

Temario

3. Mecánica cuántica.

1. Introducción a la mecánica cuántica.
2. La Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo.
3. Linealidad y superposición de las soluciones de la Ecuación de Schrödinger.
4. Observables y operadores.
5. La Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Eigenvalores y eigenfunciones.
6. Partícula en una caja.
7. Pozo cuadrado finito.
8. Potencial de barrera y el efecto túnel.
9. Oscilador armónico cuántico.



I. Introducción a la mecánica cuántica.

Hasta el momento hemos visto que toda partícula tiene asociada una onda de materia, denominada función de onda.

La **mecánica cuántica**, o mecánica ondulatoria, estudia cómo se comporta la función de onda asociada con una partícula para un esquema dado: partícula libre, partícula en un caja, oscilador armónico, átomo de hidrógeno, etc., el cual está determinado por las condiciones del sistema, a partir de la geometría, potencial involucrado, etc.

El formalismo de la mecánica cuántica, desarrollado de 1925 a 1926 por Erwin Schrödinger, Werner Heisenberg, Max Born, Paul A. Dirac y otros, permite comprender una gran cantidad de fenómenos que la física no podía hacer antes de su desarrollo y formalización.

A principios de los 1930's la aplicación de la mecánica cuántica a problemas involucrando núcleos, átomos, moléculas y aspectos del estado sólido hizo posible entender una gran cantidad de datos que se tenían, así como llevar a predicciones con una gran exactitud.

La mecánica cuántica ha sobrevivido a todas las pruebas experimentales hasta ahora, incluso a las de sus conclusiones más inesperadas.



I. Introducción a la mecánica cuántica.

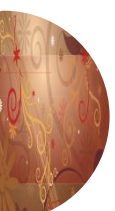
La diferencia fundamental entre mecánica clásica y mecánica cuántica tiene que ver con lo que describen y cómo lo describen.

En mecánica clásica, el comportamiento futuro de una partícula se **determina completamente** por su posición y momento (velocidad) iniciales, junto con las fuerzas que actúan sobre ella. Esto aplica para la mayoría de las situaciones de la vida cotidiana.

En mecánica cuántica también se obtienen relaciones entre cantidades observables, pero el principio de incertidumbre introduce limitaciones en su medición.

La relación causa-efecto tiene vigencia en la mecánica cuántica, pero requiere una interpretación cuidadosa; además, la certeza clásica del comportamiento futuro de la partícula pierde sentido, porque no es posible conocer de manera precisa la posición y el momento iniciales.

Se puede establecer que las cantidades que se estudian en mecánica cuántica representan **probabilidades**; por ejemplo, el radio de la órbita del electrón en el estado base del átomo de Hidrógeno no es $5.3 \times 10^{-11} \text{m}$, sino que este es el **valor más probable**.



I. Introducción a la mecánica cuántica.

Podría pensarse que la mecánica cuántica es un mal sustituto de la mecánica clásica porque pierde el determinismo de ella; sin embargo, esto es lo más alejado de la realidad.

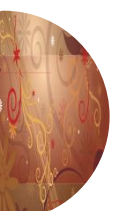
En realidad, la mecánica clásica resulta un límite de la mecánica cuántica, toda vez que cuando uno mide cantidades del macromundo, realmente lo que está haciéndose es tomar un promedio sobre un gran número de partículas.

El principio de correspondencia vuelve a aparecer para justificar que en vez de requerir dos físicas: una para el macromundo (mecánica clásica) y otra para el micromundo (mecánica cuántica), basta considerar la física incluida en la mecánica cuántica.

La premisa de que la función de onda Ψ contiene TODA la información que puede conocerse sobre la partícula, constituye el punto de arranque.

Nuestros objetivos serán dos:

1. Descubrir cómo puede obtenerse información a partir de Ψ ; y
2. Aprender cómo obtener esta función de onda Ψ para un sistema dado.



I. Introducción a la mecánica cuántica. La función de onda.

Antes de continuar veamos algunos aspectos relacionados con la función de onda.

De acuerdo a la interpretación de Born, propuesta en 1925, la función de onda en sí NO tiene significado físico, sino que es su cuadrado $|\Psi|^2$, evaluado en un punto del espacio a un tiempo dado, el que representa la **densidad de probabilidad** o probabilidad por unidad de longitud, $P(x,t)$, de encontrar a la partícula en dicho punto en el instante dado.

