

## Los métodos de Numerov y Runge-Kutta-Verner aplicados al movimiento de un sistema mecánico con un grado de libertad

## Numerov and Runge-Kutta-Verner methods applied to the motion of a mechanical system with one degree of freedom

**Gustavo J. Bracho Rodríguez**

Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Departamento de Física, Panamá.

[gustavo.bracho@up.ac.pa](mailto:gustavo.bracho@up.ac.pa)

<https://orcid.org/0009-0003-9804-676X>

**Fecha de recepción:** 21 de agosto de 2024

**Fecha de aceptación:** 23 de octubre de 2024

DOI [HTTPS://DOI.ORG/10.48204/J.TECNO.V27N1.A6636](https://doi.org/10.48204/J.TECNO.V27N1.A6636)

### RESUMEN

El presente artículo muestra el uso tanto del método de Numerov como del método de Runge-Kutta-Verner de quinto orden donde es realizada la comparación de las soluciones numéricas obtenidas con la correspondiente solución exacta para un sistema mecánico masa-resorte-amortiguador con un grado de libertad que experimenta un movimiento armónico amortiguado libre bajo el régimen de subamortiguamiento y sobreamortiguamiento, respectivamente. Las soluciones numéricas son obtenidas mediante la ejecución de códigos fuentes escritos en Python 3. El propósito del artículo es evaluar y contrastar la precisión y eficiencia computacional de ambos métodos en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que describen el comportamiento dinámico de un sistema mecánico. Para lograrlo, se presentan ejemplos específicos en los que se aplican ambos algoritmos a sistemas con condiciones iniciales físicamente admisibles. Los resultados obtenidos muestran que, aunque ambos métodos proporcionan soluciones precisas para el sistema estudiado, el método de Numerov se destaca por su precisión, mientras que el método de Runge-Kutta-Verner, presenta ventajas en términos de mayor flexibilidad y eficiencia en problemas con mayor complejidad numérica. El artículo concluye entre otros aspectos, la importancia de que a pesar de que ambos métodos están fundamentados con enfoques totalmente diferentes, éstos presentan excelentes correspondencias entre los resultados numéricos con las soluciones exactas entre ambos, a pesar de que sus campos de estudio donde actúan son completamente diferentes.

### PALABRAS CLAVES

Método de Numerov, método de Runge-Kutta, sistema sub amortiguado, sistema sobre amortiguado, Python 3.

## ABSTRACT

This article shows the use of both the Numerov method and the fifth-order Runge-Kutta-Verner method where a comparison is made between the obtained numerical solutions and the corresponding exact solution for a one degree of freedom mass-spring-damper mechanical system experiencing free harmonic damped motion under underdamping and overdamping regimes, respectively. The numerical solutions are obtained by executing source codes written in Python 3. The purpose of the article is to evaluate and contrast the accuracy and computational efficiency of both methods in solving ordinary differential equations (ODEs) that describe the dynamic behavior of a mechanical system. To achieve this, specific examples are presented in which both algorithms are applied to systems with physically admissible initial conditions. The results obtained show that, although both methods provide accurate solutions for the system studied, the Numerov method stands out for its accuracy, while the Runge-Kutta-Verner method presents advantages in terms of greater flexibility and efficiency in problems with greater numerical complexity. The article concludes, among other aspects, the importance of the fact that even though both methods are based on completely different approaches, they present excellent correspondences between the numerical results and the exact solutions between both, despite the fact that their fields of study where they act are completely different.

## KEYWORDS

Numerov method, Runge-Kutta-Verner method, underdamped system, overdamped system, Python 3.

## INTRODUCCIÓN

Los sistemas mecánicos con un grado de libertad, particularmente el conformado por masa-resorte-amortiguador, son sistemas caracterizados completamente por estar identificados por una sola coordenada independiente, donde el papel desempeñado por el amortiguador es inducir un efecto de fricción viscosa provocando de esta manera que el sistema mecánico pierda energía al transcurrir el tiempo.

Existen varios métodos numéricos utilizados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarías (EDO), que surgen de manera natural en una amplia diversidad de problemas físicos, algunos de ellos son los métodos de Euler (Chapra, 2023), métodos de Runge-Kutta (Pang, 2006) y métodos de diferencias finitas (Li et al., 2018), y tal vez el método menos conocido por muchos, perteneciente a la familia de los métodos de Runge-Kutta, nos referimos al llamado método de Runge-Kutta-Verner (Verner, 1978).

Hoy día, en la literatura encontramos una diversidad de artículos donde hacen uso del método de Numerov, pero en su mayoría están enfocados en la solución numérica de la ecuación de Schrödinger en una dimensión independiente del tiempo (Balkrishna, 2014; Caruso et al., 2022; Martinz & Ramos, 2018; Yousefian & Shadmani, 2014). El presente trabajo además de implementar el método de Numerov, también hace uso de uno de los métodos pocos

conocidos que pertenece a la familia de los métodos de Runge-Kutta, se trata del método de Runge-Kutta-Verner (Verner, 1978), pero en esta ocasión, aplicado a un sistema distinto, es decir, a un sistema mecánico con un grado de libertad, conformado por una masa y resorte y un amortiguador cuya función, del amortiguador, es actuar como medio resistivo al movimiento libre de la masa.

