Solución analítica y numérica del péndulo

simple y doble

Laura Herrera[1], Julian Avila[2], Bryan Martinez[3], and Juan Acuña[4]

[1]20212107011, [2]20212107030, [3]20212107008, [4]20212107034

05 de Marzo, 2024

1. Marco teorico

1.1. Pendulo simple

Un péndulo simple es un sistema físico idealizado que consiste en una masa puntual con movimiento periódico suspendida de un punto fijo mediante un hilo o varilla inextensible y sin masa, que oscila libremente bajo la influencia de la gravedad.

1.2. Lineal

Las consideraciones a tener en cuenta respecto al planteamiento de un péndulo simple lineal es la no existencia de ningún tipo de fricción y despreciar la masa de la cuerda. Para encontrar la ecuación de movimiento se puede tomar la energía del sistema u (su energía potencial) y k (energía cinética) que cumplen con:

$$\begin{aligned} u &= mgh \\ k &= \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Utilizando la definición del coseno se halla el valor para h

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{L-h}{L} \\ L\cos\theta &= L-h \\ h &= L(1-\cos\theta) \end{aligned} \tag{2}$$

ahora utilizando el arco del movimiento se halla la velocidad

$$\begin{aligned} s &= L\theta \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{d(L\theta)}{dt} \\ v &= L\frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \tag{3}$$

de este modo las expresiones para u y k respectivamente son

$$\begin{aligned} u &= mg(1-\cos\theta) \\ k &= \frac{1}{2}mL^2(\frac{d\theta}{dt})^2 \end{aligned} \tag{4}$$

derivando con respecto al tiempo la expresión $u+k$ y teniendo en cuenta la conservación de la energía se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \\ \ddot{\theta} + \omega_n^2 \sin\theta = 0\end{aligned} \tag{5}$$

esta es la ecuación de movimiento para un péndulo resultando en una ecuación diferencial no lineal, para linealizarla se toma la consideración que $\sin\theta = \theta$ la cual es una aproximación que funciona bien para ángulos pequeños.

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0$$

esta es una ecuación diferencial lineal del segundo orden con coeficientes constantes, para solucionarla se considera una solución de la forma

$$\begin{aligned}\theta = e^{rt} \\ \dot{\theta} = re^{rt}\ddot{\theta} = r^2 e^{rt}\end{aligned} \tag{6}$$

para hallar r se encuentra la ecuación característica

$$\begin{aligned}r^2 + \omega_n^2 = 0 \\ r = \pm i\omega_n\end{aligned}$$

De forma que la solución de esta sera una combinación lineal de todas las soluciones

$$\theta(t) = C1\cos\omega_n t + C2\sin\omega_n t \tag{7}$$

En donde las constantes $C1$ y $C2$ se pueden hallar mediante las condiciones de frontera

$$\begin{aligned}\theta(0) = \theta_0 \\ \omega(0) = \omega_0\end{aligned} \tag{8}$$

Teniendo en cuenta que para hallar ω se deriva la solución obtenida se tiene que :

$$\omega = -C1\omega\sin\omega_n t + C2\omega\cos\omega_n t \tag{9}$$

Aplicando las condiciones de frontera

$$\begin{aligned}C1 = \theta_0 \\ C2 = \frac{\omega_0}{\omega_n}\end{aligned} \tag{10}$$

Finalizando se remplazan las constantes $C1$ y $C2$

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos\omega_n t + \frac{\omega_0}{\omega_n}\sin\omega_n t} \tag{11}$$

1.3. No lineal

Partiendo de la ecuación diferencial que describe el movimiento del péndulo simple:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} + \omega_n^2 \sin\theta = 0 \\ \ddot{\theta} = -\omega_n^2 \sin\theta\end{aligned} \tag{12}$$