La función de onda, generalmente, es una cantidad compleja

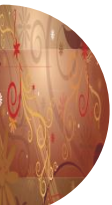
$$\Psi = A + iB$$

por lo que su complejo conjugado es

$$\Psi^* = A - iB$$



Max Born
(1882 - 1970)



I. Introducción a la mecánica cuántica. La función de onda.

Con ello, podemos escribir la densidad de probabilidad $P(x,t)$ como

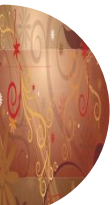
$$P(x,t) = |\Psi|^2 = \Psi^* \Psi = A^2 + B^2$$

Lo anterior, evidencia que la densidad de probabilidad es una cantidad real y positiva, como se requiere.

La probabilidad de que una partícula se encuentre en el intervalo infinitesimal dx alrededor del punto x al tiempo t , denotada por $P(x,t)dx$, es

$$P(x,t)dx = |\Psi(x,t)|^2 dx = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx$$

Debido a su relación con la probabilidad de encontrar a la partícula, la función de onda debe ser una función monovaluada y continua de x y t , de modo que no puede haber ambigüedades en las predicciones de la teoría. También debe ser suave, una condición que será desarrollada más adelante, en cuanto sea necesario hacerlo.



I. Introducción a la mecánica cuántica. La función de onda.

Como consecuencia de que la partícula debe estar en algún sitio a lo largo del eje x , la suma de las probabilidades sobre todos los valores de x debe ser igual a 1, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x,t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$$

Condición de normalización

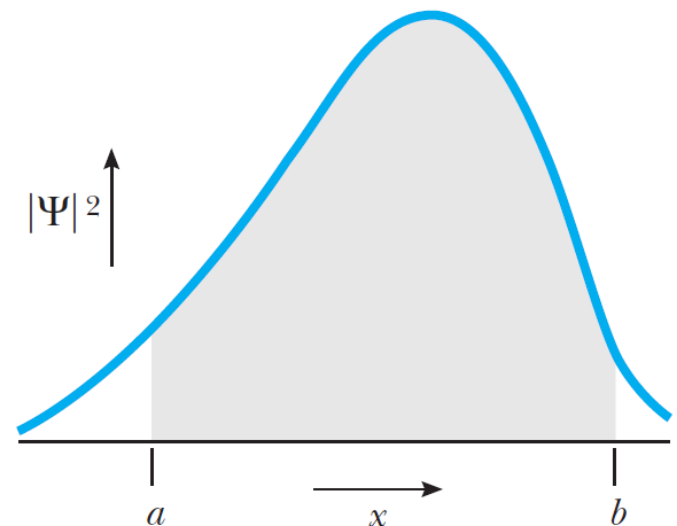
Cualquier función de onda que cumpla con la condición dada por la ecuación anterior se dice que está normalizada.

Normalizar es establecer el hecho de que la partícula puede encontrarse con certidumbre en alguna parte del espacio.

La probabilidad P de encontrar a la partícula en cualquier intervalo finito $[a,b]$ es

$$P = \int_a^b |\Psi(x,t)|^2 dx$$

Es decir, la probabilidad es justamente el área bajo la curva de densidad de probabilidad entre los puntos $x = a$ y $x = b$.



I. Introducción a la mecánica cuántica. La función de onda.

Junto con la condición de normalización, de monovaluación y de continuidad mencionadas anteriormente; consideraciones sobre el momento, p , requieren que las derivadas parciales de la función de onda sean finitas, continuas y monovaluadas.

Únicamente las funciones de onda con todas estas características pueden resultar con significado físico, por lo que solamente estas funciones “bien comportadas” pueden representar matemáticamente a los cuerpos reales.

Resumiendo, tenemos que

- Ψ debe ser continua y monovaluada para todo punto en el espacio, en cualquier instante.
- Ψ debe tener primeras derivadas continuas y monovaluadas en todo punto en el espacio, en cualquier instante.
- Ψ debe ser normalizable, lo que significa que debe anularse cuando la coordenada espacial tiene a $\pm\infty$.

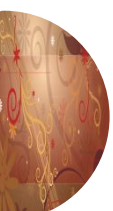


I. Introducción a la mecánica cuántica. La función de onda. Un ejemplo.

Una partícula es descrita por los valores de la función de onda

$$\Psi(x) = \begin{cases} A \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) & \text{para } -\frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{4} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- a) Grafique la función de onda
- b) Determine la constante de normalización A .
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula se encuentre entre $x=0$ y $x=L/8$ si se mide su posición?



5. La E independiente del tiempo.

Eigenvalores y eigenfunciones

En muchas situaciones, la energía potencial de una partícula no depende explícitamente del tiempo, lo que significa que la fuerza que actúa sobre ella es constante en el tiempo, por lo que solamente puede tener dependencia en la coordenada espacial x .

