Лекция 2

5030102/20901

Ишмуратова Юлия

Код — это набор кодовых слов

Эффект. код:

- длинные (n) → большое min расстояние
- сложность кодера/декодера

Линейные коды ⇒ G

$m \cdot G = C$

порождающая матрица (n, k) кода — матрица размера $k \times n$

строки — базисные векторы пространства

Кодовые слова — лин. комбинации базисных векторов

$m = (\underbrace{m_1 \ldots m_k}_{k})$ $\vec{c} = \vec{m} \cdot G$

$\underbrace{c_1 \ldots c_n}_{n}$

Made with Goodnotes

$\vec{h} = (h_1, \dots, h_n)$

$$\begin{cases} c \in C \quad (\vec{c}, \vec{h}) = 0 \\ c_1 \cdot h_1 + c_2 \cdot h_2 \dots + c_n \cdot h_n = 0 \end{cases}$$

→ проверка

$G \cdot h^T = 0 \qquad k \times h \cdot (1 \times h)^T =$

$k \times n \cdot n \times 1 = k \times 1$

$G: k \times n$ — k - лин - независимых строк

Ранг $= k$

G: k - лин. независ. столбцов образуют инфор-совокупность

остальные — проверочную совокупность

$$G \cdot h^T = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1k} & \dots & g_{1,n} \\ g_{21} & \dots & g_{2k} & & g_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g_{k,1} & \dots & g_{kk} & \dots & g_{kn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ h_{k+1} \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$h_{k+1} \dots h_n$ – запрекс.

$x_1 \dots x_k$

$$\vec{g}_i = \begin{pmatrix} g_{1i} \\ g_{2i} \\ \vdots \\ g_{ki} \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}_1 \cdot x + \bar{g}_2 \cdot x + \dots \bar{g}_k \cdot x_k + \bar{g}_{k+1} \cdot h_{k+1}$$

$$= \varnothing$$

$$\vec{g}_1 \cdot x + \bar{g}_2 \cdot x + \dots \bar{g}_k \cdot x_k =$$

$$-\left(\bar{g}_{k+1} \cdot h_{k+1} + \dots \bar{g}_n \cdot h_n\right)$$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1k} \\ g_{12} & g_{22} & \dots & g_{2k} \\ \vdots & & & \\ g_{k1} & g_{k2} & \dots & g_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$= \det \neq 0$

$$= -\left(\bar{g}_{k+1} \cdot h_{k+1} + \dots \bar{g}_n \cdot h_n\right)$$

$H = (n-k) \times n$

$r = n - k$ — избыточность кода

$G \cdot H^T = \emptyset$

$G_{k \times n} = [\, I_{k \times k} \quad P \,] = [\, \begin{smallmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix} \; P \,]$

систематич. вид

$$c = m \cdot G = (\underbrace{m}_{k} \quad \underbrace{m \cdot P}_{r})$$

n

$$H = (P^T \; I_r)$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d_{min} = \min_{m \neq 0} \omega(m \cdot G) \qquad \cdot a - 1$$

(n, k) $\qquad 2^k - 1 \qquad R = \frac{k}{n} > \frac{1}{2}$

$n - k < k$

$c \cdot H^T = \varnothing \qquad \omega(c) = 3$

столбцы H – лин завис.

Мин. расстояние лин. (n, k) кода $= d$ тогда,

когда $\forall$ $d - 1$ столбец

провероч. матрица мин независимых и среди всех набор из d мин зависимых столбцов.

Мин. расстояние мин (n,k) кода удовл неравенству $d \le n-k+1$

Дуальный код к данному коду – это который с матрицей которые был проверочной матрицей этого кода

примеры

$(n, n-1)$ – код $H = (1 .. 1)$

$$G \begin{pmatrix} I & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 1 \\ & 1 & & 1 \\ 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

Код с проверкой на чётность может обнаружить ошибки нечётного веса

Код исправляет любые ошибки кел

$\omega(e) = 1$

$m, \quad c = m \cdot G, \quad c + e$

$(c+e) \cdot H^T = \underbrace{c \cdot H^T}_{0} + e \cdot H^T = \vec{h_j}$

$e = [0 \ldots 0 \ldots 1 \ldots 0]$

$e \cdot \left[\begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} \right] = h_j$

h_j

$n - k = 3$ на 4 позиции ошибке

$n = 2^r - 1$

$k = n - r$

коды Хэмминга

Двоич. кода Хемминга оптимальна (не среди кодов дате мин. с больш числом кодовых слов $d=3$ при той же длине

$G = H_{хем}$

Симплексный код

дуальный код Хемминга

Код Хем $\Rightarrow$

$\downarrow$

расшир. код

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$(8,4)$ – расшир. код. Хем

2^{k-1} $\quad$ $2^{k-1}-2$