

# Caracterización Experimental de las Frecuencias de Modos Normales en Péndulos Acoplados Usando la Aproximación de Pequeñas Oscilaciones

Sebastián Rodríguez<sup>1</sup>, Laura Torres<sup>1</sup>, Julian Avila<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Física, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

## Resumen

Se investigó experimentalmente el comportamiento dinámico y los modos normales de oscilación de un sistema de tres péndulos acoplados, aplicando la aproximación de pequeñas oscilaciones. La metodología incluyó el diseño y construcción del montaje, la caracterización de componentes, y la adquisición de datos de desplazamiento angular en cinco configuraciones y tres condiciones iniciales. Las ecuaciones de movimiento se derivaron mediante sumatoria de torques y la aproximación de ángulos pequeños. El análisis de datos se realizó con Transformada Rápida de Fourier (FFT) para identificar frecuencias principales, comparándolas con valores teóricos obtenidos del sistema linealizado. Los resultados experimentales identificaron las frecuencias de oscilación para cada péndulo, demostrando su dependencia de la configuración y condiciones iniciales. El péndulo central mostró una frecuencia consistente (0.844 Hz), mientras que los laterales exhibieron dualidad de frecuencias dominantes. La comparación cuantitativa con la teoría reveló una precisión notable (errores entre 0.036 % y 2.509 %). Se confirmó el papel crítico de la geometría de acoplamiento en la determinación de frecuencias y transmisión de energía, observándose pulsaciones. Se identificó una frecuencia anómala baja (0.0021 Hz) no predicha por el modelo lineal, sugiriendo efectos no lineales o amortiguamiento. Se valida la aproximación de pequeñas oscilaciones y la identificación experimental de modos normales.

## 1. Introducción

En el estudio de la mecánica clásica, la comprensión del comportamiento dinámico de los sistemas es fundamental. Particularmente, los sistemas oscilatorios juegan un papel crucial en una amplia gama de fenómenos, desde el movimiento de un péndulo simple

hasta las vibraciones de estructuras complejas. A menudo, estos sistemas involucran múltiples componentes que interactúan entre sí, dando lugar a un comportamiento acoplado que es más complejo que la suma de sus partes individuales.

Una herramienta analítica extraordinariamente potente para desentrañar esta complejidad es la aproximación de pequeñas oscilaciones. Esta aproximación establece que cualquier sistema físico, bajo ciertas condiciones y cerca de una posición de equilibrio estable, puede ser linealizado. Dicho de otro modo, el sistema se comporta de manera análoga a un conjunto de osciladores armónicos simples acoplados. La fuerza de esta aproximación reside en que permite transformar problemas intrincados en un marco matemático más manejable, revelando las frecuencias naturales y los modos normales de oscilación del sistema.

Los modos normales representan patrones de movimiento colectivo en los que todas las partes del sistema oscilan con la misma frecuencia y fase relativa constante. Visualizar y comprender estos modos es esencial, ya que ofrecen una perspectiva fundamental sobre la estabilidad y la respuesta dinámica de un sistema. En mecánica clásica, los modos normales son la clave para entender fenómenos como la resonancia, la propagación de ondas en medios continuos y la transferencia de energía entre osciladores [1].

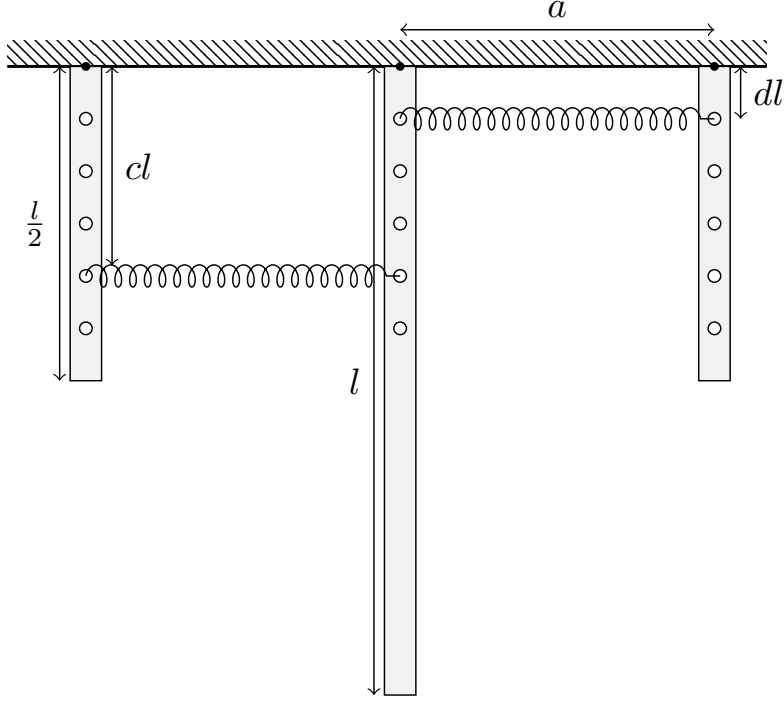
Este concepto trasciende la física clásica y sienta las bases para la comprensión de fenómenos cuánticos. La idea de estados propios discretos y sus correspondientes valores propios en sistemas cuánticos tiene un paralelismo conceptual directo con los modos normales y las frecuencias naturales en la mecánica clásica. Es, por tanto, un primer paso indispensable para adentrarse en la mecánica cuántica y la comprensión de sistemas de múltiples partículas [2].

En este trabajo, se presenta un sistema de tres péndulos acoplados diseñado específicamente para visualizar y estudiar experimentalmente sus modos normales de oscilación. A través de este sistema, se busca proporcionar una plataforma que permita explorar directamente los principios de la aproximación de pequeñas oscilaciones, la determinación de frecuencias naturales y la identificación de los modos normales.

## 2. Ecuaciones de Movimiento

Para describir la dinámica del sistema compuesto por tres péndulos físicos, se establecen consideraciones iniciales que simplifican el análisis y la deducción de las ecuaciones de movimiento. Inicialmente, los péndulos se representan en sus puntos de equilibrio, donde los ejes de rotación están separados por una distancia  $a$ , correspondiente a la longitud natural de los muelles. Este esquema se ilustra en la figura 1.

Las ecuaciones de movimiento del sistema se obtienen mediante la aplicación de la sumatoria de torques, considerando tanto las contribuciones de los resortes como la de la fuerza gravitacional. Si bien los formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano ofrecen un enfoque más general y elegante para sistemas complejos, para el presente sistema de péndulos, la aplicación directa de la segunda ley de Newton para rotación (sumatoria de torques) resulta en un método igualmente riguroso y conceptualmente claro para la derivación de las ecuaciones de movimiento. Es necesario, entonces, encontrar una expresión para el torque gravitacional en función de cualquier ángulo  $\theta_i$ , así como una



**Figura 1:** Esquema de los péndulos en equilibrio. La distancia entre los ejes de rotación es  $a$ , representando la longitud natural de los muelles. La longitud del péndulo central es  $l$ . Los puntos de acople de los resortes están ubicados a distancias  $cl$  y  $dl$  desde el pivote, para los acoples entre los péndulos 1 y 2, y entre el 2 y 3, respectivamente.

expresión para las distancias del tipo  $x_0 + \Delta x$ , que representan la elongación de los resortes en función de los ángulos  $\theta_i$  y  $\theta_{i\pm 1}$ . Las barras se enumeran de izquierda a derecha como 1, 2 y 3, según se muestra en la figura 2.