Las soluciones numéricas realizadas, son obtenidas mediante ejecución de varios códigos fuentes escritos en Python 3, versión 3.11.0, bajo el entorno de trabajo integrado Visual Studio Code, versión 1.9.2 siendo comparadas con las correspondientes soluciones exactas tanto para el régimen subamortiguado como el sobreamortiguado.

El objetivo del presente artículo es ilustrar la importancia del uso de los métodos numéricos en la simulación de la evolución del movimiento de un sistema físico, al utilizar dos métodos numéricos completamente diferentes en un mismo problema, es decir, haciendo uso particular de sistemas mecánicos con un grado de libertad donde intervengan EDO que experimente un movimiento armónico amortiguado libre, considerando condiciones iniciales físicamente admisibles a ser utilizadas para describir cómo su movimiento, esto es el desplazamiento, varía con el tiempo, cuando éste se encuentre tanto en el régimen subamortiguado como sobreamortiguado.

## MATERIALES Y MÉTODOS

### Método de Numerov

El método de Numerov (Hjorth-Jensen, 2013; Landau et al., 2015;), llamado así en honor al astrónomo de origen ruso Boris Numerov, el cual fue concebido inicialmente, en esencia, para resolver EDO de segundo orden, con el objetivo de abordar problemas de naturaleza astronómica, como lo es, el cálculo de las correcciones de la trayectoria del cometa Halley (Caruso et al., 2022). Su objetivo principal era obtener soluciones a problemas de los autovalores asociados a las EDO de segundo orden presentes en la mecánica celeste, con la particularidad de que estas no presenten su primera derivada temporal de una función desconocida  $y(t)$ , de la forma (Vesely, 2013).

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g(t)y + s(t), \quad (1)$$

donde  $s(t)$  es un término no homogéneo y  $g(t)$  es una función real. Para el caso en que  $g(t) > 0$ , las soluciones de la ecuación homogénea, esto es,  $s(t) = 0$ , son oscilatorias (Koonin & Meredith, 2018). Cualquier EDO de movimiento que presenta la forma descrita en la Ec. (1), su solución numérica puede ser obtenida además de los métodos numéricos conocidos, también lo sería por el método de Numerov.

El método de Numerov es considerado un método de multipasos (Vesely, 2013), debido a que es obtenido a partir de puntos discretos en un intervalo de separación  $h$ . Así para el tiempo en el  $n$ -ésimo punto, sería

$$t_n = t_0 + nh, \quad (2)$$

donde  $t_0$ , es el tiempo al inicio del movimiento.

Podemos hacer uso del método de diferencias finitas centradas, que nos permitirá obtener una expresión recurrente necesaria para ser utilizada por los métodos numéricos, especialmente en lo referente al método de Numerov. El método de diferencias finitas, particularmente las centradas, es una técnica numérica ampliamente utilizada, confiable y efectiva, para resolver problemas en física computacional, donde no solamente es válida para resolver numéricamente EDO, sino también para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP), el cual se fundamenta por diferencias finitas presentes en una malla conformada por puntos discretos (Giordano & Nakanishi, 2006). Para el caso de la segunda derivada, el método de diferencias finitas centradas se expresa en la forma

$$\frac{d^2 y(t_n)}{dt^2} = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{(\Delta t)^2}, \quad (3)$$

donde  $y_{n+1} = y(t_{n+1}) = y(t_0 + nh)$ , y haciendo  $\Delta t = h$ .

Para poder implementar el método de Numerov, se hace necesario la obtención de una relación de recurrencia. Esta relación de recurrencia puede ser obtenida, al realizar una expansión en series de Taylor de la función  $y(t_n)$  alrededor del punto  $t_n$ , esto es,

$$y_{n+1} = y_n + h \left. \frac{dy_n}{dt} \right|_{t=t_n} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{d^2 y_n}{dt^2} \right|_{t=t_n} + \frac{h^3}{6} \left. \frac{d^3 y_n}{dt^3} \right|_{t=t_n} + \frac{h^4}{24} \left. \frac{d^4 y_n}{dt^4} \right|_{t=t_n} + \dots \quad (4a)$$

y

$$y_{n-1} = y_n - h \left. \frac{dy_n}{dt} \right|_{t=t_n} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{d^2 y_n}{dt^2} \right|_{t=t_n} - \frac{h^3}{6} \left. \frac{d^3 y_n}{dt^3} \right|_{t=t_n} + \frac{h^4}{24} \left. \frac{d^4 y_n}{dt^4} \right|_{t=t_n} - \dots \quad (4b)$$

Una vez sumando la Ec. (4a) y la Ec.(4b), resulta

$$y_{n+1} + y_{n-1} = 2y_n + h^2 \frac{d^2 y_n}{dt^2} + \frac{h^4}{12} \frac{d^4 y_n}{dt^4}. \quad (4)$$

El tercer término del lado derecho de la Ec. (5), puede ser modificado al hacer uso del método de diferencias finitas centradas descrito en la Ec. (3), y haciendo uso de la Ec. (1), asumiendo que  $s(t) = 0$  y  $g(t) = k$ , donde  $k$  es una constante. Así,

$$\frac{d^4 y_n}{dt^4} = \frac{d^2}{dt^2} (-ky_n) = -\frac{k_{n+1}y_{n+1} - 2k_n y_n + k_{n-1}y_{n-1}}{h^2}. \quad (5)$$

