

# Modos Normales

Sebastián Rodríguez<sup>1</sup>, Laura Torres<sup>1</sup>, Julian Avila<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Física, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

## 1. Introducción

En el estudio de la mecánica clásica, la comprensión del comportamiento dinámico de los sistemas es fundamental. Particularmente, los sistemas oscilatorios juegan un papel crucial en una amplia gama de fenómenos, desde el movimiento de un péndulo simple hasta las vibraciones de estructuras complejas. A menudo, estos sistemas involucran múltiples componentes que interactúan entre sí, dando lugar a un comportamiento acoplado que es más complejo que la suma de sus partes individuales.

Una herramienta analítica extraordinariamente potente para desentrañar esta complejidad es la aproximación de pequeñas oscilaciones. Esta aproximación establece que cualquier sistema físico, bajo ciertas condiciones y cerca de una posición de equilibrio estable, puede ser linealizado. Dicho de otro modo, el sistema se comporta de manera análoga a un conjunto de osciladores armónicos simples acoplados. La fuerza de esta aproximación reside en que permite transformar problemas intrincados en un marco matemático más manejable, revelando las frecuencias naturales y los modos normales de oscilación del sistema.

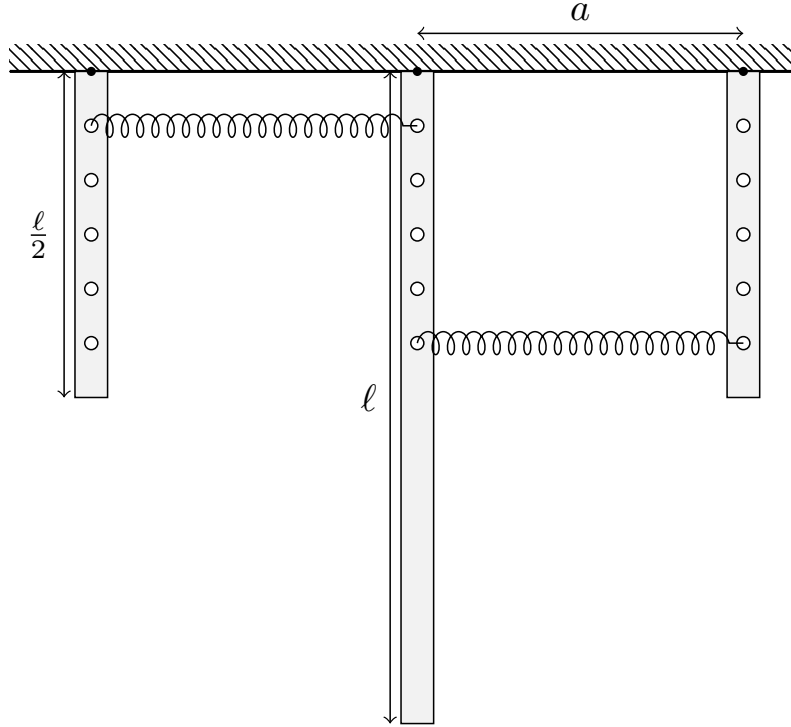
Los modos normales representan patrones de movimiento colectivo en los que todas las partes del sistema oscilan con la misma frecuencia y fase relativa constante. Visualizar y comprender estos modos es esencial, ya que ofrecen una perspectiva fundamental sobre la estabilidad y la respuesta dinámica de un sistema. En mecánica clásica, los modos normales son la clave para entender fenómenos como la resonancia, la propagación de ondas en medios continuos y la transferencia de energía entre osciladores [1].

Este concepto trasciende la física clásica y sienta las bases para la comprensión de fenómenos cuánticos. La idea de estados propios discretos y sus correspondientes valores propios en sistemas cuánticos tiene un paralelismo conceptual directo con los modos normales y las frecuencias naturales en la mecánica clásica. Es, por tanto, un primer paso indispensable para adentrarse en la mecánica cuántica y la comprensión de sistemas de múltiples partículas [2].

En este trabajo, se presenta un sistema de tres péndulos acoplados diseñado específicamente para visualizar y estudiar experimentalmente sus modos normales de oscilación. A través de este sistema, se busca proporcionar una plataforma que permita explorar directamente los principios de la aproximación de pequeñas oscilaciones, la determinación de frecuencias naturales y la identificación de los modos normales.

