

# Documento Protocolario 06

Mittle-Seminar

21 de abril de 2024

## 1. Reprogramación

Siendo aproximadamente las 8:40 del 20 de Abril, 2024, se propone una reprogramación de futuros temas de exposición y fechas las para secciones del seminario. Se designa a Julian Avila como el responsable de llevar el protocolo de la sección.

- Corchetes de Poisson (Zaudi Gómez, Julián Aros) - 25 de Abril
- Teorema de Noether (Mauricio Guevara) - 4 de Mayo
- Transformaciones canónicas (Camilo Huertas) - 11 de Mayo
- Dispersión de Rutherford (Sebastian Rodriguez, Issabela Ortiz) - 13 de Mayo
- Ensambls (Nicolas Sandoval, Daniela Torres) - 13 de Mayo
- Gases Versión 1. (Julian Avila) - 25 de Mayo
- Gases Versión 2. (Andres Torres) - 25 de Mayo
- Potenciales Termodinámicos (Alexei Duran, Diego Acosta) - 1 de Junio

## 2. Inicio de Sección y Plano Inclinado

A las 9:07, comienza la exposición a cargo de Sebastián Manrique y Santiago Talero, titulada **El Plano Inclinado y la Maquina de Atwood Simple**.

Se utilizan dos sistemas comunes en física para explicar el concepto de ligadura o constricción.

El sistema consiste en una masa  $m$  sobre un plano inclinado un angulo  $\alpha$ , sin fricción, como se muestra en la Figura 1.

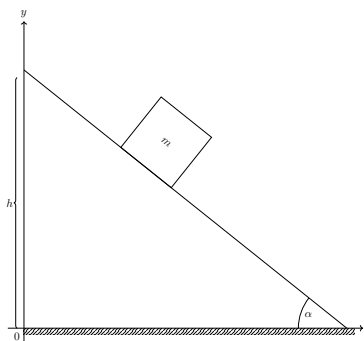


Figura 1: Diagrama del Plano Inclinado

Como una primera definición simple de ligadura se dice que: Es una restricción que se le impone al sistema.

Para el plano inclinado se tienen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} z = 0 & \implies f_1^{(h)} = 0 \\ y = -x \tan \alpha + h & \implies f_2^{(h)} = y + x \tan \alpha - h = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Estas ligaduras son de tipo holónoma esclerónoma. Al ser holónomas, se denotan por  $f^{(h)}$ , y ambas surgen de la construcción del sistema. Al no presentar movimiento en la coordenada  $z$ , esta se considera como 0, mientras que  $y$  solo puede variar en la línea recta dada por la inclinación del plano.

Después de identificar las ligaduras del sistema, se determina el número mínimo de coordenadas generalizadas necesarias para describir el sistema utilizando la siguiente fórmula:

$$s = 3N - K^{(h)} \quad (2)$$

$$s = 3(1) - 2 \quad (3)$$

$$\therefore s = 1 \quad (4)$$

donde  $N$  es el número de cuerpos del sistema y  $K^{(h)}$  el número de ligaduras del sistema, resultando en un mínimo de 1 coordenada generalizada para este caso específico.

La energía cinética y la energía potencial del sistema estarían dadas por:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + (-\dot{x} \tan \alpha)^2) \quad (5)$$

$$V = mg(x \tan \alpha + h) \quad (6)$$

El lagrangiano es entonces:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \sec^2 \alpha + mgx \tan \alpha - mgh \quad (7)$$

en términos de solo una coordenada.