Sustituyendo las Ec. (6) y Ec. (1) en la Ec. (5), obtenemos

$$\begin{aligned} y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} \\ = h^2 (-k_{n+1}y_{n+1}) + \frac{h^2}{12} (-k_{n+1}y_{n+1} + 2k_n y_n - k_{n-1}y_{n-1}). \end{aligned} \quad (6)$$

Al reordenar los términos en la Ec. (7) y resolviendo para  $y_{n+1}$ , obtenemos finalmente que

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{h^2}{12} k_{n+1}} \left[ 2 \left( 1 - \frac{5h^2}{12} k_n \right) y_n - \left( 1 + \frac{h^2}{12} k_{n-1} \right) y_{n-1} \right]. \quad (7)$$

La Ec. (8), representa el método de Numerov de orden superior (Koonin & Meredith, 2018). Resolver la Ec. (8) la cual es una ecuación lineal, ya sea para  $y_{n+1}$  (como es nuestro interés), o  $y_{n-1}$ , proporciona una relación de recurrencia útil para integrar hacia adelante o hacia atrás.

Existe una versión simplificada (Širca & Horvat, 2018), donde deduce el método de Numerov de quinto orden de la siguiente manera

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = \frac{h^2}{12} (f_{n+1} + 10f_n + f_{n-1}), \quad (8)$$

donde, por ejemplo,  $f_{n+1} = k_{n+1}y_{n+1}$ . Esta versión también puede ser utilizada al momento de realizar el proceso de simulación numérica.

### Método de Runge-Kutta-Verner

Este método, es una corrección realizada a los métodos que pertenecen a la familia Runge-Kutta, específicamente de quinto orden, el cual son métodos iterativos e implícitos utilizados para resolver numéricamente EDO lineales de primer orden. La corrección del método realizada por Verner (1978), permitió establecer una mejor optimización del método de Runge-Kutta de quinto orden.

El método de Runge-Kutta-Verner, establece las siguientes relaciones

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad (9a)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{6}, y_n + \frac{h}{6}k_1\right), \quad (10b)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{4h}{15}, y_n + \frac{4h}{75}k_1 + \frac{16h}{75}k_2\right), \quad (10c)$$

$$k_4 = f\left(t_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{5h}{6}k_1 - \frac{8h}{3}k_2 + \frac{5h}{2}k_3\right), \quad (10d)$$

$$k_5 = f\left(t_n + \frac{5h}{6}, y_n - \frac{8h}{5}k_1 + \frac{144h}{25}k_2 - 4hk_3 + \frac{16h}{25}k_4\right), \quad (10e)$$

$$k_6 = f\left(t_n + h, y_n + \frac{361h}{320}k_1 - \frac{18h}{5}k_2 + \frac{407h}{128}k_3 - \frac{11h}{80}k_4 + \frac{55h}{128}k_5\right), \quad (10f)$$

$$k_7 = f\left(t_n + h, y_n + \frac{11h}{640}k_1 + \frac{11h}{256}k_2 - \frac{11h}{160}k_3 + \frac{11h}{256}k_4 - \frac{11h}{640}k_5\right), \quad (10g)$$

y

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{31}{384}k_1 + \frac{1125}{2816}k_3 + \frac{9}{32}k_4 + \frac{125}{768}k_5 + \frac{5}{66}k_6\right), \quad (10)$$

donde  $h = (t_{n+1} - t_n)/n$ , siendo  $n$  el número de puntos.

Es prudente resaltar que todos los métodos numéricos que pertenecen no solo a la familia de los métodos de Euler, sino también los pertenecientes a la familia Runge-Kutta, están concebidos para resolver EDO lineales de primer orden. Sin embargo, para el caso de sistemas mecánicos, particularmente los conformados por masa-resorte-amortiguador, sus ecuaciones de movimiento son de segundo orden, por tanto, no pueden ser utilizados

directamente. Esto nos dice que para obtener la solución numérica de la Ec. (1) con  $s(t) = 0$ , y  $g(t) = k$ , debe ser reemplazada por un sistema de EDO lineales de primer orden de la forma

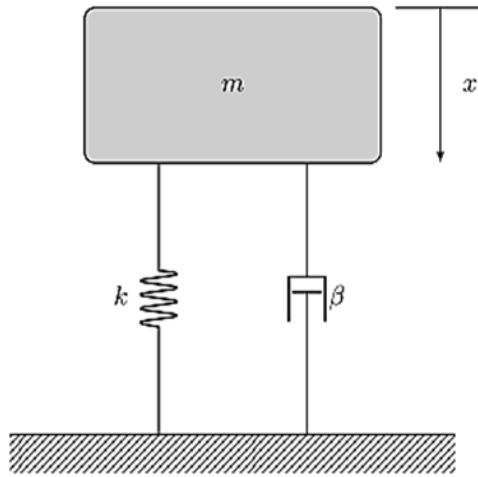
$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = -ky \\ z = \frac{dy}{dt} \end{cases} \quad (11)$$

### Sistema mecánico masa-resorte-amortiguador

En el estudio de los sistemas mecánicos con un grado de libertad como el ilustrado en la Figura 1, donde las fuerzas amortiguadoras que actúan sobre el cuerpo se consideran proporcionales a la velocidad, y no existen fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo.