## 2. Ecuaciones de Movimiento

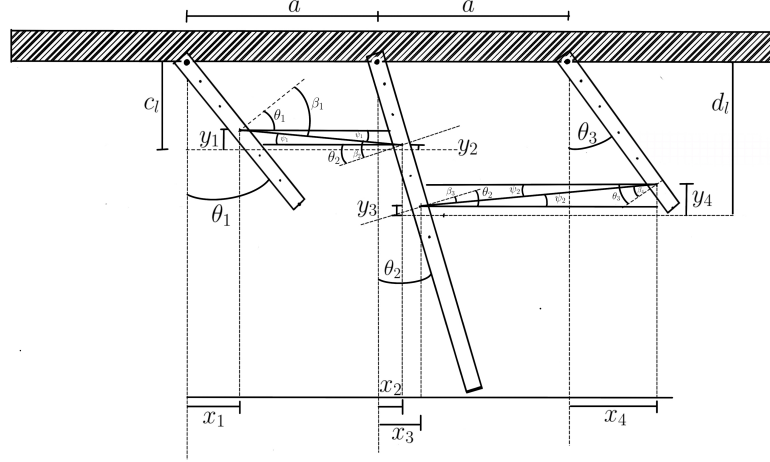
Para describir la dinámica del sistema compuesto por tres péndulos físicos, se establecen consideraciones iniciales que simplifican el análisis y la deducción de las ecuaciones de movimiento. Inicialmente, los péndulos se representan en sus puntos de equilibrio, donde los ejes de rotación están separados por una distancia  $a$ , correspondiente a la longitud natural de los muelles. Este esquema se ilustra en la figura 1.



**Figura 1:** Esquema de los péndulos en equilibrio. La distancia entre los ejes de rotación es  $a$ .

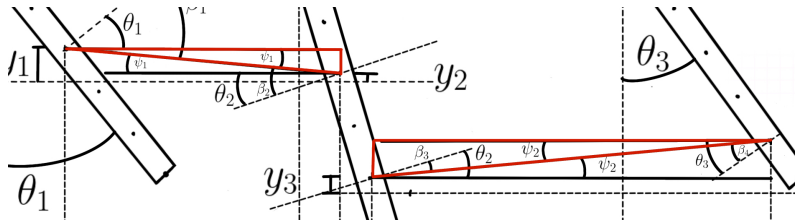
Las ecuaciones de movimiento del sistema se obtienen mediante la aplicación de la sumatoria de torques, considerando tanto las contribuciones de los resortes como la de la fuerza gravitacional. Si bien los formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano ofrecen un enfoque más general y elegante para sistemas complejos, para el presente sistema de

péndulos, la aplicación directa de la segunda ley de Newton para rotación (sumatoria de torques) resulta en un método igualmente riguroso y conceptualmente claro para la derivación de las ecuaciones de movimiento. Es necesario, entonces, encontrar una expresión para el torque gravitacional en función de cualquier ángulo  $\theta_i$ , así como una expresión para las distancias del tipo  $x_0 + \Delta x$ , que representan la elongación de los resortes en función de los ángulos  $\theta_i$  y  $\theta_{i\pm 1}$ . Las barras se enumeran de izquierda a derecha como 1, 2 y 3, según se muestra en la figura 2.



**Figura 2:** Numeración de las barras del sistema de péndulos: 1 (izquierda), 2 (central), 3 (derecha).

Al desplazar las barras 1 y 2 de su posición de equilibrio, se observa que la tangente de cada barra se desvía un ángulo  $\theta_i$  del eje horizontal. Esta condición permite construir un triángulo rectángulo con las componentes  $x_i$  e  $y_i$  de la posición del punto de aplicación de la fuerza elástica para cada barra, generalizada a cualquier fracción de la longitud  $l$ , tal como se ilustra en la figura 3.



**Figura 3:** Construcción geométrica para determinar la posición del punto de aplicación de la fuerza elástica en una barra.