Cuando se presenta esta situación, la Ecuación de Schrödinger puede simplificarse eliminando la dependencia temporal, resultando la llamada Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo o también conocida como Ecuación estacionaria de Schrödinger.

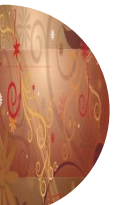
Para llevar a ella, debemos escribir la función de onda como el producto

$$\Psi(x, t) = \psi(x) f(t)$$

Este método es muy útil para resolver ecuaciones diferenciales parciales y se conoce método de separación de variables.

Si a continuación sustituimos esta expresión en la Ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x) \Psi(x, t)$$



5. La E independiente del tiempo. Eigenvalores y eigenfunciones

Tendremos

$$i\hbar \frac{\partial [\psi(x)f(t)]}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 [\psi(x)f(t)]}{\partial x^2} + U(x)[\psi(x)f(t)]$$

o

$$i\hbar \psi(x) \frac{\partial f(t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} f(t) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + U(x)\psi(x)f(t)$$

Si a continuación dividimos entre la función de onda

$$\Psi(x,t) = \psi(x)f(t)$$

tendremos

$$i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{\partial f(t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + U(x)$$

Esta ecuación ha quedado separada en una parte con dependencia temporal y otra parte con dependencia espacial, por lo que podemos igualar a una misma constante.

5. La ψ independiente del tiempo. Eigenvalores y eigenfunciones

Por conveniencia, se toma esa constante como la energía E , de tal forma que tenemos

$$i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{df(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x) = E$$

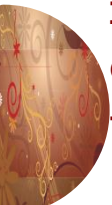
Lo que lleva a escribir las ecuaciones para $f(t)$ y $\psi(x)$ como

$$\frac{df(t)}{dt} = -i \frac{E}{\hbar} f(t) \quad (5.1)$$

y

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (5.2)$$

La primera ecuación nos da la dependencia temporal de la función de onda, mientras que la segunda nos da la dependencia espacial de la función de onda y recibe el nombre de Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo o Ecuación estacionaria de Schrödinger.



5. La E independiente del tiempo. Eigenvalores y eigenfunciones

La ecuación (5.1) anterior tiene como solución funciones de la forma

$$f(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

o recordando que $E=\hbar\omega$ podemos escribir la solución completa a la Ecuación de Schrödinger como

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t} \quad (5.3)$$

donde $\psi(x)$ son soluciones de la ecuación

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(x)]\psi(x) = 0 \quad (5.4)$$

Las funciones de onda (5.3), considerando las soluciones de la ecuación (5.4), presentan una densidad de probabilidad constante en el tiempo, por lo que un sistema que puede ser modelado por la Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo se dice que presenta **estados estacionarios**.



5. La E independiente del tiempo. Eigenvalores y eigenfunciones

Para terminar este desarrollo, podemos escribir la Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en tres dimensiones como

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(\vec{r})] \psi(\vec{r}) = 0 \quad (5.5)$$

Por lo que la función de onda del sistema está dada por

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\omega t}$$

Una propiedad importante de la Ecuación Estacionaria de Schrödinger es que si tiene una o mas soluciones, cada una de ellas corresponde a un valor específico de la energía E .

Esta cuantización de la energía aparece como un elemento natural de la teoría, tal como se ha mostrado hasta este momento, ya que si recordamos la física de las ondas mecánicas encontramos que la ecuación (5.4) es similar a la ecuación que, considerando valores a la frontera, nos llevó a establecer ondas estacionarias y sus respectivas condiciones de cuantización en las medias longitudes de ondas.



5. La E independiente del tiempo.

Eigenvalores y eigenfunciones

Los valores de la energía E_n , para los cuales se puede resolver la Ecuación estacionaria de Schrödinger, se llaman Eigenvalores y las correspondientes funciones de onda $\psi_n(x)$ reciben el nombre de eigenfunciones.

La condición de cuantización, para el caso de la energía, se puede escribir como

$$\hat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$$

que corresponde a una ecuación de eigenvalores o valores propios.

En este caso, se dice que E_n y $\psi_n(x)$ son los eigenvalores y las eigenfunciones del operador Hamiltoniano, respectivamente.

Si la ecuación anterior se cumple, entonces siempre que el sistema se encuentre en un estado definido por la función de estado $\psi_n(x)$ se medirá el valor esperado E_n para el observable H , de tal manera que si el sistema se encuentra en el estado $\psi_k(x)$ se medirá el valor esperado E_k , y así sucesivamente.



