Relatório de Progresso de Bolsa de Iniciação Científica

Título: Estruturas algébricas em heranças genéticas

Aluna: Júlia Wotzasek Pereira

Orientador: Thiago Castilho de Mello

Instituição: Instituto de Ciência e Tecnologia -
- Universidade Federal de São Paulo - UNIFESP

Número de Processo: 2018/10312-3

Vigência: 01/08/2018 a 31/07/2019

Período de Referência: 01/08/2018 a 31/07/2019

Júlia Wotzasek Pereira

Thiago Castilho de Mello

1 Introdução

1.1 Resumo do Plano de Trabalho

O projeto consiste no estudo dos seguintes tópicos:

1. Álgebras (Estudo previsto para os meses de agosto à dezembro):
   - Definições, exemplos, propriedades, homomorfismos, ideais, álgebras quocientes e constantes de estrutura. Produto tensorial de álgebras.
   - Exemplos de classes importantes de álgebras: associativas, comutativas, de Lie, de Jordan, nilpotentes, unitárias, etc.
   - Álgebras livres, identidades polinomiais e variedades de álgebras.
   - Ideais nil e nilpotentes e o Teorema de Dubnov-Ivanov-Nagata-Higman para álgebras associativas.
   - Álgebras associativas simples de dimensão finita e o Teorema de Wedderburn.
2. Álgebras em Genética (Estudo previsto para os meses de janeiro à março):
   - Herança Mendeliana Simples (Álgebras Gaméticas e Zigóticas).
   - Herança Mendeliana com mutação.
   - Álgebras com realização genética (estrutura e propriedades):
     - Álgebras Báricas.
     - Potências principais e plenárias.
     - Idempotentes.
   - Álgebras de Bernstein
3. Álgebras de Evolução (Estudo previsto para os meses de abril à junho):

- Exemplos e propriedades básicas.
- Operadores de Evolução.
- Formulação algébrica da genética não-mendeliana.
- Álgebras de evolução e grafos.
- Álgebras de evolução como um espaço de Banach.

1.2 Resumo das atividades realizadas no período

Conforme previsto no plano de trabalho, os cinco primeiros meses do projeto foram utilizados para o estudo dos conceitos referentes ao item (1) do plano. Os tópicos estudados, detalhados nas seções a seguir, foram:

- Definição de Álgebra, Álgebras Associativas, Comutativas e de Lie, Ideais, Constantes de Estrutura e Produto Tensorial de Álgebras (capítulo 1 de [1], seção 1)
- Álgebras Livres (capítulo 1 de [1], seção 2)
- Álgebras com Identidades Polinomiais, Variedades de Álgebras e Teorema de Birkhoff (capítulo 2 de [1])
- Identidades Polinomiais Homogêneas e Multilineares (capítulo 4 de [1])
- Teorema de Dubnov-Ivanov-Nagata-Higman (capítulo 8 de [1])
- Ideais Nil e Nilpotentes (capítulo 2 de [2], seção 1)
- Anéis Primos e Semiprimos (capítulo 2 de [2], seção 2)
- Matrizes Unidade e Elementos Idempotentes (capítulo 2 de [2], seções 6 e 7)
- Ideais Minimais à Esquerda e Teorema de Wedderburn (capítulo 2 de [2], seções 8 e 9)

Durante o período, houve também a participação na primeira semana da Escola Latino-americana de Matemática (ELAM), realizada na Universidade Federal do ABC - UFABC. Destaca-se o curso que ocorreu entitulado *"Una clase de álgebras genéticas: las álgebras de evolución"*, ministrado pela pesquisadora Yolanda Cabrera da Universid de Málaga.

Houve também participação nas duas fases da Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária - OBMU.

O item (2) do projeto, por sua vez, foi trabalhado no período de Janeiro a Junho de 2019. Os tópicos estudados, também detalhados nas seções a seguir, foram:

- Definição de Álgebras Genéticas, Herança Mendeliana Simples, Álgebras Gaméticas, Álgebras Zigóticas e Herança Mendeliana com mutação (capítulo 1 de [3], seção A)

- Álgebras com realização genética, Álgebras Báricas e Homomorfismo de peso (capítulo 1 de [3], seção B)

- Álgebras não associativas: Álgebras de Transformação, Álgebras Alternativas, Potências Principais e Potências Plenárias (capítulo 2 de [3], seções A e B)

- *Rank equation* de uma álgebra, Polinômios Minimais Unilaterais (capítulo 2 de [3], seção C)

- Álgebras *Train* (capítulo 3 de [3], seção A)

- Álgebras *Train* especiais, Álgebra Genética de *Schaefer*, Álgebra Genética de Gonshor (capítulo 3 de [3], seção B) Álgebras Nilpotentes e Solúveis (capítulo 4 de [3])

- Álgebras de Bernstein (seção 4 do artigo [4])

Durante o período, houve a participação no *IV Congresso Acadêmico Unifesp*, com apresentação de trabalho oral e *poster*, ambos intitulados "Identidades Polinomiais Multilineares em Álgebras Não Comutativas", abordando principalmente o problema apresentado na seção 4, no exemplo 4.6.

O item (3) do projeto foi trabalhado no mês de Julho de 2019. Os tópicos estudados, detalhados nas seções a seguir, foram:

- Exemplos de Álgebras de Evolução (capítulo 2 de [5], capítulo 2, seções 2.1 e 2.2)
- Propriedades Básicas de Álgebras de Evolução (capítulo 3 de [5], seção 3.1)
- Operadores de Evolução (capítulo 3 de [5], seção 3.2)
- Álgebras de Evolução como um espaço de *Banach* (capítulo 3 de [5], seção 3.3)
- Formulação Algébrica da Genética não-mendeliana (capítulo 5 de [5], seções 5.1 e 5.2)
- Álgebras de Evolução e Grafos (capítulo 6 de [5], seção 6.1)

2 Álgebras Comutativas, Associativas e de Lie

2.1 Propriedades Básicas das Álgebras

Definição 2.1. Um espaço vetorial R sobre um corpo K é dito uma *álgebra* (ou uma *K-Álgebra*) se este estiver munido de uma operação binária $* : R \times R \to R$ tal que, para quaisquer $a, b, c \in R$ e $\alpha \in K$,temos:

$$(a+b)*c = a*c + b*c$$

$$a*(b+c) = a*b + a*c$$

$$\alpha(b*c) = (\alpha b)*c$$

Vale destacar o fato de que o símbolo $*$ utilizado para denotar multiplicação pode ser omitido em casos em que não haja ambiguidade, de modo que escrevemos ab ao invés de $a*b$.

Observação 2.2. Se uma álgebra R possui uma base $\{e_i | i \in I\}$, então é possível definir a multiplicação em R sabendo apenas as multiplicações entre os elementos da base:

$$e_i * e_j = \sum_{k \in I} \alpha_{ij}^k * e_k, \alpha_{ij}^k \in K$$

onde para i, j fixos apenas um número finito de α_{ij}^k é diferente de zero. Simetricamente, dados uma base $\{e_I | i \in I\}$ de um espaço vetorial R e um sistema de elementos $\alpha_{ij}^k \in K$ com a propriedade de que para i, j fixos apenas um número finito de α_{ij}^k não é zero, podemos definir a multiplicação em R como:

$$(\sum_{i \in I} \xi_i e_i) * (\sum_{j \in I} \eta_j e_j) = \sum_{i,j \in I} \xi_i \eta_j (e_i * e_j), e_i, e_j = \sum_{k \in I} \alpha_{ij}^k e_k$$

Definição 2.3. Seja S um subespaço de R. Dizemos que S é uma *subálgebra* de R se $s_1 s_2 \in S$ $\forall s_1, s_2 \in S$. Dizemos que o subespaço I de R é um *ideal à* *esquerda* de R se $\forall i \in I, r \in R$, $ri \in I$. De forma análoga definimos *ideal à direita* e chamamos simplesmente *ideal* se I for um ideal à esquerda e à direita.

Definição 2.4. Sejam R_1, R_2 álgebras sobre K e $\phi : R_1 \to R_2$ uma transformação linear. Dizemos que ϕ é um *homomorfismo de álgebras* se

$$\phi(r_1 r_2) = \phi(r_1)\phi(r_2)$$

O homomorfismo ϕ será dito um *isomorfismo de álgebras* se ϕ é uma bijeção entre R_1 e R_2.

Definição 2.5. Seja R uma álgebra sobre K.
(i) R é *associativa* se $a(bc) = (ab)c \ \forall a, b, c \in R$.
(ii) R é *comutativa* se $ab = ba \ \forall a, b \in R$.
(iii) R é uma *álgebra de Lie* se

$$aa = 0 \ (\textit{Lei de Anticomutatividade})$$

$$(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0 \ (\textit{Identidade de Jacobi})$$

(iv) Se existir $1_R \in R$ tal que $1_R a = a 1_R = a \ \forall a \in R$ dizemos que R é uma *álgebra com unidade.*

Teorema 2.6. *Seja R uma álgebra associativa com multiplicação $*$. Então R é uma álgebra de Lie com respeito a multiplicação*

$$[r_1, r_2] = r_1 * r_2 - r_2 * r_1, r_1, r_2 \in R.$$

Denotamos essa álgebra de Lie por $R^{(-)}$.

Demonstração. É fácil notar que vale a lei anticomutativa:

$$[r_1, r_1] = r_1 * r_1 - r_1 * r_1 = 0$$

Falta provar que obedece à Identidade de Jacobi:

$$[[r_1, r_2], r_3] + [[r_2, r_3], r_1] + [[r_3, r_1], r_2] =$$

$$[r_1 * r_2 - r_2 * r_1, r_3] + [r_2 * r_3 - r_3 * r_2, r_1] + [r_3 * r_1 - r_1 * r_3, r_2] = r_1r_2r_3 - r_2r_1r_3 - r_3r_1r_2 + r_3r_2r_1 + r_2r_3r_1 - r_3r_2r_1 - r_1r_2r_3 + r_3r_2r_1 + r_3r_1r_2 - r_1r_3r_2 - r_2r_3r_1 + r_2r_1r_3 = 0$$

$\square$

Definição 2.7. Seja A um álgebra. O conjunto dos elementos em A tais que

$$Z(A) = \{a \in A; a.b = b.a; \forall b \in A\}$$

é dito o *centro* de A e é denotado por $Z(A)$.

Definição 2.8. Uma álgebra A unitária não nula será dita *central* se múltiplos escalares da unidade são os únicos elementos em seu centro.

A menos que seja especificado de outra maneira, a álgebra é usualmente definida sobre um corpo F. Dessa maneira, se A é uma álgebra não nula e unitária, identificamos a F com $F.1$, e escrevemos λ no lugar de $\lambda 1$ para todo escalar $\lambda \in F$. Assim, uma álgebra será central se $Z(A) = F$.

Definição 2.9. Sejam V e W espaços vetoriais com bases $\{v_i | i \in I\}$ e $\{w_j | j \in J\}$, respectivamente. O *produto tensorial* $V \otimes W = V \otimes_K W$ de V e de W sob espaço vetorial com base $\{v_i \otimes w_j | i \in I, j \in J\}$. Assumimos que

$$(\sum_{i \in I} \alpha_i v_i) \otimes (\sum_{j \in J} \beta_j w_j) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \alpha_i \beta_j (v_i \otimes w_j), \alpha_i, \beta_j \in K.$$

Se V e W são álgebras, então $V \otimes W$ também é uma álgebra, e sua multiplicação é dada por:

$$(v' \otimes w')(v" \otimes w") = (v'v") \otimes (w'w"), v', v" \in V, w', w" \in W.$$

2.2 Álgebras Livres

Definição 2.10. Seja $\mathfrak{B}$ uma classe de álgebra e seja $F \in \mathfrak{B}$ uma álgebra gerada por um conjunto X. Dizemos que F é uma *álgebra livre na classe* $\mathfrak{B}$, gerada livremente pelo conjunto X se, para toda álgebra $R \in \mathfrak{B}$, toda função $X \to R$ pode ser estendida para um homomorfismo de álgebras $F \to R$. Chamamos a cardinalidade $|X|$ do conjunto X de *posto de F*.

Proposição 2.11. *Para todo conjunto X, a álgebra $K\langle X\rangle$ com base no conjunto de todas as palavras*

$$x_{i_1}\cdots x_{i_n}, x_{i_j} \in X, n = 0, 1, 2...$$

e com multiplicação definida por

$$(x_{i_1}\cdots x_{i_m})(x_{j_1}\cdots x_{j_n}) = x_{i_1}\cdots x_{i_m}x_{j_1}\cdots x_{j_n}, x_{i_k}, x_{j_i} \in X$$

é livre na classe de todas as álgebras associativas. A unidade dessa álgebra será palavra vazia, e esta será denotada por 1*. Se considerarmos o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado por todas as palavras de tamanho ≥ 1, obtermos uma álgebra associativa não-unitária, que é livre na classe das álgebras associativas.*

Definição 2.12. Seja R uma álgebra associativa e G uma álgebra de Lie. Dizemos que R é uma *álgebra envelopante de G* se G é isomorfo à uma subálgebra de $R^{(-)}$. Dizemos que a álgebra associativa $U = U(G)$ é a *álgebra envelopante universal de G* se G é uma subálgebra de $U^{(-)}$ e U possui a seguinte propriedade universal: para qualquer álgebra associativa R e qualquer homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : G \to R^{(-)}$ existe um único homomorfismo de álgebras $\psi : U \to R$ que estenda ϕ.

Vale destacar que o teorema a seguir é de extrema importância, por provar, dentre outras coisas, que toda álgebra de Lie pode ser obtida através de uma subálgebra (de Lie) de uma álgebra associativa se trocarmos o produto associativo pelo produto colchete.

Teorema 2.13 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *Toda álgebra de de Lie G possui uma única (a menos de isomorfismos) álgebra envelopante universal $U(G)$. Se G possui uma base $\{e_i | i \in I\}$, e o conjunto de índices de I é ordenado, então $U(G)$ possui uma base:*

$$e_{i1} \cdots e_{ip}, i_1 \leq \cdots \leq i_p, i_k \in I, p = 0, 1, 2, ...$$

3 Álgebras com Identidades Polinomiais

3.1 Definições e exemplos de PI-Álgebras

Nesta seção, fixaremos um conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ que seja infinito e enumerável.

Definição 3.1. (i) Seja $f = f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ e seja R uma álgebra associativa. Dizemos que $f = 0$ é uma *identidade polinomial* para R se:

$$f(r_1, \dots, r_n) = 0, \forall r_1, \dots, r_n \in R$$

É comum encontrarmos f como uma identidade polinomial para R.

(ii) Se uma álgebra associativa R satisfaz uma identidade polinomial $f = 0$ que não seja trivial, dizemos que R é uma *PI-álgebra ("PI"é a sigla para "Polinomial Identity").*

Exemplo 3.2. (i) Uma álgebra R é comutativa se, se somente se, satisfaz a identidade polinomial:

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1 = 0$$

(ii) Seja R uma álgebra de dimensão finita e associativa s seja $dimR < n$. Então R satisfaz a *Identidade Standard* de grau n:

$$St_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (sign\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} = 0$$

onde S_n é o grupo simétrico de grau n. Essa mesma álgebra também satisfaz a *Identidade de Capelli*:

$$d_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_n} (sign\sigma) y_1 x_{\sigma(1)} y_2 \cdots y_n x_{\sigma(n)} y_{n+1} = 0$$

3.2 Variedades e Álgebras Relativamente Livres

Definição 3.3. Seja $\{f_i(x_1, \ldots, x_{ni}) \in k\langle X \rangle | i \in I\}$ um conjunto de polinômios na álgebra associativa livre $k\langle X \rangle$. A classe $\mathfrak{V}$ de todas as álgebras associativas que satisfazem as identidades polinomiais $f_i = 0$, $i \in I$, é chamado *variedade (de álgebras associativas) definida (ou determinada) pelo sistema de identidades polinomiais $\{f_i | i \in I\}$*. A variedade $\mathfrak{W}$ é chamada *subvariedade de* $\mathfrak{V}$ *se* $\mathfrak{V} \supset \mathfrak{W}$. O conjunto $T(\mathfrak{V})$ de todas as identidades polinomiais satisfeitas pela variedade $\mathfrak{V}$ é chamada *T-Ideal* de $\mathfrak{V}$.

