

# Osciladores Acoplados

## Bitácora de Laboratorio

Sebastian Rodríguez

Laura Torres

Julian Avila

Universidad Distrital Francisco José de Caldas



# Índice general

<b>Miércoles 23, Abril 2025</b>	<b>4</b>
1 Problema inicial . . . . .	4
<b>Jueves 24, Abril 2025</b>	<b>6</b>
1 Planteamiento Teórico . . . . .	6
2 Características Experimentales . . . . .	7
<b>Miércoles 30, Abril 2025</b>	<b>8</b>
1 Construcción del Montaje . . . . .	8
1.1 Construcción de los péndulos . . . . .	8
1.2 Preparación del Dispositivo <i>Cassy</i> . . . . .	8
1.3 Medición de la constante elástica . . . . .	9
<b>Miércoles 07, Mayo 2025</b>	<b>10</b>
1 Toma de Datos Experimentales . . . . .	10
<b>Resultados y Análisis</b>	<b>12</b>

# Miércoles 23, Abril 2025

## 1. Problema inicial

Se plantea realizar un montaje experimental de tres péndulos rígidos acoplados, con el objetivo de modelar el sistema bajo pequeñas oscilaciones, así como visualizar sus modos normales y estudiar su movimiento asociado.

La figura 1 presenta la configuración inicial del sistema, donde la longitud del péndulo central ( $\ell$ ) es el doble de las otras dos. Los péndulos laterales están separados por una distancia  $a$ , y cuentan con 5 posibles puntos de acople a lo largo del cuerpo rígido.

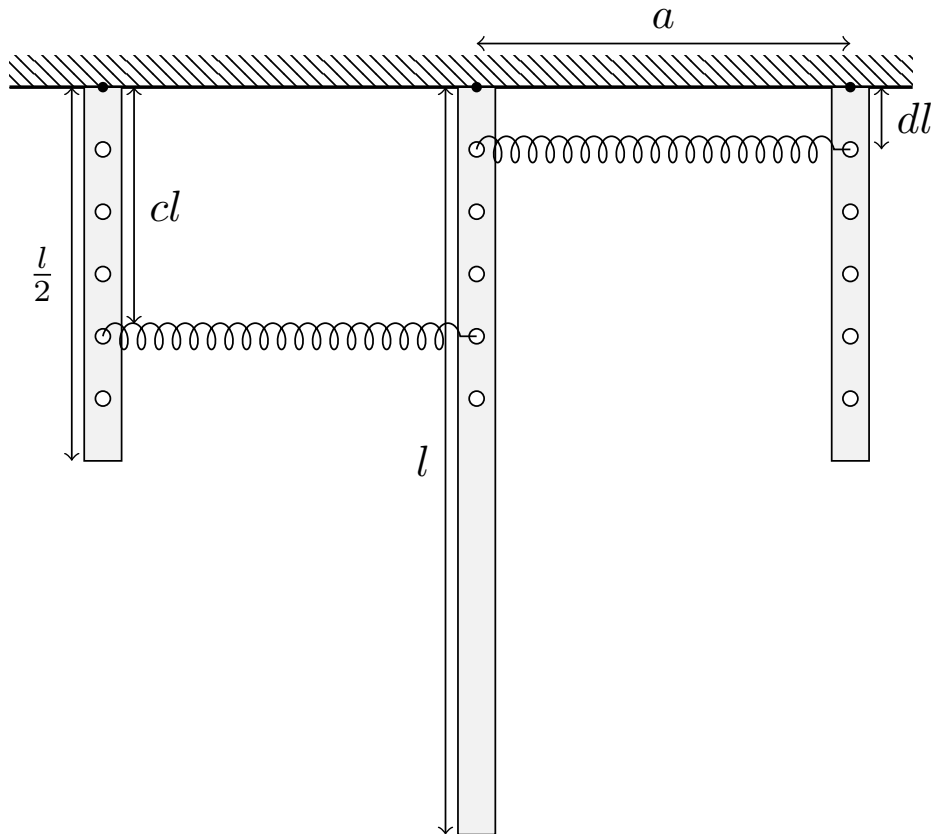


Figura 1: Configuración inicial del montaje experimental.

Se plantean los siguientes objetivos a desarrollar:

- Desarrollar el modelo teórico que describe el sistema de tres péndulos rígidos acoplados bajo la aproximación de pequeñas oscilaciones, para determinar sus modos normales y frecuencias propias.

- Diseñar y construir un montaje experimental que permita la observación y caracterización de los modos normales.
- Recopilar los datos experimentales necesarios de las oscilaciones del sistema y analizarlos para identificar los modos normales observados, sus frecuencias asociadas y compararlos con las predicciones teóricas.

Jueves 24, Abril 2025

## 1. Planteamiento Teórico

Se desarrolla el fundamento teórico del problema de los tres péndulos físicos acoplados por resortes. A partir del desplazamiento angular de cada péndulo,  $\theta_i$ , se establece el sistema planteado con sus relaciones importantes, presentado en la figura 1.