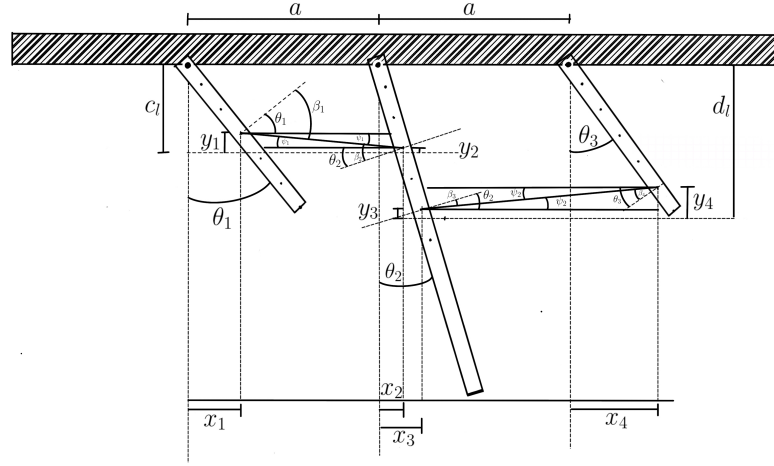
Al desplazar las barras 1 y 2 de su posición de equilibrio, se observa que la tangente de cada barra se desvía un ángulo  $\theta_i$  del eje horizontal. Esta condición permite construir un triángulo rectángulo con las componentes  $x_i$  e  $y_i$  de la posición del punto de aplicación de la fuerza elástica para cada barra, generalizada a cualquier fracción de la longitud  $l$ , tal como se ilustra en la figura 3.

Las coordenadas  $x_k$  e  $y_k$  para  $k = 1, 2$  están definidas como:

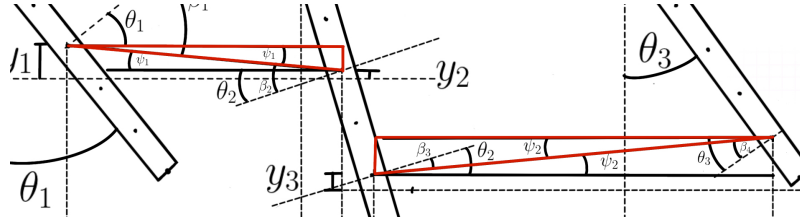
$$x_k = cl \sin(\theta_k) \quad (1)$$

$$y_k = cl \cos(\theta_k) \quad (2)$$

donde  $c$  y  $d$  son fracciones de la longitud de la barra  $l$  que indican la posición de los puntos de acople de los resortes. El triángulo resultante está definido por un ángulo  $\psi_1$ , el cual cumple la relación  $\beta_1 + \psi_1 = \theta_1$ , donde  $\beta_1$  corresponde al ángulo entre la tangente de la barra 1 y la línea recta que conecta los puntos de aplicación. A partir



**Figura 2:** Numeración de las barras del sistema de péndulos: 1 (izquierda), 2 (central), 3 (derecha).



**Figura 3:** Construcción geométrica para determinar la posición del punto de aplicación de la fuerza elástica en una barra.

de este triángulo, se obtiene la expresión para la elongación del resorte entre las barras 1 y 2:

$$x_{01} + \Delta x_1 = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (a + x_2 - x_1)^2} \quad (3)$$

con  $x_{01}$  como la longitud natural del resorte. Y el ángulo  $\psi_1$  está dado por:

$$\psi_1 = \arctan \left( \frac{y_2 - y_1}{a - x_1 + x_2} \right) \quad (4)$$

De forma análoga, para el resorte entre las barras 2 y 3, se utiliza un punto de aplicación  $dl$ , resultando en:

$$\psi_2 = \arctan \left( \frac{y_4 - y_3}{a - x_3 + x_4} \right), \quad (5)$$

$$x_{02} + \Delta x_2 = \sqrt{(y_4 - y_3)^2 + (a + x_4 - x_3)^2} \quad (6)$$

Donde para  $j = 3, 4$ , las coordenadas  $x_j$  e  $y_j$  son:

$$x_j = dl \sin(\theta_j) \quad (7)$$

$$y_j = dl \cos(\theta_j) \quad (8)$$

El torque gravitacional sobre cada barra  $i$  está dado por:

$$\tau_{g_i} = y_{\text{cm}_i} m_i g \sin(\theta_i) \quad (9)$$

Donde  $y_{\text{cm}_i}$  es la posición del centro de masa de la barra  $i$ . Para los torques elásticos, se deben considerar los ángulos  $\beta_i$ , definidos como:

$$\beta_1 + \psi_1 = \theta_1, \quad \beta_2 + \psi_1 = \theta_2, \quad (10)$$

$$\beta_3 + \psi_2 = \theta_2, \quad \beta_4 + \psi_2 = \theta_3 \quad (11)$$

Es importante notar que, debido a las distintas posiciones de aplicación de los resortes entre los pares de barras, aparecen cuatro ángulos  $\beta_i$ , donde los índices 2 y 3 se refieren a la barra central. La sumatoria de torques para cada péndulo, considerando el sentido antihorario como positivo, resulta en las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\sum \tau_{m_1} = cl k_1 (\Delta x_1) \cos(\beta_1) - m_1 g y_{\text{cm}_1} \sin(\theta_1) = I_1 \ddot{\theta}_1, \quad (12)$$

$$\sum \tau_{m_2} = dl k_2 (\Delta x_2) \cos(\beta_3) - cl k_1 (\Delta x_1) \cos(\beta_2) - m_2 g y_{\text{cm}_2} \sin(\theta_2) = I_2 \ddot{\theta}_2, \quad (13)$$

$$\sum \tau_{m_3} = -dl k_2 (\Delta x_2) \cos(\beta_4) + m_3 g y_{\text{cm}_3} \sin(\theta_3) = I_3 \ddot{\theta}_3 \quad (14)$$

### Aproximaciones para Ángulos Pequeños

Con el fin de obtener una solución analítica aproximada que permita calcular las frecuencias naturales del sistema, se aplican las siguientes aproximaciones para ángulos pequeños ( $\theta \ll 1$  rad):

$$\sin(\theta) \approx \theta,$$

$$\cos(\theta) \approx 1,$$

$$\tan(\theta) \approx \theta.$$

Aplicando estas aproximaciones, las coordenadas  $x_k$  e  $y_k$  se simplifican a:

$$x_1 = cl \theta_1, \quad x_2 = cl \theta_2$$

$$x_3 = dl \theta_2, \quad x_4 = dl \theta_3$$

$$y_1 = cl, \quad y_2 = cl$$

$$y_3 = dl, \quad y_4 = dl$$

Si se cumple la condición de que las longitudes naturales de los resortes son iguales a la separación entre los ejes, es decir,  $x_{01} = x_{02} = a$ , las elongaciones de los resortes