Definição 3.4. Para um conjunto fixo Y, a álgebra $F_Y(\mathfrak{V})$ na variedade $\mathfrak{V}$ é chamada de *álgebra relativamente livre de* $\mathfrak{V}$ (ou álgebra $\mathfrak{V}$-livre), se $F_Y(\mathfrak{V})$ é livre na classe $\mathfrak{V}$ (e é livremente gerado por Y).

3.3 Teorema de Birkhoff

Definição 3.5. Seja $\mathfrak{V}$ uma classe de álgebras. Denotamos por $C\mathfrak{V}$,$S\mathfrak{V}$ e por $Q\mathfrak{V}$, respectivamente, as classes obtidas de $\mathfrak{V}$ tomando as somas cartesianas ("somas diretas"), as subálgebras e álgebras quocientes das álgebras em $\mathfrak{V}$.

Teorema 3.6 (Birkhoff). *A classe das álgebras $\mathfrak{V}$ é uma variedade se, e somente se, $\mathfrak{V}$ é fechado tomando todas as somas cartesianas, as subálgebras e as álgebras quociente, isto é, $C\mathfrak{V}$,$S\mathfrak{V}$,$Q\mathfrak{V} \subset \mathfrak{V}$.*

4 Invariantes Numéricos de T-Ideais

4.1 Espaços Vetoriais Graduados

Definição 4.1. Um espaço vetorial V é dito *graduado* se este for uma soma direta de subespaços $V^{(n)}$, $n \geq 0$, isto é:

$$V = \bigoplus_{n \geq 0} V^{(n)} = \sum_{n \geq 0}^{\oplus} V^{(n)}$$

Os subespaços $V(n)$ são chamados de *componentes homogêneos de grau n de V*. Caso não haja ambiguidade, escreveremos $\sum$ ao invés de $\sum^{\oplus}$.

Outra definição importante a ser destacada é a de *multigrau em V*:

$$V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n_i \geq 0} V^{(n_1,\ldots,n_m)}$$

e chamamos $V^{(n_1,\ldots,n_m)}$ de *componente homogêneo de grau* $(n_1, \ldots, n_m)$. O subespaço W do espaço vetorial $V = \sum_{n \geq 0} V^{(n)}$ é *subespaço graduado* ou *homogêneo* se $W = \sum_{n \geq 0}(W \cap V^{(n)})$. Nesse caso, o espaço quociente V/W também é naturalmente graduado, e dizemos que V/W *herda* a graduação de V.

Exemplo 4.2. Se $V = \sum V^{(n)}$ e $W = \sum W(n)$ são espaços vetoriais graduados com mesmo multigrau, então $V \otimes W$ é também graduado, assumindo que os seus componentes homogêneos são

$$(V \otimes W)^{(n)} = \sum_{n' + n" = n} V^{(n')} \otimes W^{(n")}.$$

De fato, tendo que $V = \sum V^{(n)}$ e que $W = \sum W^{(n)}$, escrevemos:

$$V \otimes W = \sum V^{(n)} \otimes \sum W^{(n)} = \sum_{n' \geq 0} \sum_{n" \geq 0} V^{(n')} \otimes W^{(n")} =$$
$$\sum_{n'+n"=n} V^{(n')} \otimes W^{(n")} = \sum_{n \geq 0} (V \otimes W)^{(n)}$$

Logo, como conseguimos $V \otimes W = \sum (V \otimes W)^{(n)}$, então $V \otimes W$ é graduado.

4.2 Identidades Polinomiais Homogêneas e Multilineares

Lembramos aqui que uma identidade polinomial $g = 0$ é consequência de identidades polinomiais $f_i = 0$, $i \in I$, se $g \in \langle f_i | i \in I \rangle^T$, que é o T-ideal gerado por $f_i, i \in I$.

Definição 4.3. Dois conjuntos de polinômios são ditos *equivalentes* se gerarem o mesmo T-ideal.

Definição 4.4. Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ em uma álgebra associativa livre é *multilinear de grau* n se f é multigraduado de grau $(1, \ldots, 1)$ em $k\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \subset K\langle X \rangle$. Denotamos por P_n o espaço vetorial de todos os polinômios em $k\langle X \rangle$ que são multilineares de grau n. (É bem frequente o uso de V_n no lugar de P_n). É fácil ver que a dimensão de P_n é $n!$, e que sua base é dada por:

$$\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} | \sigma \in S_n\}.$$

Proposição 4.5. *Seja* $f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i \in K\langle X \rangle$, *onde* f_i *é o componente homogêneo de* f *de grau* i *em* x_1.

(i) Se K *contém mais do que* n *elementos (por exemplo se* K *for infinito), então as identidades polinomiais* $f_i = 0, i = 0, 1, \ldots, n$ *seguem de* $f = 0$.

(ii) Se a característica de K *for zero (ou* $charK > degf$*), então* $f = 0$ *é equivalente ao conjunto de identidades polinomiais multilineares.*

Demonstração. (i) Seja $V = \langle f \rangle^T$ o T-ideal de $K\langle X \rangle$ gerado por f. Escolhemos $n+1$ diferentes elementos $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de K. Como V é um T-ideal, temos:

$$f(\alpha_j x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in V, j = 0, 1, \ldots, n.$$

Consideramos as equações como um sistema linear cujas incógnitas são $f_i, i = 0, 1, \ldots, n$. Vale observar o determinante:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(\alpha_j - \alpha_i)$$

Como é um determinante de *Vandermonde* e este é diferente de zero, obtemos então que $f_i(x_1, \ldots, x_m)$ pertence a V, isto é, que as identidades polinomiais $f_i = 0$ são consequências de $f = 0$.

(ii) Usaremos aqui o **processo de linearização**. Por (i), assumimos que $f(x_1, \ldots, x_m)$ é homogêneo em cada uma das variáveis. Chamemos $deg_{x_1} f = d$. Escrevemos $f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) \in V$ na forma:

$$f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{d} f_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_m)$$

onde f_i é o componente de grau i em y_1. Dessa forma, $f_i \in V, i = 0, 1, \ldots, d$. Como $deg_{y_j} f_i < d, i = 1, \ldots, d-1, j = 1, 2$, utilizamos argumentos indutivos, obtendo assim um conjunto de consequências multilineares de $f = 0$. Podemos notar que:

$$f_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_m) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \ldots, x_m)$$

onde o coeficiente binomial é diferente de zero pelo fato de $charK = 0$ ou $charK = p > d$.

□

O processo de linearização é um processo muito importante. Exemplificaremos alguns casos e suas respectivas demonstrações.

Exemplo 4.6. Seja $char K = 0$. Objetivamos encontrar para cada uma das seguintes identidades polinomiais um conjunto equivalente, porém multilinear.

(i) $x_1^2 = 0$;

(ii) $x_1^3 = 0$;

(iii) $x_1^n = 0$.

Demonstração. (i) Substituindo $x_1 \mapsto x_1 + x_2$, temos:
$(x_1 + x_2)^2 = x_1x_1 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2x_2 = 0 + x_1x_2 + x_2x_1 + 0 = x_1x_2 + x_2x_1$

(ii) Substituindo $x_1 \mapsto x_1 + x_3$, temos:
$(x_1+x_3)^3 = (x_1+x_3)(x_1^2+x_1x_3+x_3x_1+x_3^2) = x_1^3+x_1^2x_3+x_1x_3x_1+x_1x_3^2x_3x_1^2+ x_3x_1x_3x_3^2x_1 + x_3^3 = (x_1^2x_3 + x_1x_3x_1 + x_3x_1^2) + (x_1x_3^2 + x_3x_1x_3x_3^2x_1) = 0$

$$\Rightarrow (x_1^2x_3 + x_1x_3x_1 + x_3x_1^2) = 0$$

Na nova identidade obtida, substituímos $x_1 \mapsto x_1 + x_2$:
$(x_1+x_2)^2x_3+(x_1+x_2)x_3(x_1+x_2)+x_3(x_1+x_2)^2 = (x_1^2+x_1x_2+x_2x_1+x_2^2)x_3+ (x_1x_3+x_2x_3)(x_1+x_2)+x_3(x_1^2+x_1x_2+x_2x_1+x_2^2) = x_1^2x_3+x_1x_2x_3+x_2x_1x_3+ x_2^2x_3+x_1x_3x_1+x_1x_3x_2+x_2x_3x_1+x_2x_3x_2+x_3x_1^2+x_3x_1x_2+x_3x_2x_1+x_3x_2^2 = (x_1^2+x_1x_3x_1+x_3x_1^2)+(x_2^2x_3+x_2x_3x_2+x_3x_2^2)+x_1x_2x_3+x_2x_1x_3+x_1x_3x_2+ x_2x_3x_1 + x_3x_1x_2 + x_3x_2x_1 = 0$

$$\Rightarrow x_1x_2x_3 + x_2x_1x_3 + x_1x_3x_2 + x_2x_3x_1 + x_3x_1x_2 + x_3x_2x_1 = 0$$

Destacamos que a identidade polinomial obtida é o polinômio simétrico de grau 3.

(iii) Dados os dois itens anteriores, é de se esperar que obtenhamos novamente o polinômio simétrico na linearização desse polinômio. De fato é isso que ocorre, porém a demonstração não é tão trivial quanto as outras. Apesar de esse exemplo configurar um exercício do livro [1], não conseguimos encontrar a sua solução nem na literatura nem tampouco na *internet*. Dessa maneira, elaborei a seguinte demonstração para esse item, utilizando-me de alguns conceitos relacionados aos problemas de contagem da combinatória:

Queremos provar que

$$x_1^n \Rightarrow Symm(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \epsilon S_n} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} = 0$$

Para isso, se provarmos que conseguimos escrever o polinômio simétrico de grau n como combinação de polinômios do tipo x_i^n, então o polinômio simétrico será também uma identidade. Nosso problema se reduz então a provar que:

$$f = (x_1 + \cdots + x_n)^n - \sum_{i=1}^n (x_1 + \cdots + \hat{x}_i + \cdots + x_n)^n + \sum_{i<j} (x_1 + \cdots + \hat{x}_i + \cdots + \hat{x}_j + \cdots + x_n)^n + \cdots + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} (x_{i_1} + \cdots + x_{i_k})^n + \cdots + (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^n = Symm(x_1, \dots, x_n)$$

Vale destacar que estamos trabalhando com polinômios não necessariamente comutativos. Portanto, é preciso justificar que cada palavra será contabilizada apenas uma vez em fatores da forma $(x_{i_1} + \cdots + x_{i_k})^n$. Isso pode ser observado no fato de que cada palavra composta terá cada x_{i_j} tomado em um polinômio $(x_{i_1} + \cdots + x_{i_k})$, e que cada x_{i_j} aparece apenas uma vez em cada polinômio desses. Isto é, só seria possível escrever duas vezes a mesma palavra se tivéssemos dois termos iguais em $(x_{i_1} + \cdots + x_{i_k})$, caso contrário, a palavra já foi contabilizada.

Tendo em mente que cada palavra é contabilizada apenas uma vez, podemos analisar, em termos de contagem, os polinômios apenas por seus índices, pois cada uma das palavras possíveis com aqueles índices será contabilizada apenas uma vez, pois a ordem importa.

Para provar que a combinação de identidades descrita de fato resulta no polinômio simétrico, vamos analisar cada n-upla do multigrau de cada palavra observando o número de zeros que esta possui. Essa se mostra uma abordagem interessante, pois se por exemplo uma n-upla tomada possui nenhum zero, ela só será contabilizada no termo $(x_1 + \cdots + x_n)^n$, pois todos os outros termos forçam uma entrada zerada pelo menos em x_i. Analogamente, se a n-upla analisada tiver k zeros, as palavras referentes a ela apareceram nos primeiros $k+1$ termos da soma, pois o $(k+2)$-ésimo termo terá $k+1$ entradas zeradas.

- n**-upla com** 0 **entradas nulas:** Se a n-upla não possui entradas nulas em seu multigrau, esta será contabilizada apenas em $(x_1 + \cdots + x_n)^n$, onde nenhum expoente é necessariamente nulo. Note que esta n-upla corresponde às palavras do polinômio simétrico, isto é, os termos multilineares, e que era esperado que seus termos fossem contabilizados apenas uma vez.
- n**-upla com** 1 **entrada nula:** Se a n-upla tem 1 entrada nula, ela será contabilizada em $(x_1 + \cdots + x_n)^n$ e em $\sum_{i=1}^{n}(x_1 + \cdots + \hat{x}_i + \cdots + x_n)^n$. No primeiro, será contabilizado apenas uma vez, quando escolhemos o multigrau adequado. No segundo, será escolhido quando tomarmos como zerada a entrada nula da n-upla.
- n**-upla com** 2 **entradas nulas:** Poderá ser contabilizado nos três primeiros termos da soma. Novamente será contado apenas uma vez no primeiro termo da soma; no segundo, será contabilizado duas vezes. Isso decorre do fato de que, se por exemplo x_i e x_j são as entradas

nulas, podemos formar o multigrau correto escolhendo zerar x_i e depois escolhendo zerar x_j. No terceiro, temos que escolher duas entradas simultâneas para zerar, de modo que contabilizamos apenas uma vez os polinômios.

Temos então a seguinte contagem:

$$soma = \binom{2}{0} - \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 1 - 2 + 1 = 0$$

– **n-upla com k entradas nulas:** Como dito antes, os termos de n-uplas desse tipo serão contabilizadas nos primeiros $k+1$ termos da soma de identidades que descrevemos. Com raciocínio igual ao utilizado para analisar as n-uplas com 2 entradas nulas, vamos analisar quantas vezes as palavras relativas ao multigrau analisado de k entradas nulas devem ser contabilizadas em um termo que force i entradas nulas ($i \leq k$). Claramente, se escolhemos, em k, i entradas para zerar, o número contabilizado nada mais é do que o binomial $\binom{k}{i}$. Dessa forma, o número de vezes que uma n-upla de k entradas nulas é contabilizada é dado por:

$$soma = \binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \cdots + (-1)^i \binom{k}{i} + \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i$$

Nesse ponto é interessante recordar que os coeficientes binomiais surgem da expansão de um binômio. No caso, se expandirmos o binômio $(x-1)^k$, obtemos:

$$(x-1)^k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i (x)^{k-i}$$

Mas queremos saber apenas a soma dos coeficientes desse polinômio. Para isso fazemos $x = 1$. Não obstante 1 é raiz do binômio $(x-1)^k$, logo a soma resulta em zero, como queríamos.

Assim, como todos os polinômios não multilineares são são incluídos e excluídos o mesmo número de vezes na f descrita, restando apenas os termos multilineares, provamos que f de fato leva ao polinômio simétrico e que, portanto,

$$x^n \Rightarrow Symm(x_1, \ldots, x_n)$$

□

5 O Teorema de Nagata-Higman

Teorema 5.1 (Dubnov-Ivanov-Nagata-Higman)**.** *Seja R uma álgebra associativa não-unitária sobre um corpo K de característica 0 e seja R satisfaz a identidade polinomial $x^k = 0$. Então existe um inteiro $d = d(k)$ dependendo de K tal que R é nilpotente de classe d, isto é, R satisfaz a identidade polinomial $x_1 \cdots x_d = 0$.*

É de bastante importância saber a classe de nilpotência $d(k)$ no Teorema de Nagata-Higman. Higman provou que o limite superior se dá por $d(k) \leq 2(k-1)$. A conjectura de Kuzmin nos dá uma possível fórmula para o $d(k)$, que tem se mostrado verdadeira para todos os valores obtidos até agora pela literatura.

Conjectura 5.2 (Kuzmin)**.** *O valor exato $d(k)$ da classe de nilpotência de álgebras nil de índices k em um corpo de característica 0 é*

$$d(k) = \frac{k(k+1)}{2}.$$

6 Ideais Nil e Nilpotentes

Definição 6.1. Um ideal I de um anel R é dito ser um *ideal nilpotente* se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^n = 0$.

Vale destacar que a condição $I^n = 0$ da definição acima significa que $u_1 u_2 \cdots u_n = 0$ para todos $u_i \in I$. Para evitar confusão, duas definições correlacionadas devem ser destacadas:

Definição 6.2. Um elemento em um anel R é dito ser um *elemento nilpotente* se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$.

