. Porém, como podemos observar nos gráficos, a retirada gradual da grama fez com que todas as populações diminuíssem rapidamente, mostrando o poder danoso do desmatamento, mesmo nesse modelo simples.

Simulação 5 - Migração

A simulação de migração considerou que os ratos migram, fazendo 3/4 da população ir embora.

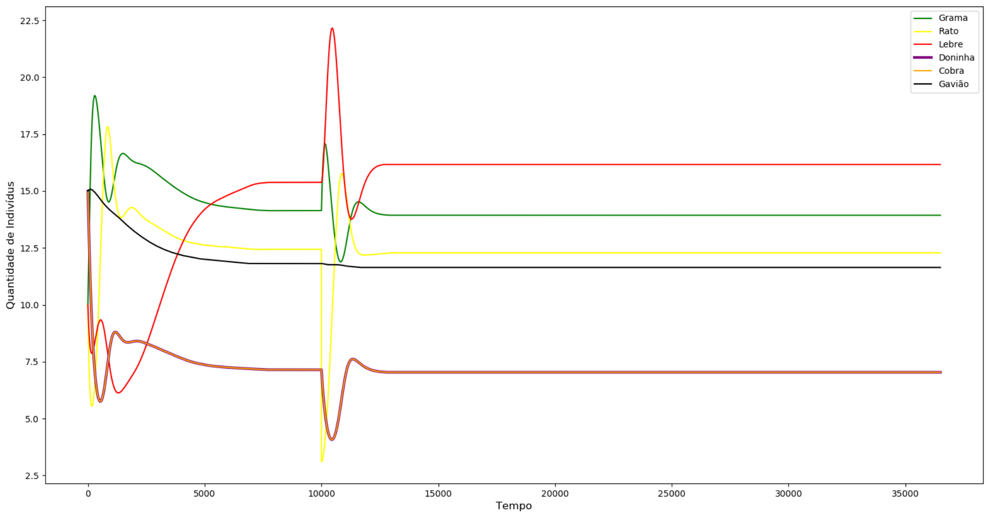

Figura 13 – 1000 anos

Notamos que, mesmo com a migração dos ratos, apesar de um pico local de oscilação das populações, todas as populações voltam a se estabilizar rapidamente.

Simulação 6 - Poluição

Para essa simulação, consideramos que houve um pico de poluição, que fará com que todas as populações tenham sua taxa de mortalidade dobrada. Destacamos que é um pico de poluição, por não manter a taxa de mortalidade, com essa retornando a normal gradativamente. O lixo serve como adubo para a grama.

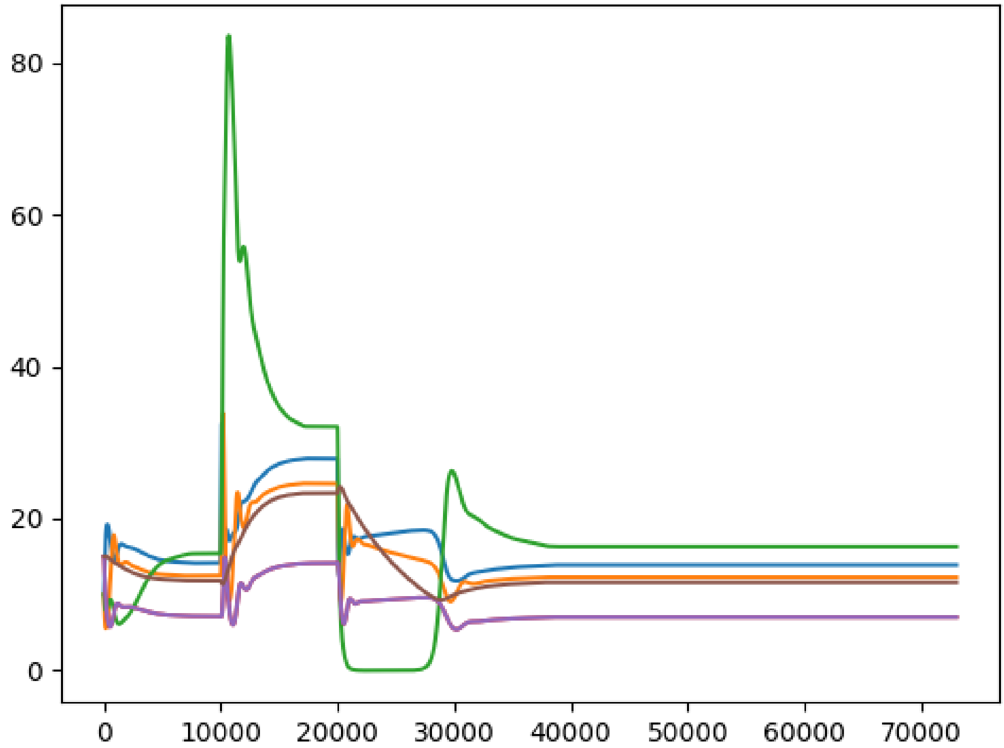

Figura 14 – 2000 anos

Notamos que após o término da poluição, volta a estabilização das populações.