Las coordenadas  $x_k$  e  $y_k$  para  $k = 1, 2$  están definidas como:

$$x_k = cl \sin(\theta_k) \quad (1)$$

$$y_k = cl \cos(\theta_k) \quad (2)$$

donde  $c$  y  $d$  son fracciones de la longitud de la barra  $l$  que indican la posición de los puntos de acople de los resortes. El triángulo resultante está definido por un ángulo  $\psi_1$ , el cual cumple la relación  $\beta_1 + \psi_1 = \theta_1$ , donde  $\beta_1$  corresponde al ángulo entre la tangente de la barra 1 y la línea recta que conecta los puntos de aplicación. A partir de este triángulo, se obtiene la expresión para la elongación del resorte entre las barras 1 y 2:

$$x_{01} + \Delta x_1 = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (a + x_2 - x_1)^2} \quad (3)$$

con  $x_{01}$  como la longitud natural del resorte. Y el ángulo  $\psi_1$  está dado por:

$$\psi_1 = \arctan\left(\frac{y_2 - y_1}{a - x_1 + x_2}\right) \quad (4)$$

De forma análoga, para el resorte entre las barras 2 y 3, se utiliza un punto de aplicación  $dl$ , resultando en:

$$\psi_2 = \arctan\left(\frac{y_4 - y_3}{a - x_3 + x_4}\right), \quad (5)$$

$$x_{02} + \Delta x_2 = \sqrt{(y_4 - y_3)^2 + (a + x_4 - x_3)^2} \quad (6)$$

Donde para  $j = 3, 4$ , las coordenadas  $x_j$  e  $y_j$  son:

$$x_j = dl \sin(\theta_j) \quad (7)$$

$$y_j = dl \cos(\theta_j) \quad (8)$$

El torque gravitacional sobre cada barra  $i$  está dado por:

$$\tau_{g_i} = y_{\text{cm}_i} m_i g \sin(\theta_i) \quad (9)$$

Donde  $y_{\text{cm}_i}$  es la posición del centro de masa de la barra  $i$ . Para los torques elásticos, se deben considerar los ángulos  $\beta_i$ , definidos como:

$$\beta_1 + \psi_1 = \theta_1, \quad \beta_2 + \psi_1 = \theta_2, \quad (10)$$

$$\beta_3 + \psi_2 = \theta_2, \quad \beta_4 + \psi_2 = \theta_3 \quad (11)$$

Es importante notar que, debido a las distintas posiciones de aplicación de los resortes entre los pares de barras, aparecen cuatro ángulos  $\beta_i$ , donde los índices 2 y 3 se refieren a la barra central. La sumatoria de torques para cada péndulo, considerando el sentido antihorario como positivo, resulta en las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\sum \tau_{m_1} = cl k_1 (\Delta x_1) \cos(\beta_1) - m_1 g y_{\text{cm}_1} \sin(\theta_1) = I_1 \ddot{\theta}_1, \quad (12)$$

$$\sum \tau_{m_2} = dlk_2(\Delta x_2) \cos(\beta_3) - clk_1(\Delta x_1) \cos(\beta_2) - m_2 g y_{cm_2} \sin(\theta_2) = I_2 \ddot{\theta}_2, \quad (13)$$

$$\sum \tau_{m_3} = -dlk_2(\Delta x_2) \cos(\beta_4) + m_3 g y_{cm_3} \sin(\theta_3) = I_3 \ddot{\theta}_3 \quad (14)$$

## Aproximaciones para Ángulos Pequeños

Con el fin de obtener una solución analítica aproximada que permita calcular las frecuencias naturales del sistema, se aplican las siguientes aproximaciones para ángulos pequeños ( $\theta \ll 1$  rad):

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &\approx \theta, \\ \cos(\theta) &\approx 1, \\ \tan(\theta) &\approx \theta. \end{aligned}$$

Aplicando estas aproximaciones, las coordenadas  $x_k$  e  $y_k$  se simplifican a:

$$\begin{aligned} x_1 &= cl\theta_1, & x_2 &= cl\theta_2 \\ x_3 &= dl\theta_2, & x_4 &= dl\theta_3 \\ y_1 &= cl, & y_2 &= cl \\ y_3 &= dl, & y_4 &= dl \end{aligned}$$