Definição 6.3. Um ideal I de um anel R é dito ser um *ideal nil* se todos os elementos em I são nilpotentes.

Um ideal nilpotente é nil, porém a recíproca não se aplica. A primeira afirmativa é clara, mas a segunda requer um exemplo:

Exemplo 6.4. Seja A o conjunto de todas as matrizes $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ infinitas sobre F que são triangulares superiores e que possuem apenas um número finito de entradas não nulas. Destacamos que A é uma álgebra com as operações usuais de matrizes. Seja I o conjunto de todas as matrizes em A que são estritamente triangulares superiores (isto é, a diagonal principal tem todas as entradas nulas). Então I é um ideal nil de A, mas não é nilpotente.

Observação 6.5. Os *Ideais Nilpotentes Unilaterais* são definidos da mesma maneira que os ideais nilpotentes. Se L é um ideal nilpotente pela esquerda de R, então L contém um ideal nilpotente pelos dois lados $L + LR$. Dessa maneira, é fácil enxergar que $L^n = 0$ implica que $(L + LR)^n = 0$. O mesmo vale para o lado direito.

Para elementos nilpotentes, como destacado na observação acima, conseguimos mostrar que existe um ideal bilateral nilpotente dentro de um ideal unilateral nilpotente. Para elementos nil, por outro lado, isso ainda configura um problema em aberto, conhecido como *Problema de Köthe*.

Lema 6.6. *A soma de dois ideais nilpotentes é um ideal nilpotente.*

Demonstração. Sejam I e J ideais tais que $I^n = 0$ e $J^m = 0$. Afirmamos que $(I + J)^{n+m-1} = 0$, isto é, que o produto de $n + m - 1$ elementos da forma $u + v, u \in I, v \in J$ é 0. Esse produto pode ser escrito como soma de produtos $w = w_1 w_2 \cdots w_{n+m-1}$, onde cada $w_i \in I \cup J$. Se pelo menos n desses w_i estiverem em I, já temos $w = 0$, pois $I^n = 0$. Se tiver $n - 1$ elementos w_i em I, então $(n+m-1)-(n-1) = m$ elementos estarão em J, e logo $w = 0$, pois $J^m = 0$. □

Definição 6.7. Um ideal I de um anel R é dito ser um *ideal nilpotente maximal* se este ideal não estiver contido em nenhum ideal nilpotente maior.

Lema 6.8. *Se um anel R possui um ideal nilpotente maximal N, então N contém todos os ideais nilpotentes de R.*

Demonstração. Se I é outro ideal nilpotente, então $I + N$ é também um ideal nilpotente pelo lema anterior. Como N é maximal, temos que $I + N = N$ e, portanto, $I \subseteq N$. □

Definição 6.9. O ideal nilpotente maximal de um álgebra de dimensão finita A é dito *radical de A*.

Para o próximo exemplo, devemos levar em consideração a seguinte definição:

Definição 6.10. Um anel R é dito *simples* se $R^2 \neq 0$ e 0 e R são os únicos ideais de R.

É interessante destacar as diferenças entre definir primalidade, simplicidade e outros conceitos aqui apresentados em anéis e em álgebras. Temos que, para as álgebras, um ideal, além da definição usual de ideais de anéis, deve ser também um subespaço vetorial. Apesar deste fato, as definições se dão da mesma forma, e são totalmente análogas entre anéis e álgebras.

Exemplo 6.11. O radical de uma álgebra simples de dimensão finita é 0. Uma álgebra simples A não pode ser nilpotente, visto que $A^n = 0$ implica que A^{n-1} é um ideal próprio de A e, portanto, é 0.

7 Anéis Primos e Semiprimos

Definição 7.1. Um anel R será dito um *domínio* se:

$$\forall a, b \in R, ab = 0 \Rightarrow a = 0 \lor b = 0.$$

Isto é, um anel R será dito um domínio se não possuir divisores de zero.

Lema 7.2. *Seja R um anel. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Para todos $a, b \in R$, $aRb = 0 \Rightarrow a = 0 \lor b = 0$

(ii) Para todos ideais à esquerda $I, J \in R$, $IJ = 0 \Rightarrow I = 0 \lor J = 0$

(iii) Para todos ideais à direita $I, J \in R$, $IJ = 0 \Rightarrow I = 0 \lor J = 0$

(iv) Para todos ideais $I, J \in R$, $IJ = 0 \Rightarrow I = 0 \lor J = 0$

Demonstração. Sejam I e J ideais à esquerda de R. Se I e J satisfazem que $IJ = 0$, então $IRJ = 0$ desde que $RJ \subseteq J$. Claramente então $(i) \Rightarrow (ii)$. De forma semelhante, temos $(i) \Rightarrow (iii)$. Trivialmente, $(ii) \land (iii) \Rightarrow (iv)$.

Falta apenas provar que $(iv) \Rightarrow (i)$. Para isso, assumimos que (iv) e que $a, b \in R$ sarisfazem $aRb = 0$. O produto dos ideais RaR e RbR será então 0. Algum dos dois será zero, digamos $RaR = 0$. Isso implica que Ra e aR são ideais bilaterais tais que $Ra.R = R.aR = 0$. De $(iv), Ra = aR = 0$. Mas então $\mathbb{Z}a$ é um ideal de R satisfazendo $\mathbb{Z}a.R = 0$, e então (iv) faz $a = 0$. Logo, $(iv) \Rightarrow (i)$. $\square$

Definição 7.3. Um anel R será dito *primo* se ele satisfizer alguma (e, portanto, todas) as afirmações do lema anterior.

Lema 7.4. *Um anel comutativo é primo se, e somente se ele é um domínio.*

Demonstração. É suficiente observar que $ab = 0 \Rightarrow aRb = 0$ se o anel é comutativo. $\square$

Simetricamente ao requerido para a definição de anéis primos, definiremos os lemas necessários à definição de semiprimalidade.

Lema 7.5. *Seja R um anel. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) Para todo $a \in R, aRa = 0 \Rightarrow a = 0$

(ii) Para todos os ideais à esquerda $I \in R, I^2 = 0 \Rightarrow I = 0$

(iii) Para todos os ideais à direita $I \in R, I^2 = 0 \Rightarrow I = 0$

(iv) Para todos os ideais $I \in R, I^2 = 0 \Rightarrow I = 0$

(v) R não possui ideais nilpotentes não nulos

Demonstração. A prova de que os itens $(i) - (iv)$ são semelhantes é similar à realizada à realizada no lema 7.2, logo a omitiremos. Supondo (iv) e I um ideal tal que $I^n = 0$, então $(I^{n-1})^2 = 0$ e então $I^{n-1} = 0$. Indutivamente chegamos em $I = 0$. $\square$

Definição 7.6. Um anel R será dito *semiprimo* se ele satisfizer uma (e, portanto, todas) as condições do lema anterior.

Lema 7.7. *Se N é um ideal nilpotente maximal de um anel R, então R/N é semiprimo.*

Demonstração. Seja K um ideal de R/N tal $K^2 = 0$. Então $J = \{x \in R | x + N \in K\}$ é um ideal de R tal que $J^2 \subseteq N$. Como N é nilpotente, implica que J também é nilpotente. Logo $J \subseteq N$ e, então, $K = 0$. $\square$

Nesse ponto vale destacar algumas relações que podemos desprender das definições das classes de anéis:

$$\text{anel de divisão} \Rightarrow \text{anel simples e domínio;}$$
$$\text{anel simples} \Rightarrow \text{anel primo;}$$
$$\text{domínio} \Rightarrow \text{anel primo;}$$
$$\text{anel primo} \Rightarrow \text{anel semiprimo.}$$

Destaque para o fato de que para nenhuma dessas definições vale a recíproca.

Exemplo 7.8. O anel $\mathbb{Z}$ é um domínio que não é um anel simples.

Exemplo 7.9. O anel das matrizes $M_n(F), n \geq 2$, é simples mas não é um domínio.

8 Idempotência

8.1 Matrizes unitárias

Definição 8.1. Seja R um anel unitário e seja $n \in \mathbb{N}$. Um conjunto $\{e_{ij} \in R | 1 \leq i, j \leq n\}$ é dito um *conjunto de matrizes unidade* $n \times n$ se

$$e_{11} + e_{22} + \cdots + e_{nn} = 1$$

e

$$e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$$

para todos $1 \leq i, j, k, l \leq n$. Destacamos que δ_{jk} é o *Delta de Kronecker*:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad j = k \\ 0 & \text{se} \quad j \neq k \end{cases}$$

Observação 8.2. As matrizes unidade e_{ij}, com $i \neq j$, são bastante diferentes em relação as matrizes unidade e_{ii}. Note que $e_{ij}^2 = 0$, logo são elementos nilpotentes, e que $e_{ii}^2 = e_{ii}$, configurando elementos idempotentes, como veremos na definição a seguir.

Definição 8.3. Um elemento e em um anel R é dito ser *idempotente* se $e^2 = e$. Além disso, elementos idempotentes e e f serão ditos *ortogonais* se $ef = fe = 0$.

Assim, os elementos e_{ii}'s são claramente dois a dois ortogonais com soma igual a 1. Todo e_{ii} gera um subanel $e_{ii}Re_{ii} = \{e_{ii}ae_{ii} | a \in R\}$ de R, sendo todos eles isomorfos ($e_{ii}Re_{ii} \cong e_{jj}Re_{jj}$).

8.2 Idempotentes

Seja e um idempotente arbitrário em um anel R. O anel eRe é unitário mesmo que R não o seja, e sua unidade é o próprio e. Veremos a seguir que eRe é apenas uma das quatro palavras associadas a e.

Observação 8.4. Assumiremos que R é um anel unitário e que e é um idempotente não trivial, isto é, que e é diferente de 0 e de 1. Assim, temos que

$$f := 1 - e$$

também é um elemento idempotente não trivial, e que e e f são ortogonais com soma 1. De fato,

$$f^2 = (1-e)^2 = 1 - e - e - e^2 = 1 - 2e + e = 1 - e = f$$
$$ef = e(1-e) = e - e^2 = e - e = 0$$
$$fe = (1-e)e = e - e^2 = e - e = 0$$
$$e + f = e + (1-e) = 1$$

Para elucidar melhor o que estamos fazendo, considere o seguinte exemplo de matrizes 2×2:

Exemplo 8.5. Considere as matrizes unidade e_{11} e e_{22} no anel de matrizes 2×2. Suponha $ex_1e + ex_2f + fx_3e + fx_4f = 0$ para $x_i \in R$. Multiplicando à esquerda e à direita por e, obtemos $ex_1e = 0$. De forma semelhante, obtemos que todos os termos são nulos.

Por outro lado, todo $x \in R$ pode ser escrito como:

$$x = e_{11}xe_{11} + e_{11}xe_{22} + e_{22}xe_{11} + e_{22}xe_{22}.$$

Basta observar que com a matriz unidade utilizada à esquerda selecionamos a linha e com a matriz unidade utilizada à direita selecionamos a coluna. Tome uma matriz qualquer x em R, com entradas $a, b, c, d \in F$. Temos:

$$e_{11}xe_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definição 8.6. Chamamos a decomposição $R = eRe \oplus eRf \oplus fRe \oplus fRf$ de *Decomposição de Pierce de R com relação a e.* Nomeamos:

$$R_{11} := eRe, R_{12} := eRf, R_{21} := fRe, R_{22} = fRf$$

Temos que:

$$R_{ij}R_{kl} \subseteq \delta_{jk}R_{il}$$

para todos $1 \leq i, j, k, l \leq n$ o que reflete o cálculo de matrizes unidade.

É interessante destacar que, com um elemento idempotente e não trivial e seu correspondente $f = 1 - e$ conseguimos mimetizar matrizes, no caso do exemplo, matrizes 2×2. Esse tipo de abordagem é não raro útil para lidar com matrizes.

Definição 8.7. Seja R um anel e e um elemento idempotente. O elemento e será dito *idempotente central* se $e \in Z(R)$ de R.

Observação 8.8. Elementos idempotentes centrais fazem com que $eRf = fRe = 0$, de modo que a decomposição de Pierce passa a ter apenas dois elementos:

$I := eR = eRe$ e $J := fR = fRf$. Claramente I e J são ideais de R, de modo que $R = I \oplus J$ e $R \cong I \times J$ pelo isomorfismo $x \mapsto (ex, fx)$. Assim, elementos idempotentes centrais geram também a decomposição do anel.

Lema 8.9. *Seja I um ideal de um anel R. Se I é unitário, então sua unidade e é idempotente central em R, $I = eR$, e existe um ideal J de R tal que $R = I \oplus J$. Além disso, $R \cong I \times J$.*

Demonstração. Desde que $e \in I$, temos que $eR \subseteq I$, e que $I = eI \subseteq eR$. Assim, $I = eR$. Além disso, como $ex, xe \in I$ para todo $x \in R$, temos que $ex = (ex)e$ e que $xe = e(xe)$. Logo, $ex = xe$ e, portanto, é idempotente central. $\square$

9 O Teorema de Wedderburn

9.1 Ideais Minimais à Esquerda

Quando trabalhamos com ideais unilaterais, é usual dar preferência para ideais à esquerda.

Definição 9.1. Um ideal à esquerda L de um anel R é dito ser um *ideal minimal à esquerda* se $L \neq 0$ e L não contém um ideal à esquerda não nulo de R.

Ideais minimais à direita e *ideais minimais bilaterais* são definidos de forma análoga.

Exemplo 9.2. O único ideal minimal à esquerda de um anel de divisão D é o próprio anel D.

Lema 9.3. *Se L é um ideal minimal à esquerda de um anel R semiprimo, então existe um idempotente $e \in R$ tal que $L = Re$ e eRe é um anel de divisão.*

Demonstração. Como R é um anel semiprimo, então existem $x, y \in L$ tais que $xy \neq 0$. Em particular, $Ly \neq 0$. Mas Ly é um ideal à esquerda de R contido em L, de forma que $Ly = L$ pela hipótese de minimalidade de L. Dessa forma, existe $e \in L$ tal que $ey = y$. Disso segue que $e^2 - e$ pertence ao conjunto $J := \{z \in L | zy = 0\}$. Logo J é também um ideal à esquerda de R e está contido em L. Como $x \in L \backslash J$, concluímos que $J = 0$. Em particular, $e^2 = e$. Como $e \in L$, temos que $Re \subseteq L$.

Consideramos agora eRe. Seja $a \in R$ tal que $eae \neq 0$. Devemos provar que eae é invertível em eRe. Temos que $0 \neq Reae \subseteq Re = L$, e então $Reae = L$. Assim $beae = e$ é verdade para algum $b \in R$ e também $(ebe)(eae) = e$. Como e é um elemento não nulo em eRe, então pelo mesmo argumento existe $c \in R$ tal que $(ece)(ebe) = e$. Mas um inverso à esquerda coincide com um inverso à direita, e logo $eae = ece$ é invertível em eRe, com ebe como inverso. $\square$

Corolário 9.4. *Se A é uma álgebra semiprima não nula de dimensão finita, então existe um $e \in A$ idempotente tal que eAe é uma álgebra de divisão.*

Corolário 9.5. *Seja A uma álgebra semiprima de dimensão finita e $e \in A$ um idempotente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) eRe é um anel de divisão.

(ii) Re é um ideal minimal à esquerda de R.

(iii) eR é um ideal minimal à direita de R.

9.2 Teoremas Estruturais de Wedderburn

Os teoremas a seguir possuem importância ímpar na teoria estrutural de álgebras não comutativas. Com lemas simples, se faz possível caracterizar álgebras de dimensão finita.

Teorema 9.6 (Wedderburn)**.** *Seja A uma álgebra não nula de dimensão finita. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A é primo.

(ii) A é simples.

(iii) Existe $n \in \mathbb{N}$ e uma álgebra de divisão D tais que $A \cong M_n(D)$.