6. Partícula en una caja

Una primera aplicación de la Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es la partícula en una caja, cuya solución es la más fácil de encontrar.

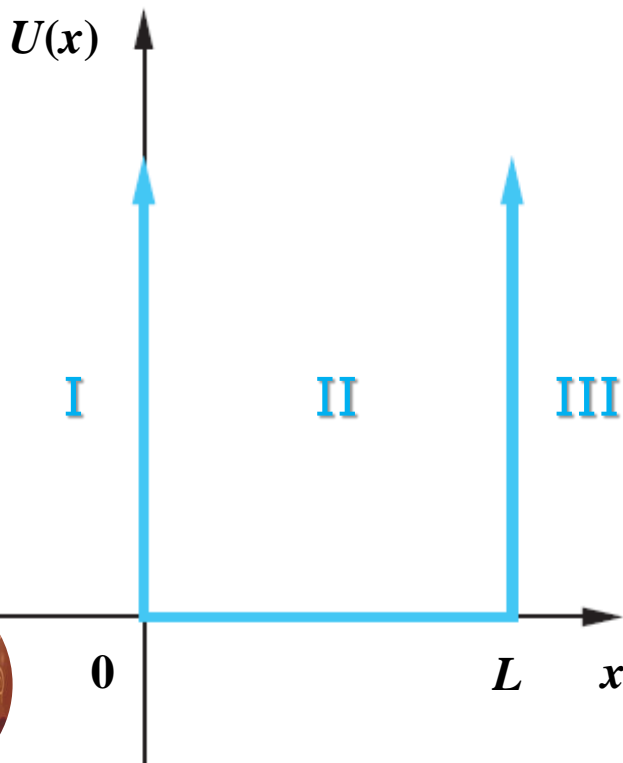
Para ello debemos considerar una partícula de masa m atrapada en un potencial cuadrado infinito, tal como se muestra en la figura.

Este potencial se puede escribir como

$$U(x) = \begin{cases} \infty & -\infty < x < 0 \\ 0 & 0 < x < L \\ \infty & L < x < \infty \end{cases}$$

Lo que, evidentemente, delimita tres regiones:

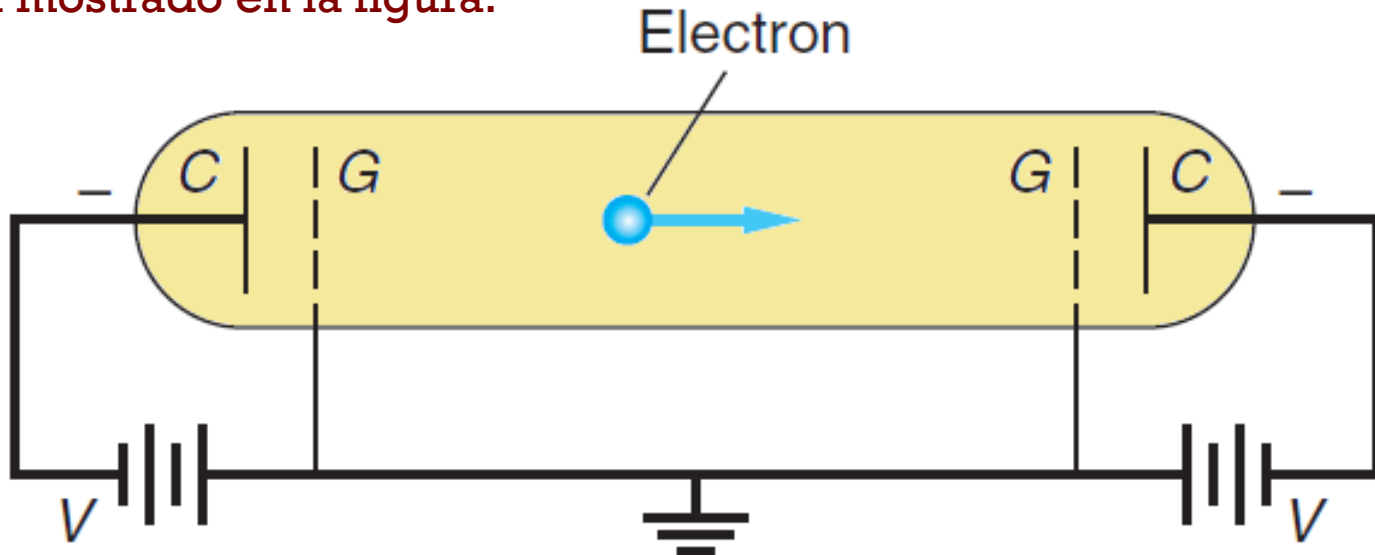
- Las regiones I y III donde el potencial es infinito; y
- la región II donde la partícula es libre.