- $\dot{\theta} = \omega$
- $\dot{\omega} = -\omega_n^2 \sin\theta$

Multiplicando la ecuación diferencial por $\dot{\theta}$

$$\begin{aligned}
&\ddot{\theta}\dot{\theta} + \omega_n^2 \sin\theta\dot{\theta} = 0 \\
&\partial_t \left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega_n^2 \cos\theta\right) = 0 \\
&\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega_n^2 \cos\theta = \lambda \\
&\dot{\theta}^2 - 2\omega_n^2 \cos\theta = \lambda
\end{aligned} \tag{13}$$

Tomando que las condiciones iniciales del péndulo son: $\theta(0) = \theta_0$ y $\dot{\theta(0)} = 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -2\omega_n^2 \cos\theta = \lambda \\
&\dot{\theta}^2 - 2\omega_n^2 (\cos\theta - \cos\theta_0) = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

Usando la identidad del coseno: $\frac{1}{2}\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
&\dot{\theta}^2 - 2\omega_n^2 \left[-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right] = 0 \\
&\dot{\theta}^2 - 4\omega_n^2 \left[\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

Dejando que: $r = 4\omega_n^2$ y $k^2 = \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
&\dot{\theta}^2 - r\left[k^2 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = 0 \\
&\dot{\theta} = \sqrt{r}\left[k^2 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{1/2} \\
&\sqrt{r} = \left[k^2 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{-1/2}\dot{\theta} \\
&\frac{1}{2}\omega_n T = \int_0^{\theta_0}\left[k^2 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{-1/2} d\theta
\end{aligned} \tag{16}$$

Dejando que: $\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\varphi \Rightarrow \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = k\cos\varphi d\varphi$

$$\begin{aligned}
&\cos\frac{\theta}{2}d\theta = 2k\cos\varphi d\varphi \\
&\left[1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{1/2} d\theta = 2k\cos\varphi d\varphi \\
&\left(1 - k^2\sin^2\varphi\right)^{1/2} d\theta = 2k\cos\varphi d\varphi \\
&d\theta = 2k\cos\varphi\left(1 - k^2\sin^2\varphi\right)^{-1/2} d\varphi \\
&\frac{1}{2}\omega_n T = \int_0^{\tau/4} \frac{2k\cos\varphi}{\left(k^2 - k^2\sin^2\varphi\right)^{1/2}}\left(1 - k^2\sin^2\varphi\right)^{-1/2} d\varphi \\
&T = \frac{4}{\omega_n}\int_0^{\tau/4}\left(1 - k^2\sin^2\varphi\right)^{-1/2} d\varphi
\end{aligned} \tag{17}$$

Esta es una integral elíptica del primer tipo:

$$K(k) = \int_0^{\tau/4} \frac{d\theta}{(1 - k^2\sin^2\theta)^{1/2}} = \int_0^1 \frac{dt}{[(1-t^2)(1-k^2t^2)]^{1/2}} \tag{18}$$

- $\sin\theta = t$

- $\cos\theta d\theta = dt$
- $d\theta = (1-\sin^2\theta)^{1/2}dt$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}^2 &= 4\omega_n^2\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\\ \dot{\theta}^2 &= 4\omega_n^2\left(k^2 - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned} \tag{19}$$

Tomando que: $\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\varphi \Rightarrow k\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$

$$\begin{aligned}&d\theta = 2k\cos\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}d\varphi\\ &dt = \frac{1}{\omega_n}dz\\ &\dot{\theta}^2 = 4\omega_n^2 k^2\cos^2\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)^{-1}\partial_z\varphi^2\\ &\cos^2\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)^{-1}\partial_z\varphi^2 = 1-\sin^2\frac{\theta}{2}\\ &\partial_z\varphi^2 = (1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}\\ &dz = -(1-k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}d\varphi\end{aligned} \tag{20}$$