Demonstração. Para provar esse teorema, vamos provar $(iii) \Rightarrow (ii)$, $(ii) \Rightarrow (i)$ e finalmente $(i) \Rightarrow (iii)$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Se D é um anel de divisão, então $M_n(D)$ é um anel de divisão para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, seja I um ideal não nulo de $M_n(D)$. Tome um elemento não nulo $(a_{ij}) \in I$. Escolha j e k tais que $a_{jk} \neq 0$. É claro que temos que $a_{jk}E_{il} \in I$ para todo i e l, e também que $(da_{jk}^{-1})E_{ii} \cdot a_{jk}E_{il} = dE_{il} \in I$ para todo $d \in D$. Consequentemente, $I = M_n(D)$. Logo, pela definição, $M_n(D)$ é uma álgebra simples. Como $A \cong M_n(D)$, então A é simples.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Temos que A é um anel simples, logo $A^2 \neq 0$ e 0 e A são os únicos ideais de R. Dessa maneira, tomando o produto dos dois únicos ideais, temos $0R = 0$ e um deles de fato é nulo, cumprindo o item (iv) do Lema 7.2. Logo, A é uma álgebra prima.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Vamos assumir que A é unitária. Não faremos a demonstração para álgebras não unitárias, mas esta é apenas uma adaptação técnica dessa demonstração. A prova se dará por indução em $d := \dim_F A$.

Se $d = 1$, então simplesmente tomamos $n = 1$ e $D = F$. Seja então $d > 1$. Pelo corolário 9.4, existe um idempotente $e \in A$ tal que eAe é uma álgebra de divisão. Se $e = 1$, então temos o resultado desejado (com $n = 1$). Assumindo agora que e é um idempotente não trivial. Fazemos

$f := 1-e$. Note que fAf é uma álgebra prima com unidade f. Como e não pertence a fAf, temos que $\dim_{fAf} F < d$. A hipótese de indução implica que fAf é isomórfico à álgebra das matrizes $m \times m$ pela mesma álgebra de divisão. Dessa forma, fAf contém as matrizes unidades $e_{ij}, i, j = 1, \ldots, m$, tais que $e_{11}fAfe_{11} = e_{11}Ae_{11}$ é uma álgebra de divisão. Nosso objetivo é estender a as matrizes-unidade de fAf para as matrizes unidade de A. Vamos começar fazendo $n := m+1$ e $e_{nn} = e$. Então $\sum_{i=1}^{n} e_{ii} = f + e = 1$ e $e_{nn}e_{ij} = e_{ij}e_{nn} = 0, \forall i, j < n$. Falta apenas encontrar e_{in} e e_{ni}, $i \leq n-1$. Vamos primeiro encontrar e_{1n} e e_{n1}. Usando a primalidade duas vezes, vemos que $e_{11}ae_{nn}a'e_{11} \neq 0$ para algum $a, a' \in A$. Como $e_{11}Ae_{11}$ é uma álgebra de divisão cuja unidade é e_{11}, existe um $a" \in A$ tal que

$$(e_{11}ae_{nn}a'e_{11})(e_{11}a"e_{11}) = e_{11}.$$

Fazendo $e_{1n} := e_{11}ae_{nn}$ e $e_{n1} := e_{nn}a'e_{11}a"e_{11}$ nós obtemos

$$e_{1n}e_{n1} = e_{11}.$$

Desde que $e_{n1} \in e_{nn}Ae_{11}$, temos que $e_{n1} = e_{nn}e_{n1}$ e $e_{n1} = e_{n1}e_{11} = e_{n1}e_{1n}e_{n1}$. Comparando as duas relações, obtemos:

$$(e_{n1}e_{1n} - e_{nn})e_{n1} = 0.$$

Claramente o elemento $e_{n1}e_{1n} - e_{nn}$ pertence a álgebra $e_{nn}Ae_{nn}$. Se não é zero, então podemos multiplicar a última identidade pelo lado esquerdo por seu inverso, o que nos dará uma contradição $0 = e_{nn}e_{n1} = e_{n1}$. Assim

$$e_{n1}e_{1n} = e_{nn}.$$

Finalmente, definimos $e_{nj} := e_{n1}e_{1j}$ e $e_{jn} := e_{j1}e_{1n}$ para $j = 2, \ldots, n-1$. Note que $e_{ij} = e_{i1}e_{1j}$ e $e_{1j}e_{k1} = \delta_{jk}e_{11}$ é verdade para todos $i, j, k = 1, \ldots, n$. Consequentemente, para todos $i, j, k, l = 1, \ldots, n$, temos

$$e_{ij}e_{kl} = e_{i1}e_{1j}e_{k1}e_{1l} = \delta_{jk}e_{i1}e_{11}e_{1l} = \delta_{jk}e_{i1}e_{1l} = \delta_{jk}e_{il}.$$

Logo $e_{ij}, i, j = 1, \ldots, n$ são de fato matrizes unidades de A. Isso implica que $a \cong M_n(D)$, onde $D = e_{11}Ae_{11}$.

$\square$

Corolário 9.7. *Um álgebra de dimensão finita A é uma álgebra central simples se, e somente se, existe $n \in \mathbb{N}$ e uma álgebra de divisão D, com D sendo central, tais que $A \cong M_n(D)$.*

Corolário 9.8. *A dimensão de uma álgebra central simples é um quadrado perfeito.*

Lema 9.9 (Wedderburn)**.** *Seja A uma álgebra não nula de dimensão finita. Então A é semiprimo se e somente se existe $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ e álgebras de divisão $D_1, \ldots, D_r$ tais que $A \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r)$.*

Teorema 9.10 (Principal Teorema de Wedderburn)**.** *Seja A uma álgebra de dimensão finita. Se N é um radical (isto é, um ideal nilpotente maximal), então*

$$A/N \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r)$$

para alguns $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ e álgebras de divisão $D_1, \ldots, D_r$, a menos que $A = N$ seja uma álgebra nilpotente.

10 Álgebras na Genética

10.1 Definições Biológicas

Para o bom entendimento do presente relatório, é interessante destacarmos alguns termos biológicos utilizados.

Gene é uma unidade simples de informação hereditária. *Cromossomos* são as unidades que carregam o código genético. *Alelos* são as formas que cada gene pode assumir.

Devemos ainda destacar ainda definições como *organismos diploides*, que significa que carregam dois conjuntos de cromossomos. *Organismos haploides* são aqueles que possuem apenas um conjunto de cromossomos. A reprodução de organismos diploides se dá por meio do processo de *meiose*, que consiste na produção de *gametas*, que são células sexuais, e que são combinadas para gerar os zigotos da nova geração, que são células diploides.

10.2 Exemplos Simples de Álgebras

10.2.1 Álgebra Gamética com Herança Mendeliana Simples

Exemplo 10.1. Considere a herança mendeliana simples de um gene com dois alelos A e a. Ganhamos, como já é conhecido da biologia, a tabela de multiplicação:

	A	a
A	AA	Aa
a	aA	aa

Tabela 1 – Alelos passando de gametas para zigotos

$\times$	A	a
A	A	$\frac{1}{2}(A+a)$
a	$\frac{1}{2}(a+A)$	a

Tabela 2 – Tabela de multiplicação da álgebra gamética herança mendeliana

Os zigotos AA e aa são chamados de *homozigóticos*, pois carregam duas cópias de um mesmo alelo. Para o caso de homozigose, zigotos AA sempre produzem alelos A e zigotos aa sempre produzem alelos a.

Os zigotos Aa e aA são chamados de *heterozigóticos*, pois carregam dois tipos diferentes de alelos. Neste caso, cada um dos zigotos citados produz alelos A e a com a mesma probabilidade.

Definimos então *Álgebra Gamética com Herança Mendeliana Simples com dois alelos* como a álgebra bidimensional sobre $\mathbb{R}$ com base $\{A, a\}$ e multiplicação definida pela tabela 2.

10.2.2 Álgebra Zigótica com Herança Mendeliana Simples

Exemplo 10.2. Para a reprodução de organismos diploides, devemos considerar o processo de redução, que na seção 10 chamamos como meiose, que é a decomposição dos zigotos em alelos. Temos então a multiplicação como da tabela 2. Após ele, temos a multiplicação dada pela tabela:

$\times$	AA	Aa	aa
AA	AA	$\frac{1}{2}(AA + Aa)$	Aa
Aa	$\frac{1}{2}(AA + Aa)$	$\frac{1}{4}AA + \frac{1}{2}Aa + \frac{1}{4}aa$	$\frac{1}{2}(Aa + aa)$
aa	Aa	$\frac{1}{2}(Aa + aa)$	aa

Tabela 3 – Tabela de multiplicação para álgebra zigótica com herança mendeliana simples

Temos nesse exemplo a presença de apenas dois alelos: A e a.Com isso, geramos três genótipos possíveis: AA, Aa e aa. Considere, para ilustração, a multiplicação entre Aa e Aa. Temos:

$$Aa \times Aa \overset{\text{redução}}{=\!=} \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}a\right) \times \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}a\right) \overset{\text{multiplicação}}{=\!=\!=} \frac{1}{4}AA + \frac{1}{2}Aa + \frac{1}{4}aa$$

Dessa maneira, definimos a *Álgebra Zigótica com Herança Mendeliana Simples* como a álgebra tridimensional sobre $\mathbb{R}$ com base $\{AA, Aa, aa\}$ e multiplicação como na tabela 3.

10.3 Álgebras Gaméticas

Destacamos o exemplo de álgebras gaméticas para dois alelos em 10.2.1. Vamos agora discutir sobre um caso mais geral. Suponha que temos uma população com cruzamentos aleatórios de n gametas distintos, aos quais chamaremos $a_1, \ldots, a_n$. Podemos então descrever a população por um vetor $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$, com α_i a frequência do alelo a_i.

Definimos então que a união de gametas a_i e a_j produzem zigotos do tipo $a_i a_j$, com $i, j = 1, \ldots, n$. Assumimos que este zigoto produzido produza um número $\tilde{\gamma_{ijk}}$ de gametas do tipo a_k que sobrevivem para a próxima geração, com k variando de 1 a n. Seja μ o número maximal de sobreviventes produzidos por um zigoto, isto é, $\mu := \max_{i,j} \sum_{k=1}^{n} \tilde{\gamma_{ijk}}$. Definimos $\gamma_{ijk} := \mu^{-1}\tilde{\gamma_{ijk}}$. É fácil ver que:

$$0 \leq \gamma_{ijk} \leq 1, \; i, j, k = 1, \ldots, n \tag{1}$$

Considerando que não há seleção entre os zigotos, todos têm mesma fertilidade e o mesmo número de gametas sobreviventes, isto é, $\sum_{k=1}^{n} \tilde{\gamma_{ijk}} = \mu$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Logo,

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} = \sum_{k=1}^{n} \mu^{-1}\tilde{\gamma_{ijk}} = \mu^{-1} \sum_{k=1}^{n} \tilde{\gamma_{ijk}} = \mu^{-1}\mu = 1 \tag{2}$$

Neste caso, γ_{ijk} representa a probabilidade de um zigoto $a_i a_j$ produzir um gameta a_k, com $i, j, k = 1, \ldots, n$. Logo, a frequência dos gametas a_k produzidos pela população total é de:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \gamma_{ijk} \alpha_j, \; k = 1, \ldots, n.$$

Quando a equação 2 é obedecida, chamamos aos coeficientes γ_{ijk}, com $i, j, k = 1, \ldots, n$ de *coeficientes de segregação*.

Se a origem dos gametas que produzem um zigoto não é importante, então podemos considerar que gametas distintos, como $a_i a_j$ e $a_j a_i$, com $i \neq j$, produzem gametas a_k com a mesma probabilidade, resultando em:

$$\gamma_{ijk} = \gamma_{jik}, \ i, j, k = 1, \dots, n \tag{3}$$

mostrando o caso em que os coeficientes de segregação são ditos *simétricos*.

Vamos agora construir a estrutura algébrica, nos aproximando mais do exemplo citado. Consideremos dois vetores de frequências $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ e $(\beta_1, \dots, \beta_n)^T$, para populações A e B, respectivamente. A população filial será então dada por:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \gamma_{ij1} \beta_j \\ \vdots \\ \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \gamma_{ijn} \beta_j \end{pmatrix}$$

com cada componente do vetor como uma forma bilinear sobre $\mathbb{R}$. Criamos dessa forma o espaço vetorial n-dimensional:

$$\mathscr{W} := \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i | \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

Com os coeficientes de segregação γ_{ijk}, que satisfazem as equações de 1 a 3, definimos a multiplicação em $\mathscr{W}$ por:

$$a_i a_j := \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} a_k, \ i, j = 1, \dots, n \tag{4}$$

Definimos ainda a extensão bilinear sobre $\mathscr{W} \times \mathscr{W}$. Obtemos então a álgebra $\mathscr{G} := \mathscr{W}(+, \mathbb{R}, \cdot)$, a qual nos referenciamos como *álgebra genética*.

A presente discussão, muito mais genérica do que o exemplo de álgebra gamética mendeliana para dois alelos anteriormente descrita parece diferir muito desta descrição. Assim, vamos retornar ao exemplo mendeliano, mas agora com n alelos e não mais 2.

Exemplo 10.3. Considere uma população com indivíduos diploides com n possíveis alelos, $a_1, \dots, a_n$. Assuma que todos os zigotos possuem a mesma fertilidade e que zigotos a_ia_i, que são homozigóticos, produzem apenas gametas a_i, e que zigotos do tipo a_ia_j, que são heterozigóticos, produzem gametas a_i e a_j com distribuições iguais. Podemos representar isso utilizando o delta de *Kronecker*:

$$\delta_{ik} := \begin{cases} 1 \ , se \ i = k \\ 0 \ , se \ i \neq k \end{cases} \quad , i, k = 1, \ldots, n.$$

Podemos então escrever os coeficientes de segregação como:

$$\gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(\delta_{ik} + \delta_{jk}), \ \ , i, j, k = 1, \ldots, n \tag{5}$$

Assumindo que os zigotos são formados pela união aleatória de gametas, podemos descrever por uma álgebra gamética $\mathscr{G}$ gerada pelos gametas $a_1, \ldots, a_n$, com a multiplicação definida na equação 4 e com coeficientes de segregação definidos na equação 5. O produto de dois elementos da base fica:

$$a_ia_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} a_k = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}(\delta_{ik} + \delta_{jk}) a_k = \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\delta_{ik} + \delta_{jk}) a_k = \tfrac{1}{2}(a_i + a_j), \ i, j = 1, \ldots, n$$

$\mathscr{G}$ será a álgebra gamética de herança mendeliana n-dimensional.

Exemplo 10.4. Considerando o exemplo em 10.2.1, consideramos agora que há a possibilidade de mutação. Seja σ_{ik} a probabilidade de que o alelo a_i sofra mutação no alelo a_k, com $0 \leq \sigma_{ik} \leq 1$, $i, k = 1, \ldots, n$, $\sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik} = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Assim, o gameta a_k é obtido do zigoto a_ia_j com probabilidade:

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{2} \left(\delta_{is} + \delta_{js}\right) \sigma_{sk} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ik} + \sigma_{jk}\right), i, j, k = 1, \ldots, n.$$

Definimos então $\gamma_{ijk} := \frac{1}{2}(\sigma_{ik} + \sigma_{jk})$, com $i, j, k = 1, \ldots, n$.