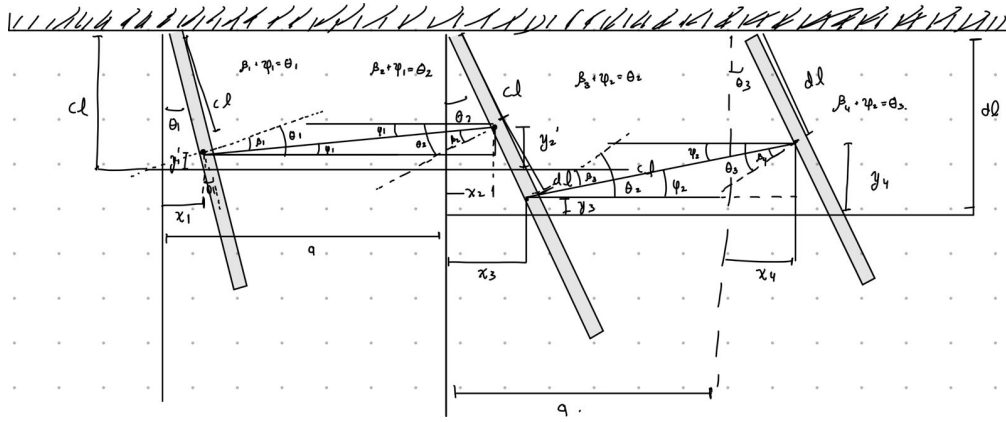


Figura 1: Sistema de tres péndulos físicos acoplados por resortes.

Considerando el desplazamiento angular de cada péndulo, se determina la suma de los torques que actúan sobre cada uno para derivar el sistema de ecuaciones del movimiento.

La distancia  $a$  es la separación entre cada péndulo.  $cl$  es la distancia a la cual se acoplan los péndulos 1 y 2 por medio del resorte con constante  $k_1$ , mientras que  $dl$  es la distancia de acople entre 2 y 3 por medio del resorte con constante  $k_2$ . Los  $y_{cm_i}$  corresponden a la distancia desde el punto de giro al centro de masa. De esta forma, el torque restaurador gravitacional está relacionado con  $m_i g y_{cm_i} \sin \theta_i$ .

Para las interacciones generadas por los resortes, se asume que obedecen a la ley de Hooke lineal y que actúan a lo largo de una línea de acción horizontal. De esta forma, se aplicará una aproximación lineal a todos los términos angulares no lineales.

La sumatoria de torques para cada péndulo genera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 &= -\theta_1 \left[ \frac{k_1(cl)^2 + y_{cm_1}m_1g}{I_1} \right] + \theta_2 \left( \frac{k_1(cl)^2}{I_1} \right) \\ \ddot{\theta}_2 &= \theta_1 \left( \frac{k_1(cl)^2}{I_2} \right) - \theta_2 \left[ \frac{k_1(cl)^2 + k_2(dl)^2 + y_{cm_2}m_2g}{I_2} \right] + \theta_3 \left( \frac{k_2(dl)^2}{I_2} \right) \\ \ddot{\theta}_3 &= \theta_2 \left( \frac{k_2(dl)^2}{I_3} \right) - \theta_3 \left[ \frac{k_2(dl)^2 + y_{cm_3}m_3g}{I_3} \right]\end{aligned}\tag{0.1}$$

## 2. Características Experimentales

Adicionalmente, se establecen las características clave del montaje experimental, buscando cumplir con las siguientes condiciones:

- Usar barras masivas, de modo que, en comparación con constantes elásticas bajas de los resortes, se obtengan series de tiempo extensas. Esto es importante, ya que en el caso real se tiene rozamiento con el aire y en las zonas de contacto (rodamientos).
- Utilizar resortes que se aproximen al muelle ideal, manteniendo su linealidad y capacidad de operar bajo fuerzas compresivas y extensivas. Se buscarán constantes elásticas suficientemente pequeñas para permitir oscilaciones extensas y claras.
- Obtener barras “ideales”, donde los puntos de contacto estén centrados y equidistantes en las tres barras.

Para lograr esto, se buscarán barras muy masivas, fabricadas con un material de alta densidad, como un metal, descartando el aluminio en primera aproximación debido a su baja densidad. Para la toma de datos, se utilizarán sensores rotacionales angulares CASSY. Se acoplará un sensor a cada péndulo/barra, aprovechando que cada sensor está montado en un rodamiento que permite mayor libertad de movimiento y cuenta con un soporte para colgar los objetos que rotan.



Figura 2: Sensor CASSY de movimiento angular.

# Miércoles 30, Abril 2025

## 1. Construcción del Montaje

Para la construcción de los péndulos físicos, se utilizaron barras metálicas obtenidas en el taller de máquinas y herramientas de la sede Macarena, las cuales cumplían con el requisito previamente planteado de emplear un material con alta densidad. Del mismo modo, se avanzó en la preparación del sistema de medición de ángulos mediante el sensor *Cassy*, revisando su funcionamiento, calibración y evaluando la forma de integrarlo al sistema. Para finalizar, se llevó a cabo la medición de la constante elástica de los resortes inicialmente seleccionados para la práctica. Estos resortes fueron adquiridos en una fábrica especializada con el fin de garantizar constantes elásticas nominales similares y condiciones físicas consistentes.

### 1.1. Construcción de los péndulos

En el taller se identificó una varilla metálica de sección adecuada. Esta varilla presentaba la rigidez necesaria para nuestro experimento, por lo que se decidió utilizarla. A partir de ella, se cortaron las barras con las longitudes especificadas para el sistema ( $l$  para el central y  $l/2$  para los laterales). Posteriormente, se pulieron los bordes para evitar imperfecciones o filos peligrosos, y se perforaron los orificios necesarios para su montaje. En el caso de las barras de longitud  $l/2 = (28.0 \pm 0.1)$  cm, los orificios se realizaron a una distancia de  $(4.6 \pm 0.1)$  cm desde cada extremo.