Tomando que $y = \sin\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta_0}{2})^{-1}$

$$\begin{aligned}&z = -\int_{\tau/4}^{y}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}d\varphi\\ &z = \int_0^{\tau/4}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}d\varphi - \int_0^{y}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}d\varphi\\ &\omega_n t = K(k) - F(y,k)\\ &F(y,k) = K(k) - \omega_n t\\ &\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}sn[K(k)-\omega_n t, k]\\ &\theta(t) = 2\arcsin\left(\sin\frac{\theta_0}{2}sn\left[K\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right) - \omega_n t, \sin^2\frac{\theta_0}{2}\right]\right)\\ &\frac{1}{2}\dot{\theta}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\omega_n\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)cn[K(k)-\omega_n t,k]dn[K(k)-\omega_n t,k]\\ &\dot{\theta}(t) = -2\omega_n\sec\left(\frac{\theta}{2}\right)cn[K(k)-\omega_n t,k]dn[K(k)-\omega_n t,k]\end{aligned} \tag{21}$$

Una función se puede escribir como una serie de potencias de la siguiente manera:

$$f^n(x) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}(1-x)^{-(2n-1)/2} \tag{22}$$

Usando la ecuación 22, se reescribe la ecuación 18

$$\begin{aligned}K(k) &= \int_0^{\tau/4}\sum_{n=0}^{\infty}(2n-1)!!(2^n n!)^{-1}k^{2n}\sin^{2n}\varphi d\varphi\\ K(k) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}k^{2n}\int_0^{\tau/4}\sin^{2n}\varphi d\varphi\end{aligned} \tag{23}$$

Tomando que:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$B(x,y) = 2\int_0^{\tau/4} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta d\theta$$

- $2x-1 = 2n \wedge 0 = 2y-1$
- $x = (2n+1)2^{-1} \wedge y = 2^{-1}$
- $\Gamma(n+1) = n!$
- $\Gamma(1/2) = 2^{-1/2}\tau^{1/2}$
- $\Gamma(n+\left(\frac{1}{2}\right)) = (2n-1)!!2^{-n-(1/2)}\tau^{1/2}$

$$K(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} k^{2n} \frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)\Gamma(2^{-1})}{\Gamma(n+1)} \tag{24}$$

- $\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(n+1)} = \frac{(2n-1)!!}{n!}\frac{\tau}{2^n}$

$$K(k) = \frac{\tau}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 k^{2n} \tag{25}$$

- $(2n-1)!! = \frac{(2n)!!}{2^n n!}$

$$\boxed{K(k) = \frac{\tau}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2 k^{2n}} \tag{26}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial es la siguiente:

$$\boxed{T = \frac{\tau}{\omega_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2 k^{2n}} \tag{27}$$

1.4. Péndulo doble

Para el modelo teórico se consideró un péndulo físico doble, en donde las masas m_1 y m_2 se ubicaron en el centro geométrico de cada barrilla que conforma el péndulo doble.

$$\begin{aligned} \mathbf{r_1} &= \frac{l_1}{2}\left(\sin\theta_1, -\cos\theta_1\right) \\ \mathbf{r_2} &= 2\mathbf{r_1} + \frac{l_2}{2}\left(\sin\theta_2, -\cos\theta_2\right) \end{aligned} \tag{28}$$

Por lo que teniendo las posiciones se puede encontrar las velocidades de cada masa:

$$\begin{aligned} \mathbf{v_1} &= \dot{\mathbf{r_1}} = \frac{l_1}{2}\dot{\theta}_1\left(\cos\theta_1, \sin\theta_1\right) \\ \mathbf{v_2} &= \dot{\mathbf{r_2}} = 2\mathbf{v_1} + \frac{l_2}{2}\dot{\theta}_2\left(\cos\theta_2, -\sin\theta_2\right) \end{aligned} \tag{29}$$

Teniendo ya las velocidades y posiciones, se puede hacer un tratado energético del sistema para encontrar las ecuaciones que rigen el sistema, por lo que inicialmente para plantear el lagrangiano se encuentra la energía cinética y la potencial.