Si se cumple la condición de que las longitudes naturales de los resortes son iguales a la separación entre los ejes, es decir,  $x_{01} = x_{02} = a$ , las elongaciones de los resortes  $\Delta x_1$  y  $\Delta x_2$  se simplifican a:

$$\Delta x_1 = cl(\theta_2 - \theta_1), \quad (15)$$

$$\Delta x_2 = dl(\theta_3 - \theta_2). \quad (16)$$

Además, si se asume que  $\arctan(\psi_i) \approx \psi_i \approx 0$ , lo que implica que la fuerza elástica actúa aproximadamente en la dirección horizontal, entonces los ángulos  $\beta_i$  se aproximan a los ángulos  $\theta_i$  ( $\beta_i \approx \theta_i$ ). Esto simplifica la sumatoria de torques a:

$$I_1 \ddot{\theta}_1 = (cl)^2 k_1 (\theta_2 - \theta_1) - m_1 g y_{cm_1} \theta_1, \quad (17)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 = (dl)^2 k_2 (\theta_3 - \theta_2) - (cl)^2 k_1 (\theta_2 - \theta_1) - m_2 g y_{cm_2} \theta_2, \quad (18)$$

$$I_3 \ddot{\theta}_3 = -(dl)^2 k_2 (\theta_3 - \theta_2) + m_3 g y_{cm_3} \theta_3. \quad (19)$$

Finalmente, el sistema de ecuaciones diferenciales lineales queda expresado como:

$$\ddot{\theta}_1 = \theta_1 \left( \frac{(cl)^2 k_1 - y_{cm_1} m_1 g}{I_1} \right) + \theta_2 \left( -\frac{k_1 (cl)^2}{I_1} \right) \quad (20)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \theta_1 \left( \frac{k_1 (cl)^2}{I_2} \right) + \theta_2 \left( \frac{k_2 (dl)^2 - k_1 (cl)^2 + y_{cm_2} m_2 g}{I_2} \right) + \theta_3 \left( -\frac{k_2 (dl)^2}{I_2} \right) \quad (21)$$

$$\ddot{\theta}_3 = \theta_2 \left( -\frac{k_2(dl)^2}{I_3} \right) + \theta_3 \left( \frac{k_2(dl)^2 - y_{cm_3}m_3g}{I_3} \right) \quad (22)$$

Estas ecuaciones forman un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, que pueden ser presentadas como una ecuación matricial ecuación (23) donde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{\Theta}$  representan una matriz cuadrada diagonal con los términos de inercia, una matriz cuadrada con los términos de acople, y un vector columna con las coordenadas angulares, respectivamente.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{\Theta}} + \mathbf{K}\mathbf{\Theta} = \mathbf{0} \quad (23)$$

Este sistema linealizado permite determinar las frecuencias naturales del sistema al resolver el problema de valores propios asociado.

### Modos normales

A partir de la ecuación en forma matricial ecuación (23) se lleva a un problema de valores propios para determinar los modos normales. Esto se logra con la posibilidad de invertir la matriz con los términos inerciales e identificar la segunda derivada como el operador:

$$\mathbf{D}_t^2\mathbf{\Theta} = -\mathbf{\Omega}\mathbf{\Theta} \quad (24)$$

donde  $\mathbf{D}_t^2$  representa el operador de la segunda derivada temporal y  $\mathbf{\Omega} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$  es la matriz dinámica del sistema. Dada la complejidad del cálculo analítico para un sistema de tres grados de libertad, se emplea una solución numérica usando la librería de Python SciPy para determinar las frecuencias de los modos normales y sus correspondientes vectores propios.

## 3. Metodología Experimental

La metodología experimental se estructuró en varias etapas fundamentales: diseño y construcción del montaje, caracterización de sus componentes y adquisición de datos mediante sensores angulares.

### Construcción del Montaje

Para la construcción del sistema se utilizaron tres barras metálicas de alta densidad, lo que contribuye a la rigidez del sistema y a una mejor definición de su centro de masa. Las barras laterales tienen una longitud de  $l/2 = (28.0 \pm 0.1)$  cm, mientras que la barra central posee una longitud de  $l = (56.0 \pm 0.1)$  cm. Las masas y las posiciones de los centros de masa de cada barra fueron determinadas experimentalmente y se resumen en la cuadro 1. La posición del centro de masa,  $y_{cm_i}$ , se mide desde el punto de pivote de cada péndulo.