6. Partícula en una caja

El potencial anterior es físicamente irrealizable, pero matemáticamente permite resolver la Ecuación de Schrödinger de manera sencilla.

Lo más cercano a este potencial se puede conseguir mediante un arreglo como el mostrado en la figura.



Conforme aumenta la diferencia de potencial V entre la rejilla G y el electrodo C , el potencial que "siente" el electrón se aproxima a uno de paredes infinitas, por lo que tiene sentido considerar a dicho electrón como una partícula en una caja.

6. Partícula en una caja

Regresando a nuestro problema de interés, debemos escribir la Ecuación de Schrödinger para cada una de las regiones acordes con el potencial, a saber

$$\frac{d^2\psi_I(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)] \psi_I(x) = 0$$

$$\frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)] \psi_{II}(x) = 0$$

$$\frac{d^2\psi_{III}(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)] \psi_{III}(x) = 0$$

Las primera y tercera ecuaciones, dado que el potencial es infinito en dichas regiones, requieren que sus soluciones sean nulas; por lo que necesitaremos resolver la segunda de ellas, que se reduce a

$$\frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_{II}(x) = 0$$



6. Partícula en una caja

Esta ecuación tiene como solución general a la combinación lineal

$$\psi_{II}(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

donde

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Las constantes A y B se determinan a partir de las condiciones de continuidad en la función, las cuales indican que

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = 0$$

$$\psi_{III}(L) = \psi_{II}(L) = A \cos(kL) + B \sin(kL) = 0$$

La primera de ellas implica que

$$A = 0$$

mientras que la segunda requiere que el argumento del Seno sea un múltiplo de π , por lo que

$$kL = n\pi$$



6. Partícula en una caja

Con ello podemos escribir, hasta el momento, la solución de la Ecuación de Schrödinger como

$$\psi_{II}(x) = B_n \text{Sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

Para encontrar el valor de B_n usaremos la condición de normalización, a saber

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{II}(x)|^2 dx = 1$$

que nos lleva a

$$B_n^2 \int_0^L \text{Sen}^2 \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = 1$$

de donde

$$B_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$$



6. Partícula en una caja

Por lo que finalmente la solución de la Ecuación de Schrödinger para una partícula en una caja se escribe como

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \text{Sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{con } n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Esta eigenfunción tiene su correspondiente eigenvalor de energía E_n ; el cual se obtiene a partir de la expresión