## 2.1. Preguntas emergentes y aclaraciones

*¿Cuál es la diferencia entre los tipos de ligadura holónomas y no holónomas?*

- Las ligaduras holónomas se pueden representar por una igualdad i.e.  $f(r_i, t) = 0$ , mientras que las no holónomas se representan por una desigualdad e.g.  $f(r_i, t) < 0$

El director Alfonso Leyva pregunta: *¿Cuántos son los grados de libertad del sistema?* Es un 1 grado de libertad, siendo la coordenada  $x$  el eje de movimiento. El director realiza otra pregunta, *Si está en el plano  $xy$ , ¿por qué no se toma  $y$ ?* La razón es que  $y$  depende de  $x$ , es decir, el movimiento está parametrizado con dependencia en  $x$ , resultando en un solo grado de libertad.

## 2.2. Ecuación de movimiento del sistema

Retomando con la exposición, al tener el Lagrangiano del sistema dependiente de una sola coordenada, se obtiene la ecuación de movimiento usando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$m\ddot{x} \sec^2 \alpha - mg \tan \alpha = 0 \quad (8)$$

$$\therefore \ddot{x} = g \sin \alpha \cos \alpha \quad (9)$$

A partir de esta última ecuación se puede obtener la expresión para la velocidad y posición por mediante integración

$$\dot{x} = gt \sin \alpha \cos \alpha + A \quad (10)$$

$$x = \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha \cos \alpha + At + B \quad (11)$$

Donde  $A$  y  $B$  son constantes que se determinan utilizando las condiciones iniciales del sistema.

### 3. Maquina de Atwood Simple

La maquina de Atwood simple consiste de dos masas conectadas por una cuerda la cual reposa sobre una polea. Es simple debido a que se toma la cuerda como inextensible y sin masa, al igual que la polea. La polea no presenta fricción con la cuerda y se presenta el diagrama en la Figura 2. La maquina cuenta con dos propiedades que la define:

- Si  $m_1 = m_2 \implies a = 0$  i.e. si las masas son iguales no se presentara aceleración.
- Si  $m_1 \neq m_2 \implies a \neq 0$  i.e. si las masas son diferentes el movimiento sera acelerado.

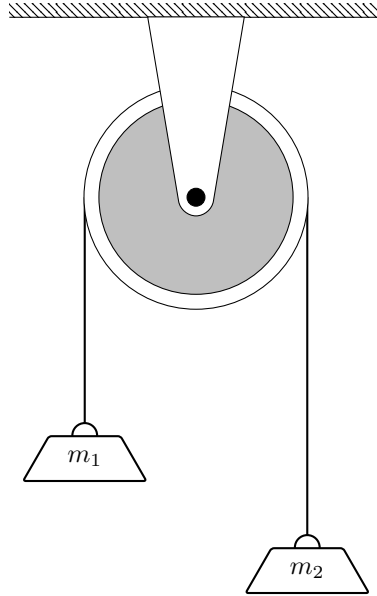


Figura 2: Diagrama de Maquina de Atwood Simple

#### 3.1. Preguntas emergentes

Después del planteamiento del sistema, el director Alfonso Leyva pregunta: *¿Por qué es la cuerda inextensible y sin masa? ¿Cuales son las implicaciones de que la cuerda tuviese masa?* Si la cuerda no fuese inextensible se comportaría como un tipo de resorte y aparecería una fuerza y coeficiente adicional. Mientras que la masa supone la necesidad de una ecuación adicional para el sistema, pasando de tener 2 a 3 cuerpos.

#### 3.2. Ecuaciones de movimiento del sistema

Por la construcción del sistema se tienen las siguientes condiciones de ligadura:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \implies f_1^{(h)} = x_1 = 0 \\ z_1 = 0 \implies f_2^{(h)} = z_1 = 0 \\ x_2 = 0 \implies f_3^{(h)} = x_2 = 0 \\ z_2 = 0 \implies f_4^{(h)} = z_2 = 0 \\ y_1 + y_2 = l \implies f_5^{(h)} = y_1 + y_2 - l = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} , \text{ fijan el movimiento de } m_1 \\ , \text{ fijan el movimiento de } m_2 \\ , \text{ acopla el movimiento de } m_1 \text{ y } m_2 \end{array} \quad (12)$$

Donde  $l$  es la longitud de la cuerda sin contar la parte que gira sobre la correa, este termino se podría agregar sumando  $\pi R$ ,  $R$  siendo el radio de la polea, pero al final es una constante, y la solución no se vera afectada de tan grande forma.