Las barras fueron perforadas en múltiples puntos para permitir diversas configuraciones de acople de los resortes. La figura 4 muestra las barras metálicas preparadas para el montaje.

**Cuadro 1:** Parámetros físicos de las barras empleadas en el montaje. La incertidumbre para la posición del centro de masa ( $y_{cm_i}$ ) es de 0.1 cm y para la masa ( $m_i$ ) es de 0.1 g.

$i$	$y_{cm_i}$ [cm]	$m_i$ [g]
1	14.2	600.8
2	28.0	1 216.3
3	14.0	601.8



**Figura 4:** Barras metálicas preparadas para el montaje de los péndulos, mostrando las perforaciones para el acople de resortes.

## Medición de la Constante Elástica

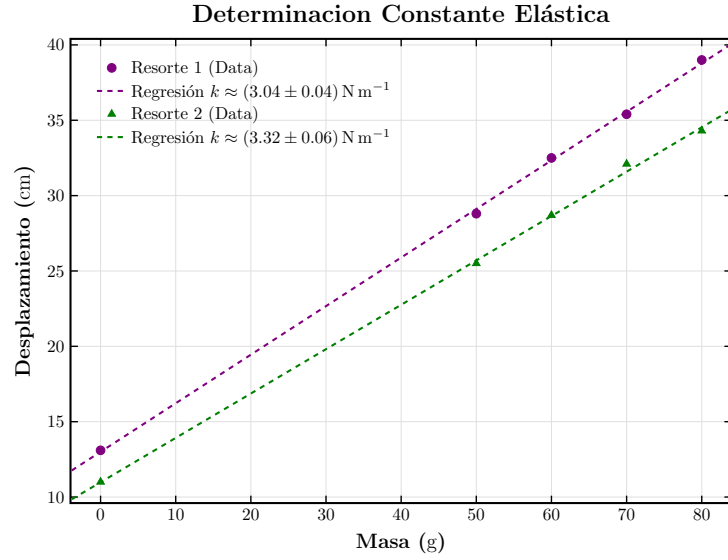
La constante elástica de los resortes empleados ( $k_1$  y  $k_2$ ) se determinó experimentalmente. Se aplicaron masas conocidas a cada resorte y se registraron los desplazamientos resultantes. Mediante una regresión lineal de los datos de fuerza (peso aplicado) versus elongación, se obtuvieron los siguientes valores para las constantes elásticas:

- $k_1 = (3.04 \pm 0.04) \text{ N m}^{-1}$
- $k_2 = (3.32 \pm 0.06) \text{ N m}^{-1}$

El proceso gráfico de determinación de estas constantes se ilustra en la figura 5.

## Integración del Sistema de Medición

Para registrar los desplazamientos angulares  $\theta_i(t)$  de cada péndulo, se integraron sensores angulares rotacionales (Cassy) en cada uno de los puntos de pivote. Las barras de los péndulos se fijaron a las poleas de los sensores utilizando alambre dulce. Aunque esta metodología de fijación podría introducir un mínimo juego mecánico, se realizó con cautela para minimizar cualquier holgura y asegurar mediciones angulares precisas. La figura 6 presenta el montaje experimental completo con los sensores integrados.



**Figura 5:** Determinación de la constante elástica de los resortes mediante regresión lineal de los datos de fuerza aplicada en función del desplazamiento.



**Figura 6:** Montaje experimental completo del sistema de tres péndulos acoplados, con los sensores angulares Cassy integrados en los pivotes.