Adicionalmente, se midieron las masas de las barras y se determinó la posición de sus respectivos centros de masa, medidos desde el punto de pivote. Los resultados se resumen en la cuadro 1.

$i$	$y_{cm_i}[\text{cm}]$	$m_i[\text{g}]$
1	14.2	600.8
2	28.0	1 216.3
3	14.0	601.8

Cuadro 1: Parámetros físicos de las barras empleadas en el montaje. La incertidumbre para la posición del centro de masa ( $y_{cm_i}$ ) es de 0.1 cm y para la masa ( $m_i$ ) es de 0.1 g.

### 1.2. Preparación del Dispositivo *Cassy*

Se realizó una revisión inicial del sistema de medición *Cassy*. Esta observación permitió definir una estrategia preliminar para su integración en el sistema, con el fin de registrar los ángulos de oscilación. Se empleará alambre dulce para fijar las barras a la rueda giratoria de cada sensor, utilizando los orificios correspondientes en ambas partes.





Figura 1: Barras metálicas preparadas para el montaje de los péndulos.

### 1.3. Medición de la constante elástica

Se llevó a cabo la medición de la constante elástica de los resortes que se planea utilizar en el experimento. Para esto, se empleó el montaje experimental convencional de aplicar masas conocidas a cada resorte, medir su elongación y, mediante una regresión lineal de desplazamiento en función de la masa soportada, estimar su constante de elasticidad.

Se utilizaron masas en un rango de 50 g a 80 g. Para dos resortes representativos, se obtuvieron constantes de elasticidad de  $k_1 = (3.04 \pm 0.04) \text{ N m}^{-1}$  y  $k_2 = (3.32 \pm 0.06) \text{ N m}^{-1}$ . Los valores de desplazamiento según la masa aplicada se presentan en la figura 2.

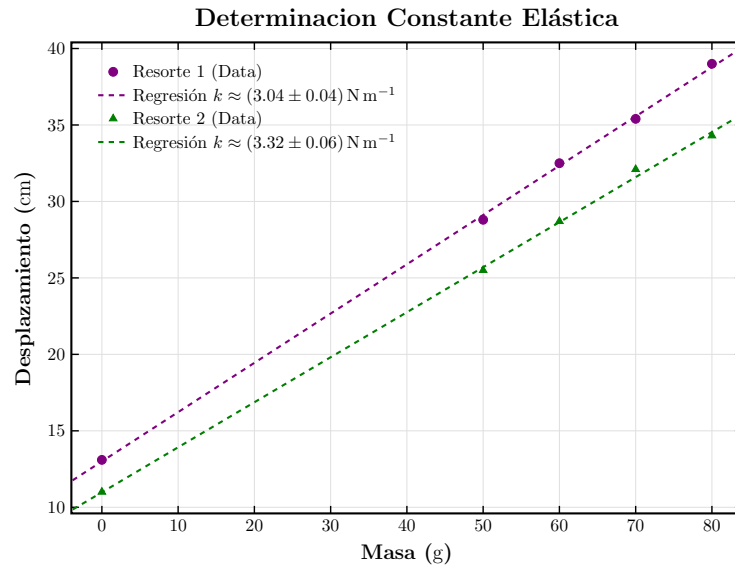


Figura 2: Determinación de la constante elástica de los resortes.

# Miércoles 07, Mayo 2025

## 1. Toma de Datos Experimentales

Para la adquisición de datos, se ensambló completamente el sistema de tres péndulos físicos acoplados. Se instaló un sensor rotacional *Cassy* en el soporte de cada péndulo, alineado coaxialmente con su eje de giro. Esta disposición, visible en la figura 1, permitió registrar el desplazamiento angular  $\theta_i(t)$  de cada barra de forma independiente. Los resortes de acoplamiento se fijaron a las barras según las especificaciones del diseño experimental, estableciendo así la interacción mecánica entre los péndulos.

Una vez configurado el montaje, se realizaron mediciones para cinco distintas configuraciones de acoplamiento del sistema. Estas configuraciones, que varían los puntos de anclaje de los resortes entre los péndulos, se ilustran esquemáticamente en la figura 2, junto con la codificación utilizada para identificarlas. Para cada una de estas cinco configuraciones, el sistema se observó bajo tres condiciones de excitación inicial (desplazamiento angular inicial):

- Desplazamiento de un solo péndulo lateral (i.e. péndulo 1), codificado como (100).
- Desplazamiento del péndulo central (péndulo 2), codificado como (010).
- Desplazamiento simultáneo y simétrico (o antisimétrico, según el caso) de los dos péndulos laterales (péndulos 1 y 3), codificado como (101).

Los datos de la evolución temporal del ángulo de cada péndulo para cada ensayo fueron registrados automáticamente por el sistema *Cassy* y almacenados digitalmente para su posterior análisis. Se procuró que cada registro tuviera una duración aproximada de 30 s para capturar múltiples oscilaciones.



Figura 1: Montaje experimental completo con los tres péndulos acoplados y los sensores rotacionales *Cassy* posicionados para medir el ángulo de cada péndulo.