$\Delta x_1$  y  $\Delta x_2$  se simplifican a:

$$\Delta x_1 = cl(\theta_2 - \theta_1), \quad (15)$$

$$\Delta x_2 = dl(\theta_3 - \theta_2). \quad (16)$$

Además, si se asume que  $\arctan(\psi_i) \approx \psi_i \approx 0$ , lo que implica que la fuerza elástica actúa aproximadamente en la dirección horizontal, entonces los ángulos  $\beta_i$  se aproximan a los ángulos  $\theta_i$  ( $\beta_i \approx \theta_i$ ). Esto simplifica la sumatoria de torques a:

$$I_1 \ddot{\theta}_1 = (cl)^2 k_1 (\theta_2 - \theta_1) - m_1 g y_{cm_1} \theta_1, \quad (17)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 = (dl)^2 k_2 (\theta_3 - \theta_2) - (cl)^2 k_1 (\theta_2 - \theta_1) - m_2 g y_{cm_2} \theta_2, \quad (18)$$

$$I_3 \ddot{\theta}_3 = -(dl)^2 k_2 (\theta_3 - \theta_2) - m_3 g y_{cm_3} \theta_3. \quad (19)$$

Finalmente, el sistema de ecuaciones diferenciales lineales queda expresado como:

$$\ddot{\theta}_1 = -\theta_1 \left( \frac{k_1 (cl)^2 + y_{cm_1} m_1 g}{I_1} \right) + \theta_2 \left( \frac{k_1 (cl)^2}{I_1} \right) \quad (20)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \theta_1 \left( \frac{k_1 (cl)^2}{I_2} \right) - \theta_2 \left( \frac{k_2 (dl)^2 + k_1 (cl)^2 + y_{cm_2} m_2 g}{I_2} \right) + \theta_3 \left( \frac{k_2 (dl)^2}{I_2} \right) \quad (21)$$

$$\ddot{\theta}_3 = \theta_2 \left( \frac{k_2 (dl)^2}{I_3} \right) - \theta_3 \left( \frac{k_2 (dl)^2 + y_{cm_3} m_3 g}{I_3} \right) \quad (22)$$

Estas ecuaciones forman un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, que pueden ser presentadas como una ecuación matricial ecuación (23) donde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{\Theta}$  representan una matriz cuadrada diagonal con los términos de inercia, una matriz cuadrada con los términos de acople, y un vector columna con las coordenadas angulares, respectivamente.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{\Theta}} + \mathbf{K} \mathbf{\Theta} = \mathbf{0} \quad (23)$$

Este sistema linealizado permite determinar las frecuencias naturales del sistema al resolver el problema de valores propios asociado.

## Modos Normales

A partir de la ecuación en forma matricial ecuación (23) se lleva a un problema de valores propios para determinar los modos normales. Esto se logra con la posibilidad de invertir la matriz con los términos inerciales e identificar la segunda derivada como el operador:

$$\mathbf{D}_t^2 \mathbf{\Theta} = -\mathbf{\Omega} \mathbf{\Theta} \quad (24)$$

donde  $\mathbf{D}_t^2$  representa el operador de la segunda derivada temporal y  $\mathbf{\Omega} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$  es la matriz dinámica del sistema. Dada la complejidad del cálculo analítico para un sistema de tres grados de libertad, se emplea una solución numérica usando la librería de Python SciPy para determinar las frecuencias de los modos normales y sus correspondientes vectores propios.

### 3. Metodología Experimental

La metodología experimental se estructuró en varias etapas fundamentales: diseño y construcción del montaje, caracterización de sus componentes y adquisición de datos mediante sensores angulares.

#### Construcción del Montaje

Para la construcción del sistema se utilizaron tres barras metálicas de alta densidad, lo que contribuye a la rigidez del sistema y a una mejor definición de su centro de masa. Las barras laterales tienen una longitud de  $l/2 = (28.0 \pm 0.1)$  cm, mientras que la barra central posee una longitud de  $l = (56.0 \pm 0.1)$  cm. Las masas y las posiciones de los centros de masa de cada barra fueron determinadas experimentalmente y se resumen en el cuadro 1. La posición del centro de masa,  $y_{cm_i}$ , se mide desde el punto de pivote de cada péndulo.

**Cuadro 1:** Parámetros físicos de las barras empleadas en el montaje. La incertidumbre para la posición del centro de masa ( $y_{cm_i}$ ) es de 0.1 cm y para la masa ( $m_i$ ) es de 0.1 g.

$i$	$y_{cm_i}$ [cm]	$m_i$ [g]
1	14.2	600.8
2	28.0	1 216.3
3	14.0	601.8

Las barras fueron perforadas en múltiples puntos para permitir diversas configuraciones de acople de los resortes. La figura 4 muestra las barras metálicas preparadas para el montaje.



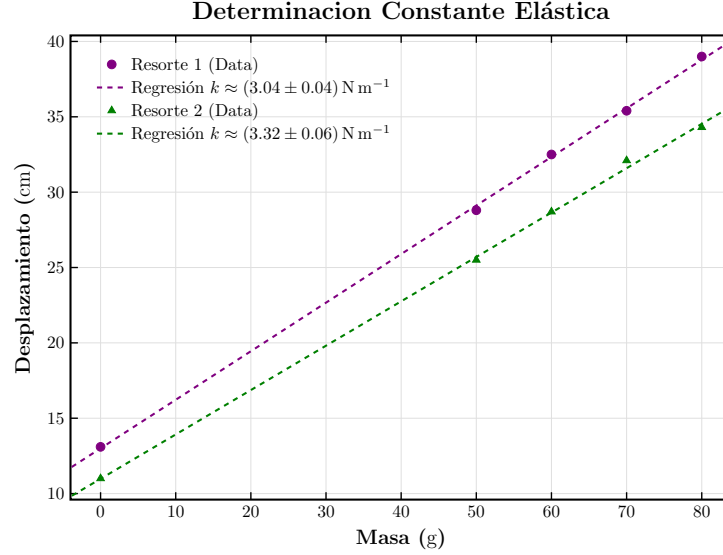
**Figura 4:** Barras metálicas preparadas para el montaje de los péndulos, mostrando las perforaciones para el acople de resortes.

## Medición de la Constante Elástica

La constante elástica de los resortes empleados ( $k_1$  y  $k_2$ ) se determinó experimentalmente. Se aplicaron masas conocidas a cada resorte y se registraron los desplazamientos resultantes. Mediante una regresión lineal de los datos de fuerza (peso aplicado) versus elongación, se obtuvieron los siguientes valores para las constantes elásticas:

- $k_1 = (3.04 \pm 0.04) \text{ N m}^{-1}$
- $k_2 = (3.32 \pm 0.06) \text{ N m}^{-1}$

El proceso gráfico de determinación de estas constantes se ilustra en la figura 5.