Para la energía cinética se tienen la lineal y la rotacional:

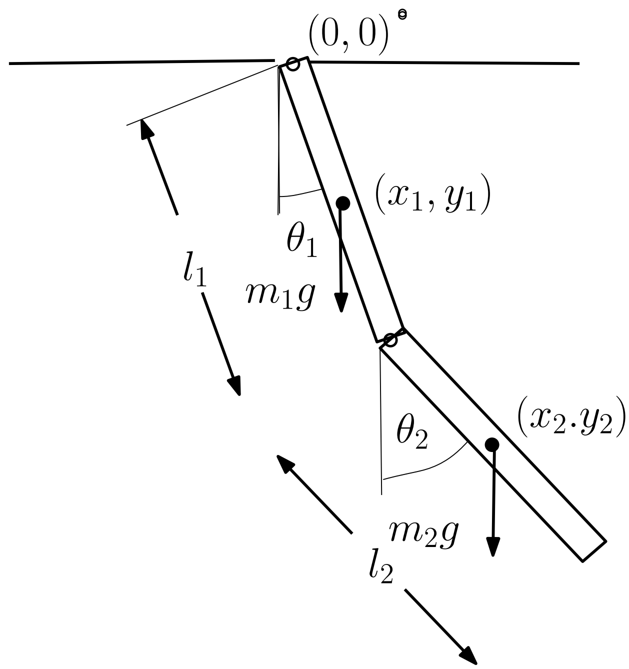

Figura 1: Péndulo doble

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}I_1 \dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}I_2 \dot{\theta_2}^2 \tag{30}$$

Calculando v_1^2, v_2^2, I_1 e I_2, lo que corresponde a la velocidad y el momento inercial de cada centro de masa:

$$v_1^2 = \frac{l_1^2}{4}\dot{\theta_1}^2 \tag{31}$$

$$v_2^2 = l_1^2 \dot{\theta_1}^2 + l_1 \dot{\theta}_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{l_2^2}{4}\dot{\theta}_2 \tag{32}$$

$$I_1 = \frac{l_1^2 m_1}{12} \tag{33}$$

$$I_2 = \frac{l_2^2 m_2}{12} \tag{34}$$

Por lo que reemplazando en eq. (30) se encuentra que la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{6}m_1 l_1^2 \dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{l_2^2}{4}\dot{\theta}_2^2 + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\right) \tag{35}$$

Respecto a la energía potencia se plantea la gravitacional en el eje y, se tiene que:

$$\begin{aligned} V &= -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 \\ V &= -m_1 g \frac{l_1}{2}\cos\theta_1 - m_2 g\left(l_1 \cos\theta_1 + \frac{l_2}{2}\cos\theta_2\right) \\ V &= -\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g l_1 \cos\theta_1 - \frac{m_2}{2} g l_2 \cos\theta_2 \end{aligned} \tag{36}$$

Por lo que reemplazando eq. (35) y eq. (36) en el lagrangiano del sistema se obtiene que:

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{6}m_1 l_1^2 \dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{l_2^2}{4}\dot{\theta}_2^2 + l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right) \\ &+ \left(\frac{m_1}{2}+m_2\right) g l_1 \cos\theta_1 + \frac{m_2}{2} g l_2 \cos\theta_2 \end{aligned} \tag{37}$$

Para encontrar las ecuaciones del sistema mediante el lagrangiano se reemplaza en la ecuación de Euler-Lagrange, para cada barra del péndulo:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{38}$$

Por lo que para θ_1 se tiene que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta_1}} = \frac{1}{3}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) \tag{39}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta_1}} = \left(\frac{m_1}{3}+m_2\right)\ddot{\theta}_1 l_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\left(\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) - \dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\right) \tag{40}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_1} = -\frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - \left(\frac{m_1}{2}+m_2\right) g l_1\sin\theta_1 \tag{41}$$

Reemplazando las derivadas correspondientes a la ecuación eq. (38) para θ_1 y realizando simplificaciones algebraicas se obtiene que:

$$\boxed{\left(\frac{m_1}{3}+m_2\right) l_1^2\ddot{\theta_1} + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\left(\ddot{\theta_2}\cos(\theta_1-\theta_2) + \dot{\theta_2}^2\sin(\theta_1-\theta_2)\right) + \left(\frac{m_1}{2}+m_2\right) g l_1\sin\theta_1 = 0} \tag{42}$$