#### Figura 1

*Sistema mecánico masa-resorte-amortiguador (Rao, 2018).*



La ecuación de movimiento es obtenida a partir de la segunda ley de Newton (Zill, 2024),

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt}, \quad (12)$$

siendo  $m$  la masa del objeto,  $k$  la constante del resorte y  $\beta$  la constante de amortiguamiento, respectivamente, todas en unidades del SI. El signo negativo para la fuerza de amortiguamiento es consecuencia que ésta actúa en dirección opuesta al movimiento del

objeto de masa  $m$ . Por tanto, la ecuación de movimiento para un sistema con amortiguamiento libre (Zill, 2024) sería

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (13)$$

donde  $2\gamma = \frac{\beta}{m}$  y  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , siendo  $\gamma$  y  $\omega_0$ , el coeficiente de amortiguamiento reducido y la frecuencia natural, respectivamente.

Estamos interesados, por un lado, en describir el movimiento subamortiguado del cuerpo, esto es, para el caso en que el coeficiente de amortiguamiento  $\beta$  es pequeño en comparación con la frecuencia natural  $\omega_0$ , es decir, cuando  $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$ ; y por otro lado describir el movimiento sobreamortiguado cuando el coeficiente de amortiguamiento es mayor que la frecuencia natural, esto es,  $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$ . (Zill, 2024).

Para el caso del movimiento subamortiguado, la solución general que satisface la Ec. (14) sería

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left( C_1 \cos \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + C_2 \sin \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t \right). \quad (14)$$

En tanto que para el caso del movimiento sobreamortiguado, la solución general estaría dada por

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left( C_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right), \quad (15)$$

donde los valores de las constantes  $C_1$  y  $C_2$ , en ambos casos, son obtenidas a partir de las condiciones iniciales del sistema bajo estudio. Si consideramos que nuestro sistema mecánico presenta como condiciones iniciales<sup>1</sup>  $x_0$  y  $\dot{x}(0) = 0$ . Al hacer uso de estas condiciones iniciales en las Ec. (15) y Ec. (16), respectivamente, encontramos la solución particular del desplazamiento para cada uno de los casos, esto es,

$$x(t) = \frac{x_0 e^{-\gamma t}}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \left( \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \gamma \sin \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t \right), \quad (16)$$

para el movimiento subamortiguado, y



$$x(t) = \frac{x_0 e^{-\gamma t}}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \left( \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right) \quad (17)$$

para el movimiento sobreamortiguado.

Para la implementación del método de Numerov considerando tanto el caso del movimiento subamortiguado como el sobreamortiguado, se hace necesario realizar una transformación de variables conveniente en la Ec. (14) con el objetivo de hacer *desaparecer* el término que identifica la primera derivada temporal de la posición. La transformación utilizada para tal caso sería

$$x(t) = e^{-\gamma t} y(t). \quad (18)$$

Una vez haciendo uso de la Ec. (19) en la Ec. (14), obtenemos

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (\omega_0^2 - \gamma^2) y = 0. \quad (19)$$

Si decimos que  $k = \omega_0^2 - \gamma^2$ , resulta que

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -ky, \quad (20)$$

la cual es idéntica a la Ec. (1) con  $s(t) = 0$  y  $g(t) = k$ .

Por otro lado, para implementación del método de Runge-Kutta-Verner de manera correcta, descritas en las Ecs. (10a-f) y la Ec. (11), se hace necesario reescribir la Ec. (14) en un sistema de EDO lineales de primer orden de la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dy}{dt} = -2\gamma v - \omega_0^2 x. \end{cases} \quad (21)$$

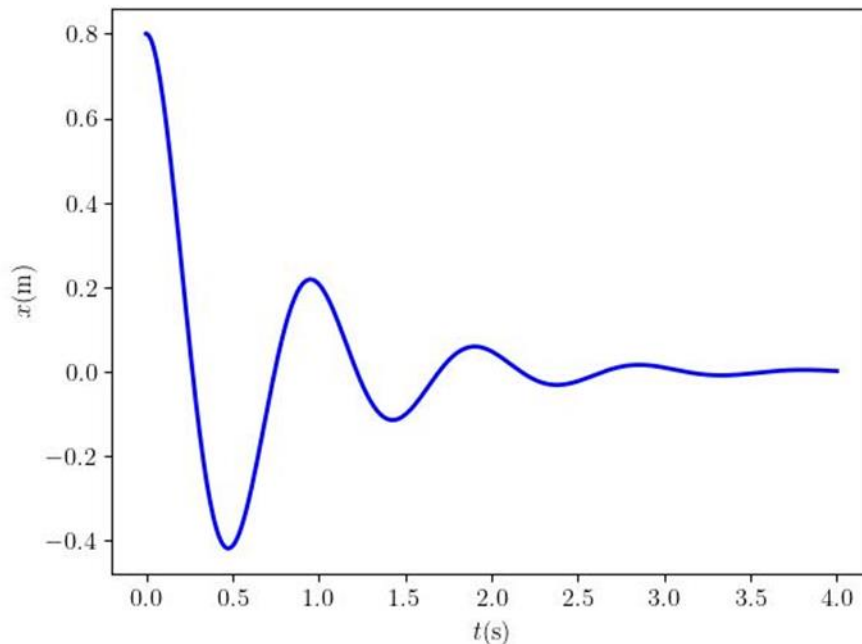
Esto nos permitirá utilizar el método de manera correcta.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la Figura 2 puede apreciarse el comportamiento del desplazamiento del sistema mecánico bajo la acción de un movimiento subamortiguado para el caso en los parámetros físicos considerados sean  $m = 0,550 \text{ kg}$ ,  $k = 25,0 \text{ N/m}$ ,  $\beta = 1,50 \text{ kg/s}$  y  $x_0 = 0,800 \text{ m}$ , respectivamente. En tanto que la Figura 3, describe el comportamiento del sistema mecánico para el caso en que  $\beta = 6,00 \text{ kg/s}$ , ambos comportamientos obtenidos al hacer uso de la solución exacta dada por la Ec. (17).