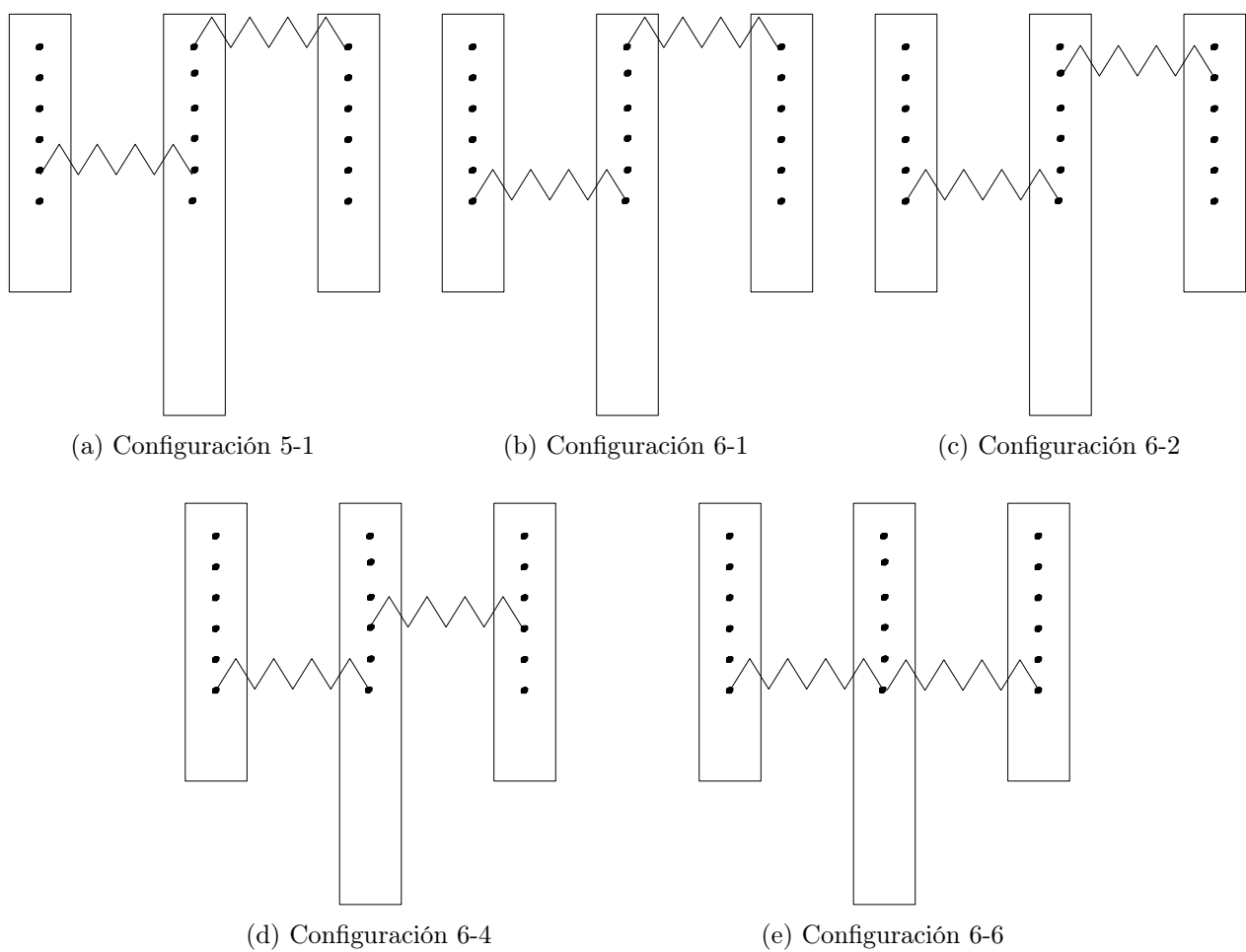


Figura 2: Representación esquemática de las cinco configuraciones de acoplamiento de resortes estudiadas. La nomenclatura 'X-Y' en cada subfigura (e.g. 5-1) denota los puntos de anclaje de los resortes en orificios específicos de los péndulos adyacentes.

# Resultados y Análisis

## Adquisición y Procesamiento de Datos

Se completó el montaje del sistema de péndulos acoplados según lo planificado. Se realizaron mediciones de la evolución angular de cada péndulo utilizando el sensor Cassy.

Se recopilaron un total de 15 series de datos temporales. Estas series cubren:

- Cinco configuraciones experimentales distintas del sistema.
- Tres condiciones iniciales diferentes para cada configuración.

Los datos crudos ( $\theta_i(t)$  para cada péndulo) fueron procesados mediante un código en Python. Los objetivos principales del procesamiento fueron:

1. Generar gráficas de la evolución angular  $\theta_i(t)$  para visualizar el comportamiento dinámico.
2. Determinar las frecuencias angulares principales de oscilación ( $f_i$ ) para cada péndulo en cada serie, aplicando la Transformada Rápida de Fourier (FFT) a los datos temporales.

## Análisis de Frecuencias Angulares Experimentales

Las frecuencias angulares principales identificadas se resumen en el cuadro 1.

Del análisis preliminar de los valores en cuadro 1, se observan los siguientes patrones:

**Péndulo 2 (el más largo):**

- Frecuencia angular usual: consistentemente alrededor de 0.844 Hz.
- Desviación estándar: 0.009. Esto indica una notable regularidad en su comportamiento oscilatorio a esta frecuencia.