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

considerando que

$$kL = n\pi$$

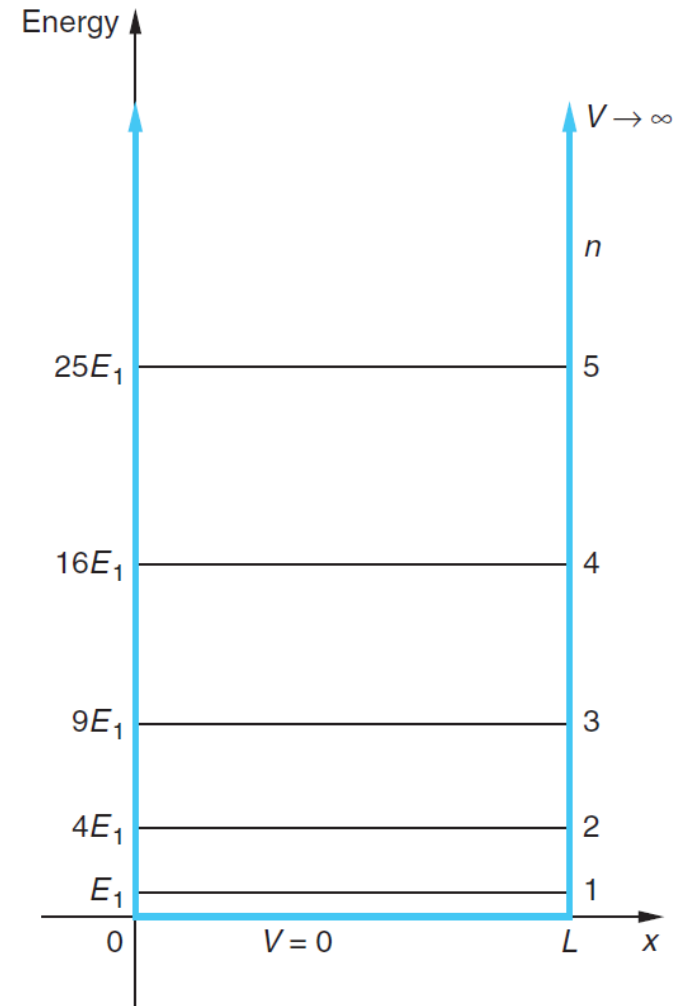
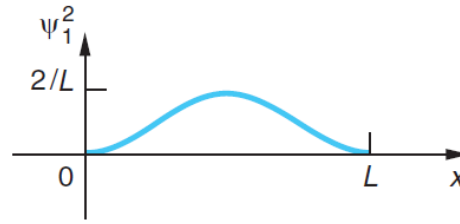
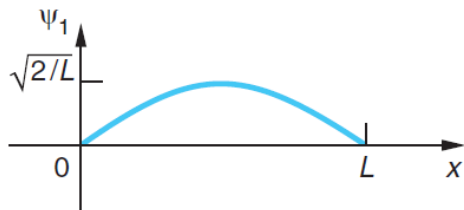
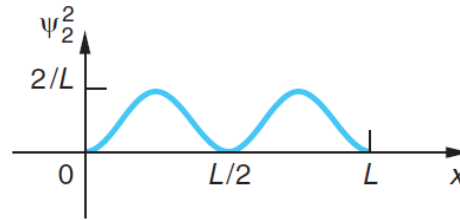
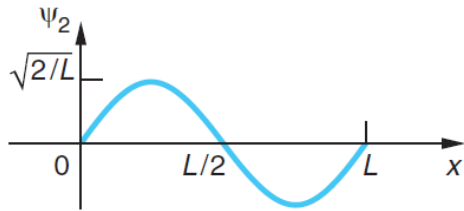
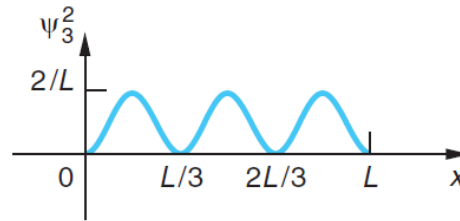
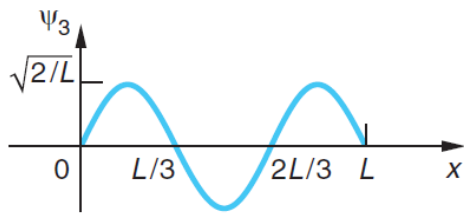
Lo que permite llegar a

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

Esta expresión corresponde al espectro de energías para una partícula sujeta a un potencial cuadrado infinito o en una caja de tamaño L .

6. Partícula en una caja

Gráficamente, las funciones de onda con sus correspondientes energías son las siguientes:



$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \text{Sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$E_n = n^2 \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \right) = n^2 (E_1)$$

6. Partícula en una caja

La función de onda completa $\Psi(x,t)$ se obtiene multiplicando la función de onda anterior, $\psi(x,t)$, por la parte temporal, por lo que tendremos

$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \text{Sen}(k_n x) e^{-\omega_n t}$$

donde

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{y} \quad \omega_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar}{2mL^2}$$

Si se usa la identidad

$$\text{Sen}(k_n x) = \frac{e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}}{2i}$$

podemos escribir

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{L}} \left[e^{i(k_n x - \omega_n t)} - e^{-i(k_n x + \omega_n t)} \right]$$

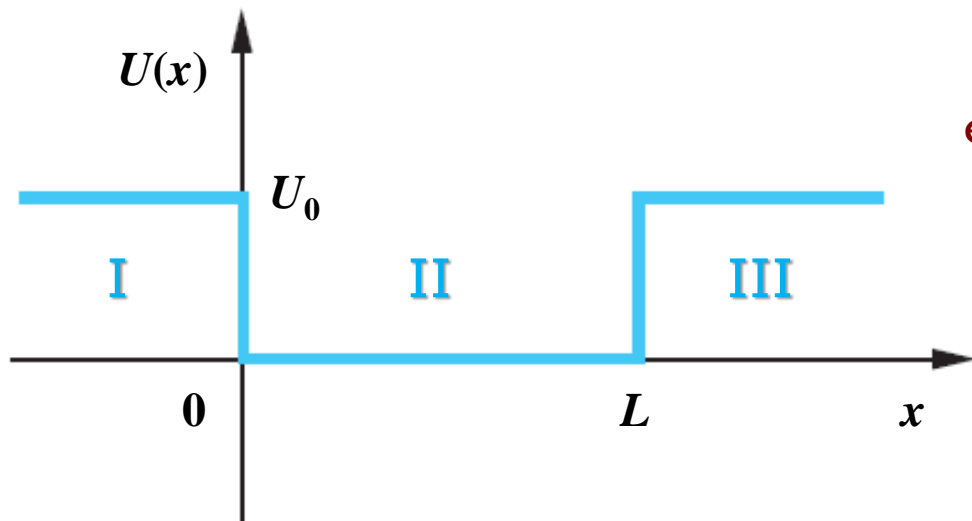
que puede considerarse como una superposición de dos ondas de igual forma y tamaño, pero propagándose en direcciones opuestas.