10.4 Álgebras Zigóticas

Para construirmos as álgebras zigóticas, consideramos pares de gametas $a_{ij} = a_i a_j$ com o entendimento de que $a_{ij} = a_{ji}$, nos permitindo considerar apenas a_{ij} com $i \leq j$. Assim, a reprodução aleatória entre os zigotos a_{ij} e a_{pq} irá produzir o zigoto a_{ks} com probabilidade $\gamma_{ij,pq,ks}$. Definimos então a multiplicação como:

$$a_{ij}a_{pq} = \sum_{k \leq s} \gamma_{ij,pq,ks} a_{ks},$$

e como nas álgebras gaméticas, obtemos:

$$0 \leq \gamma_{ij,pq,ks} \leq 1, \tag{6}$$

$$\sum_{k,s=1}^{n} \gamma_{ij.pq,ks} = 1, \tag{7}$$

$$\gamma_{ij,pq,ks} = \gamma_{pq,ij,ks} \tag{8}$$

onde $i \leq j$, $p \leq q$ e $k \leq s$. A álgebra resultante $\mathscr{Z}$ gerada é chamada *álgebra zigótica.* Definimos a multiplicação e colocamos os coeficientes de segregação de forma genérica. Para defini-los, devemos retornar ao como transformamos, nos primeiros exemplos, a álgebra gamética em zigótica, em um processo que é conhecido como *duplicação comutativa*, que é um produto tensorial

Da duplicação comutativa obtemos $\mathscr{Z} := \mathscr{G} \times \mathscr{G}$ e extraímos os coeficientes de segregação como:

$$\gamma_{ij,pq,ks} := \begin{cases} \gamma_{ijk}\gamma_{pqs} + \gamma_{ijs}\gamma_{pqk} \ , se\ k < s \\ \gamma_{ijk}\gamma_{pqs} \ , se\ k = s \end{cases}$$

Vale destacar de tudo que foi discutido sobre álgebras genéticas nesta seção o fato de que álgebras genéticas são comumente comutativas, mas a associatividade é rara. Dependendo da população considerada, podemos tomar um elemento genérico $\alpha A + \beta a = 1$ de uma álgebra genética que satisfaz que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ e que $\alpha + \beta = 1$, que representa uma população. Neste caso, os coeficientes α e β representam a porcentagem da frequência associada àquele alelo. Isto é, se o elemento representa a população, então α é a porcentagem da população que carrega o alelo A no gene. Simetricamente, β é a porcentagem da população que carrega o alelo a o gene.

Considerando a multiplicação entre elementos como feita anteriormente, notamos claramente a não associatividade das álgebras apresentadas. Por exemplo, na álgebra mendeliana gamética:

$$A \times (A \times a) = A \times \left(\tfrac{1}{2}(A + a)\right) = \tfrac{1}{2}(A \times A + A \times a) = \tfrac{1}{2}\left(\left(\tfrac{1}{2}A\right) + \left(\tfrac{1}{2}(A + a)\right)\right) = \tfrac{3}{4}A + \tfrac{1}{4}a$$

$$(A \times A) \times a = (A) \times a = \tfrac{1}{2}\,(A + a)$$

Logo,

$$A \times (A \times a) = (A \times A) \times a$$

11 Álgebras com Realização Genética e Álgebras Báricas

11.1 Álgebras com Realização Genética

Quando trabalhamos com álgebras genéticas, a definição mais geral que esperamos que obedeçam é de que sejam *álgebras com realização genética*, isto é, álgebras sobre números reais que possuem base $\{a_1, \ldots, a_n\}$ e uma tabela de multiplicação:

$$a_i a_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} a_k,$$

tal que $0 \leq \gamma_{ijk} \leq 1$ para todos i, j, k e

$$\sum_{k=1}^{n} = 1$$

para $i, j = 1, \ldots, n$. A base descrita é chamada *base natural de A*. É fácil notar que todas as álgebras genéticas que descrevemos possuem base natural.

Numa álgebra qualquer A, tome um elemento genérico $x \in A$, representando uma população. Se sua representação como combinação linear dos elementos da base $a_1, \ldots, a_n$,

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \ldots + \xi_n a_n$$

satisfaz $0 \leq \xi_i \leq 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e $\sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1$. Então ξ_i é a porcentagem da população x que possui o alelo a_i.

Vale destacar que a estrutura que ganhamos ao definir álgebras com realização genética não restringe muito o nosso campo de trabalho e, dessa forma, não conseguimos extrair muitas características para se falar sobre. Por outro lado, esta estrutura proporciona um bom ponto de partida para especializarmos mais nossas álgebras para estruturas que descrevam a genética de forma mais próxima.

11.2 Álgebras Báricas

Para propósitos matemáticos, não precisamos considerar o corpo que seja dos reais, podemos considerar um corpo qualquer sempre que apropriado.

Álgebras com realização genética não são necessariamente álgebras associativas. Porém, apesar de serem não associativas, são não associativas com representação matricial. Sua representação matricial é bem simples, se tratando de uma representação escalar.

Definição 11.1. Uma álgebra A sobre o corpo K é dita *bárica* se admite um homomorfismo de álgebras não trivial $\omega : A \to K$. O homomorfismo ω é chamado *função de peso* ou *homomorfismo de peso.*

Proposição 11.2. *Seja A uma álgebra n-dimensional com realização genética sobre* $\mathbb{R}$. *Então A é uma álgebra bárica.*

Demonstração. Seja $\{a_1, \ldots, a_n\}$ uma base natural para uma álgebra A. Defina $\omega : A \to \mathbb{R}$ por $\omega(a_i) = 1$ para $i = 1, \ldots, n$ e faça a extensão linear sobre A. Isto é, para $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i$, temos $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \omega(a_i)$. Logo, como $\omega(a_i) = 1$ para $i = 1, \ldots, n$, segue que $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \omega(a_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$. Falta então apenas provar que ω é homomorfismo, o que segue naturalmente. Logo, A é uma álgebra bárica. $\square$

Definimos a função de peso, e se faz interessante analisar em que caso há unicidade. O seguinte exemplo mostra que a unicidade nem sempre é válida:

Exemplo 11.3. Seja A uma álgebra comutativa 3-dimensional sobre o corpo dos reais, com base $\{a_1, a_2, a_3\}$, com a tabela de multiplicação abaixo:

$\times$	a_1	a_2	a_3
a_1	$a_1 + a_2$	a_2	a_2
a_2	a_2	a_2	a_2
a_3	a_2	a_2	$a_2 + a_3$

Tabela 4 – Tabela de multiplicação da álgebra

Definimos então duas funções distintas

$$\begin{cases} \omega_1(a_1) = 1 \\ \omega_1(a_2) = 0 \\ \omega_1(a_3) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \omega_2(a_1) = 0 \\ \omega_2(a_2) = 0 \\ \omega_2(a_3) = 1 \end{cases}$$

Notamos que as funções são homomorfismos e, portanto, não possui uma única função de peso.

Para então estudarmos a unicidade, precisamos discutir alguns pontos de álgebras não associativas.

11.2.1 Potências Principais e Plenárias

Definição 11.4. Seja x um elemento em uma álgebra comutativa e não associativa A. As *potências principais* são definidas com x, x^2, $x^3, \ldots$, com $x^i = x^{i-1}x$.

Se A é uma álgebra com realização genética e o elemento P representa uma população, então cada elemento P^i da sequência de potências principais representa o resultado do cruzamento entre a população P^{i-1} e a população P.

Definição 11.5. Seja x um elemento em uma álgebra comutativa e não associativa A. As *potências plenárias* são definidas com x, $x^{[2]}$, $x^{[3]}, \ldots$, com $x^{[i]} = x^{[i-1]}x^{[i-1]}$.

Se A é uma álgebra com realização genética e P representa uma população, então a sequência de potências plenárias contém sucessivas gerações do cruzamento entre a população $P^{[i-1]}$ com ela mesma.

Proposição 11.6. *Seja A uma álgebra bárica sobre um corpo K e com função de peso ω. Se $N = \ker\omega$ é nil (todos os elementos de N são nilpotentes), então ω é unicamente determinado.*

Demonstração. Seja $\varphi : A \to K$ um homomorfismo não trivial. Por hipótese, $\forall x \in N$ é nilpotente, de modo que $\exists r | x^r = 0$. Então $\varphi(x^r) = \varphi(0) = 0$. Logo, $[\varphi(x)]^r = 0$ e $\varphi(x) \in K$, o que implica $\varphi(x) = 0$.

Tome então $y \in A \backslash N$, com então $\omega(y) \neq 0$.

Pegue o elemento $\frac{y^2}{\omega(y)} - y$. Como ω é homomorfismo, temos que $\frac{y^2}{\omega(y)} - y \in N$, pois

$$\omega\left(\frac{y^2}{\omega(y)}-y\right)=\omega\left(\frac{y^2}{\omega(y)}\right)-\omega(y)=\frac{\omega(y)^2}{\omega(y)}-\omega(y)=\omega(y)-\omega(y)=0.$$

Como sabemos que $\forall x \in N$, $\varphi(x)=0$, então $\varphi\left(\frac{y^2}{\omega(y)}-y\right)=0$, o que implica que $\frac{\varphi(y)^2}{\omega(y)}-\varphi(y)=\varphi(y)\left(\frac{\varphi(y)}{\omega(y)}-1\right)$. Como K é corpo, então $\varphi(y)=0$ ou $\frac{\varphi(y)}{\omega(y)}-1=0$, que implica que $\varphi(y)=0$ e $\varphi(y)=\omega(y)$.

Se $\varphi(y)=0$, então $\varphi=0$, o que é um absurdo por se tratar de um homomorfismo não trivial.

Logo, $\varphi(y)=\omega(y), \forall y \in A\backslash N$ e $\varphi(x)=0. \forall x \in N$. Logo, $\varphi=\omega$ e, portanto, só existe uma função de peso. □

Definição 11.7. Seja A uma álgebra. Um elemento não nulo $e \in A$ é dito ser *idempotente* se satisfaz que $e^2=e$.

No âmbito genético, a idempotência é bem interessante, pois se uma população P satisfaz que $P^2=P$, o que significa que a população atingiu o equilíbrio após ao cruzamento aleatório da população com ela mesma, isto é, as frequências de distribuição se mantêm iguais.

Proposição 11.8. *Seja A uma álgebra bárica sobre um corpo K com função de peso ω. Suponha que A contém um elemento idempotente e tal que $\omega(e)=1$. Então,*

$$A=Ke\oplus\ker\omega.$$

Demonstração. Seja $N=\ker\omega=\{x\in A|\omega(x)=0\}$. Pelo primeiro teorema do isomorfismo, $A/N\cong K$. N é um ideal de codimensão 1 em A. Como $\omega(e)=1$, $Ke\bigcap N=0$.

Seja $x\in A$ arbitrário. Então $x-\omega(x)e\in N$, desde que $\omega(e)=1$. Assim, $x=\omega(x)\cdot e+(x-\omega(x)\cdot e)$ e concluímos que $A=Ke\oplus N$. □

Exemplo 11.9. Um exemplo de aplicação dessas álgebras que ocorre principalmente no âmbito botânico é o da *autofertilização*, isto é, ao invés de fazermos novamente a iteração aleatória da população, fazemos com que o cruzamento seja dela com ela mesma.

Consideremos então uma população diploide. Vamos trabalhar considerando dois alelos possíveis: AA, Aa e aa em uma herança mendeliana. Tomamos então uma população P com a seguinte distribuição:

$$P = \alpha AA + \beta Aa + \gamma aa$$

onde α, β e γ são as proporções relativas aos zigotos que acompanham na equação.

Para a primeira população filial, F_1, temos, com a multiplicação definida na tabela 3:

$$F_1 = \alpha(AA \times AA) + \beta(Aa \times Aa) + \gamma(aa \times aa) =$$
$$\alpha AA + \beta\left(\tfrac{1}{4}AA + \tfrac{1}{2}Aa + \tfrac{1}{4}aa\right) + \gamma aa = \left(\alpha + \tfrac{1}{4}\beta\right)AA + \tfrac{1}{2}\beta Aa + \left(\tfrac{1}{4}\beta + \gamma\right)$$

Para definirmos qual será a $F_n = \alpha_n AA + \beta_n Aa + \gamma_n aa$ população filial da autofecundação, vamos trabalhar com uma função auxiliar, u_n, que representará o incremento da população em relação a população F_n em relação a população F_{n-1}. Assim $u_1 = F_1 - P$, $u_2 = F_2 - F_1$ e $u_n = F_n - F_{n-1}$. Vamos então calcular u_1:

$$u_1 = \tfrac{1}{4}\beta AA - \tfrac{1}{2}\beta Aa + \tfrac{1}{4}\beta aa = \tfrac{1}{2}\beta\left(\tfrac{1}{2}AA - Aa + \tfrac{1}{2}aa\right)$$

Calculando $F_2 = F_1 \times F_1$, obtemos:

$$F_2 = \left(\alpha + \tfrac{3}{8}\beta\right)AA + \tfrac{1}{4}\beta Aa + \left(\tfrac{3}{8}\beta + \gamma\right)aa$$

Assim, temos $u_2 = F_2 - F_1$:

$$u_2 = \frac{1}{8}AA - \frac{1}{4}\beta Aa + \frac{1}{8}\beta aa = \frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2}AA - Aa + \frac{1}{2}aa\right)$$

Continuado o cálculo dessa função, obtemos u_n:

$$u_n = \frac{1}{2^n}\beta\left(\frac{1}{2}AA - Aa + \frac{1}{2}aa\right).$$

Dessa maneira, conseguimos calcular o incremento em relação à população P somando os incrementos u_i, com $i = 1, \ldots, n$:

$$u_1 + u_2 + u_2 + \ldots + u_n = \left(\frac{1}{2}AA - Aa + \frac{1}{2}aa\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)\beta.$$

Assim, temos:

$$F_n = P + u_n = \alpha AA + \beta Aa + \gamma aa + u_n =$$
$$\left(\alpha + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2^{n+1}}\beta\right)AA + \frac{1}{2^n}\beta Aa + \left(\frac{1}{2}\beta + \gamma - \frac{1}{2^{n+1}}\beta\right)aa$$

É fácil identificar a situação de equilíbrio da população filial, basta que tomemos n suficientemente grande, o que fará com que a parte heterozigótica, Aa, deixe de existir. Isto é, no equilíbrio, a população ficaria:

$$F_\infty = \left(\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)AA + \left(\frac{1}{2}\beta + \gamma\right)$$

Esse é um exemplo bem interessante, pois a autofertilização é um exemplo histórico de aplicação das álgebras genéticas em aplicações genéticas reais.

12 Álgebras *Train* e Álgebras *Train* especiais

Restringindo mais as características de nossas álgebras, começamos a trabalhar com a classe das álgebras *train*.

Definição 12.1. Para qualquer elemento x em uma álgebra associativa, existe um polinômio normalizado m_x que é um polinômio que aniquila x e possui um grau mínimo. Este polinômio é chamado *polinômio minimal de x*.

Quando trabalhamos com álgebras não associativas, precisamos trabalhar com cautela sobre o polinômio minimal. Denote por A uma álgebra de dimensão finita, comutativa, não associativa sobre um corpo K. Seja então $\{a_1, \dots, a_n\}$ uma base de A. Temos então que não apenas polinômios minimais de elementos individuais existem, mas existem também polinômios aniquiladores em potências principais que aniquilam elementos em A. O polinômio de menor grau que obedece a essas características é chamado de *polinômio rank*. Denotamos ele por:

$$f(x) = x^r + \theta_1 x^{r-1} + \theta_2 x^{r-2} + \cdots + \theta_{r-1} x \tag{9}$$

onde θ_p é um polinômio homogêneo de grau p nas coordenadas ξ_i de um elemento genérico $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i$.

Definição 12.2. Seja A uma álgebra bárica com função de peso ω e com o polinômio definido em na equação 9. A será dito ser uma *álgebra train de rank r* se os coeficientes θ_p do polinômio *rank* de A forem apenas funções de ω_x.

Seja A uma álgebra *train* e suponha L uma extensão de K que seja o corpo de decomposição do polinômio *rank* f. Assim, em f, podemos decompor f em fatores lineares:

$$f(x) = x(x - \lambda_0 \omega(x))(x - \lambda_1 \omega(x)) \dots (x - \lambda_{r-2} \omega(x)) \tag{10}$$

Os elementos $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-2}$ de L são chamados *raízes train principais de A*.

Vale destacar que uma das raízes *train* principais deve ser 1, pois basta aplicar a equação 9 em um elemento de peso 1 e então aplicar ω ao polinômio obtido.