Una vez más, usando la Ecuación (2) se obtiene que el numero mínimo de coordenadas generalizadas para dos cuerpos con 5 ligaduras es:

$$s = 3(2) - 5 \quad (13)$$

$$\therefore s = 1 \quad (14)$$

La energía cinética y la potencial están dadas por:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{y}_1^2 + m_2 \dot{y}_2^2) \quad (15)$$

$$V = -g (m_1 y_1 + m_2 y_2) \quad (16)$$

Y el Lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (m_1 \dot{y}_1^2 + m_2 \dot{y}_2^2) + g (m_1 y_1 + m_2 y_2) \quad (17)$$

Sin embargo, el numero mínimo de coordenadas es 1, por ello se puede reemplazar  $y_2$  en función de  $y_1$  usando la ligadura  $f_5^{(h)}$ . Obteniendo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{y}_1^2 + (m_1 - m_2) g y_1 + m_2 g l \quad (18)$$

Al tener el lagrangiano, se aplica la ecuación de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento del sistema

$$\ddot{y}_1 - g \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} = 0 \quad (19)$$

Pero al tener  $\ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$

$$\ddot{y}_{1,2} = \pm g \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \quad (20)$$

Donde:

- Si  $m_1 = m_2 \implies \ddot{y}_{1,2} = 0$
- Si  $m_1 > m_2 \implies \ddot{y}_1 > 0 \quad \wedge \quad \ddot{y}_2 < 0$
- Si  $m_1 < m_2 \implies \ddot{y}_1 < 0 \quad \wedge \quad \ddot{y}_2 > 0$

lo cual esta en acuerdo con lo establecido al plantear el problema.

## 4. Profundización en el Concepto de Ligadura

**Definición** (Ligadura). Las *ligaduras* son funciones que establecen una relación entre coordenadas generalizadas.

Hay dos tipos generales de ligaduras:

- **Estructurales o de Construcción:** Son dadas por como se construye el sistema.
- **De Activación:** Entregan información de la evolución del sistema y dependen de como se ponga el sistema a funcionar.

Las ligaduras se pueden tomar como fuerzas de tipo  $f(r_i, \dot{r}_i, t)$  y por el método de multiplicadores de Lagrange pueden ser obtenidas.

Adicionalmente se tienen las ecuaciones de ligadura y su clasificación:

- **Unilaterales** La relación entre variables no puede ser expresada por medio de una igualdad i.e.  $f \neq f(r_i, \dot{r}_i, t)$ .
- **Bilateral** Pueden ser expresadas por medio de igualdades, correspondiendo a la fase activa de una ligadura unilateral. Estas se pueden dividir en:
  - Cinemáticas:  $f = f(r_i, \dot{r}_i, t)$ .
  - Geométricas:  $f = f(r_i, t)$ .
  - Estacionarias:  $f = f(r_i)$ .

### 4.1. Clasificación de Sistemas Físicos

Según las ligaduras que posea un sistema puede ser clasificado de las siguientes formas

- **Holónimo:** Si todas las ligaduras son geométricas o cinemáticas integrables i.e.  $\forall f, f = f(r_i, t) \quad \forall f = f(r_i, \dot{r}_i, t) \exists \int f$ .
  - Esclerónimo: Si todas las ligaduras son estacionarias i.e.  $\forall f, f = f(r_i)$ .
  - Reónimo: Si alguna de las ligaduras depende explícitamente del tiempo e.g.  $f = f(r_i, t)$ .
- **No Holónimo:** Si alguna de sus ligaduras es cinemática no integrable i.e.  $\exists f = f(r_i, \dot{r}_i, t) : \nexists \int f$ .