7. Pozo cuadrado finito.

Una vez estudiado el caso de una partícula confinada a una caja de tamaño L , vamos a considerar a la partícula sujeta a un potencial cuadrado finito, lo cual corresponde a un sistema físico más realista.

En este caso, el potencial tiene la forma

Analíticamente se puede escribir como



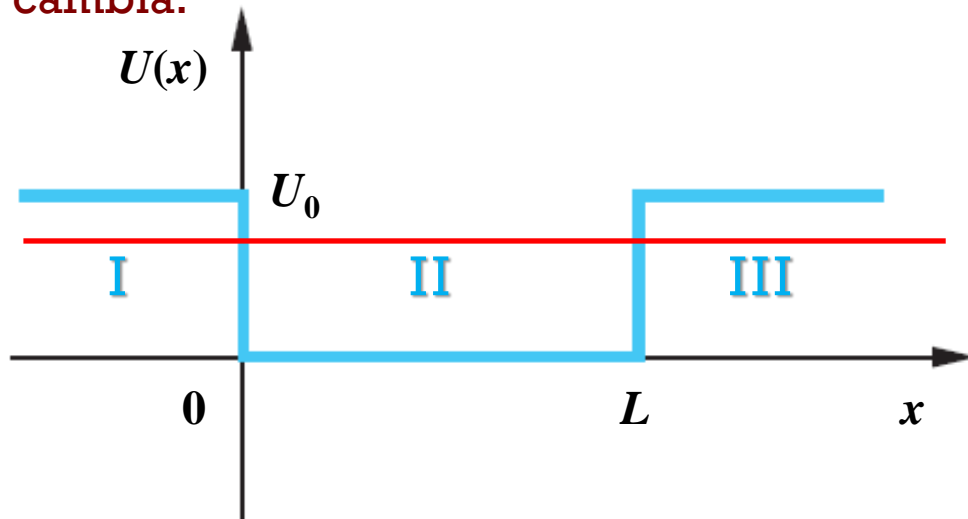
$$U(x) = \begin{cases} U_0 & -\infty < x < 0 \\ 0 & 0 < x < L \\ U_0 & L < x < \infty \end{cases}$$

La forma de este potencial, de nuevo, delimita tres regiones:

- Las regiones I y III donde el potencial es distinto de cero (U_0); y
- la región II donde la partícula es libre.

7. Pozo cuadrado finito.

Si consideramos una partícula de masa m y energía E mayor que U_0 , clásicamente encontramos que se puede mover por todo el espacio, de tal forma que en las regiones I y III su velocidad será menor que en la región II; sin embargo, si la energía E de la partícula es menor que U_0 , la situación cambia.



Según la mecánica clásica, una partícula con energía E menor que U_0 está confinada a moverse entre 0 y L , ya que fuera de ella su energía cinética sería negativa.

Sin embargo, la mecánica cuántica establece que hay una probabilidad de que la partícula pueda encontrarse fuera de esta región.

Lo anterior se hace evidente al resolver la Ecuación de Schrödinger para cada una de las tres regiones, encontrando que la función de onda en general es diferente de cero fuera del pozo (región II).

7. Pozo cuadrado finito.

Con lo anterior, debemos escribir la Ecuación de Schrödinger para cada una de las regiones acordes con el potencial, a saber

$$\frac{d^2\psi_I(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U_0] \psi_I(x) = 0$$

$$\frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_{II}(x) = 0$$

$$\frac{d^2\psi_{III}(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U_0] \psi_{III}(x) = 0$$