Proposição 12.3. *Seja A uma álgebra* train *de* rank *r com função de peso $\omega : A \to K$. Então, todo elemento em $N = \ker \omega$ é nilpotente de grau não maior do que r.*

Demonstração. θ_p são polinômios homogêneos de grau p, que são funções de $\omega(x)$, logo $\theta_p = \beta_p \cdot \omega^p(x)$, onde $\beta_p \in K$. Então o polinômio pode ser escrito como:

$$f(x) = x^r + \beta_1 \omega(x) x^{r-1} + \beta_2 \omega^2(x) x^{r-2} + \ldots + \beta_{r-1} \omega^{r-1}(x) x$$

Sabemos que esse polinômio aniquila qualquer elemento de A. Então, se $x \in N$, então $\omega(x) = 0 \Rightarrow x^r = 0$. Então, x é nilpotente de índice menor ou igual a r. $\square$

Corolário 12.4. *Uma álgebra* train *possui uma única função de peso.*

Demonstração. Uma álgebra *train* é unicamente determinada em sua função de peso, pois, pela proposição 12.3, $N = \ker \omega$ é nil. Logo, pela proposição 11.6, ω é único. $\square$

Definição 12.5. Uma álgebra bárica A com função de peso ω é chamada de *álgebra train especial* se $N = \ker \omega$ é nilpotente e todas as subálgebras de potências principais N^i de A são definidas indutivamente como $N^1 = N$, $N^i = N^{i-1}N$, para $i = 2, 3, \ldots$, são ideais de A.

Com essa definição, geramos uma cadeia de ideais:

$$A \supset N = n^1 \supset N^2 \supset N^3 \supset \ldots \supset N^{r+1} = \langle 0 \rangle$$

que claramente termina.

É interessante destacar que, apesar de álgebras desse tipo abrangerem álgebras gaméticas, as álgebras zigóticas não são álgebras *train* especiais. Isto é, a restrição aqui realizada é forte demais, e devemos buscar uma classe de álgebras um pouco mais genérica.

13 Álgebras Genéticas

13.1 Álgebras Genéticas de *Schaefer*

Definição 13.1. Suponha que A seja uma álgebra comutativa e não associativa sobre um corpo K. Para $x \in A$, seja $R_x : A \to A$ a multiplicação à direita por x. Como a álgebra é comutativa, a multiplicação à direita é equivalente à multiplicação à esquerda por x. Dessa forma, uma *álgebra de transformação* $T(A)$ *de* A é a álgebra de todos os polinômios com operadores de multiplicação de A à direita, como também o operador identidade.

Vale destacar que, em uma álgebra de transformação, qualquer transformação T pode ser representada com $T = \alpha I + f(R_{x_1}, \ldots, R_{x_n})$, onde $\alpha \in K$, I é a identidade em A e f é um polinômio.

Definição 13.2 (*Schaefer*)**.** Seja A uma álgebra bárica comutativa sobre um corpo K e com função de peso ω. Então A será dita uma *álgebra genética* se na função característica $\det(\lambda I - T)$ de qualquer transformação $T = \alpha I + f(R_{x_1}, \ldots, R_{x_n})$ na álgebra de transformações de A é uma função apenas dos pesos $\omega(x_1), \ldots, \omega(x_n)$.

Á definição de *Schaefer* para álgebras genéticas tinha interesse puramente matemático,não buscando sua aplicação genética. Pode-se provar que essas álgebras são também álgebras*train*, aplicando a definição à transformação $T = R_x$. Além disso, anos após a publicação dessa definição, provou-se que álgebras como descritas por *Schaefer* ocorrem na genética em caso em que há simetria, pelo menos em parte, no sistema, o que é bem comum na genética.

Um problema da definição de *Schaefer* é que é bastante difícil verificar se uma dada álgebra é de *Schaefer*, pois precisamos verificar para toda T na álgebra de transformações de uma dada álgebra bárica comutativa se esta é função dos pesos. Neste contexto, surge então outra definição de álgebra genética.

13.2 Álgebras Genéticas de *Gonshor*

Definição 13.3 (*Gonshor*)**.** Seja A uma álgebra comutativa de dimensão finita. Então A será dita uma álgebra genética se existir uma base $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ com tabela de multiplicação:

$$a_i a_j = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{ijk} a_k$$

e as constantes de multiplicação obedecerem:

$$\lambda_{000} = 1,$$

$$\lambda_{0jk} = 0, \text{para k < j,}$$

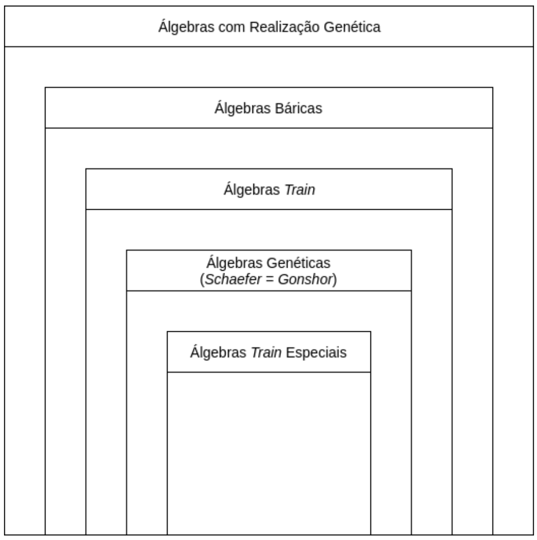
$$\lambda_{ijk} = 0, \text{para i ,j > 0 e k < max(i,j)}$$

.

Essa base é chamada *base canônica de A*.

Podemos resumir todas as classes vistas até agora com o seguinte diagrama:

Figura 1 – Diagrama de pertinência das classes de álgebras em genética



14 Álgebras de *Bernstein*

Definição 14.1. O *operador evolucionário de Bernstein* Ψ, é o mapeamento do simplex da distribuição das frequências genéticas:

$$\Delta_n = \{(x_0, \ldots, x_n) | x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$$

O significado biológico desse operador é o de passagem de uma geração para a próxima. Em particular, se faz interessante estudar os operadores em que temos satisfeita a condição de idempotência $\Psi^2 = \Psi$. Essa condição é chamada de *Princípio Estacionário de Bernstein.* Essa condição indica o equilíbrio da população após uma geração (tal como fizemos no exemplo da autofertilização de plantas). Tudo isso é contribuição de *Bernstein.*

Philip Holgate estendeu o operador evolucionário quadrático Ψ linearmente para um espaço vetorial V com base $\{a_0, \ldots, a_n\}$. Definimos a multiplicação como:

$$xy = \frac{1}{2}\{\Psi(x+y) - \Psi(x) - \Psi(y)\}$$

de modo que claramente V é uma álgebra comutativa.

Definimos então uma funçãos $\omega : V \to \mathbb{R}$ fazendo $\omega(a_i) = 1$ para todos i tal que $0 \leq i \leq n$. Como o operador é quadrático, segue que $\omega(\Psi(x)) = \omega^2(x)$, para todo $x \in V$. Provamos então que ω é homomorfismo:

$$\begin{gathered}
\omega(xy) = \omega\left(\tfrac{1}{2}\{\Psi(x+y) - \Psi(x) - \Psi(y)\}\right) = \\
\tfrac{1}{2}\{\omega(\Psi(x+y)) - \omega(\Psi(x)) - \omega(\Psi(y))\} = \\
\tfrac{1}{2}\{\omega^2(x+y) - \omega^2(x) - \omega^2(y)\} = \\
\tfrac{1}{2}\{2\omega(x)\omega(y)\} = \omega(x)\omega(y)
\end{gathered}$$

E logo o espaço vetorial V criado é bárico com função de peso ω. Em V o princípio de *Bernstein* se torna $\Psi^2(x) = \omega^2(x)\Psi(x)$.

Definição 14.2. Seja A uma álgebra de dimensão finita, comutativa e bárica sobre um corpo K, cuja característica não seja 2, e seja ω a função de peso. Então A será dita uma *álgebra de Bernstein* se as potências plenárias de qualquer elemento $x \in A$ satisfazem:

$$x^{[3]} = \omega^2(x)x^{[2]}$$

Proposição 14.3 (Holgate)**.** *Seja A uma álgebra de* Bernstein *com função de peso ω e $Z = \ker \omega$. Se $Z^3 = 0$, então A é também uma álgebra* train *especial.*

Proposição 14.4 (Holgate)**.** *Seja A uma álgebra de* Bernstein *com função de peso ω. Seja e um elemento idempotente de A. Seja $Z = \ker \omega$. Seja $U = \{x \in Z | ex = \frac{1}{2}x\}$ e $V = \{x \in Z | ex = 0\}$. Então, conseguimos a soma direta:*

$$A = ke \oplus U \oplus V.$$

Proposição 14.5 (Holgate)**.** *Seja A uma álgebra de* Bernstein *e seja e um elemento idempotente em A. Então todos os elementos idempotentes de A tem a forma $e + u + u^2$, onde $u \in U$ e $U = \{x \in Z | ex = \frac{1}{2}x\}$*

15 Exemplos de Álgebras de Evolução

Nessa seção, introduziremos alguns exemplos da biologia e da física que motivaram o desenvolvimento do estudo de álgebras de evolução, tipo de álgebra que os modela.

Exemplo 15.1 (Reprodução Assexuada)**.** A reprodução assexuada é característica de organismos procariotos, isto é, organismos cujas células não possuem núcleo. O fato de não possuírem núcleo faz com que o material genético (DNA) esteja concentrado em uma região conhecida por nucleoide. Com isso, a herança em organismos procariotos é feita por fissão, mais conhecida por **reprodução assexuada**. O processo de fissão ocorre com a duplicação do material genético, seguida pela divisão da célula em duas partes por meio de um afunilamento com a construção de uma parede celular que divide as duas células filhas. Podemos observar o processo na figura 2:

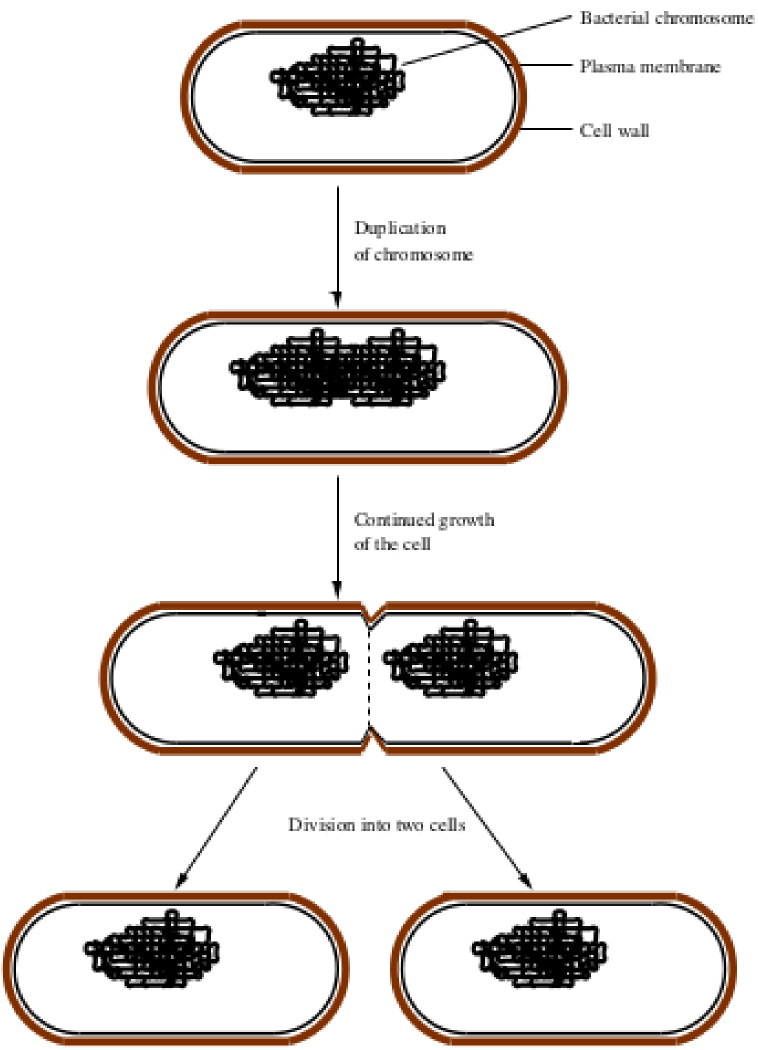


Figura 2 – Processo de Reprodução Assexuada

Com a ideia em mente de que o processo consiste apenas em duplicar e dividir igualmente o material genético, era de se esperar que os organismos procarióticos não tivessem alterações em seu material genético após a reprodução. Devemos porém considerar fatores do ambiente que podem induzir mudanças genéticas. São eles:

- Mutação no DNA;
- Recombinação entre os genes de um procarioto e de um organismo viral por meio do processo de transdução;
- Transferência de material genético por meio conjugação. Esse processo é, em termos gerais, o estabelecimento de um tubo sexual entre as procariotos para troca de material genético - é uma mudança horizontal na genética.

Dessa maneira, fica claro que a reprodução assexuada não é mendeliana, como as álgebras que modelamos nos exemplos das seções anteriores.

Modelando matematicamente, vamos supor que temos n procariotos de genética distinta, denotando-os por $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Supomos ainda condições constantes de ambiente de geração para geração. Seguem as relações:

$$\begin{cases} p_i \cdot p_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} p_k, \\ \quad p_i \cdot p_j = 0, i \neq j. \end{cases}$$

Vale destacar que a multiplicação é aqui vista como a reprodução assexuada.

Exemplo 15.2 (Herança Assexual em Álgebras Gaméticas)**.** Como vimos na subseção 10.2.1, vamos considerar uma população diploide infinita, com reprodução aleatória entre indivíduos, com indivíduos geneticamente diferentes em locais autossômicos. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ os gametas distintos dessa população. Pela união aleatória dos gametas a_i e a_j, formamos zigotos do tipo $a_i a_j$. Assumimos que o zigoto produza um número γ_{ijk} de gametas do tipo a_k que sobrevive para a próxima geração, $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. A menos de seleção, assumimos que todos os zigotos produzem o mesmo número de gametas para a próxima geração. Denotamos γ_{ijk} como probabilidade, satisfazendo $\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} = 1$. A frequência do gameta a_k produzida pela população é $\sum_{i,j=1}^{n} v_i \gamma_{ijk} v_j$ se o vetor de frequência da geração anterior é $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Definimos a multiplicação como o espaço gerado pelos gametas $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sobre o corpo dos reais:

$$a_i a_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} a_k, \; i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Contudo, quando consideramos a herança assexual, a interpretação de $a_i a_j$ como um zigoto deixa de fazer sentido biológico se $a_i \neq a_j$. Porém, $a_i a_i = a_i^2$ ainda pode ser interpretado como auto-replicação. Reescrevemos então a tabela de multiplicação:

$$\begin{cases} a_i.a_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} a_k, \\ \quad a_i.a_j = 0, i \neq j. \end{cases}$$

No caso de herança assexual, $a_i a_j$ não é mais um zigoto - ele nem existe. Por isso, fazemos $a_i a_j = 0$. Claramente, não temos mais uma herança mendeliana.

Exemplo 15.3 (Partículas se Movendo em um Espaço Discreto)**.** Para modelar um espaço discreto, consideramos um grafo G. Suponha que, se iniciando em um vértice v_i, o próximo vértice a ser escolhido depende dos vizinhos de vértice v_i e de para qual a partícula prefere ir. Para estabelecer a preferência de se ir para um vértice v_j a partir do vértice v_i, valoramos a aresta que os conecta com um coeficiente de preferência w_{ij}, que não precisa necessariamente ser uma probabilidade.

Com isso, o próximo vértice escolhido é o de maior predileção a partir do vértice em que se está. A partícula se move continuamente pelo grafo. Se pararmos essa partícula, teremos que o caminho traçado por ela é o de maior coeficiente de preferência.

Modelando matematicamente, seja o conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ o conjunto gerador. Temos as relações:

$$\begin{cases} v_i.v_i = \sum_j \omega_{ij} v_j, \\ v_i.v_j = 0, i \neq j, \end{cases}$$

onde os coeficientes w_{ij} e w_{ji} podem ser distintos (grafo direcionado) e $i, j = 1, 2, \ldots, r$. Dessa maneira, o caminho de maior preferência consiste em potências principais de um elemento na álgebra.

16 Propriedades Básicas das Álgebras de Evolução

16.1 Definições de Álgebras de Evolução

Definição 16.1. Seja $(A, \cdot)$ uma álgebra sobre o corpo K. Se esta possui uma base contável $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, tal que

$$x_i.x_j = 0, i \neq j$$
$$x_i.x_i = \sum_k a_{ik} x_k, \forall i$$

Chamamos essa álgebra de *álgebra de evolução.* A base utilizada é, como vimos nas álgebras genéticas, uma base natural.