Los dos sistemas tratados fueron del tipo *holónimo esclerónimo*, por ello surgió la pregunta *¿Cual seria un ejemplo de un sistema no holónimo?* Se da como ejemplo un disco que rueda sobre un plano sin deslizarse.

Figura 3: Disco Rodando Sobre un Plano sin Deslizamiento

Para ese sistema descrito por la Figura 3, pose las siguientes ligaduras:

$$\begin{cases} \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi &= R\dot{\theta} \\ \dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi &= 0 \end{cases} \quad (21)$$

Expresando las ligaduras de forma diferencial:

$$\cos \varphi dx + \sin \varphi dy = R d\theta \quad (22)$$

$$\sin \varphi dx - \cos \varphi dy = 0 \quad (23)$$

De la Ecuación (22) se obtiene

$$\partial_x \theta = \frac{1}{R} \cos \varphi \quad \wedge \quad \partial_y \theta = \frac{1}{R} \sin \varphi \quad (24)$$

y reemplazando en Ecuación (23) se obtiene

$$\partial_y \theta dx = \partial_x \theta dy \quad \Longleftrightarrow \quad x = y \quad (25)$$

Esto muestra que la ligadura es integrable solo si el disco se mueve en la linea recta dada por  $x = y$ , del resto no es integrable y el sistema seria no holónomo.

## 5. Aplicación

Finaliza la exposición y el director Alfonso Leyva propone un problema para aplicar lo expuesto.

El problema consiste en un pingüino sobre un iglu de forma esférica, el cual se desliza sobre el mismo hasta caer al suelo. Se busca encontrar el angulo critico con respecto al centro del iglu en el cual el pingüino deja de estar en contacto con el iglu y procede a seguir en caída libre. La Figura 4 muestra un diagrama del problema.

Figura 4: Diagrama del Sistema

Debido a la naturaleza del sistema, se utilizan las coordenadas polares donde la energía cinética y potencial están dadas por:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (26)$$

$$V = -mgr \cos \theta \quad (27)$$

El lagrangiano resultando en:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - mgr \cos \theta \quad (28)$$

La ligadura de este sistema es  $f = r - R$ , es del tipo de activación ya que representa si la fuerza normal esta actuando, ya que después del angulo critico no hay contacto con el iglu. Debido a esto, toca utilizar la ecuacion de Euler-Lagrange pero igualado a una fuerza generalizada i.e.

$$\frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}} \mathcal{L}) - \partial_q \mathcal{L} = \lambda \partial_q f \quad (29)$$

donde  $\lambda$  representa un parámetro de ajuste o “*fine tuning*”.

Aplicando esta ultima ecuación se obtiene

$$m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 + g \cos \theta) = \lambda \quad (30)$$

$$2r \dot{r} \dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta} - gr \sin \theta = 0 \quad (31)$$

Debido a la ligadura,  $r = R \implies r^{(n)} = 0$  las ecuaciones se simplifican ha:

$$-mR \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta = \lambda \quad (32)$$

$$R^2 \ddot{\theta} - gR \sin \theta = 0 \quad (33)$$

Usando  $\ddot{\theta} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ , e integrando la Ecuación (33) se obtiene

$$\dot{\theta}|_{\theta_c} = \frac{2}{R} g (1 - \cos \theta_c) \quad (34)$$

Reemplazando en Ecuación (32) y tomando las condiciones  $\lambda = 0 \implies r = R \theta = \theta_c$ . Se obtiene la expresión del ángulo crítico igual a:

$$\cos \theta_c = \frac{2}{3} \tag{35}$$

A partir de aplicar estas condiciones surge la pregunta *¿Por qué se toma  $\dot{r} = 0$  si en ese punto la velocidad no necesariamente es 0 y el movimiento sigue?* La razón radica en que el planteamiento va hasta el punto que se detiene el contacto, no se pretende describir lo que sucede después.