**Péndulo 1:**

- Se identifican dos agrupaciones principales de frecuencias:
  - En torno a 1.311 Hz (desv. est. 0.019).
  - Cercana a 0.843 Hz (desv. est. 0.008).

**Péndulo 3:**

- Comportamiento similar al péndulo 1, con valores ligeramente distintos:
  - Frecuencias predominantes alrededor de 1.255 Hz (desv. est. 0.063).
  - Frecuencias alrededor de 0.843 Hz (desv. est. 0.008).
- Adicionalmente, se detectó una frecuencia excepcionalmente baja de 0.0021 Hz. Esta se presentó de manera aislada, únicamente en la Configuración 5-1 bajo las condiciones iniciales (100).

Cuadro 1: Frecuencias angulares principales de oscilación ( $f_i$ ) identificadas para cada péndulo, según la configuración experimental y las condiciones iniciales aplicadas.

Configuración	Condición Inicial	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]
5-1	100	1.272	0.841	0.021
	010	0.831	0.831	0.831
	101	1.277	0.838	1.193
6-1	100	1.315	0.838	1.200
	010	0.842	0.842	0.842
	101	1.314	0.835	1.190
6-2	100	1.330	0.846	1.229
	010	0.838	0.838	0.838
	101	1.319	0.840	1.211
6-4	100	1.326	0.855	1.326
	010	0.850	0.850	0.850
	101	1.325	0.851	1.271
6-6	100	1.314	0.855	1.330
	010	0.852	0.852	0.852
	101	1.315	0.857	1.347

**Interpretación inicial:** La aparición de múltiples frecuencias dominantes para los péndulos laterales (1 y 3) sugiere la excitación selectiva de diferentes modos normales del sistema. La manifestación de estos modos parece depender de la configuración específica de acoplamiento y de las condiciones iniciales impuestas.

**Análisis detallado de cuadro 1:**

- **Condición inicial (010)** (excitación única del péndulo central): Los tres péndulos tienden a oscilar con una frecuencia dominante común o muy similar, independientemente de la configuración de acoplamiento. Esto podría indicar la excitación preferente de un modo normal en el que los tres péndulos participan de manera sincronizada.
- **Otras condiciones iniciales:** El péndulo 3 generalmente muestra una frecuencia principal inferior a la del péndulo 1. Una excepción se observa en la configuración 6-6, donde la frecuencia principal del péndulo 3 supera a la del péndulo 1.

**Factores que influyen en las frecuencias observadas:**

- La menor frecuencia característica del péndulo 2 se atribuye principalmente a su mayor longitud y masa (mayor momento de inercia) en comparación con los péndulos laterales.
- Las diferencias en las frecuencias principales entre los péndulos 1 y 3, y su variación entre configuraciones, son consecuencia de cómo los diferentes puntos de acople de los resortes modifican la interacción. La altura de fijación de los resortes influye en los torques de acoplamiento y, por ende, en la 'rigidez efectiva angular' del acoplamiento. Esto afecta las características de los modos normales.
- **Configuración 6-6:** Sus puntos de acople específicos parecen facilitar una interacción que favorece un modo donde el péndulo 3 oscila a una frecuencia mayor que el 1.
- **Frecuencia anómala de 0.0021 Hz (P3, Config. 5-1, CI (100)):** En esta configuración, un punto de anclaje del resorte está muy próximo al pivote. Esto resulta en una 'rigidez efectiva angular' muy débil para ciertos patrones de movimiento, llevando a frecuencias de oscilación extremadamente bajas para el modo asociado.
- **Configuración 6-4, CI (100):** Los péndulos laterales (1 y 3) presentan la misma frecuencia principal. Esto podría indicar la excitación de un modo normal con alta simetría en el movimiento de los péndulos externos.

## Cálculo de Frecuencias del Modelo Teórico

Se resolvió el problema de valores propios para el sistema (representado en forma matricial para obtener las frecuencias teóricas de los modos normales para las cinco configuraciones experimentales.

Los resultados teóricos se presentan en el cuadro 2. Se identifican tres frecuencias de modo normal distintas para cada configuración, como es de esperar para un sistema con tres grados de libertad.

**Observaciones sobre las frecuencias teóricas (cuadro 2):**

- **Tendencia general:** Una mayor distancia entre el punto de acople del resorte y el pivote del péndulo tiende a correlacionarse con un aumento en las frecuencias de los modos normales.
- **Valores específicos:** Se observa con regularidad una frecuencia teórica cercana a 0.8 Hz. Otras están agrupadas en torno a 1.3 Hz y, en algunos casos, próximas a 1.6 Hz.

Cuadro 2: Frecuencias teóricas de los modos normales ( $f_{0i}$ ) calculadas para el sistema, según la configuración de acoplamiento.

Configuración	$f_{01}$ [Hz]	$f_{02}$ [Hz]	$f_{03}$ [Hz]
5-1	0.831	1.167	1.265
6-1	0.834	1.167	1.312
6-2	0.837	1.182	1.312
6-4	0.844	1.239	1.312
6-6	0.851	1.310	1.336

#### Comparación inicial con datos experimentales:

- Las frecuencias teóricas obtenidas, en general, no difieren significativamente de los valores experimentales predominantes (ver cuadro 1).
- **Excepción notable:** La frecuencia experimental anómalamente baja de 0.0021 Hz (Config. 5-1, CI (100), P3) no tiene una contraparte directa en el espectro teórico calculado.
- **Concordancia general:** A pesar de la excepción, la concordancia para las demás frecuencias principales sugiere que el modelo teórico linealizado (basado en pequeñas oscilaciones) aproxima razonablemente el comportamiento dinámico del sistema.