**Figura 5:** Determinación de la constante elástica de los resortes mediante regresión lineal de los datos de fuerza aplicada en función del desplazamiento.

## Integración del Sistema de Medición

Para registrar los desplazamientos angulares  $\theta_i(t)$  de cada péndulo, se integraron sensores angulares rotacionales (Cassy) en cada uno de los puntos de pivote. Las barras de los péndulos se fijaron a las poleas de los sensores utilizando alambre dulce. Aunque esta metodología de fijación podría introducir un mínimo juego mecánico, se realizó con cautela para minimizar cualquier holgura y asegurar mediciones angulares precisas. La figura 6 presenta el montaje experimental completo con los sensores integrados.





**Figura 6:** Montaje experimental completo del sistema de tres péndulos acoplados, con los sensores angulares Cassy integrados en los pivotes.

## Toma de Datos y Configuraciones Experimentales

Se realizaron mediciones bajo cinco configuraciones distintas de acoplamiento de resortes, esquematizadas en la figura 7. Para cada configuración, se investigaron tres tipos de condiciones iniciales para excitar el sistema:

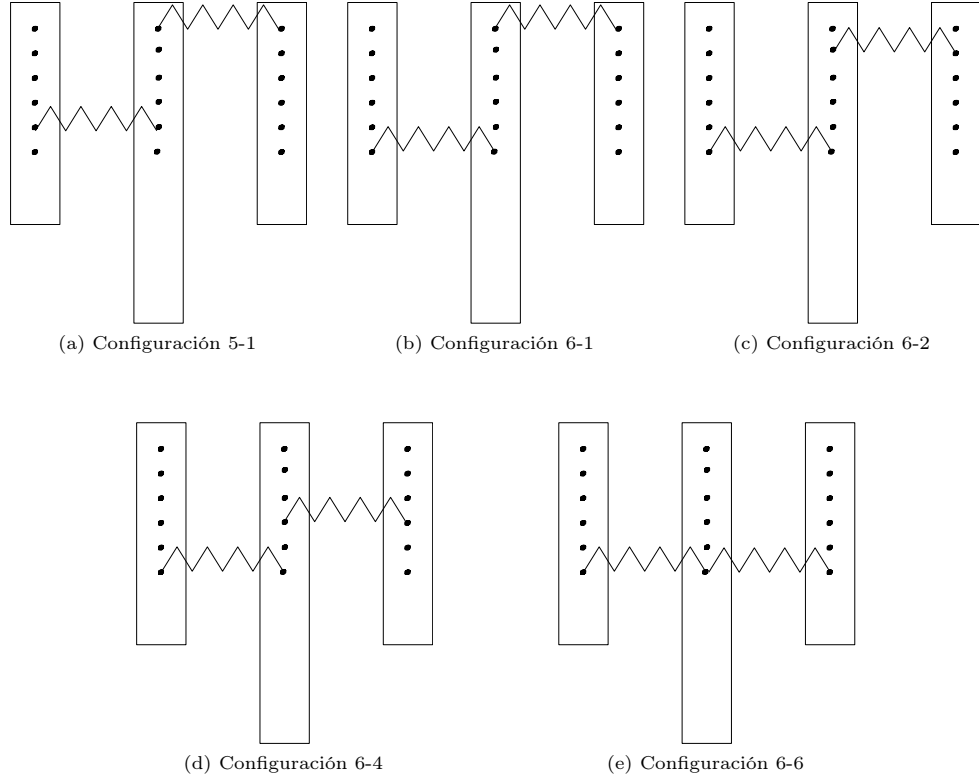
- (100): Desplazamiento inicial únicamente del péndulo 1.
- (010): Desplazamiento inicial únicamente del péndulo 2.
- (101): Desplazamiento inicial simétrico de los péndulos 1 y 3 (en la misma dirección y amplitud).

Cada medición se registró durante un intervalo aproximado de 30 s, permitiendo la captura de múltiples oscilaciones completas. Los datos de los ángulos en función del tiempo fueron almacenados digitalmente para su posterior análisis y comparación con los resultados teóricos derivados de los modos normales de oscilación.

## Fundamento Teórico del Análisis Espectral

El movimiento de un sistema lineal (o linealizado, como en la aproximación de pequeñas oscilaciones) con múltiples grados de libertad puede describirse como una superposición de sus modos normales de oscilación. Cada modo normal es un patrón de movimiento colectivo en el que todas las partes del sistema oscilan sinusoidalmente con la misma frecuencia característica y una fase relativa constante. Estas frecuencias son propiedades intrínsecas del sistema, determinadas por sus parámetros físicos (masas, longitudes, constantes de acoplamiento, etc.).

El Teorema de Fourier establece que cualquier señal periódica (o una señal de duración finita, como los datos experimentales) puede representarse como una suma de funciones sinusoidales (senos y cosenos) de diferentes frecuencias, amplitudes y



**Figura 7:** Representación esquemática de las cinco configuraciones de acoplamiento de resortes estudiadas. La nomenclatura 'X-Y' en cada subfigura (e.g., 5-1) indica los orificios específicos (numerados) en los péndulos adyacentes donde se anclaron los extremos de los resortes.

fases. La Transformada de Fourier es la herramienta matemática que formaliza esta descomposición, mapeando la señal del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Al aplicar la Transformada de Fourier a una señal de movimiento como  $\theta(t)$ , se obtiene su espectro de frecuencias, el cual revela la “cantidad” (amplitud o potencia) de cada componente frecuencial presente en la señal original [3].

Cuando el sistema de péndulos acoplados oscila, su movimiento angular  $\theta_i(t)$  es, en esencia, una mezcla de las oscilaciones de sus modos normales. Por lo tanto, las frecuencias que aparecen con mayor amplitud en el espectro de Fourier de  $\theta_i(t)$  corresponden directamente a las frecuencias naturales de estos modos normales. La Transformada Rápida de Fourier (FFT) es simplemente un algoritmo computacionalmente eficiente para calcular la Transformada Discreta de Fourier (DFT) de una señal muestreada digitalmente, como la obtenida de los sensores angulares. De esta manera, la FFT permite identificar experimentalmente las frecuencias con las que el sistema “prefiere” oscilar, que son precisamente las frecuencias de sus modos normales.

El procedimiento se llevó a cabo utilizando herramientas computacionales basadas en Python. Específicamente, se empleó la función ‘fft’ del módulo ‘numpy.fft’ perteneciente a la biblioteca NumPy. Esta función calcula los coeficientes complejos de la Transformada Discreta de Fourier (DFT) de la señal angular muestreada. La magnitud al cuadrado de estos coeficientes proporciona el espectro de potencias de la señal.