Alternativamente, podemos definir álgebras de evolução por seus geradores e por suas relações. Omitimo-las, porém, por essa definição ser suficiente e mais próxima do que vinhamos trabalhando nas álgebras genéticas.

Observação 16.2 (Álgebras de Evolução Triviais)**.** Temos dois tipos de álgebras de evolução triviais: uma nula e outra não. Se temos que as relações são dadas por $x_i.x_j = 0$ para todos os geradores e $x_i^2 = 0$, dizemos que esse álgebra é uma *álgebra de evolução nula.* Caso as relações tenham $x_i.x_j = 0$ para $i \neq j$ e $x_i^2 = k_i x_i$, onde k_i em K é não nulo, dizemos que a álgebra é uma *álgebra de evolução não-nula trivial.*

16.2 Propriedades Básicas das Definições de Álgebra de Evolução

As propriedades básicas que temos de álgebras de evolução são obtidas como corolários das definições de álgebras de evolução.

Corolário 16.3. *Álgebras de evolução são não-associativas em geral.*

Demonstração. Seja o conjunto gerador $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$, e considere que a álgebra é não-trivial. Em geral, para algum índice i, $e_i.e_i = \sum_j a_{ij} e_j$, de forma que existe $j \neq i$ tal que $a_{ij} \neq 0$. Com isso, temos que $(e_i.e_i).e_j \neq 0$. Por outro lado, $e_i(e_i.e_j) = e_i.0 = 0$. Logo, $(e_i.e_i).e_j \neq e_i.(e_i.e_j)$, sendo então não-associativa. $\square$

Corolário 16.4. *Álgebras de evolução são comutativas e flexíveis, isto é, para x, y em uma álgebra E, vale a relação $x(yx) = (xy)x$.*

Demonstração. Considere um conjunto gerador $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ e uma álgebra de evolução não trivial. Então, para quaisquer elementos x e y na álgebra de evolução, sendo $x = \sum_i a_i e_i$ e $y = \sum_i b_i e_i$, temos

$$x.y = \sum_i a_i e_i. \sum_j b_j e_j = \sum_{i,j} a_i b_j e_i.e_j = \sum_i a_i b_i e_i^2 = yx.$$

Logo, uma álgebra de evolução é comutativa. É fácil ver que, sendo comutativa, a álgebra satisfaz a relação $x(yx) = (xy)x$. Logo, é também flexível. $\square$

Corolário 16.5. *Álgebras de evolução não são, em geral, associativas nas potências.*

Demonstração. Vamos observar o comportamento de um elemento e_i na potência. Temos:

$$(e_i.e_i).(e_i.e_i) = \sum_k a_{ik}e_k.\sum_l a_{il}e_l = \sum_k a_{ik}^2 e_k^2$$

e

$$((e_i.e_i).e_i).e_i) = ((\sum_k a_{ik}e_k).e_i)e_i = (a_{ii}e_i^2).e_i = (a_{ii}\sum_k a_{ik}e_k).e_i = a_{ii}^2 e_i^2.$$

Em geral, $(e_i.e_i).(e_i.e_i) \neq ((e_i.e_i).e_i).e_i)$. Logo, uma álgebra de evolução é não, normalmente, associativa na potência. □

Corolário 16.6. *A soma direta de álgebras de evolução é uma álgebra de evolução.*

Demonstração. Considere duas álgebra de evolução não-triviais A_1, A_2, com conjuntos geradores $\{e_i | i \in \Lambda_1\}$ e $\{\eta_j | j \in \Lambda_2\}$, respectivamente. Então, $A_1 \oplus A_2$ possui um conjunto gerador $\{e_i, \eta_j | i \in \Lambda_1, j \in \Lambda_2\}$, onde identificamos e_i com $(e_i, 0)$ e η_j com $(0, \eta_j)$. Verificamos que esse conjunto gerador é uma base natural para $A_1 \oplus A_2$:

$$e_i.e_i = \sum_k a_{ik}e_k$$

$$e_i.e_j = 0, i \neq j$$

$$\eta_i.\eta_i = \sum_k b_{ik}\eta_k$$

$$\eta_i.\eta_j = 0, i \neq j$$

$$e_i.\eta_j = (e_i, 0).(0, \eta_j) = 0$$

.

Logo, $A_1 \oplus A_2$ é uma álgebra de evolução. É claro que a dimensão de $A_1 \oplus A_2$ é a soma da dimensão de A_1 com a dimensão de A_2. A prova é semelhante para uma soma direta de um número maior do que 2 elementos. $\square$

16.3 Definições Básicas

Nesta seção, apresentaremos alguns conceitos básicos das álgebras de evolução, que são, essencialmente, adaptações de conceitos bem conhecidos da teoria de álgebras para o caso de álgebras de evolução.

Definição 16.7. Seja A uma álgebra de evolução, e A_1 um subespaço de A. Se A_1 tem base natural $\{e_i | i \in \Lambda_1\}$, e pode ser estendida a uma base natural $\{e_j | j \in \Lambda\}$ de A, dizemos que A_1 é uma *subálgebra de evolução*, onde Λ_1 e Λ são os conjuntos de índices e Λ_1 é subconjunto de Λ.

Definição 16.8. Seja A uma álgebra de evolução, e I uma subálgebra de evolução de A. Se $AI \subseteq I$, dizemos que I é um *ideal de evolução*.

Definição 16.9. Sejam A e B álgebras de evolução. Dizemos que um homomorfismo f de A para B é um *homomorfismo de evolução* se f é um mapeamento algébrico e se para uma base natural $\{e_i | i \in \Lambda\}$ em A, $\{f(e_i) | i \in \Lambda\}$ gera uma subálgebra de evolução em B. Além disso, se o homomorfismo de evolução for um isomorfismo, chamaremos ele de *isomorfismo de evolução*.

Definição 16.10. Dizemos que uma álgebra de evolução E é *conexa* se E não pode ser decomposta como soma direta de duas subálgebras de evolução próprias.

Definição 16.11. Uma álgebra de evolução E é dita *simples* se não possui ideias de evolução próprios.

Definição 16.12. Uma álgebra de evolução E é dita *semi-simples* se pode ser escrita como soma direta de subálgebras de evolução.

Definição 16.13. Uma álgebra de evolução E é dita *irredutível* se não possui subálgebra própria.

16.4 Propriedades Básicas

Proposição 16.14. *Toda subálgebra de evolução é um ideal de evolução e todo ideal de evolução é uma subálgebra de evolução.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Trivial.

($\Rightarrow$) Seja E_1 uma subálgebra de evolução de E. Por definição então E_1 possui um conjunto gerador $\{e_i | i \in \Lambda_1\}$ que pode ser estendido a um conjunto gerador de E, $\{e_i | i \in \Lambda\}$, onde $\Lambda_1 \subseteq \Lambda$. Para $x \in E_1$ e $y \in E$, podemos escrever $x = \sum_{i\in\Lambda_1} x_i e_i$ e $y = \sum_{i\in\Lambda} y_i e_i$, onde $x_i, y_i \in K$, temos que o produto $xy = \sum_{i\in\Lambda_1} x_i y_i e_i^2 \in E_1$. Logo, $E_1 E \subseteq E_1$. Como E é comutativo, E_1 é um ideal bilateral. □

Essa proposição é bastante interessante pois ela colapsa alguns conceitos que definimos acima. A ideia de diferenciar ideais e subálgebras deixa de fazer sentido, pois são a mesma coisa nas álgebras de evolução, de modo que podemos tratar a ambos como subálgebras.

Além disso, pelas definições 16.11 e 16.13, temos que uma álgebra é simples se não possui ideais próprios e que é irredutível se não possui subálgebras. Porém, como toda subálgebra de evolução é um ideal de evolução, temos toda álgebra de evolução simples é uma álgebra de evolução irredutível e vice-versa.

Corolário 16.15. 1. *Uma álgebra de evolução semi-simples é não-conectada.*

2. *Uma álgebra de evolução simples é conectada.*

Outro ponto interessante a considerarmos nas álgebras de evolução são as *álgebras quocientes*. Seja E_1 um ideal de evolução de uma álgebra de evolução E. Então a álgebra quociente $\overline{E} = E/E_1$ consiste em todos os conjuntos $\overline{x} = x + E_1$ com operações $k\overline{x} = \overline{kx}$, e $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$, $\overline{x}.\overline{y} = \overline{xy}$. Verificamos sem grandes problemas que $\overline{E}$ é uma álgebra de evolução. A função canônica $\pi : x \mapsto \overline{x}$ em $\overline{E}$ é um homomorfismo de evolução com núcleo E_1.

Lema 16.16. *Sejam $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ elementos de uma álgebra de evolução E com dimensão n, satisfazendo $\eta_i\eta_j = 0$ quando $i \neq j$. Se existe uma base de E contida nesse conjunto, então temos $(m-n)$ zeros nessa sequência.*

Demonstração. Suponha que a base natural de E é formada por $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$. Então, η_{n+k}, com $1 \leq k \leq (m-n)$, pode ser expresso como combinação linear de η_i, com $1 \leq i \leq n$. Isto é, $\eta_{n+k} = \sum_{i=1}^{n} a_i\eta_i$. Multiplicando por η_i ambos os lados da equação, obtemos $\eta_{n+k}\eta_i = a_i\eta_i^2 = 0$. Assim, obtemos que $a_i = 0$ para todo i, tal que $1 \leq i \leq n$. Portanto, $\eta_{n+k} = 0$, onde $1 \leq k \leq (m-n)$, consistindo em $(m-n)$ zeros. □

Teorema 16.17. *Sejam E_1 e E_2 álgebras de evolução, e $f : E_1 \to E_2$ um homomorfismo de evolução. Então, $K = \ker(f)$ é uma subálgebra de evolução de E_1, e E_1/K é isomorfo a E_2 se f é sobrejetora. Ou, E_1/K é isomorfo a $f(E_1)$.*

Demonstração. Seja $e_1, e_2, \ldots, e_m$ uma base natural de E_1. Pela definição de homomorfismo de álgebras de evolução, $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_m)$ geram uma álgebra de evolução em E_2, álgebra esta que denotaremos por B. Quando a dimensão de B é m, é fácil ver que o núcleo K é trivial, sendo a subálgebra nula. Quando $\dim(B) = n \leq m$, temos que mostrar que $\dim(K) = m - n$. Para $i \neq j$, $f(e_i)f(e_j) = f(e_ie_j) = 0$, e então alguns $f(e_i)$s formam uma base natural para a imagem de E_1, que é uma subálgebra de evolução em E_2. Pelo Lema 16.16, temos então $m-n$ zeros. Digamos então que $f(e_{n+1})=0,\dots,f(e_m)=0$. Isto é, $e_{n+1},\dots,e_m\in K$. Definimos então

$$\overline{f}: E_1/K \longrightarrow f(E_1)$$

por

$$x+K \longrightarrow f(x).$$

Concluímos que $\overline{f}$ é isomorfismo. □

17 Operadores de Evolução

Definição 17.1. Seja E uma álgebra de evolução e $\{e_i|i\in\Lambda\}$ uma base natural de E. Definimos um K-mapa linear $L: E\longrightarrow E$, definindo $L(e_i)=e_i^2$, para $i\in\Lambda$, e estendendo por linearidade para E.

Considere L como uma transformação linear, independente da estrutura algébrica, com uma base natural podemos escrever uma representação matricial para o operador de evolução L. Como $L(e_i)=e_i^2=\sum_k a_{ki}e_k$ $\forall i\in\Lambda$, então obtemos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Se E possui dimensão finita, a matriz descrita também o terá.

Outra notação que podemos utilizar é a notação formal $\theta=\sum_{i\in\Lambda}e_i$, não importando se Λ é finito ou infinito. Podemos definir L como

$$L(x) = \theta.x = (\sum_{i\in\Lambda} e_i).x,$$

para qualquer x em E. Pela distributiva, obtemos:

$$L(e_i) = (\sum_{i\in\Lambda} e_i).e_i = e_i^2, \ \forall i \in \Lambda.$$

Teorema 17.2. *Se E_0 é uma subálgebra de evolução de uma álgebra de evolução E, então o operador L deixa E_0 invariante.*

Demonstração. Seja $\{e_i | i \in \Lambda_0\}$ uma base natural de E_0, e $\{e_i | i \in \Lambda\}$ a extensão da base anterior para uma base de E, com $\Lambda_0 \subset \Lambda$. Dado x em E_0, então $x = \sum_{i\in\Lambda_0} c_i e_i$, a ação do operador de evolução fica:

$$L(x) = \sum_{i\in\Lambda_0} c_i e_i^2 = \sum_{i,k\in\Lambda_0} c_i a_{ki} e_k,$$

pois E_0 é uma subálgebra. Logo, $L(x) \in E_0$, e assim $L(E_0) \subset E_0$. Além disso, $L^n(E_0) \subset E_0$, para todo n inteiro positivo.

□

17.1 Mudanças nas Bases Naturais

Seja $\{e_i | i \in \Lambda\}$ e $\{\eta_j | j \in \Lambda\}$ duas bases naturais para uma álgebra E. Vamos supor as transformações entre essas bases como $e_i = \sum_k a_{ki}\eta_k$ e $\eta_i = \sum_k b_{ki} e_k$. Suponha também as relações de álgebras de evolução, $e_i.e_j = 0$ se $i \neq j$, $e_i^2 = \sum_k p_{ki} e_k$, e $\eta_i.\eta_j = 0$ se $i \neq j$, $\eta_i^2 = \sum_k q_{ki}\eta_k$, com $i, j \in \Lambda$. Temos:

$$e_i.e_j = \left(\sum_k a_{ki}\eta_k\right).\left(\sum_k a_{kj}\eta_k\right) = \sum_k a_{ki}a_{kj}\eta_k^2 = \sum_{v,k} a_{ki}a_{kj}q_{vk}\eta_v = \sum_v \sum_k q_{vk}a_{ki}a_{kj}\eta_v = 0.$$

Como cada coeficiente de um vetor nulo deve ser 0, obtemos que $\sum_k q_{vk}a_{ki}a_{kj} = 0$ para $v \in \Lambda$ e $i \neq j$. Da mesma forma:

$e_i.e_i = (\sum_k a_{ki}\eta_k)^2 = \sum_k a_{ki}^2\eta_k^2 = \sum_{v,k} a_{ki}^2 q_{vk}\eta_v = \sum_{v,k,u} a_{ki}^2 q_{vk} b_{uv} e_u = \sum_u p_{ui} e_u,$

de forma que obtemos $p_{ui} = \sum_{v,k} b_{uv} q_{vk} a_{ki}^2$. Logo, temos:

$$\begin{aligned} A^{-1}QA^{(2)} &= P \\ Q(A * A) &= 0 \end{aligned}$$

onde $A = (a_{ij})$, $Q = (q_{ij})$, $P = (p_{ij})$, $A^{(2)} = (a_{ij}^2)$ e $*$ é definido da seguinte maneira:

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes $n \times n$. Então $A * B = (c_{ij}^k)$ é uma matriz de tamanho $n \times \frac{n(n-1)}{2}$, onde $c_{ij}^k = a_{ki}.b_{kj}$ para pares (i, j), com $i < j$, as linhas indexadas por k e as colunas indexadas pelos pares (i, j) em sua ordem lexicográfica.

18 Álgebras de Evolução como Espaços de *Banach*

Para mostrar as álgebras de evolução como espaços de *Banach* precisamos introduzir uma norma para essas álgebras. Mostraremos que a função determinada é de fato norma e depois configuraremos essas álgebras como espaços de *Banach*.

Definição 18.1. Seja E uma álgebra de evolução com um conjunto gerador $\{e_i | i \in \Lambda\}$. Definimos a função N da álgebra E para o seu corpo K da seguinte forma:

$$\begin{gathered} N : E \longrightarrow K \\ N(x) = \textstyle\sum_i |a_i|, \end{gathered}$$

onde $x \in E$ e $\sum_i a_i e_i$.

Proposição 18.2. *A função N definida acima é uma norma.*

Demonstração. Vamos mostrar que álgebras de evolução são normadas. Denotaremos a essa norma como $N(x) = ||x||$.