#### Comparación Detallada: Frecuencias Experimentales vs. Teóricas

En la cuadro 3 se presenta una comparación directa entre las frecuencias experimentales ( $f_{ex}$ ) predominantes (para modos discernibles) y sus correspondientes frecuencias teóricas ( $f_{te}$ ). Se incluye el error relativo porcentual:  $E = \left| 1 - \frac{f_{te}}{f_{ex}} \right| \cdot 100 \%$ .

##### Análisis de errores relativos (cuadro 3):

- Los errores relativos porcentuales varían considerablemente.
- Error más grande observado (sin considerar la frecuencia anómala de 0.0021 Hz, no incluida aquí): 2.509 %.
- Error más bajo registrado: 0.036 %.
- Estos valores indican que, si bien existen desviaciones, el modelo teórico predice las frecuencias de los modos normales con un grado de precisión generalmente alto para la mayoría de los casos.

#### Visualización: Casos Representativos de Oscilación y Espectros

Se seleccionaron seis casos del conjunto de datos experimentales como los más representativos de los diversos comportamientos dinámicos observados. Para cada caso, se generaron figuras que muestran: (a) Evolución temporal del desplazamiento angular  $\theta_i(t)$ . (b) Espectro de amplitudes (FFT) correspondiente.

Estas representaciones gráficas se detallan en las figuras 1 a 6.

##### Análisis de casos específicos:

**Figura 1 (Config. 1-1, CI (111)):**

Cuadro 3: Comparación entre las frecuencias experimentales predominantes ( $f_{\text{ex}}$ ) y las frecuencias teóricas ( $f_{\text{te}}$ ) para los modos normales, junto con el error relativo porcentual.

Configuración	$f_{\text{ex}}$ [Hz]	$f_{\text{te}}$ [Hz]	Error Relativo [%]
5-1	0.831	0.831	0.036
	1.193	1.167	2.221
	1.277	1.265	0.971
6-1	0.842	0.834	0.856
	1.190	1.167	1.949
	1.314	1.312	0.183
6-2	0.838	0.837	0.143
	1.211	1.182	2.468
	1.319	1.312	0.523
6-4	0.850	0.844	0.718
	1.271	1.239	2.509
	1.325	1.312	0.966
6-6	0.852	0.851	0.070
	1.315	1.310	0.358
	1.347	1.336	0.876

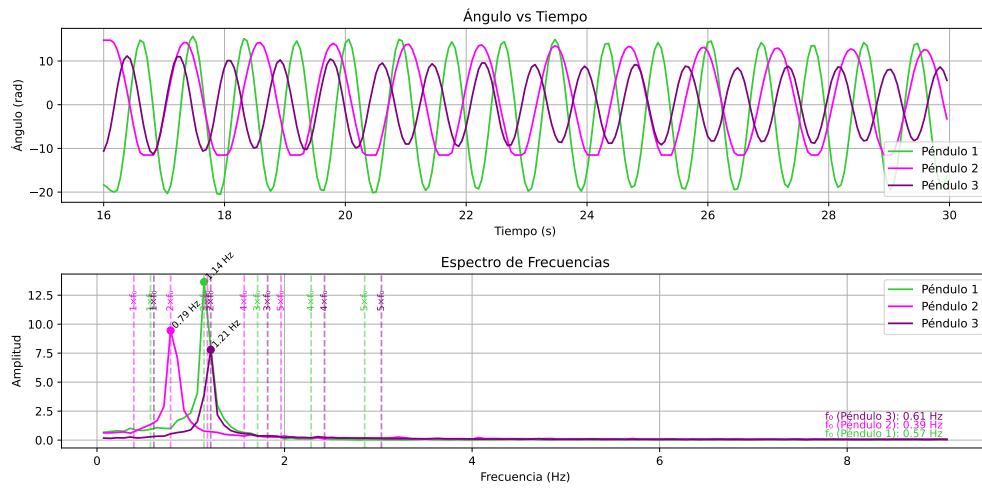


Figura 1: Evolución temporal  $\theta_i(t)$  y espectro FFT. Configuración 1-1, CI (111).



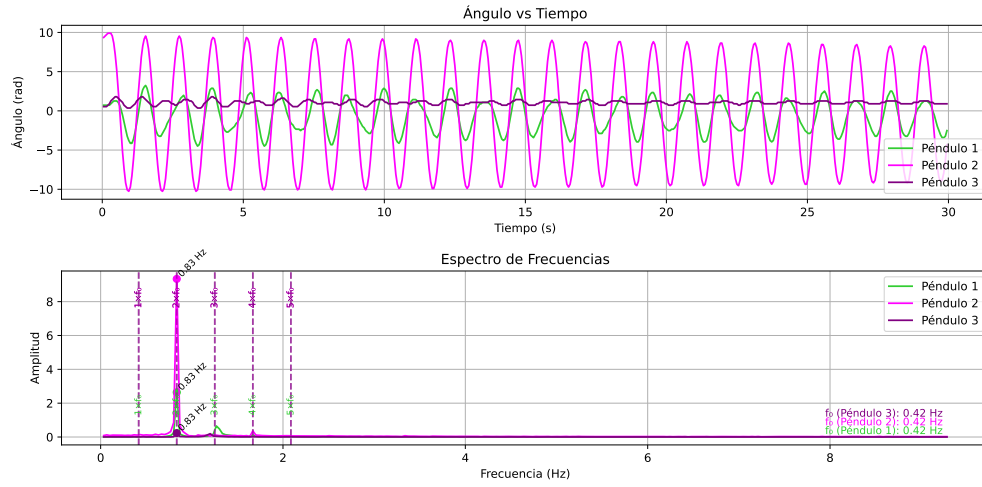


Figura 2: Evolución temporal  $\theta_i(t)$  y espectro FFT. Configuración 5-1, CI (010).

