

Documento Protocolario 06

Mittle-Seminar

22 de abril de 2024

1. Reprogramación

Siendo aproximadamente las 8:40 del 20 de Abril, 2024, se propone una reprogramación de futuros temas de exposición y fechas las para secciones del seminario. Se designa a Julian Avila como el responsable de llevar el protocolo de la sección.

- Corchetes de Poisson (Zaudi Gómez, Julián Aros) - 27 de Abril
- Teorema de Noether (Mauricio Guevara) - 4 de Mayo
- Transformaciones canónicas (Camilo Huertas) - 11 de Mayo
- Dispersión de Rutherford (Sebastian Rodriguez, Issabela Ortiz) - 13 de Mayo
- Ensambls (Nicolas Sandoval, Daniela Torres) - 13 de Mayo
- Gases Versión 1. (Julian Avila) - 25 de Mayo
- Gases Versión 2. (Andres Torres) - 25 de Mayo
- Potenciales Termodinámicos (Alexei Duran, Diego Acosta) - 1 de Junio

Seminaristas Presentes

- Julián Aros
- Andrés Torres
- Mauricio Guevara
- Luciana Rengifo
- Estaban Neira
- Daniela Torres
- Zaudí Gómez
- Diego Acosta
- Camilo Huertas
- Nicolas Sandoval
- Juan de los Rios
- Santiago Talero
- Laura Triana

- Sebastián Manrique
- Alexei Duran
- Julian Avila

1.0.1. Seminaristas Ausentes

- Alejandra Moreno
- Issabel Ortiz
- Sebastián Rodriguez
- Sofía Cortez
- Johan Barrera

2. Inicio de Sección y Plano Inclinado

A las 9:07, comienza la exposición a cargo de Sebastián Manrique y Santiago Talero, titulada **El Plano Inclinado y la Maquina de Atwood Simple**.

Se utilizan dos sistemas comunes en física para explicar el concepto de ligadura o constricción.

El sistema consiste en una masa m sobre un plano inclinado un ángulo α , sin fricción, como se muestra en la Figura 1.

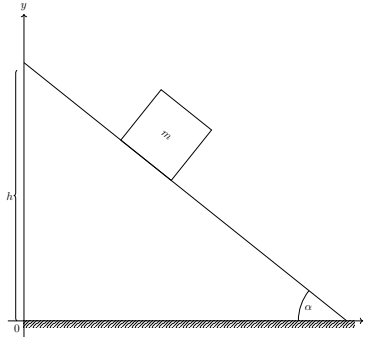


Figura 1: Diagrama del Plano Inclinado.

Como una primera definición simple de ligadura se dice que: Es una restricción que se le impone al sistema.

Para el plano inclinado se tienen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} z = 0 & \implies f_1^{(h)} = 0 \\ y = -x \tan \alpha + h & \implies f_2^{(h)} = y + x \tan \alpha - h = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Estas ligaduras son de tipo holónoma esclerónoma. Al ser holónomas, se denotan por $f^{(h)}$, y ambas surgen de la construcción del sistema. Al no presentar movimiento en la coordenada z , esta se considera como 0, mientras que y solo puede variar en la línea recta dada por la inclinación del plano.

Después de identificar las ligaduras del sistema, se determina el número mínimo de coordenadas generalizadas necesarias para describir el sistema utilizando la siguiente fórmula:

$$s = 3N - K^{(h)} \quad (2)$$

$$s = 3(1) - 2 \quad (3)$$

$$\therefore s = 1 \quad (4)$$

donde N es el numero de cuerpos del sistema y $K^{(h)}$ el numero de ligaduras del sistema, resultando en un mínimo de 1 coordenada generalizada para este caso específico.

La energía cinética y la energía potencial del sistema estarían dadas por:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + (-\dot{x}\tan\alpha)^2) \quad (5)$$

$$V = mg(x\tan\alpha + h) \quad (6)$$

El lagrangiano es entonces:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}\sec^2\alpha + mgx\tan\alpha - mgh \quad (7)$$

en términos de solo una coordenada.

2.1. Preguntas emergentes y aclaraciones

¿Cuál es la diferencia entre los tipos de ligadura holónomas y no holónomas?