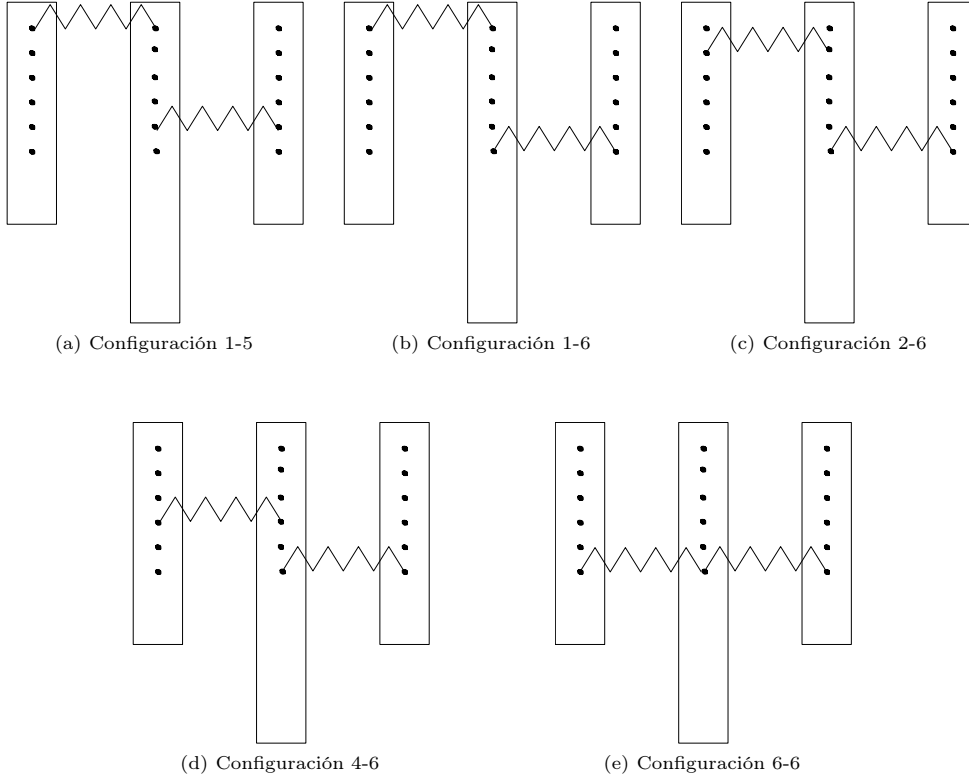
## Toma de Datos y Configuraciones Experimentales

Se realizaron mediciones bajo cinco configuraciones distintas de acoplamiento de resortes, esquematizadas en la figura 7. Para cada configuración, se investigaron tres tipos de condiciones iniciales para excitar el sistema:



- (001): Desplazamiento inicial únicamente del péndulo 3.
- (010): Desplazamiento inicial únicamente del péndulo 2.
- (101): Desplazamiento inicial simétrico de los péndulos 1 y 3 (en la misma dirección y amplitud).

Cada medición se registró durante un intervalo aproximado de 30 s, permitiendo la captura de múltiples oscilaciones completas. Los datos de los ángulos en función del tiempo fueron almacenados digitalmente para su posterior análisis y comparación con los resultados teóricos derivados de los modos normales de oscilación.



**Figura 7:** Representación esquemática de las cinco configuraciones de acoplamiento de resortes estudiadas. La nomenclatura 'X-Y' en cada subfigura (e.g., 1-5) indica los orificios específicos (numerados) en los péndulos adyacentes donde se anclaron los extremos de los resortes.

## Fundamento Teórico del Análisis Espectral

El movimiento de un sistema lineal (o linealizado, como en la aproximación de pequeñas oscilaciones) con múltiples grados de libertad puede describirse como una

superposición de sus modos normales de oscilación. Cada modo normal es un patrón de movimiento colectivo en el que todas las partes del sistema oscilan sinusoidalmente con la misma frecuencia característica y una fase relativa constante. Estas frecuencias son propiedades intrínsecas del sistema, determinadas por sus parámetros físicos (masas, longitudes, constantes de acoplamiento, etc.).

El Teorema de Fourier establece que cualquier señal periódica (o una señal de duración finita, como los datos experimentales) puede representarse como una suma de funciones sinusoidales (senos y cosenos) de diferentes frecuencias, amplitudes y fases. La Transformada de Fourier es la herramienta matemática que formaliza esta descomposición, mapeando la señal del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Al aplicar la Transformada de Fourier a una señal de movimiento como  $\theta(t)$ , se obtiene su espectro de frecuencias, el cual revela la “cantidad” (amplitud o potencia) de cada componente frecuencial presente en la señal original [3].