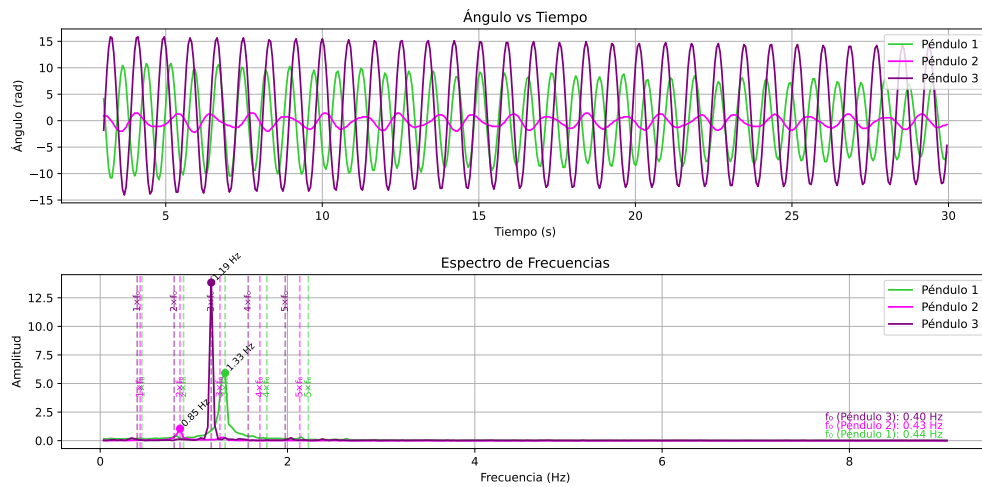


Figura 3: Evolución temporal  $\theta_i(t)$  y espectro FFT. Configuración 6-1, CI (101).

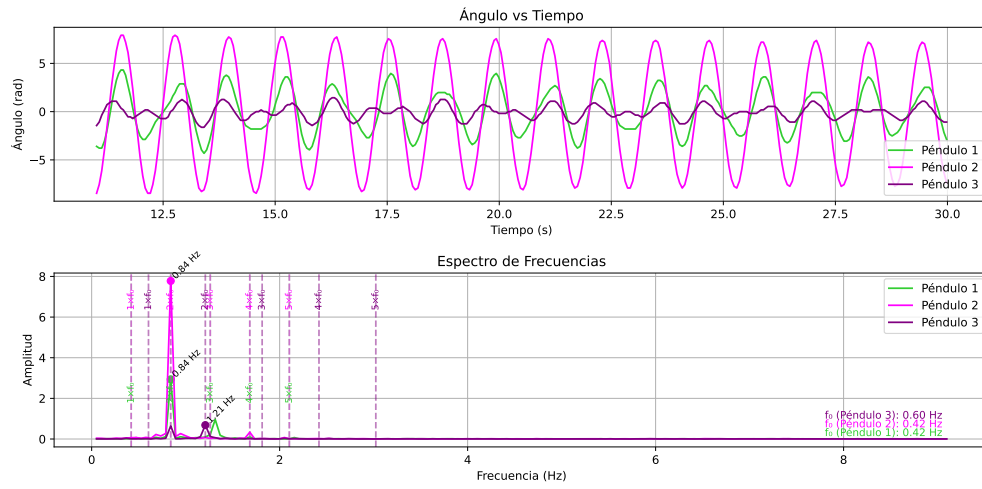


Figura 4: Evolución temporal  $\theta_i(t)$  y espectro FFT. Configuración 6-2, CI (010).

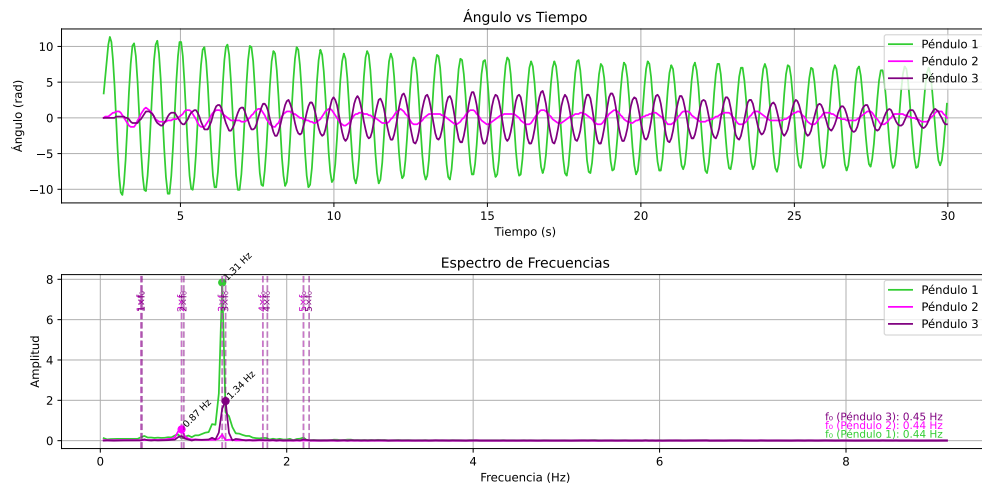


Figura 5: Evolución temporal  $\theta_i(t)$  y espectro FFT. Configuración 6-6, CI (100).