Las primera y tercera ecuaciones tienen la misma forma, mientras que la segunda es similar a la que se tuvo en el caso del potencial infinito, por lo que la solución para la región II se puede escribir como

$$\psi_{II}(x) = C \text{Sen}(kx) + D \text{Cos}(kx)$$

con

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$



7. Pozo cuadrado finito.

Para las regiones I y III podemos escribir a las ecuaciones como

$$\frac{d^2\psi_I(x)}{dx^2} - \alpha^2\psi_I(x) = 0$$

$$\frac{d^2\psi_{III}(x)}{dx^2} - \alpha^2\psi_{III}(x) = 0$$

con

$$\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}[U_0 - E] > 0$$

Las soluciones para estas ecuaciones se pueden escribir como

$$\psi_I(x) = Ae^{+\alpha x} + Be^{-\alpha x}$$

y

$$\psi_{III}(x) = Ee^{+\alpha x} + Fe^{-\alpha x}$$



7. Pozo cuadrado finito.

Sin embargo, como la función de onda debe mantenerse finita tenemos que cancelar la posibilidad de que la exponencial crezca indefinidamente, para lo cual tomaremos $B = E = 0$, así que las funciones de onda para cada una de las regiones son:

$$\psi_I(x) = Ae^{+\alpha x} \quad (7.1)$$

$$\psi_{II}(x) = C\text{Sen}(kx) + D\text{Cos}(kx) \quad (7.2)$$

$$\psi_{III}(x) = Fe^{-\alpha x} \quad (7.3)$$

con

$$\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} [U_0 - E] \quad \text{y} \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$



7. Pozo cuadrado finito.

A continuación tenemos que aplicar la condición de continuidad en las funciones de onda y en las primeras derivadas, valuadas en $x = 0$ y $x = L$; lo que nos permitirá conocer las relaciones existentes entre A, C, D y F .

La condición de continuidad en la función de onda lleva a

$$\psi_I(0) = Ae^0 = C\text{Sen}(0) + D\text{Cos}(0) = \psi_{II}(0)$$

y

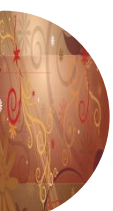
$$\psi_{II}(L) = C\text{Sen}(kL) + D\text{Cos}(kL) = Fe^{-\alpha L} = \psi_{III}(L)$$

Mientras que la condición de continuidad en la primera derivada lleva a

$$\psi_I'(0) = \alpha Ae^0 = kC\text{Cos}(0) - kD\text{Sen}(0) = \psi_{II}'(0)$$

y

$$\psi_{II}'(L) = kC\text{Cos}(kL) - kD\text{Sen}(kL) = -\alpha Fe^{-\alpha L} = \psi_{III}'(L)$$



7. Pozo cuadrado finito.

Con esto, nuestro problema será resolver el sistema de ecuaciones siguientes:

$$A = D \quad (7.4)$$

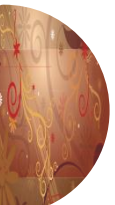
$$C \operatorname{Sen}(kL) + D \operatorname{Cos}(kL) = F e^{-\alpha L} \quad (7.5)$$

$$\alpha A = kC \quad (7.6)$$

$$kC \operatorname{Cos}(kL) - kD \operatorname{Sen}(kL) = -\alpha F e^{-\alpha L} \quad (7.7)$$

Al sustituir (7.4) en (7.6) eliminamos A, y podemos escribir la relación:

$$\frac{C}{D} = \frac{\alpha}{k} \quad (7.8)$$



7. Pozo cuadrado finito.

De manera similar, sustituimos (7.5) en (7.7), lo que elimina a F , para poder escribir

$$kC\cos(kL) - kD\sin(kL) = -\alpha [C\sin(kL) + D\cos(kL)]$$

que usando la relación (7.8):

$$C = \frac{\alpha}{k} D$$

resulta

$$k\left(\frac{\alpha}{k} D\right)\cos(kL) - kD\sin(kL) = -\alpha \left[\left(\frac{\alpha}{k} D\right)\sin(kL) + D\cos(kL)\right]$$

Esta ecuación se reduce a

$$-\cos(kL) + \frac{k}{\alpha}\sin(kL) = \left(\frac{\alpha}{k}\right)\sin(kL) + \cos(kL)$$



7. Pozo cuadrado finito.

Resulta útil escribir esta última ecuación como

$$\frac{\left(\frac{\alpha}{k}\right) \cos(kL) - \sin(kL)}{\left(\frac{\alpha}{k}\right) \sin(kL) + \cos(kL)} = -\frac{\alpha}{k} \quad (7.9)$$

Si recordamos que

$$\alpha = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [U_0 - E]}$$

y

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

resulta evidente que la ecuación (7.9) es una ecuación trascendente para α y k que, para valores de L y U_0 dados, es válida para ciertos valores de E , lo que implica un espectro de energías discreto.

7. Pozo cuadrado finito.

Para estas energías, las condiciones de continuidad especifican a la función de onda, excepto por un factor constante que se determina aplicando la condición de normalización.

En la Figura anexa se muestran las funciones de onda y las densidades de probabilidad que resultan para las tres energías más bajas permitidas para la partícula.