Se procede a hacer los mismos cálculos pero para θ_2:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta_2}} = \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) \tag{43}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta_1}} = \frac{m_2}{3}\ddot{\theta}_2 l_2^2 + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\left(\ddot{\theta_1}\cos(\theta_1-\theta_2) - \dot{\theta}_1\sin(\theta_1-\theta_2)\left(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2\right)\right) \tag{44}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_2} = \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1\sin(\theta_1-\theta_2) - \frac{1}{2}m_2 g l_2\sin\theta_2 \tag{45}$$

Reemplazando en la eq. (38) para θ_2 se llega a que:

$$\boxed{\frac{m_2}{3}l_2^2\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\left(\ddot{\theta_1}\cos(\theta_1-\theta_2) - \dot{\theta_1}^2\sin(\theta_1-\theta_2)\right) + \frac{m_2}{2} g l_2\sin\theta_2 = 0} \tag{46}$$

Usando las ecuaciones 42 y 46, se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (\frac{m_1}{3}+m_2)l_1^2\ddot{\theta_1} + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2(\ddot{\theta_2}\cos(\theta_1-\theta_2) + \dot{\theta_2}^2\sin(\theta_1-\theta_2)) + (\frac{m_1}{2}+m_2)g l_1\sin\theta_1 = 0 \\ \frac{m_2}{3}l_2^2\ddot{\theta_2} + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2(\ddot{\theta_1}\cos(\theta_1-\theta_2) - \dot{\theta_1}^2\sin(\theta_1-\theta_2)) + \frac{m_2}{2}g l_2\sin\theta_2 = 0 \end{cases} \tag{47}$$

Donde al dividir ambas ecuaciones por $m_2 l_1 l_2$, se simplifican las ecuaciones:

$$\begin{cases} 2(\frac{m_1}{3m_2}+1)\frac{l_1}{l_2}\ddot{\theta_1} + \ddot{\theta_2}\cos(\theta_1-\theta_2) + \dot{\theta_2}^2\sin(\theta_1-\theta_2) + (\frac{m_1}{m_2}+2)g\frac{1}{l_2}\sin\theta_1 = 0 \\ \frac{2}{3}\frac{l_2}{l_1}\ddot{\theta_2} + \ddot{\theta_1}\cos(\theta_1-\theta_2) - \dot{\theta_1}^2\sin(\theta_1-\theta_2) + \frac{1}{l_1}g\sin\theta_2 = 0 \end{cases} \tag{48}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para $\ddot{\theta_1}$ y $\ddot{\theta_2}$, se obtiene las siguientes relaciones, teniendo en cuenta que $\omega = \dot{\theta}$, $\Delta\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$:

$$\dot{\omega_1} = \frac{18m_2\cos{(\Delta\theta_{12})}[g\sin\theta_2 - l_1\dot{\theta_1}^2\sin{(\Delta\theta_{12})}] - 12[m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin{(\Delta\theta_{12})} + (m_1+2m_2)g\sin\theta_1]}{l_1(15m_2+8m_1-9m_2\cos{(2\Delta\theta_{12})})} \tag{49}$$

$$\dot{\omega_2} = \frac{18\cos{(\Delta\theta_{12})}[m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin{(\Delta\theta_{12})} + (m_1+2m_2)g\sin\theta_1] - 12(m_1+3m_2)[g\sin\theta_2 - l_1\dot{\theta}_1^2\sin{(\Delta\theta_{12})}]}{l_1(15m_2+8m_1-9m_2\cos{(2\Delta\theta_{12})})} \tag{50}$$

2. Métodos numéricos

2.1. Euler

El algoritmo en el que se basa el método de Euler para resolver una ecuación es el siguiente:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \\ y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \end{aligned} \tag{51}$$

Donde x_n y y_n son los puntos iniciales o anteriores, x_{n+1} y y_{n+1} son los puntos en el siguiente paso, h es el tamaño del paso y $f(x_n, y_n)$ es la función evaluada en los puntos iniciales o anteriores.