Cuando el sistema de péndulos acoplados oscila, su movimiento angular  $\theta_i(t)$  es, en esencia, una mezcla de las oscilaciones de sus modos normales. Por lo tanto, las frecuencias que aparecen con mayor amplitud en el espectro de Fourier de  $\theta_i(t)$  corresponden directamente a las frecuencias naturales de estos modos normales. La Transformada Rápida de Fourier (FFT) es simplemente un algoritmo computacionalmente eficiente para calcular la Transformada Discreta de Fourier (DFT) de una señal muestreada digitalmente, como la obtenida de los sensores angulares. De esta manera, la FFT permite identificar experimentalmente las frecuencias con las que el sistema “prefiere” oscilar, que son precisamente las frecuencias de sus modos normales.

El procedimiento se llevó a cabo utilizando herramientas computacionales basadas en Python. Específicamente, se empleó la función ‘fft’ del módulo ‘numpy.fft’ perteneciente a la biblioteca NumPy. Esta función calcula los coeficientes complejos de la Transformada Discreta de Fourier (DFT) de la señal angular muestreada. La magnitud al cuadrado de estos coeficientes proporciona el espectro de potencias de la señal.

## 4. Resultados y Análisis

Tras el montaje del sistema de péndulos acoplados y el registro de las mediciones mediante el sensor *Cassy*, se recopiló un conjunto de 15 series de datos. Estas series corresponden a tres condiciones iniciales distintas para cada una de las cinco configuraciones experimentales estudiadas. Los datos temporales de los ángulos de cada péndulo fueron procesados utilizando un código en Python, con el fin de generar gráficas de la evolución angular  $\theta_i(t)$  y, fundamentalmente, para determinar las frecuencias angulares principales de oscilación mediante la aplicación de la Transformada Rápida de Fourier (FFT).

En la cuadro 2 se presenta un resumen de las frecuencias angulares principales identificadas para cada péndulo, en función de la configuración del sistema y de la condición inicial aplicada. Un análisis preliminar de estos valores revela patrones interesantes: la frecuencia angular usual del péndulo 2 (el más largo) se sitúa consistentemente alrededor de 0.844 Hz, con una desviación estándar reducida de 0.009, lo que indica una notable regularidad en su comportamiento oscilatorio a esta frecuencia.

En contraste, para el péndulo 1, se identifican dos agrupaciones principales de frecuencias angulares: una en torno a 1.311 Hz (desviación estándar de 0.019) y otra cercana a 0.843 Hz (desviación estándar de 0.008). Un comportamiento similar se observa en el péndulo 3, el cual exhibe frecuencias angulares predominantes alrededor de 1.32 Hz (desviación estándar de 0.020) y 0.843 Hz (desviación estándar de 0.008). Esta dualidad en las frecuencias dominantes para los péndulos 1 y 3 sugiere la excitación selectiva de diferentes modos normales del sistema, dependiendo de la configuración de acoplamiento y las condiciones iniciales.

**Cuadro 2:** Frecuencias angulares principales de oscilación ( $f_i$ ) identificadas para cada péndulo, según la configuración experimental y las condiciones iniciales aplicadas.

Configuración	Condición Inicial	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]
1-5	001	1.272	0.841	0.021
	010	0.831	0.831	0.831
	101	1.277	0.838	1.193
1-6	001	1.315	0.838	1.200
	010	0.842	0.842	0.842
	101	1.314	0.835	1.190
2-6	001	1.330	0.846	1.229
	010	0.838	0.838	0.838
	101	1.319	0.840	1.211
4-6	001	1.326	0.855	1.326
	010	0.850	0.850	0.850
	101	1.325	0.851	1.271
6-6	001	1.314	0.855	1.330
	010	0.852	0.852	0.852
	101	1.315	0.857	1.347

## 5. Discusión

## 6. Conclusiones

## Referencias

- [1] Goldstein, H., Safko, C.P.P..J.: Classical Mechanics, p. 664. Pearson Dental

- [2] Griffiths, D.J.: Introduction to Quantum Mechanics, 2nd edn. Cambridge University Press, Cambridge (2017). Reissue of the 2004 Pearson edition by Cambridge University Press
- [3] Stein, E.M.: Fourier Analysis, 1st ed. edn. Princeton University Press. Description based on publisher supplied metadata and other sources.