## 4. Resultados y Análisis

Tras el montaje del sistema de péndulos acoplados y el registro de las mediciones mediante el sensor Cassy, se recopiló un conjunto de 15 series de datos. Estas series corresponden a tres condiciones iniciales distintas para cada una de las cinco configuraciones experimentales estudiadas. Los datos temporales de los ángulos de cada péndulo fueron procesados utilizando un código en Python, con el fin de generar gráficas de la evolución angular  $\theta_i(t)$  y, fundamentalmente, para determinar las frecuencias angulares principales de oscilación mediante la aplicación de la Transformada Rápida de Fourier (FFT).

En la cuadro 2 se presenta un resumen de las frecuencias angulares principales identificadas para cada péndulo, en función de la configuración del sistema y de la condición inicial aplicada. Un análisis preliminar de estos valores revela patrones interesantes: la frecuencia angular usual del péndulo 2 (el más largo) se sitúa consistentemente alrededor de 0.844 Hz, con una desviación estándar reducida de 0.009, lo que indica una notable regularidad en su comportamiento oscilatorio a esta frecuencia.

En contraste, para el péndulo 1, se identifican dos agrupaciones principales de frecuencias: una en torno a 1.311 Hz (desviación estándar de 0.019) y otra cercana a 0.843 Hz (desviación estándar de 0.008). Un comportamiento similar, aunque con valores ligeramente distintos, se observa en el péndulo 3, el cual exhibe frecuencias predominantes alrededor de 1.255 Hz (desviación estándar de 0.063) y 0.843 Hz (desviación estándar de 0.008). Adicionalmente, para el péndulo 3, se detectó una frecuencia excepcionalmente baja de 0.0021 Hz, la cual se presentó de manera aislada únicamente en la Configuración 5-1 bajo las condiciones iniciales (100). La aparición de múltiples frecuencias dominantes para los péndulos laterales (1 y 3) sugiere la excitación selectiva de diferentes modos normales del sistema, cuya manifestación depende de la configuración específica de acoplamiento y de las condiciones iniciales impuestas.

Un análisis más detallado del cuadro 2 evidencia que para la condición inicial (010) (excitación única del péndulo central), los tres péndulos tienden a oscilar con una frecuencia dominante común o muy similar, independientemente de la configuración de acoplamiento. Esto podría indicar la excitación preferente de un modo normal en el que los tres péndulos participan de manera sincronizada. En las demás condiciones iniciales, el péndulo 3 generalmente muestra una frecuencia principal inferior a la del péndulo 1. No obstante, se observa una excepción en la configuración 6-6, donde la frecuencia principal del péndulo 3 supera a la del péndulo 1.

La menor frecuencia característica del péndulo 2 se atribuye principalmente a su mayor longitud y masa (y por ende, mayor momento de inercia) en comparación con los péndulos laterales. Las diferencias observadas en las frecuencias principales entre los péndulos 1 y 3, así como su variación entre las distintas configuraciones,

**Cuadro 2:** Frecuencias angulares principales de oscilación ( $f_i$ ) identificadas para cada péndulo, según la configuración experimental y las condiciones iniciales aplicadas.

Configuración	Condición Inicial	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]
5-1	100	1.272	0.841	0.021
	010	0.831	0.831	0.831
	101	1.277	0.838	1.193
6-1	100	1.315	0.838	1.200
	010	0.842	0.842	0.842
	101	1.314	0.835	1.190
6-2	100	1.330	0.846	1.229
	010	0.838	0.838	0.838
	101	1.319	0.840	1.211
6-4	100	1.326	0.855	1.326
	010	0.850	0.850	0.850
	101	1.325	0.851	1.271
6-6	100	1.314	0.855	1.330
	010	0.852	0.852	0.852
	101	1.315	0.857	1.347

son consecuencia de cómo los diferentes puntos de acople de los resortes modifican la interacción entre ellos. La altura a la que se fijan los resortes en las barras de los péndulos influye en la magnitud de los torques de acoplamiento y, por lo tanto, en la 'rigidez efectiva angular' del acoplamiento entre cada par de péndulos. Esto, a su vez, afecta las características de los modos normales del sistema. La configuración 6-6, por ejemplo, debido a sus puntos de acople específicos, facilita un tipo de interacción que favorece un modo donde el péndulo 3 oscila a una frecuencia mayor que el 1, a diferencia de otras geometrías de acople. Esta sensibilidad a la posición del acople también es relevante para interpretar la frecuencia excepcionalmente baja de 0.0021 Hz previamente identificada en el péndulo 3 para la configuración 5-1 con condición inicial (100). En dicha configuración, uno de los puntos de anclaje del resorte está muy próximo al pivote, lo que resulta en una 'rigidez efectiva angular' muy débil para ciertos patrones de movimiento, lo que consecuentemente lleva a la aparición de frecuencias de oscilación extremadamente bajas para el modo asociado.

Finalmente, es de destacar el caso de la configuración 6-4 bajo la condición inicial (100), donde ambos péndulos laterales (1 y 3) presentan la misma frecuencia principal. Esta igualdad podría ser indicativa de la excitación de un modo normal con un alto grado de simetría en el movimiento de los péndulos externos.

## Frecuencias del Modelo Teórico

Al resolver el problema de valores propios para el sistema representado en forma matricial, ecuación (23), se obtuvieron las frecuencias teóricas de los modos normales para cada una de las cinco configuraciones experimentales. Estos resultados se presentan en la cuadro 3. Como es de esperar para un sistema con tres grados de libertad, se identifican tres frecuencias de modo normal distintas para cada configuración.

Los valores teóricos en la cuadro 3 sugieren una tendencia general donde una mayor distancia entre el punto de acople del resorte y el pivote del péndulo tiende a correlacionarse con un aumento en las frecuencias de los modos normales. En cuanto a los valores específicos, se observa con regularidad una frecuencia teórica cercana a 0.8 Hz, así como otras agrupadas en torno a 1.3 Hz y, en algunos casos, próximas a 1.6 Hz.

Es importante destacar que las frecuencias teóricas obtenidas, en general, no difieren significativamente de los valores experimentales predominantes que fueron presentados en la cuadro 2. La notable excepción es la frecuencia experimental anómalamente baja de 0.0021 Hz (identificada previamente en la Configuración 5-1, condición inicial (100) para el péndulo 3), la cual no tiene una contraparte directa en el espectro teórico calculado. No obstante, la concordancia general para las demás frecuencias principales sugiere que el modelo teórico linealizado, basado en la aproximación de pequeñas oscilaciones, logra aproximar razonablemente el comportamiento dinámico del sistema experimental construido.

**Cuadro 3:** Frecuencias teóricas de los modos normales ( $f_{0i}$ ) calculadas para el sistema, según la configuración de acoplamiento.