**Figura 2**

*Comportamiento del desplazamiento para el movimiento subamortiguado suave dado por la Ec. (17), cuando  $m = 0,550 \text{ kg}$ ,  $k = 25,0 \text{ N/m}$ ,  $\beta = 1,50 \text{ kg/s}$  y  $x_0 = 0,800 \text{ m}$ ,*

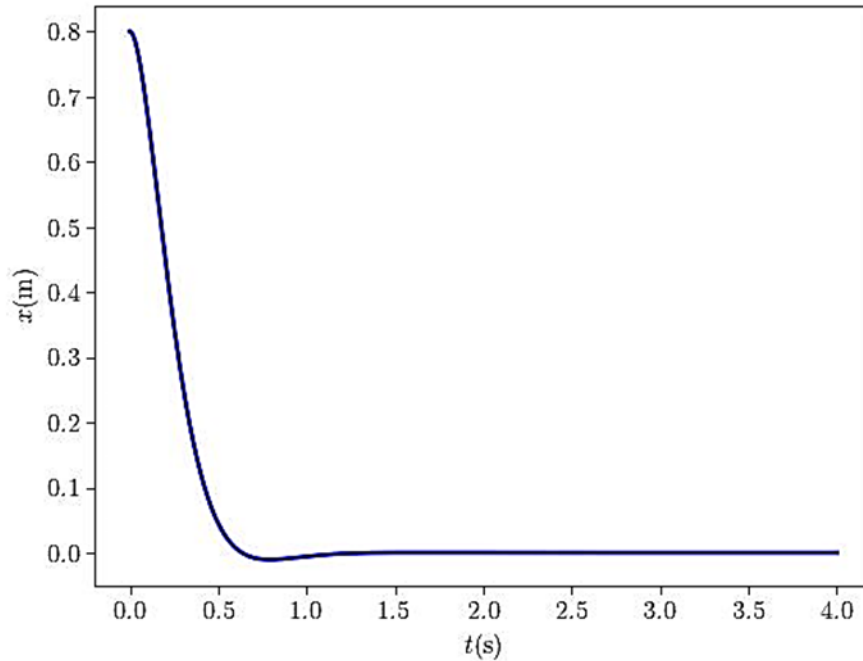


El comportamiento ilustrado en la Figura 2, describe una oscilación amortiguada, donde la acción de la fricción en el sistema debido al amortiguamiento reduce la frecuencia, y la amplitud, parece decrecer de manera exponencial con el tiempo, caracterizándose el sistema por presentar una fricción baja, en otras palabras, experimenta un subamortiguamiento *suave*. Los dispositivos mecánicos que supuestamente deben vibrar con este tipo de comportamiento, podrían ser los osciladores de cristal y los diapasones (Nagle y otros, 2018). Sin embargo, en la Figura 3, la acción de la fricción es tan dominante que evita por completo la oscilación en el sistema, considerando el efecto de la fricción como una pérdida mecánica

no deseada. Uno de los sistemas mecánicos que presentan este comportamiento, son los sistemas de suspensión de los vehículos a motor, debido a que aprovechan la fricción para suprimir las oscilaciones.

### Figura 3

*Comportamiento del desplazamiento para el movimiento subamortiguado fuerte dado por la Ec. (17), cuando  $m = 0,550 \text{ kg}$ ,  $k = 25,0 \text{ N/m}$ ,  $\beta = 6,00 \text{ kg/s}$  y  $x_0 = 0,800 \text{ m}$ .*

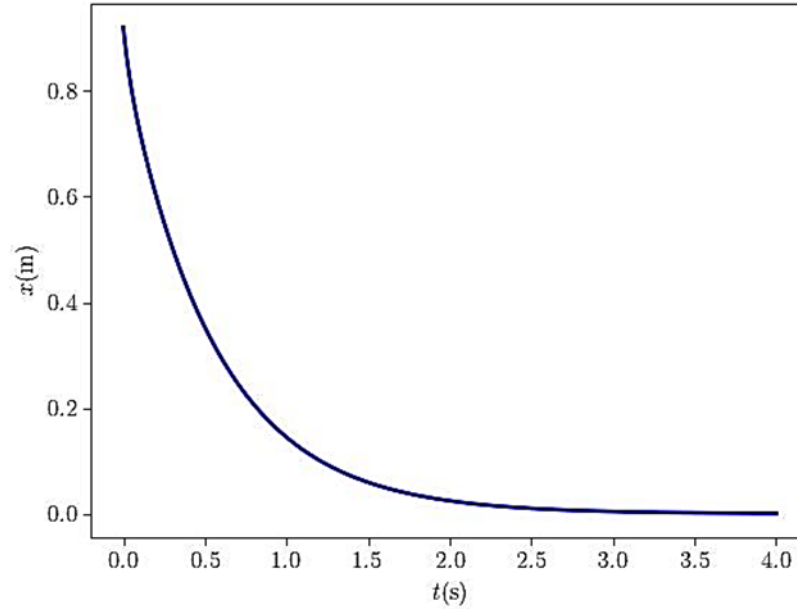


Para la situación en que el sistema mecánico masa-resorte-amortiguador descrito en la Figura 1, experimenta un movimiento sobreamortiguado, esto es, cuando  $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$ , el desplazamiento dado por la Ec. (18) es ilustrado en la Figura 4. Este comportamiento es debido a la acción realizada por la fuerza amortiguadora es tan grande que impide cualquier tipo de oscilación del objeto, haciendo que el mismo retorne rápidamente a su posición de equilibrio sin experimentar oscilación alguna.

