

# Rayo de Electrones Bitácora de Laboratorio

Sebastian Rodríguez

Laura Torres

Julian Avila

Universidad Distrital Francisco José de Caldas



# Índice general

<b>1</b>	<b>Análisis del Montaje Experimental</b>	<b>4</b>
1.1	Modelos Clásicos con Álgebra Geométrica . . . . .	4
1.1.1	Modelo I: Campo Magnético Espacialmente Uniforme . . . . .	4
	Análisis de la Dinámica del Campo Magnético . . . . .	5

# 1 Análisis del Montaje Experimental

El montaje experimental presenta simetrías notables que determinan los posibles efectos a observar.

Independientemente de la dirección relativa de los campos magnéticos generados por cada par de bobinas coaxiales, el sistema exhibe una simetría de reflexión respecto a los planos  $xz$ ,  $yz$  y  $xy$ . Esto se debe a la simetría axial intrínseca de las bobinas y a su disposición simétrica respecto al origen.

Además, si ambos pares de bobinas operan a la misma frecuencia, se obtiene una simetría rotacional de  $\pi/2$  en el plano  $yz$ . En el caso general de frecuencias distintas, esta se reduce a una simetría de rotación de  $\pi$ . Estas simetrías son fundamentales para la construcción de los modelos teóricos y la simplificación de los cálculos. Por tanto, se espera que los patrones observados en la pantalla reflejen estas mismas simetrías.

## 1.1. Modelos Clásicos con Álgebra Geométrica

Se postula que la dinámica del electrón está gobernada por la fuerza de Lorentz. En el régimen de bajas energías ( $4.1 \text{ keV} \ll 511 \text{ keV}$ ), los efectos relativistas son despreciables. De esta forma, la ecuación diferencial a resolver es la ecuación (1.1), donde  $-e$  y  $m$  son la carga y la masa del electrón, respectivamente. Los campos son el vector eléctrico  $\mathbf{E}$  y el bivector magnético  $\mathbf{B}$ .

La ecuación se presenta en el formalismo del álgebra geométrica  $\mathcal{Cl}_3(\mathbb{R})$ . El término  $\langle \dot{\mathbf{x}}\mathbf{B} \rangle_1$  denota la proyección de grado-1 (vector) del producto geométrico, el cual corresponde a la fuerza magnética.

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -e(\mathbf{E} + \langle \dot{\mathbf{x}}\mathbf{B} \rangle_1) \quad (1.1)$$

Para todos los modelos se asume que no existe interacción electrón-electrón. Aplicando las ecuaciones de Maxwell homogéneas,

$$\nabla \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (1.2)$$

$$\langle \nabla \mathbf{B} \rangle_3 = 0, \quad (1.3)$$

se deduce la existencia de un potencial vectorial magnético  $\mathbf{A} \in \mathcal{Cl}^1$  (i.e.  $A = \langle A \rangle_1$ ) tal que  $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \equiv \langle \nabla \mathbf{A} \rangle_2$ . Sustituyendo en la ley de Faraday, se obtiene el campo eléctrico inducido en la ausencia de un potencial escalar ( $\phi = 0$ ):

$$\nabla \mathbf{E} = -\partial_t \langle \nabla \mathbf{A} \rangle_2 \implies \langle \nabla (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) \rangle_2 = 0 \implies \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}. \quad (1.4)$$

### 1.1.1. Modelo I: Campo Magnético Espacialmente Uniforme

En una configuración de bobinas de Helmholtz, donde las corrientes fluyen en la misma dirección, se genera un campo magnético aditivo y notablemente uniforme en la región central entre ellas. Como primera aproximación, se postula que el campo magnético  $\mathbf{B}$  es espacialmente uniforme y depende únicamente del tiempo.

El campo total es la superposición de los campos generados por cada par de bobinas. En el formalismo de álgebra geométrica, este bivector es:

$$\mathbf{B}(t) = B_2(t)e_{31} + B_3(t)e_{12}, \quad (1.5)$$

$$B_i(t) = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mu_0 n I_i(t)}{R} =: B_0 I_i(t), \quad (1.6)$$

donde  $\mu_0$  es la permeabilidad del vacío,  $n$  el número de vueltas de cada bobina,  $R$  su radio, y  $I_i(t)$  la corriente de alimentación. El subíndice  $i \in \{2, 3\}$  denota el eje cartesiano correspondiente.