Configuración	$f_{01}$ [Hz]	$f_{02}$ [Hz]	$f_{03}$ [Hz]
5-1	0.831	1.167	1.265
6-1	0.834	1.167	1.312
6-2	0.837	1.182	1.312
6-4	0.844	1.239	1.312
6-6	0.851	1.310	1.336

En la cuadro 4 se presenta una comparación directa entre las frecuencias experimentales ( $f_{ex}$ ) predominantes, identificadas para cada modo normal discernible en las distintas configuraciones, y sus correspondientes frecuencias teóricas ( $f_{te}$ ). La tabla también incluye el error relativo porcentual, calculado como  $|1 - \frac{f_{te}}{f_{ex}}| \cdot 100\%$ , para cuantificar la discrepancia.

Los errores relativos porcentuales varían considerablemente. El error más grande observado, sin considerar la frecuencia anómala de 0.0021 Hz que no se incluye en esta comparación directa de modos, es del 2.509 %. Por otro lado, el error más bajo registrado es de tan solo 0.036 %. Estos valores indican que, si bien existen desviaciones,

el modelo teórico es capaz de predecir las frecuencias de los modos normales con un grado de precisión generalmente alto para la mayoría de los casos estudiados.

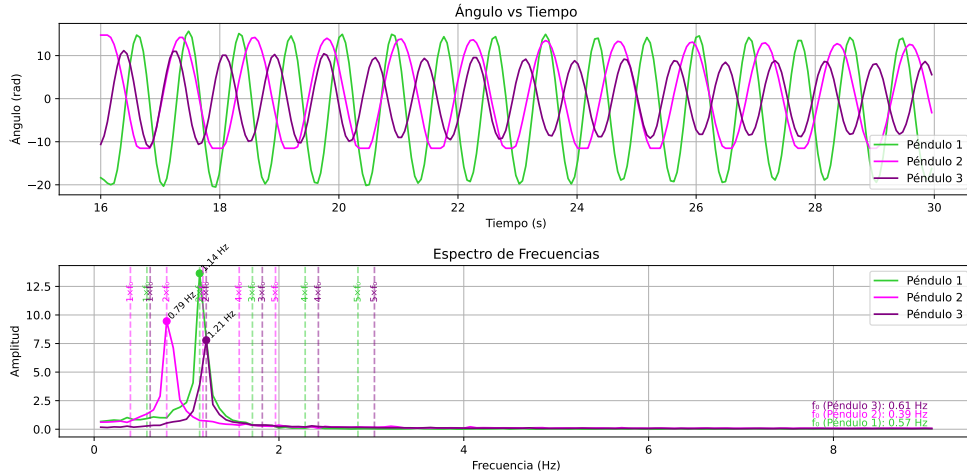
**Cuadro 4:** Comparación entre las frecuencias experimentales predominantes ( $f_{\text{ex}}$ ) y las frecuencias teóricas ( $f_{\text{te}}$ ) para los modos normales, junto con el error relativo porcentual.

Configuración	$f_{\text{ex}}[\text{Hz}]$	$f_{\text{te}}[\text{Hz}]$	Error Relativo [%]
5-1	0.831	0.831	0.036
	1.193	1.167	2.221
	1.277	1.265	0.971
6-1	0.842	0.834	0.856
	1.190	1.167	1.949
	1.314	1.312	0.183
6-2	0.838	0.837	0.143
	1.211	1.182	2.468
	1.319	1.312	0.523
6-4	0.850	0.844	0.718
	1.271	1.239	2.509
	1.325	1.312	0.966
6-6	0.852	0.851	0.070
	1.315	1.310	0.358
	1.347	1.336	0.876

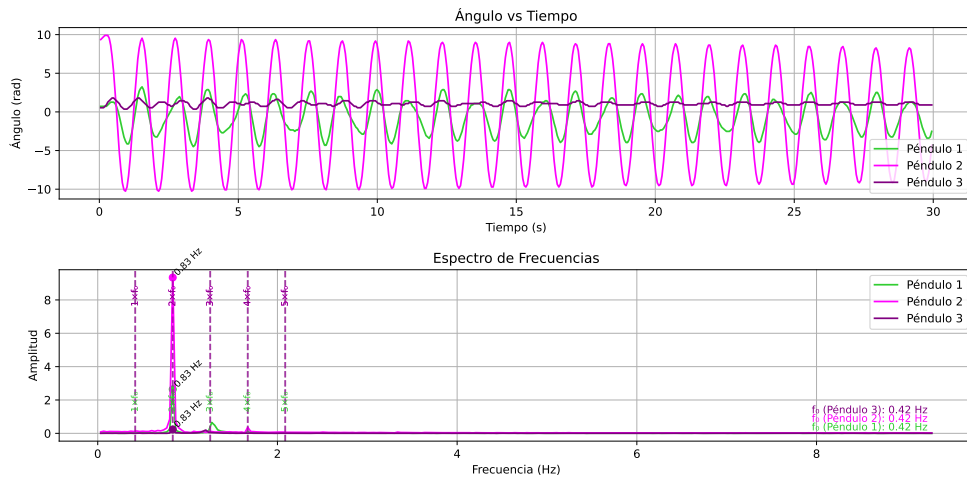
## Casos Representativos de Oscilación y Espectros de Frecuencia

A partir del conjunto de datos experimentales recopilados, se seleccionaron seis casos considerados como los más representativos de los diversos comportamientos dinámicos observados en el sistema de péndulos acoplados. Para cada uno de estos casos seleccionados, se presentan figuras que ilustran de manera conjunta: (a) la evolución temporal del desplazamiento angular  $\theta_i(t)$  de los péndulos involucrados y (b) el correspondiente espectro de amplitudes obtenido a partir de la FFT de dichas series temporales. Estas representaciones gráficas se encuentran detalladas en las figuras 8 a 13.

En la figura 8, correspondiente a la Configuración 1-1 con condiciones iniciales (111), se observa que cada péndulo exhibe un pico de frecuencia principal distintivo en su espectro FFT, sin compartir una única frecuencia dominante común. Estos picos espectrales son relativamente anchos, lo que sugiere una duración efectiva de coherencia limitada para estas oscilaciones o la presencia de un amortiguamiento

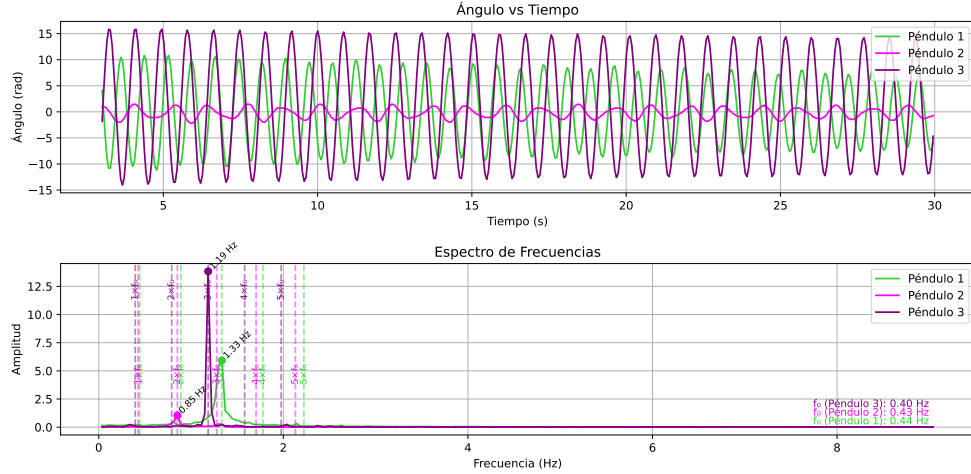


**Figura 8:** Evolución temporal del desplazamiento angular y espectro de frecuencias (FFT) para la Configuración 1-1 con condiciones iniciales (111).