Al hacer uso tanto del método de Numerov como del método de Runge-Kutta-Verner, para el caso en que el sistema mecánico experimente un movimiento subamortiguado *suave* (fricción baja), el resultado de la simulación numérica comparada con la solución exacta descrita en la Ec. (17) para los parámetros  $m = 0,550 \text{ kg}$ ,  $k = 25,0 \text{ N/m}$ ,  $\beta = 1,50 \text{ kg/s}$  y  $x_0 = 0,800 \text{ m}$  es ilustrada en la Figura 5.

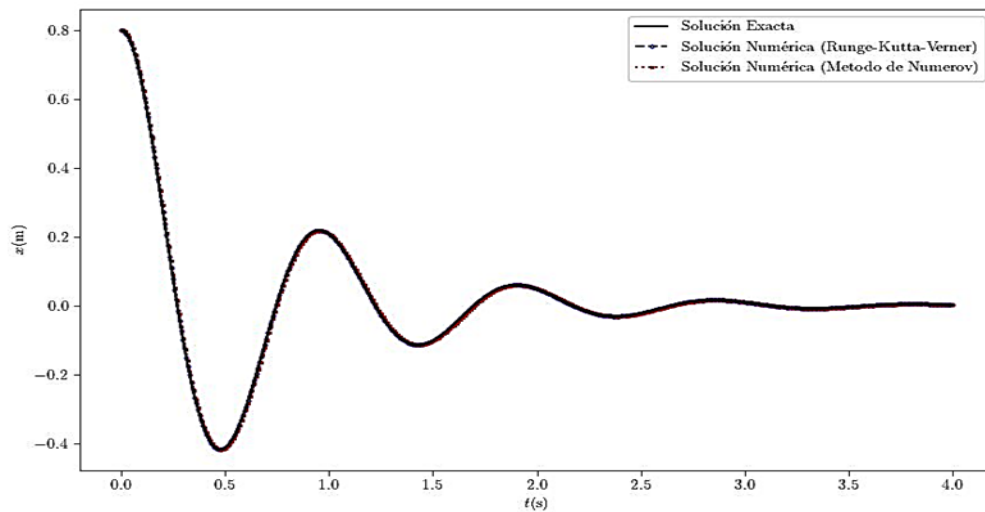
**Figura 4**

Comportamiento del desplazamiento para el movimiento sobreamortiguado dado por la Ec. (18), con  $m = 0,550 \text{ kg}$ ,  $k = 25,0 \text{ N/m}$ ,  $\beta = 15,0 \text{ kg/s}$  y  $x_0 = 0,800 \text{ m}$ .



**Figura 5**

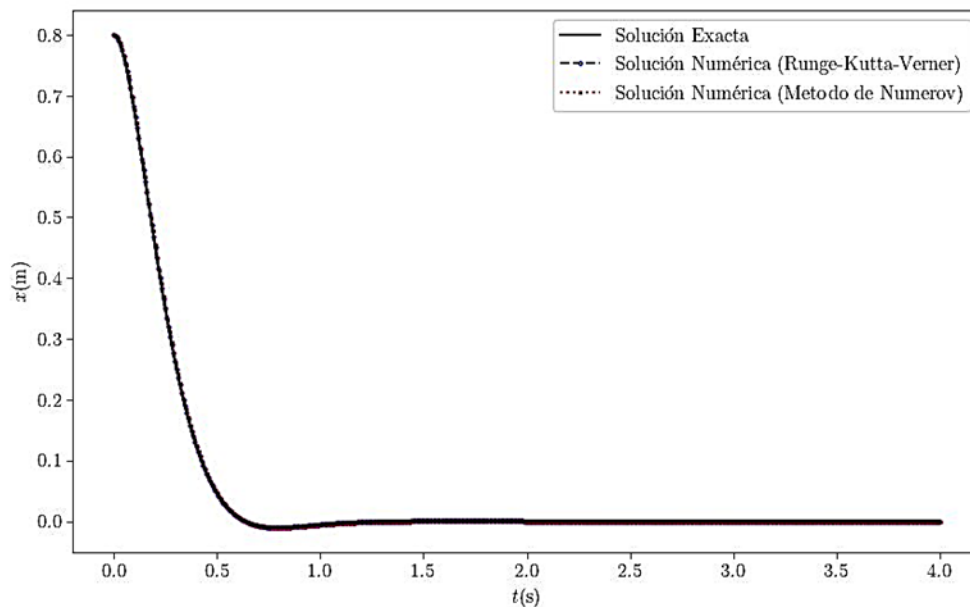
Comparación de las soluciones numéricas con relación a la solución exacta para el desplazamiento de un objeto que experimenta un movimiento subamortiguado suave dado por la Ec. (17) para  $m = 0,550 \text{ kg}$ ,  $k = 25,0 \text{ N/m}$ ,  $\beta = 1,50 \text{ kg/s}$  y  $x_0 = 0,800 \text{ m}$ .