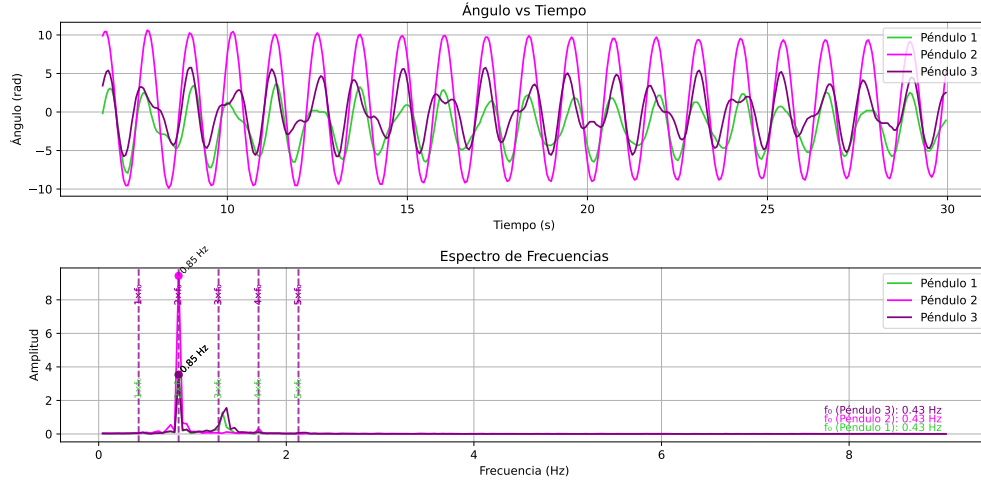


Figura 6: Evolución temporal  $\theta_i(t)$  y espectro FFT. Configuración 6-6, CI (010).

- Cada péndulo exhibe un pico de frecuencia principal distintivo en su FFT; no comparten una única frecuencia dominante común.
- Picos espectrales relativamente anchos: sugiere duración limitada de coherencia o amortiguamiento significativo.
- Amortiguamiento esperado: debido a interacciones (acoplamiento, fricción) y complejidad del movimiento (laterales desfasados respecto al central).
- Péndulo 2: comportamiento temporal con modulaciones en amplitud, no armónico simple.

**Figura 2 (Config. 5-1, CI (010)):**

- Picos espectrales más definidos y estrechos: comportamiento más regular, menos amortiguado para frecuencias dominantes.
- Los tres péndulos comparten la misma frecuencia principal (reafirma tendencia para CI (010)).
- Componentes espectrales secundarias comunes, con diferentes amplitudes relativas entre péndulos.
- Péndulo 3: menor amplitud en componentes espectrales (posiblemente menor eficiencia en transmisión de energía por geometría de acople).
- Evolución temporal más estable y coherente; disminución gradual de amplitudes (amortiguamiento residual).

**Figura 3 (Config. 6-1, CI (101)):**

- Análisis espectral revela tres picos de frecuencia principales distintos (sugiere excitación de múltiples modos normales).
- Péndulo 3: mayor amplitud en su frecuencia principal y pico espectral más estrecho comparado con P1 (relacionado con naturaleza del acoplamiento y excitación inicial de P3).

- Péndulo 2: oscilaciones de amplitud muy reducida (consistente con modo normal donde laterales se mueven desfasados y P2 tiene participación mínima).
- Evolución temporal: intercambio de energía entre P1 y P3 (pulsaciones/batidos), esperado si frecuencias de modos son cercanas y hay transferencia de energía.

**Figura 4 (Config. 6-2, CI (010)):**

- Péndulo 2 (espectro): frecuencia principal con amplitud prominente y pico estrecho. Componente secundaria a aprox.  $4f_P$ . Comportamiento temporal similar a M.A.S.
- Péndulo 1 (espectro): comparte  $f_P$  de P2. Otro pico significativo a frecuencia  $> 3f_P$ . Movimiento no estrictamente M.A.S., pero con clara periodicidad.
- Péndulo 3 (espectro): dos picos con amplitudes comparables, frecuencias corresponden aprox. con valores teóricos esperados (0.83 Hz y 1.2 Hz). Amplitudes bajas, oscilación de escasa magnitud.

**Figura 5 (Config. 6-6, CI (100)):**

- Geometría de acople facilita transmisión efectiva de energía.
- Análisis espectral: los tres péndulos comparten componentes de frecuencia en mismas ubicaciones espectrales.
- P1 y P3 comparten frecuencia principal común (más alta).
- P2 tiene su propia  $f_P$  (menor), pero exhibe picos secundarios en frecuencias donde P1 y P3 oscilan predominantemente (participa en modos de mayor frecuencia).
- Comportamiento (todos oscilan significativamente) distingue esta combinación, resaltando papel determinante de posición de acoples.