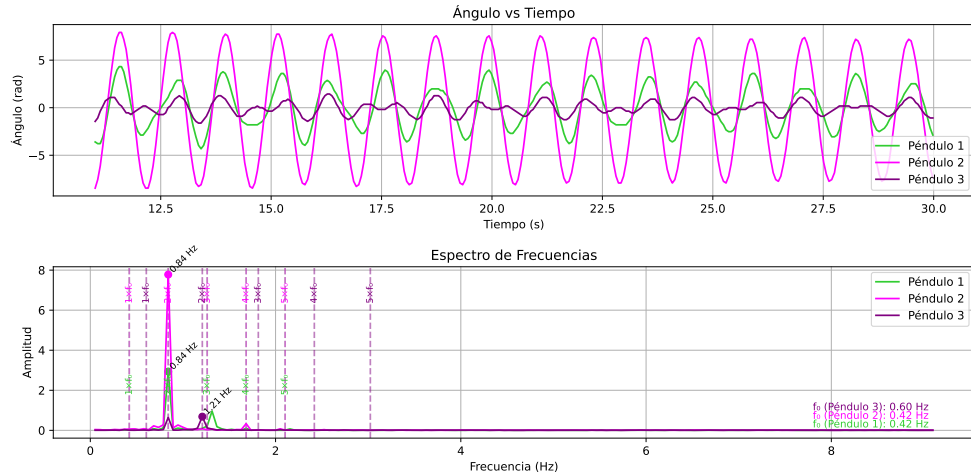


**Figura 9:** Evolución temporal del desplazamiento angular y espectro de frecuencias (FFT) para la Configuración 5-1 con condiciones iniciales (010).

significativo. Dicho amortiguamiento es esperable debido a las interacciones inherentes entre los péndulos (acoplamiento y fricción) y se ve acentuado por la complejidad del movimiento resultante de las condiciones iniciales, donde los péndulos laterales se excitan desfasados respecto al central. Particularmente, el comportamiento temporal del péndulo 2 en este caso se desvía de un movimiento armónico simple, presentando modulaciones en su amplitud.



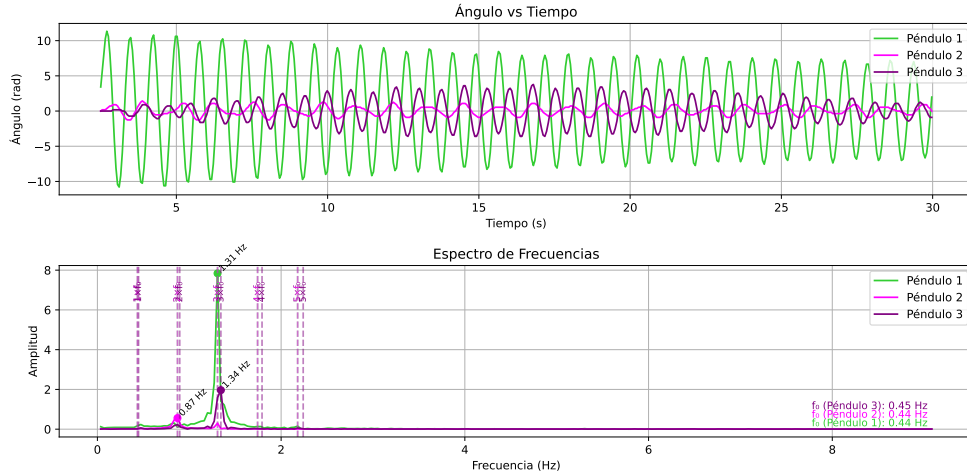
**Figura 10:** Evolución temporal del desplazamiento angular y espectro de frecuencias (FFT) para la Configuración 6-1 con condiciones iniciales (101).



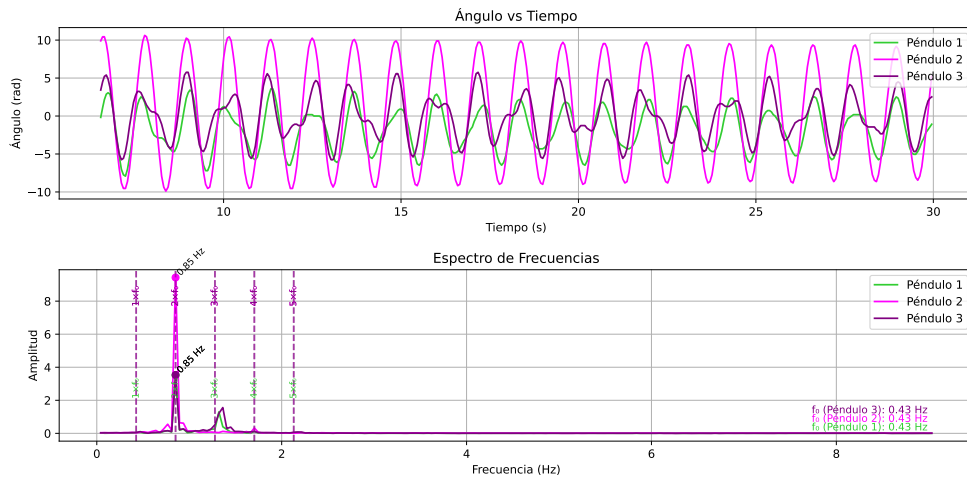
**Figura 11:** Evolución temporal del desplazamiento angular y espectro de frecuencias (FFT) para la Configuración 6-2 con condiciones iniciales (010).

En contraste, la figura 9 (Configuración 1-5, condiciones iniciales (010)) muestra picos espectrales considerablemente más definidos y estrechos, indicativo de un comportamiento más regular y menos amortiguado para las frecuencias dominantes. Notablemente, los tres péndulos comparten la misma frecuencia principal, reafirmando la tendencia observada para la condición (010). Además de la frecuencia fundamental, se aprecian componentes espectrales secundarias comunes a los tres péndulos, aunque





**Figura 12:** Evolución temporal del desplazamiento angular y espectro de frecuencias (FFT) para la Configuración 6-6 con condiciones iniciales (100).



**Figura 13:** Evolución temporal del desplazamiento angular y espectro de frecuencias (FFT) para la Configuración 6-6 con condiciones iniciales (010).

con diferentes amplitudes relativas; por ejemplo, el péndulo 2 podría dominar en amplitud en un armónico secundario, mientras que el péndulo 1 lo haría en otro. En este caso, el péndulo 3 parece exhibir una menor amplitud en sus componentes espectrales, lo que podría atribuirse a una transmisión de energía menos eficiente hacia él debido a la geometría específica de los puntos de acople en esta configuración. La evolución

temporal de los ángulos para este caso (figura 9) es más estable y coherente, con una disminución gradual de las amplitudes generales debido al amortiguamiento residual.