Podemos observar en esta Figura. 5, una excelente concordancia de ambas soluciones numéricas obtenidas por dos métodos numéricos diferentes, con respecto a la solución exacta, para la situación en que la fricción en el sistema mecánico es pequeña. Al aumentar la fricción en el sistema mecánico, a través del incremento del coeficiente de amortiguamiento, esto es, induciendo al sistema a un movimiento subamortiguado *fuerte* (fricción alta), el comportamiento del desplazamiento es completamente diferente al caso de baja fricción, ilustrándose en la Figura 6. Esta situación nos indica que al aumentar la magnitud del coeficiente de amortiguamiento  $\beta$ , el sistema mecánico pierde rápidamente su propiedad oscilatoria, alcanzando rápidamente su posición de equilibrio. Podemos apreciar en la Figura 6, al igual que el caso descrito en la Figura 5, una excelente concordancia de la simulación de ambas soluciones numéricas con relación a la solución exacta.

### Figura 6

*Comparación de las soluciones numéricas con relación a la solución exacta para el desplazamiento de un objeto que experimenta un movimiento subamortiguado fuerte dado por la Ec. (17) para  $m = 0,550 \text{ kg}$ ,  $k = 25,0 \text{ N/m}$ ,  $\beta = 6,00 \text{ kg/s}$  y  $x_0 = 0,800 \text{ m}$ .*

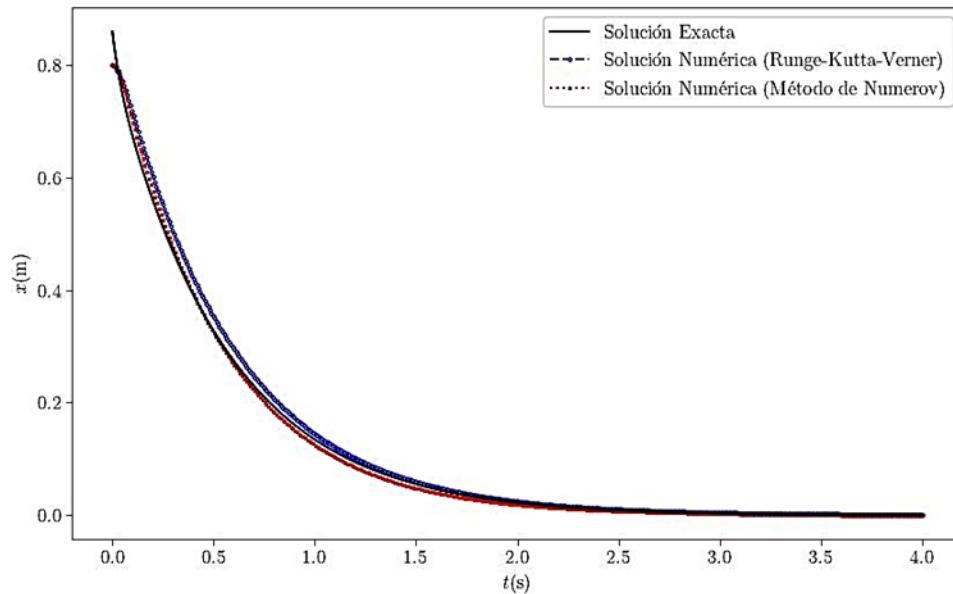


Para la situación en que el sistema mecánico ilustrado en la Figura 1, experimente un movimiento sobreamortiguado, la simulación obtenida bajo esta condición es ilustrada en la Figura 7, donde se compara las soluciones numéricas del comportamiento del desplazamiento realizado al considerar como parámetros de entrada  $m = 0,550 \text{ kg}$ ,  $k = 25,0 \text{ N/m}$ ,  $\beta = 15,0 \text{ kg/s}$  y  $x_0 = 0,800 \text{ m}$ . Al observar la Figura 7, podemos percatarnos de que los

resultados numéricos, presentan una aproximación relativamente buena con relación a la solución exacta.

### Figura 7

*Comparación de las soluciones numéricas con relación a la solución exacta para el desplazamiento de un objeto que experimenta un movimiento sobreamortiguado dado por la Ec. (18) para  $m = 0,550 \text{ kg}$ ,  $k = 25,0 \text{ N/m}$ ,  $\beta = 15,0 \text{ kg/s}$  y  $x_0 = 0,800 \text{ m}$ .*



## CONCLUSIONES

El uso del método de Numerov para la solución numérica de EDO en forma diferente a la utilizada usualmente, como lo es en la solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (Caruso y otros, 2022), resulta particularmente útil en la solución numérica de EDO que aparecen naturalmente en sistemas mecánicos con un grado de libertad presentando excelentes resultados al ser comparados con las soluciones exactas que satisfacen dichas EDO, colocando en evidencia la validez y confiabilidad de que el método de Numerov también puede ser perfectamente utilizado para sistemas mecánicos con un grado de libertad, con la particularidad que se debe realizar una adecuada transformación de variables necesaria para eliminar el término que represente la primera derivada temporal. Para trabajar adecuadamente con cualquier método numérico, particularmente los expuestos en el presente artículo, las diferencias finitas centradas, es la técnica que tradicionalmente es utilizada. Esto no quiere decir, que sea la única, ya que también pueden ser utilizadas las diferencias finitas

adelantadas o las atrasadas de segundo orden (Li y otros, 2018), esto conllevaría como consecuencia a la necesidad de realizar algunos ajustes algebraicos para obtener una adecuada relación de recurrencia.