Dada la no unicidad del potencial vectorial magnético  $\mathbf{A}$ , se adopta el *gauge simétrico*:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x} \mathbf{B}(t) \rangle_1. \quad (1.7)$$

Esta elección satisface correctamente la condición  $\langle \nabla \mathbf{A} \rangle_2 = \mathbf{B}$ . El campo eléctrico inducido se deriva de  $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$ , resultando en:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{x} \partial_t \mathbf{B}(t) \rangle_1. \quad (1.8)$$

### Análisis de la Dinámica del Campo Magnético

La estructura temporal del campo magnético, descrita en la ??, determina la naturaleza de la fuerza ejercida sobre el electrón. Para visualizar esta dinámica, se analiza la evolución del vector dual al bivector magnético,  $\mathbf{B}^* = \mathbf{B} e_{123}^{-1}$ . Esto equivale a realizar una gráfica paramétrica de la componente  $B_3(t)$  en función de  $B_2(t)$ .

Cuando las corrientes  $I_2(t)$  e  $I_3(t)$  son sinusoidales, la trayectoria resultante es una *figura de Lissajous*. La morfología de esta figura depende críticamente de la razón de frecuencias,  $\omega_2/\omega_3$ , y del desfase,  $\phi$ , entre ambas señales.

En este experimento se utilizaron también señales cuadradas, generando dinámicas distintas. Para dos señales cuadradas, la trayectoria traza un perímetro rectangular, con transiciones que dependen de la relación de frecuencias. La combinación de una señal sinusoidal y una cuadrada produce una trayectoria confinada entre dos segmentos rectos, conectados por arcos sinusoidales.

La figura 1 ilustra estas tres configuraciones para una razón de frecuencia de 3:1 y un desfase nulo, mostrando la rica variedad de campos magnéticos temporales que se pueden generar.

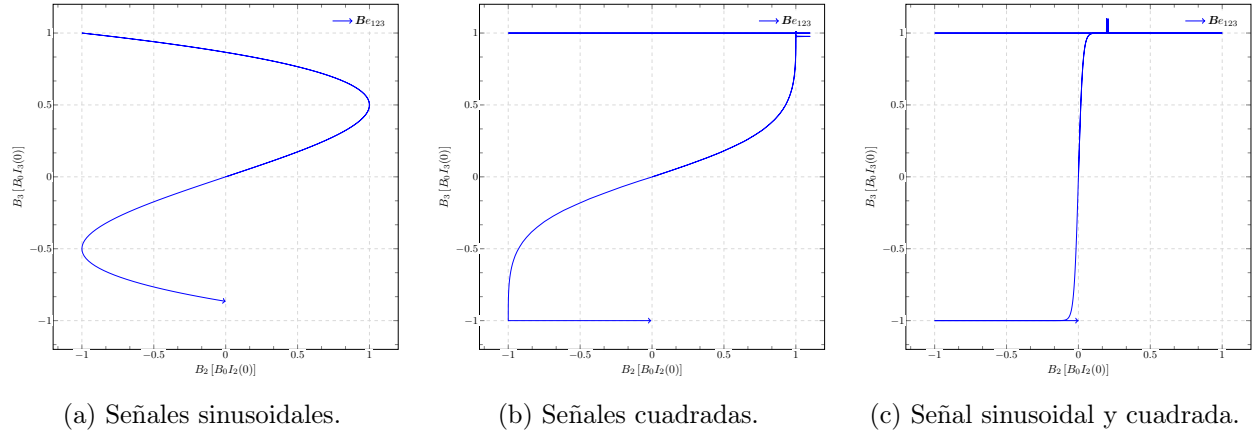


Figura 1: Evolución del vector de campo magnético  $\mathbf{B}^*$  en el plano  $yz$  para distintas formas de onda de la corriente. Se muestra una razón de frecuencias de 3:1 y un desfase  $\phi = 0$ .