- **Positividade:** $N(x) = \sum_i |a_i| \geq 0$. Além disso, se $N(x) = 0$, então $N(x) = \sum_i |a_i| = 0$.Assim, $|a_i| = 0$, o que implica que a_i deve ser 0. Dessa maneira, $N(x) = 0$ se, e somente se $x = 0$.

- **Linearidade:** $N(\lambda x)$, com λ em K, é dado por $N(\lambda x) = \sum_i |\lambda a_i| = |\lambda| \sum_i |a_i| = |\lambda| N(x)$.

- **Desigualdade Triangular:** Queremos mostrar que $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$. Tome $x = \sum_i a_i e_i$ e $y = \sum_i b_i e_i$. Temos:

$$N(x+y) = N(\textstyle\sum_i (a_i + b_i) e_i) = \sum_i |a_i + b_i| \leq \sum_i (|a_i| + |b_i|) =$$
$$\textstyle\sum_i |a_i| + \sum_i |b_i| = N(x) + N(y).$$

□

Proposição 18.3. *Todo operador de evolução L é um operador linear limitado.*

Demonstração. Para $x \in E$, $x = \sum_i a_i e_i$, com uma base natural $\{e_i | i \in \Lambda\}$ de uma álgebra de evolução E, temos:

$$L(x) = \textstyle\sum_i a_i L(e_i) = \sum_i a_i e_i^2 = \sum_{i,j} a_i p_{ji} e_j.$$

Aplicando a norma, ganhamos:

$$N(L(x)) = \textstyle\sum_j |\sum_i a_i p_{ji}| \leq \sum_j \sum_i |a_i p_{ji}| \leq \sum_i |a_i| \sum_j |p_{ji} \leq \sum_i |a_i| c_i \leq cN(x),$$

onde $c_i = \sum_j |p_{ji}|$ e $c = \max\{c_i | i \in \Lambda\}$. Logo, L é limitado. □

Teorema 18.4. *Seja E uma álgebra de evolução de dimensão finita n. Então essa álgebra é completa como espaço linear normado, ou seja, é um espaço de* Banach.

Demonstração. Para mostrar que E é um espaço de *Banach*, precisamos mostrar que E é completo, em relação a métrica $\rho(x,y) = N(x-y)$. Ou seja, que se x^m é uma sequência de *Cauchy* em E, então x^m converge em E.

Seja então $x^m = \sum_{i=1}^{n} a_i^m e_i$, $m = 1, 2, \ldots$, uma sequência em E. Temos, para $x, y \in E$:

$$\rho(a_i^m e_i, a_i^k e_i) = N(a_i^m e_i - a_i^k e_i) = |a_i^m - a_i^k| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i^m - a_i^k| = \rho(x^m, x^k) \leq n. \max_{1 \leq i \leq n} |a_i^m - a_i^k|.$$

Quando x^m é uma sequência de *Cauchy*, então, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um inteiro m_0, tal que para qualquer inteiro m, $k > m_0$, temos $\rho(x^m, x^k) < \epsilon$. Logo temos que $|a_i^m - a_i^k| < \epsilon/n$. Pelo princípio de *Cauchy*, existe um número b_i tal que $|a_i^m - b_i| < \epsilon/n$. Ou seja, a sequência a_i^m converge para b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Se denotarmos $x^0 = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$, então $\rho(x^m, x^0) = \sum_{i=1}^{n} |a_i^m - a_i^k| \leq \epsilon$.

Logo x^m converge para x^0. Assim a álgebra E é um espaço de *Banach*. □

19 Formulação Algébrica da Genética Não-Mendeliana

19.1 Conceitos Biológicos Necessários

Vimos na subseção 10.1 as principais definições biológicas para entendermos as álgebras genéticas e a herança mendeliana. Para trabalharmos com a herança não-mendeliana, porém, precisamos destacar mais algumas definições biológicas, explicitar de fato quais as diferenças entre a genética mendeliana e a não mendeliana, para podermos então formular algebricamente a genética não-mendeliana.

Reprodução assexuada consiste na reprodução de novos indivíduos a partir de células ou tecidos pré-existentes num organismo. Esse é um processo comum em plantas e micro-organismos, que envolve ou fissão binária ou produção de esporos assexuais. Esse tipo de reprodução permite alteração na reprodução.

Reprodução sexuada, por outro lado, envolve a fusão de células - gametas - vindos de cada um dos pais para formar um zigoto. Também permite alteração na genética na geração células filhas.

Com isso em mente, podemos diferenciar genética mendeliana da não-mendeliana:

Característica	Genética Mendeliana	Genética não-Mendeliana
Segregação de genes na reprodução assexuada	Não há segregação	Há segregação
Segregação de genes na reprodução sexuada	Sempre há segregação	Pode ou não haver segregação
Fonte da herança genética	Herança biparental	Herança monoparental
Fertilização aleatória	Ocorre	Ocorre

Tabela 5 – Reprodução Mendeliana *versus* Reprodução não-Mendeliana

Na reprodução assexuada, quando falamos de genes do núcleo, não há segregação pelo fato de haver replicação do genoma nuclear na mitose, garantindo que cada filho tenha uma cópia do cromossomo original. Os genes de organelas, por outro lado, não seguem um modelo mendeliano, de modo que não há segregação dos genes nem na meiose nem na mitose.

Na reprodução sexuada, sempre temos segregação dos genes para os genes nucleares, visto que metade deles vai para cada uma das duas células filhas. Para os genes das organelas pode ou não haver segregação.

Em termos de herança, para os genes do núcleo ela é biparental, pois herda metade dos genes de cada uma das duas células que a geraram. Os genes das organelas são comumente herdados de apenas uma das células paternas. Por exemplo, o *DNA* mitocondrial é herdado das células da mãe.

A fertilização aleatória, por fim, como está destacado na tabela 5, ocorre nos dois tipos de genética.

Outra organela que possui *DNA* próprio como as mitocôndrias são os cloroplastos, organelas estas presentes apenas em células vegetais. Ambas organelas foram inseridas nas células, supõe-se, por meio de fagocitose, justificando o genoma residual que mantêm. Geneticamente, tanto cloroplastos quanto mitocôndrias são unidades que fazem auto-replicação de seu genoma. Porém, o melhor jeito de estudá-las é interpretando a herança em termos de população de organelas dentro da célula. A isso chamamos *população genética intracelular de organelas.*

19.2 Formulação Algébrica da Genética não-Mendeliana

Vamos considerar uma população de organelas em uma célula e supor que existem n diferentes genótipos nessa população. Denotemos esses genótipos por $g_1, g_2, \ldots, g_n$. De acordo com a tabela 5, a genética não-mendeliana tem herança monoparental, de modo que não há cruzamento e genótipos. Logo, temos:

$$g_i.g_j = 0, i \neq j.$$

Além disso, na tabela 5 também podemos observar que pode ou não haver segregação na meiose, de modo que as frequências dos genes podem variar. Além disso, pelas pressões externas é esperado que haja variação do genótipo das organelas filhas. Matematicamente:

$$g_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} g_j,$$

com α_{ij} um número positivo que pode ser interpretado como a taxa com que o genótipo g_j é produzido pelo genótipo g_i.

Com esse modelo, conseguimos elaborar todas as álgebras não-mendelianas. É uma definição bem geral, mas como consegue contemplar todas as álgebras não-mendelianas, se torna um modelo bastante interessante, do qual o estudo de exemplos e aplicações é bastante rico.

20 Álgebras de Evolução e Grafos

Definição 20.1. Seja $G = (V, E)$ um grafo, com V seu conjunto de vértices e com E seu conjunto de arestas. Definimos uma álgebra da seguinte maneira: tomamos $V = \{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ como conjunto gerador e as relações como o conjunto:

$$R = \left\{ e_i^2 = \sum_{e_k \in \Gamma(e_i)} e_k; e_i.e_j = 0, i \neq j; i, j = 1, 2, \ldots, r \right\},$$

onde $\Gamma(e_i)$ é o conjunto de vértices vizinhos à e_i. Dessa maneira, a álgebra de evolução determinada por esse grafo é uma álgebra quociente:

$$A(g) = \langle V|R \rangle = \left\langle e_1, e_2, \ldots, e_r | e_i^2 = \sum_{e_k \in \Gamma(e_i)} e_k; e_i.e_j, i \neq j; i, j = 1, 2, \ldots, r \right\rangle.$$

Teorema 20.2. *Se grafos G_1 e G_2 são isomorfos enquanto grafos, então $A(G_1)$ e $A(G_2)$ são também álgebras isomorfas.*

Demonstração. Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, e Φ um isomorfismo de G_1 para G_2. Supondo $V_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, temos:

$$\Phi(V_1) = V_2 = \{\Phi(e_1), \Phi(e_2), \ldots, \Phi(e_n)\},$$

e $\Phi(e_i) \sim \Phi(e_j)$, isto é, os vértices são vizinhos em G_2 se, e somente se, $e_i \sim e_j$.

Estendemos a função Φ para $A(G)$ por linearidade:

$$\overline{\Phi} = A(G_1) \longrightarrow A(G_2)$$
$$\overline{\Phi}(x) = \textstyle\sum_i a_i \Phi(e_i),$$

se $x = \sum_i a_i e_i$. Assim $\overline{\Phi}$ é um mapa algébrico:

$$e_i.e_j = 0, i \neq j \Longrightarrow \Phi(e_i).\Phi(e_j) = 0$$

Para $\overline{\Phi}$, temos:

$$\overline{\Phi}(e_i.e_j) = \overline{\Phi}(0) = 0 = \Phi(e_i)\Phi(e_j) = \overline{\Phi}(e_i)\overline{\Phi}(e_j).$$

e temos:

$$\overline{\Phi}(e_i^2) = \sum_{e_k \in \Gamma(e_i)} \Phi(e_k) = \Phi(e_i^2) = \overline{\Phi}(e_i)^2.$$

Logo, $\overline{\Phi}$ é um mapa álgebra abaixo e é isomorfismo. □

Definição 20.3. Uma álgebra não-associativa A é dita ser *graficável (graphicable)* se possui um conjunto gerador $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ com as seguintes relações:

$$x_i^2 = \sum_{e_k \in V_i} x_k; x_i.x_j = 0, i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

onde V_i é um subconjunto de V.

Dessa maneira, com A uma álgebra graficável, podemos associar um grafo G a A tomando o conjunto de vértices de G com V e, para cada x_i, fazendo todos os vértices em V_i como seus vizinhos. Denotaremos um grafo assim formado por $G(A)$.

Definição 20.4. Sejam A_1 e A_2 duas álgebras graficáveis com o mesmo conjunto gerador. Se estas forem algebricamente isomorfas, diremos que A_1 e A_2 são *isomorficamente representáveis (presentable isomorphic).*

Teorema 20.5. *Sejam A_1 e A_2 duas álgebras graficáveis. Se A_1 e A_2 são isomorficamente representáveis, os grafos $G(A_1)$ e $G(A_2)$ são isomorfos.*

Demonstração. Pela definição, $G(A_1)$ e $G(A_2)$ devem possuir o mesmo conjunto de vértices, que denotaremos por $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$.Denotando o isomorfismo como Φ, temos $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\} = \{\Phi(e_1), \Phi(e_2), \ldots, \Phi(e_r)\}$. Como é isomorfismo, o mapeamento preserva as relações algébricas. Desse modo, temos:

$$\Phi(e_i^2) = \Phi(e_i).\Phi(e_i) = \sum_{k \in \Lambda_i} \Phi(e_k)$$

,

onde Λ_i é um subconjunto do conjunto de índices, determinado pelo $e_i, i = 1, 2, \ldots, r$. Assim, as relações de incidência nos vértices do grafo são mantidas. Logo, $G(A_1)$ e $G(A_2)$ são isomorfos.

□

Com o estabelecimento da relação entre grafos e álgebras de evolução, podemos trazer algumas definições da teoria de grafos para mostrar onde se encaixam na teoria de álgebras de evolução.

Definição 20.6. Definimos como um *álgebra cíclica de p vértices* como um álgebra de evolução de dimensão p com um conjunto gerador $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ e as seguintes relações:

$$\begin{gathered}
x_1^2 = x_p + x_2, \\
x_2^2 = x_1 + x_3, \\
\ldots, \\
x_{p-1}^2 = x_{p-2} + x_p, \\
x_p^2 = x_1 + x_{p-1}.
\end{gathered}$$

Podemos observar na figura 3 o grafo no qual a álgebra cíclica se baseia.

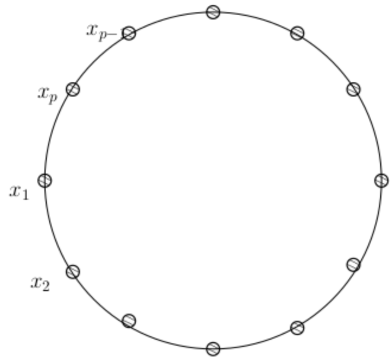


Figura 3 – Grafo Cíclico

Definição 20.7. Definimos como uma *álgebra completa* de um grafo de p vértices como a álgebra de evolução de dimensão p tal que vale:

$$x_i^2 = \sum_{k \neq i} x_k, i = 1, 2, \ldots, p.$$

Podemos observar a representação de um grafo completo na figura 4, do qual deriva a álgebra completa:

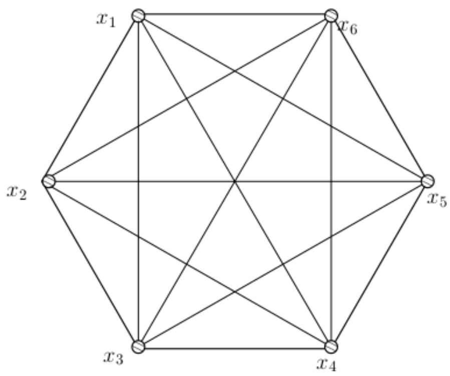


Figura 4 – Grafo Completo

21 Conclusão

As seções anteriores apresentam todo o estudo realizado nos doze meses de projeto, cumprindo todo o planejamento proposto.

A primeira parte do projeto foi cumprida no tempo, rendendo ainda o tema com o qual participei no *IV Congresso Acadêmico da Unifesp*, com apresentação oral e pôster, ambos entitulados "Identidades Multilineares em Álgebras Não Comutativas". Foi uma experiência bastante interessante, principalmente pelo retorno positivo por parte dos professores que me avaliaram.

A segunda parte do projeto demandou um tempo superior ao esperado, pois o assunto possui vários detalhes, definições e teoremas complexos, exigindo bastante dedicação e um tempo maior de estudo. Utilizando o artigo [4] em conjunto com o livro [3], o trabalho se viu facilitado, conseguindo assim atingir a sua conclusão. Os estudos referentes a essa parte do projeto configurarão um pôster no *XXXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC 2019*, cujo resumo de título "Modelando Problemas de Genética com Álgebras não Associativas"fora aceito para apresentação.

A terceira parte do projeto foi cumprida rapidamente porém com grande entendimento do assunto. Tendo sido esse também o assunto visto na *Escola Latino-americana de Matemática (ELAM)* em 2018, os estudos em álgebras de evolução foram bastante proveitosos. Não obstante, este assunto saltou aos olhos como um estudo bastante interessante, motivando assim um pedido de renovação da bolsa para viabilizar o estudo de um artigo relacionado a álgebras de evolução, no qual a questão do sexo dos indivíduos é considerada para estudar a herança ligada ao sexo, como pode ser visto no projeto que está sendo enviado.

Referências

1 DRESNKY, V. *Free algebras and PI-algebras: Graduate Course in Algebra.* 1th edition. ed. Singapure: Springer, 1999.

2 BREšAR, M. *Introduction to Noncommutative Algebras*. 1th edition. ed. Switzerland: Springer, 2014.

3 WöRZ-BUSEKROS, A. *Lecture Notes in Biomathematics*. 1th edition. ed. Auf der Morgenstelle 28, Federal Republic of Germany: Springer-Verlag, 1946.

4 REED, M. L. Algebraic structure of genetic inheritance. *Bulletin of the American Mathematical Society, Volume 34, Numver 2, Pages 107-130*, 1997.

5 TIAN, J. P. *Evolution Algebras and their Applications*. 1th edition. ed. Mathematical Biosciences Institute, The Ohio State University, 231 West 18th Avenue Columbus, OH 43210-1292, USA: Springer-Verlag, 2008.