La solución numérica obtenida con el método de Numerov comparada con otro método numérico, como el perteneciente a la familia de los métodos de Runge-Kutta, y tal vez el menos conocido por algunos; el método de Runge-Kutta-Verner, nos presenta una excelente concordancia no solamente con la solución numérica cuando el cuerpo realiza un movimiento subamortiguado tal como se aprecia en las Figura 5 y Figura 6, para los casos de fricción *suave* y fricción *fuerte*, respectivamente, sino también cuando el objeto experimenta un movimiento sobreamortiguado ilustrado en la Figura 7, cuando el coeficiente de amortiguamiento mayor en comparación con la frecuencia natural.

La coincidencia entre ambas soluciones, nos indica que ambos métodos son altamente precisos para simular el comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones de amortiguamiento. Esto sugiere que los algoritmos numéricos están capturando de manera adecuada la física del sistema, incluso en situaciones donde las soluciones pueden ser más complejas debido a la naturaleza del amortiguamiento. Al coincidir ambas soluciones, significa que el método es robusto incluso ante la variabilidad de las constantes de amortiguamiento con dinámicas que no se desvían de la predicción matemática. Esto también valida tanto el modelo físico como los métodos numéricos utilizados para resolverlo.

En esencia los métodos tanto de Numerov como de Runge-Kutta-Verner, pueden ser utilizados para el análisis de vibraciones y/o oscilaciones de estructuras mecánicas, es decir, estos métodos son utilizados para resolver EDO en sistemas mecánicos vibratorios lineales, como los abordados en este artículo, sino también para sistemas mecánicos vibratorios no lineales como los que aparecen en situaciones donde la Ingeniería Civil y la Ingeniería Mecánica también intervienen, como lo es en edificios, puentes y vehículos (Chopra, 2019).

## **AGRADECIMIENTOS**

Deseo expresar mi agradecimiento al Profesor Adams Martínez, por sus valiosas observaciones en la redacción no sólo de este artículo, sino también en una mejor optimización de los códigos fuentes utilizados. Al Profesor Guillermo Burke en la mejora de la redacción del artículo; ambos profesores del Departamento de Física.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Balkrishna, P. S. (2014). Bound state eigenfunctions of an anharmonic oscillator in one dimension: A Numerov method approach. *Int. J. Adv. Appl. Math. and Mech* , 2(2), 102-109.
- Caruso, F., Oguri, V., & Silveira, F. (2022). Applications of the Numerov method to simple quantum systems using Python. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 44, 1-11.
- Chapra, S. C. (2023). *Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists*. (Quinta Edición ed.). New York: Mc Graw-Hill.
- Chopra, A. K. (2019). *Dynamics of structure: Theory and applications to earthquake engineering*. Pearson.
- Giordano, N. J., & Nakanishi, H. (2006). *Computational Physics* (Segunda Edición ed.). New Jersey, Estados Unidos de Norteamérica: Prentice Hall.
- Hjorth-Jensen, M. (2013). *Computational Physics*. Retrieved 15 de Mayo de 2024, from <https://courses.physics.ucsd.edu/2017/Spring/physics142/Lectures/Lecture18/Hjorth-JensenLectures2010.pdf>
- Koonin, S. E., & Meredith, D. C. (2018). *Computational Physics. Fortran Version*. Boca Ratón, Florida, Estados Unidos de Norteamérica: CRC Press Taylor & Francis Group.
- Landau, R. H., J., P. M., & Bordeianu, C. C. (2015). *Computational Physics. Problem Solving with Python*. (Tercera Edición ed.). Weinheim, Alemania: Wiley- VCH Verlag GmbH & Co. KGaA.
- Li, Z., Qiao, Z., & Tang, T. (2018). *Numerical Solution of Differential Equations. Introduction to Finite Difference and Finite Element Methods*. New Delhi, India: Cambridge University Press.
- Martinz, S. D., & Ramos, R. V. (2018). Numerical Solution via Numerov Method of the 1D-Schrödinger Equation with Pseudo-Delta Barrier. *Computational Methods in Science and Technology*, 24(3), 177-185.
- Nagle, R. K., Saff, E. B., & David, S. A. (2018). *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems* (Séptima Edición ed.). Estados Unidos de Norteamérica: Pearson.



- Pang, T. (2006). *An Introduction to Computational Physics* (Segunda Edición ed.). Reino Unido: Cambridge University Press.
- Rao, S. S. (2018). *Mechanical Vibrations* (Sexta Edición ed.). Londres, Reino Unido: Pearson.
- Širca, S., & Horvat, M. (2018). *Computational Methods in Physics. Compendium for Students* (Segunda Edición ed.). Cham, Suiza: Springer.
- Verner, J. H. (1978). Explicit Runge-Kutta method with estimates of the local truncation error. *SIAM, Journal on Numerical Analysis*, 15(4), 772-790.
- Vesely, F. J. (2013). *Computational Physics. An Introduction*. New York: Springer Science+Business Media, LLC.
- Yousefian, Z., & Shadmani, N. (2014). Numerical solution for one-dimensional independent of time Schrödinger Equation. *Journal of Physical and Theoretical Chemistry*, 10(4), 215-224.
- Zill, D. G. (2024). *Differential Equations with Modeling Applications* (Décimo segunda Edición ed.). México, México: Cengage.