- Las ligaduras holónomas se pueden representar por una igualdad i.e. $f(r_i, t) = 0$, mientras que las no holónomas se representan por una desigualdad e.g. $f(r_i, t) < 0$

El director Alfonso Leyva pregunta: *¿Cuántos son los grados de libertad del sistema?* Es un 1 grado de libertad, siendo la coordenada x el eje de movimiento. El director realiza otra pregunta, *Si está en el plano xy , ¿por qué no se toma y ?* La razón es que y depende de x , es decir, el movimiento está parametrizado con dependencia en x , resultando en un solo grado de libertad.

2.2. Ecuación de movimiento del sistema

Retomando con la exposición, al tener el Lagrangiano del sistema dependiente de una solo coordenada, se obtiene la ecuación de movimiento usando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$m\ddot{x}\sec^2\alpha - mg\tan\alpha = 0 \quad (8)$$

$$\therefore \ddot{x} = g\sin\alpha\cos\alpha \quad (9)$$

A partir de esta ultima ecuación se puede obtener la expresión para la velocidad y posición por mediante integración

$$\dot{x} = gt\sin\alpha\cos\alpha + A \quad (10)$$

$$x = \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha\cos\alpha + At + B \quad (11)$$

Donde A y B son constantes que se determinan utilizando las condiciones iniciales del sistema.

3. Maquina de Atwood Simple

La maquina de Atwood simple consiste de dos masas conectadas por una cuerda que reposa sobre una polea. Es considerada porque se asume que la cuerda es inextensible y sin masa, al igual que la polea, y la polea no presenta fricción con la cuerda. Se presenta el diagrama en la Figura 2. La maquina cuenta con dos propiedades que la definen:

- Si $m_1 = m_2 \implies a = 0$ i.e. si las masas son iguales, no hay aceleración.
- Si $m_1 \neq m_2 \implies a \neq 0$ i.e. si las masas son diferentes, el movimiento sera acelerado.

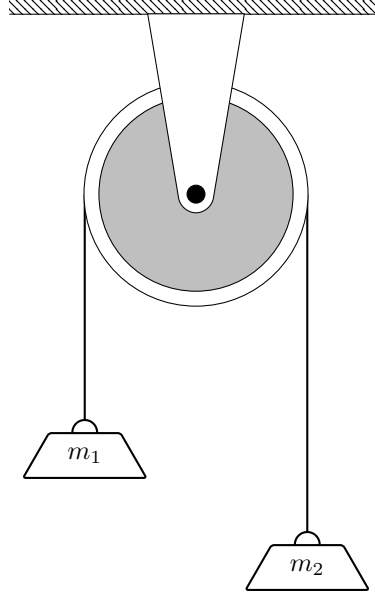


Figura 2: Diagrama de Máquina de Atwood Simple.

3.1. Preguntas emergentes

Después de presentar el sistema, el director Alfonso Leyva pregunta: ¿Por qué es la cuerda inextensible y sin masa? ¿Cuales son las implicaciones de que la cuerda tuviera masa? Si la cuerda no fuera inextensible, se comportaría como un tipo de resorte, introduciendo fuerzas y coeficientes adicionales. Además, si tuviera masa, se necesitaría una ecuación adicional para el sistema, pasando de tener 2 a 3 cuerpos.

3.2. Ecuaciones de movimiento del sistema

Debido a la construcción del sistema, se tienen las siguientes condiciones de ligadura:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ z_1 = 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} f_1^{(h)} = x_1 = 0 \\ f_2^{(h)} = z_1 = 0 \end{array} \right. & , \text{ fijan el movimiento de } m_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ z_2 = 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} f_3^{(h)} = x_2 = 0 \\ f_4^{(h)} = z_2 = 0 \end{array} \right. & , \text{ fijan el movimiento de } m_2 \\ y_1 + y_2 = l \implies f_5^{(h)} = y_1 + y_2 - l = 0 & , \text{ acopla el movimiento de } m_1 \text{ y } m_2 \end{array} \right. \quad (12)$$

Donde l es la longitud de la cuerda sin contar la parte que gira sobre la polea. Aunque se podría agregar πR , siendo R el radio de la polea, esta adición no afectaría significativamente la solución.