Para la Configuración 6-1 bajo condiciones iniciales (101), ilustrada en la figura 10, el análisis espectral revela nuevamente tres picos de frecuencia principales distintos, sugiriendo la excitación de múltiples modos normales. El péndulo 3 muestra una mayor amplitud en su frecuencia principal y un pico espectral más estrecho en comparación con el péndulo 1. Esta característica podría estar relacionada con la naturaleza del acoplamiento en esta configuración particular y el hecho de que el péndulo 3 es uno de los excitados inicialmente (condición (101)).

Por otro lado, el péndulo 2 presenta oscilaciones de amplitud muy reducida, un comportamiento consistente con la excitación de un modo normal donde los péndulos laterales se mueven de forma predominantemente desfasada y el péndulo central tiene una participación mínima. Adicionalmente, en la evolución temporal se observa un intercambio de energía entre los péndulos 1 y 3: leves aumentos en la amplitud de oscilación del péndulo 3 tienden a coincidir con disminuciones en la amplitud del péndulo 1, y viceversa. Este fenómeno es característico de las pulsaciones (batidos) en sistemas acoplados y es esperable si las frecuencias de los modos que involucran principalmente a estos dos péndulos son cercanas y hay una transferencia de energía entre ellos, en un contexto de conservación aproximada de la energía (descontando pérdidas por fricción).

Para la configuración 6-2 bajo la condición inicial (010), ilustrada en la figura 11, el espectro del péndulo 2 muestra una frecuencia principal con una amplitud prominente y un pico espectral estrecho en comparación con otras componentes secundarias. Entre estas últimas, se identifica un pico cuya frecuencia es aproximadamente cuatro veces la frecuencia principal, aunque su contribución en amplitud es mucho menor. Debido a esta marcada dominancia de la frecuencia fundamental, el comportamiento temporal del péndulo 2 se asemeja de forma notable a un movimiento armónico simple. En cuanto al péndulo 1, este comparte la frecuencia principal observada en el péndulo 2; sin embargo, su espectro también exhibe otro pico significativo a una frecuencia ligeramente superior al triple de la fundamental. Esta composición multifrecuencial indica que el movimiento del péndulo 1 no es estrictamente armónico simple, aunque sí manifiesta una clara periodicidad, como se evidencia en su evolución temporal. Finalmente, el péndulo 3 presenta en su espectro dos picos con amplitudes comparables, cuyas frecuencias se corresponden aproximadamente con los valores teóricos esperados de 0.83 Hz y 1.2 Hz para los modos involucrados. No obstante, las amplitudes de estos picos para el péndulo 3 son relativamente bajas, lo que se traduce en una oscilación de escasa magnitud para este péndulo en particular.

Por último, se analiza la configuración 6-6 con la condición inicial (100) (excitación inicial únicamente del péndulo 1). En este caso, se observa cómo la geometría de acople facilita una efectiva transmisión de energía entre los péndulos. El análisis espectral revela que los tres péndulos comparten componentes de frecuencia en las mismas ubicaciones espectrales. Específicamente, los péndulos 1 y 3 comparten una frecuencia principal común (más alta), mientras que el péndulo 2 tiene su propia frecuencia principal a un valor menor. A pesar de ello, el péndulo 2 también exhibe picos secundarios en las frecuencias donde los péndulos laterales oscilan predominantemente,

indicando su participación en esos modos de mayor frecuencia. Este comportamiento, donde todos los péndulos oscilan de manera significativa, distingue a esta combinación de configuración y condición inicial de otras pruebas hipotéticas con la misma condición (100) pero diferentes puntos de acople, resaltando así el papel determinante de la posición de los acoples en la dinámica del sistema.

## 5. Conclusiones

Se ha investigado con éxito el comportamiento dinámico de un sistema de tres péndulos acoplados, confirmando la validez y aplicabilidad de la aproximación de pequeñas oscilaciones para describir su movimiento. Mediante un montaje experimental controlado y el análisis de datos con la Transformada Rápida de Fourier (FFT), se lograron identificar las frecuencias de los modos normales de oscilación, cumpliendo el objetivo principal de visualizar y cuantificar estos patrones fundamentales en un sistema clásico.

Los resultados experimentales mostraron una fenomenología de oscilaciones acopladas, donde la frecuencia dominante de cada péndulo varía según la configuración de los resortes y las condiciones iniciales aplicadas. El péndulo central (el más largo) exhibió una frecuencia notablemente consistente alrededor de 0.844 Hz. Por su parte, los péndulos laterales a menudo presentaron una dualidad de frecuencias predominantes, lo que sugiere la excitación simultánea de múltiples modos. La comparación cuantitativa reveló que el modelo teórico linealizado predice estas frecuencias con una precisión notable, con errores relativos porcentuales que en la mayoría de los casos se sitúan entre 0.036 % y 2.509 %. Esta estrecha concordancia valida la capacidad del marco teórico para describir con fiabilidad el sistema experimental.

El análisis también puso de manifiesto el papel crítico de la geometría de acoplamiento. Se observó cómo la posición de los resortes influye en la rigidez efectiva angular, determinando la transmisión de energía y las frecuencias de los modos excitados. Particularmente, ciertas configuraciones y condiciones iniciales favorecieron la oscilación de los tres péndulos a una misma frecuencia, mientras que otras revelaron complejas interacciones de energía, como el fenómeno de pulsaciones entre los péndulos laterales.

Sin embargo, el estudio también identificó una frecuencia experimental anómala excepcionalmente baja (0.0021 Hz) en una configuración específica, la cual no encuentra una contraparte directa en el modelo teórico linealizado. Esta discrepancia sugiere la posible influencia de factores no incluidos en el modelo ideal, como efectos no lineales para desplazamientos angulares mayores, o la presencia de amortiguamiento diferencial en el sistema.

Como trabajo futuro, sería valioso: incorporar términos de amortiguamiento en el modelo teórico para una comparación más precisa con los datos experimentales, realizar un análisis cuantitativo detallado de los vectores propios (formas modales) para relacionar directamente los patrones de movimiento observados con los modos teóricos, y explorar el comportamiento del sistema bajo condiciones que acentúen las no linealidades, con el fin de entender fenómenos como la frecuencia anómala observada.

## Referencias

- [1] Goldstein, H., Safko, C.P.P.J.: Classical Mechanics, p. 664. Pearson Dental
- [2] Griffiths, D.J.: Introduction to Quantum Mechanics, 2nd edn. Cambridge University Press, Cambridge (2017). Reissue of the 2004 Pearson edition by Cambridge University Press
- [3] Stein, E.M.: Fourier Analysis, 1st ed. edn. Princeton University Press. Description based on publisher supplied metadata and other sources.