Y para la solución de un sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + h\mathbf{F}(t_0, \mathbf{u}_0) \tag{52}$$

2.2. Heun

El algoritmo en el que se basa el método de Heun para una ecuación es el siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{x_{n+1}} &= \mathbf{x_n} + \mathbf{h} \\ y_{n+1} &= y_n + h\left[\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, U_{n+1})}{2}\right] \end{aligned} \tag{53}$$

Siendo: $U_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$.

Y para la solución de un sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{u}_0 + h\mathbf{F}(t_0, \mathbf{u}_0) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + \left[\frac{\mathbf{F}(t_0, \mathbf{u}_0) + \mathbf{F}(t_0 + h, \mathbf{w})}{2}\right] \end{aligned} \tag{54}$$

2.3. Runge-Kutta orden 4

El algoritmo en el que se basa el método de Runge Kutta para una ecuación es el siguiente:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{55}$$

Siendo:

- $k_1 = hf(x_n, y_n)$
- $k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$
- $k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$
- $k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$

Y para la solución de un sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \tag{56}$$

Siendo:

- $k_1 = h\mathbf{F}(t_0, \mathbf{u}_0)$
- $k_2 = h\mathbf{F}\left(t_0 + \frac{h}{2}, \mathbf{u}_0 + \frac{\mathbf{k}_1}{2}\right)$
- $k_3 = h\mathbf{F}\left(t_0 + \frac{h}{2}, \mathbf{u}_0 + \frac{\mathbf{k}_2}{2}\right)$
- $k_4 = h\mathbf{F}(t_0 + h, \mathbf{u}_0 + \mathbf{k}_3)$

Estos métodos se utilizan para las siguientes ecuaciones diferenciales:

- Péndulo simple-lineal: $\dot{\omega} = -\omega_n^2 \theta$
- Péndulo simple-no lineal: $\dot{\omega} = -\omega_n^2 \sin\theta$
- Péndulo doble: Se aplican en las ecuaciones 49 y 50.

3. Implementación del código

El primer paso consiste en importar las bibliotecas necesarias para el código. En particular, se utiliza la biblioteca Boost y las funciones elípticas de Jacobi para resolver las integrales especiales asociadas a la parte no lineal del problema. Además, la biblioteca emplea la media geométrica-aritmética para minimizar la acumulación de errores mediante sumas.

Posteriormente, se definen las constantes físicas pertinentes, como la aceleración debido a la gravedad, la frecuencia natural y la amplitud, entre otras. Es importante señalar que se establece una distinción entre las constantes utilizadas en el caso lineal del péndulo simple y aquellas requeridas para el caso no lineal.

Se continúa con el código para hacer las soluciones analíticas, comenzando con el péndulo simple-lineal, definiendo la ecuación diferencial que se debe solucionar (eq:1.2), de igual manera, se define la solución obtenida analíticamente para el ángulo y se finaliza con la definición del cálculo para la energía.

Siguiendo con la parte del péndulo simple no lineal, se redefine la ecuación diferencial y se emplea un método para resolver la integral elíptica de primer tipo. Con el fin de evitar cálculos extensos, se reutiliza el término anterior en la serie, lo que permite ahorrar tiempo de computación. Además, se determina la función para el período y se obtienen las funciones necesarias para resolver tanto el ángulo como la velocidad del péndulo.

Continuando con el péndulo doble, para este solo se plantea solución mediante métodos, por lo que se utiliza los métodos numéricos explicados anteriormente para un sistema de ecuaciones 2x2, encontrando así la posición angular aproximada para cada centro de masa.

4. Resultados

Referencias

[1] *DLMF: §22.20 Methods of Computation Computation Chapter 22 Jacobian Elliptic Functions.* URL: https://dlmf.nist.gov/22.20#SS2.

[2] *Jacobi Elliptic SN, CN and DN - 1.85.0.* URL: https://www.boost.org/doc/libs/1_85_0/libs/math/doc/html/math_toolkit/jacobi/jacobi_elliptic.html.