Usando la Ecuación (2), se determina que el número mínimo de coordenadas generalizadas para dos cuerpos con 5 ligaduras es:

$$s = 3(2) - 5 \quad (13)$$

$$\therefore s = 1 \quad (14)$$

La energía cinética y la potencial están dadas por:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{y}_1^2 + m_2 \dot{y}_2^2) \quad (15)$$

$$V = -g (m_1 y_1 + m_2 y_2) \quad (16)$$

Y el Lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (m_1 \dot{y}_1^2 + m_2 \dot{y}_2^2) + g (m_1 y_1 + m_2 y_2) \quad (17)$$

Sin embargo, el numero mínimo de coordenadas es 1, por lo que se puede reemplazar y_2 en función de y_1 usando la ligadura $f_5^{(h)}$. Obteniendo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{y}_1^2 + (m_1 - m_2) g y_1 + m_2 g l \quad (18)$$

Al tener el Lagrangiano, se aplica la ecuación de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$\ddot{y}_1 - g \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} = 0 \quad (19)$$

Debido a que $\ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$

$$\ddot{y}_{1,2} = \pm g \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \quad (20)$$

Donde:

- Si $m_1 = m_2 \implies \ddot{y}_{1,2} = 0$
- Si $m_1 > m_2 \implies \ddot{y}_1 > 0 \quad \wedge \quad \ddot{y}_2 < 0$
- Si $m_1 < m_2 \implies \ddot{y}_1 < 0 \quad \wedge \quad \ddot{y}_2 > 0$

Lo cual esta en acuerdo con lo establecido al plantear el problema.

4. Profundización en el Concepto de Ligadura

Definición (Ligadura). Las *ligaduras* son funciones que establecen una relación entre las coordenadas generalizadas de un sistema.

Existen dos tipos generales de ligaduras:

- **Estructurales o de Construcción:** Se determinan por como se construye el sistema.
- **De Activación:** Proporcionan información sobre la evolución del sistema y dependen de cómo se activa el sistema.

Las ligaduras se pueden tomar como fuerzas de tipo $f(r_i, \dot{r}_i, t)$ y pueden obtenerse mediante el método de los multiplicadores de Lagrange.

Además, las ecuaciones de las ligaduras se pueden clasificar en:

- **Unilaterales** La relación entre variables no puede ser expresada por medio de una igualdad i.e. $f \neq f(r_i, \dot{r}_i, t)$.
- **Bilateral** Pueden ser expresadas por medio de igualdades y corresponden a la fase activa de una ligadura unilateral. Estas se pueden clasificar en:
 - Cinemáticas: $f = f(r_i, \dot{r}_i, t)$.
 - Geométricas: $f = f(r_i, t)$.
 - Estacionarias: $f = f(r_i)$.

4.1. Clasificación de Sistemas Físicos

Los sistemas físicos pueden clasificarse según las ligaduras que posean de la siguiente manera:

- **Holónimo:** Si todas las ligaduras son geométricas o cinemáticas integrables i.e. $\forall f, f = f(r_i, t) \quad \forall f = f(r_i, \dot{r}_i, t) \exists \int f$.
 - Esclerónimo: Si todas las ligaduras son estacionarias i.e. $\forall f, f = f(r_i)$.
 - Reónimo: Si alguna de las ligaduras depende explícitamente del tiempo e.g. $f = f(r_i, t)$.
- **No Holónimo:** Si alguna de sus ligaduras es cinemática no integrable i.e. $\exists f = f(r_i, \dot{r}_i, t) : \nexists \int f$.

Los dos sistemas tratados fueron del tipo *holónimo esclerónimo*, por ello surgió la pregunta ¿Cual seria un ejemplo de un sistema no holónimo? Se da como ejemplo un disco que rueda sobre un plano sin deslizarse, como se muestra en la Figura 3.

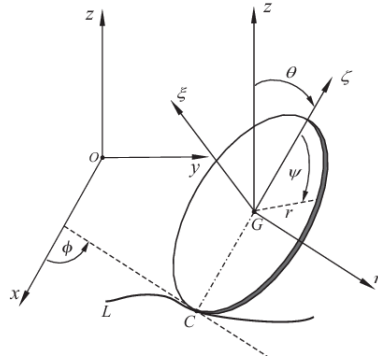


Figura 3: Disco Rodando Sobre un Plano sin Deslizamiento [1].

Para este sistema, se tiene las siguientes ligaduras:

$$\begin{cases} \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi = R\dot{\theta} \\ \dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Expresando las ligaduras de forma diferencial, obtenemos:

$$\cos \varphi dx + \sin \varphi dy = R d\theta \quad (22)$$

$$\sin \varphi dx - \cos \varphi dy = 0 \quad (23)$$

De la Ecuación (22) se deduce

$$\partial_x \theta = \frac{1}{R} \cos \varphi \quad \wedge \quad \partial_y \theta = \frac{1}{R} \sin \varphi \quad (24)$$

y reemplazando en Ecuación (23) obtenemos

$$\partial_y \theta dx = \partial_x \theta dy \quad \Longleftrightarrow \quad x = y \quad (25)$$

Esto muestra que la ligadura es integrable solo si el disco se mueve en la línea recta dada por $x = y$, de lo contrario, no es integrable y el sistema sería no holónimo.

5. Aplicación

Finaliza la exposición y el director Alfonso Leyva propone un problema para aplicar lo expuesto.

El problema consiste en un pingüino sobre un iglú de forma esférica, el cual se desliza sobre el mismo hasta caer al suelo. Se busca encontrar el ángulo crítico con respecto al centro del iglú en el cual el pingüino deja de estar en contacto con el iglú y procede a seguir en caída libre. La ?? muestra un diagrama del problema.

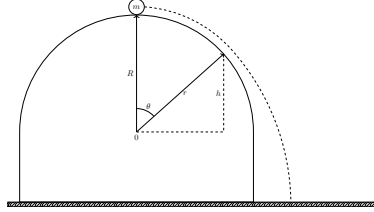


Figura 4: Diagrama del Sistema.

Debido a la naturaleza del sistema, se utilizan las coordenadas polares donde la energía cinética y potencial están dadas por:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \quad (26)$$

$$V = -mgr \cos \theta \quad (27)$$

El Lagrangiano resulta en:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \cos \theta \quad (28)$$

La ligadura de este sistema es $f = r - R$, es del tipo de activación ya que representa si la fuerza normal esta actuando, ya que después del ángulo critico no hay contacto con el iglú. Debido a esto, se debe utilizar la ecuacion de Euler-Lagrange igualada a una fuerza generalizada i.e.

$$\frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}}\mathcal{L}) - \partial_q\mathcal{L} = \lambda \partial_q f \quad (29)$$

donde λ representa un parámetro de ajuste o “fine tuning”.

Aplicando esta ultima ecuación se obtiene

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + g \cos \theta) = \lambda \quad (30)$$

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} - gr \sin \theta = 0 \quad (31)$$

Debido a la ligadura, $r = R \implies r^{(n)} = 0$ las ecuaciones se simplifican a:

$$-mR\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta = \lambda \quad (32)$$

$$R^2\ddot{\theta} - gR \sin \theta = 0 \quad (33)$$

Usando $\ddot{\theta} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$, e integrando la Ecuación (33), se obtiene

$$\dot{\theta}|_{\theta_c} = \frac{2}{R}g(1 - \cos \theta_c) \quad (34)$$

Reemplazando en Ecuación (32) y tomando las condiciones $\lambda = 0 \implies r = R \theta = \theta_c$. Se obtiene la expresión del ángulo critico igual a:

$$\cos \theta_c = \frac{2}{3} \quad (35)$$

Al aplicar estas condiciones, surge la pregunta: *¿Por qué se toma $\dot{r} = 0$ si en ese punto la velocidad no necesariamente es 0 y el movimiento sigue?* La razón radica en que el planteamiento va hasta el punto que se detiene el contacto, no se pretende describir lo que sucede después.

Con esto se da por finalizada la sección del seminario.

Referencias

- [1] Aleksandar Obradovic, Slaviša Šalinić y Radoslav Radulovic. “The brachistochronic motion of a vertical disk rolling on a horizontal plane without slip”. En: *Theoretical and Applied Mechanics* 44 (dic. de 2017), págs. 237-254. DOI: [10.2298/TAM171002015O](https://doi.org/10.2298/TAM171002015O).