

Modos Normales

Sebastián Rodríguez¹, Laura Torres¹, Julian Avila¹

¹Física, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Resumen

a

1. Introducción

En el estudio de la mecánica clásica, la comprensión del comportamiento dinámico de los sistemas es fundamental. Particularmente, los sistemas oscilatorios juegan un papel crucial en una amplia gama de fenómenos, desde el movimiento de un péndulo simple hasta las vibraciones de estructuras complejas. A menudo, estos sistemas involucran múltiples componentes que interactúan entre sí, dando lugar a un comportamiento acoplado que es más complejo que la suma de sus partes individuales.

Una herramienta analítica extraordinariamente potente para desentrañar esta complejidad es la aproximación de pequeñas oscilaciones. Esta aproximación establece que cualquier sistema físico, bajo ciertas condiciones y cerca de una posición de equilibrio estable, puede ser linealizado. Dicho de otro modo, el sistema se comporta de manera análoga a un conjunto de osciladores armónicos simples acoplados. La fuerza de esta aproximación reside en que permite transformar problemas intrincados en un marco matemático más manejable, revelando las frecuencias naturales y los modos normales de oscilación del sistema.

Los modos normales representan patrones de movimiento colectivo en los que todas las partes del sistema oscilan con la misma frecuencia y fase relativa constante. Visualizar y comprender estos modos es esencial, ya que ofrecen una perspectiva fundamental sobre la estabilidad y la respuesta dinámica de un sistema. En mecánica clásica, los modos normales son la clave para entender fenómenos como la resonancia, la propagación de ondas en medios continuos y la transferencia de energía entre osciladores [?].

Este concepto trasciende la física clásica y sienta las bases para la comprensión de fenómenos cuánticos. La idea de estados propios discretos y sus correspondientes

valores propios en sistemas cuánticos tiene un paralelismo conceptual directo con los modos normales y las frecuencias naturales en la mecánica clásica. Es, por tanto, un primer paso indispensable para adentrarse en la mecánica cuántica y la comprensión de sistemas de múltiples partículas [?].

En este trabajo, se presenta un sistema de tres péndulos acoplados diseñado específicamente para visualizar y estudiar experimentalmente sus modos normales de oscilación. A través de este sistema, se busca proporcionar una plataforma que permita explorar directamente los principios de la aproximación de pequeñas oscilaciones, la determinación de frecuencias naturales y la identificación de los modos normales.

2. Métodos

3. Desarrollo Teórico

Para describir la dinámica del sistema compuesto por tres péndulos físicos, se realizan varias consideraciones iniciales que permiten que tanto el experimento como la deducción de las ecuaciones de movimiento sean lo más naturales y simplificadas posible.

Inicialmente, como se observa en la Figura ??, se tiene el esquema de los péndulos en sus puntos de equilibrio, donde los ejes de rotación están separados por una distancia a , correspondiente a la longitud natural de los muelles.

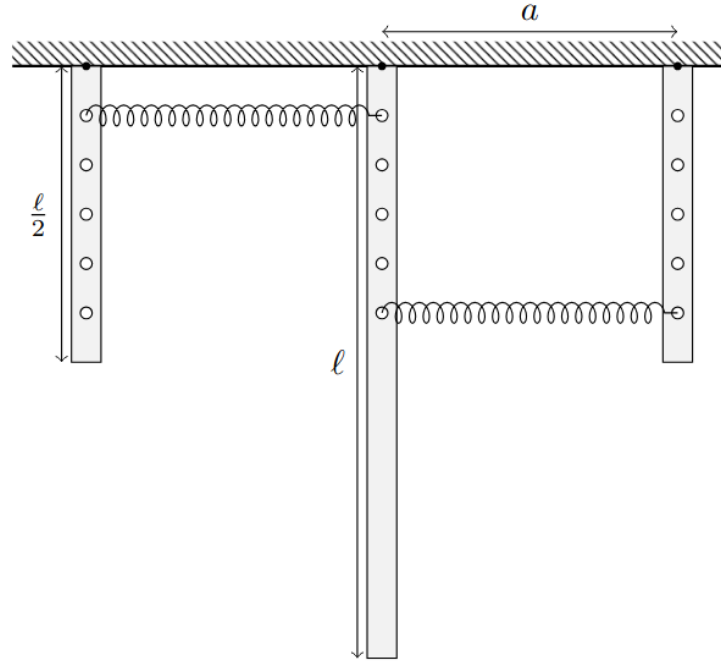


Figura 1 Esquema de los péndulos en equilibrio.

La forma más intuitiva de obtener las ecuaciones de movimiento del sistema es mediante una sumatoria de torques, considerando tanto el generado por los resortes como el producido por la fuerza gravitacional.

Es necesario, entonces, encontrar una expresión para el torque gravitacional en función de cualquier ángulo θ_i , así como una expresión para las distancias del tipo $x_0 + \Delta x$, que representan la elongación de los resortes en función de los ángulos θ_i y θ_{i+1} .

Las barras se enumeran de izquierda a derecha como 1, 2 y 3, según se muestra en la Figura ??.

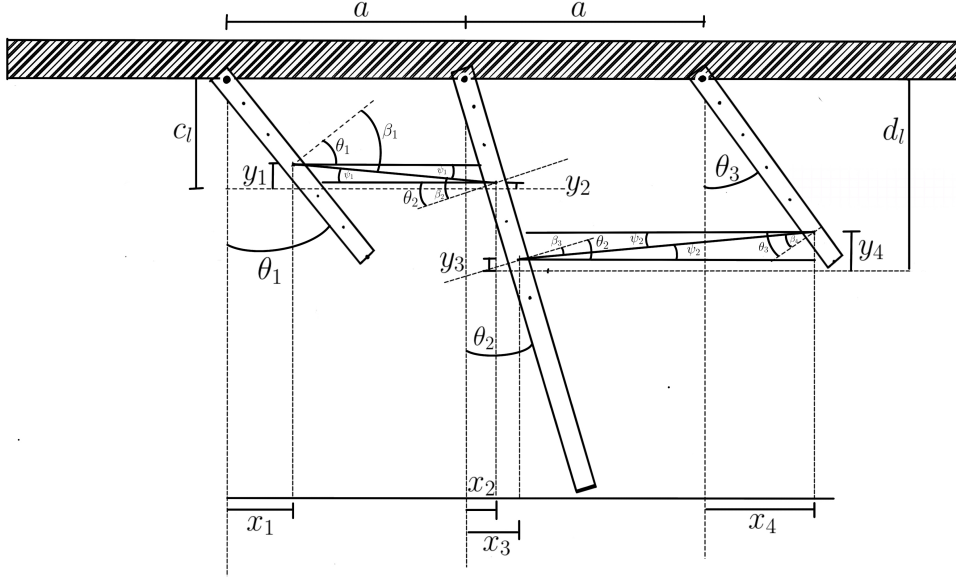


Figura 2 Numeración de las barras de izquierda a derecha.

Al desplazar del equilibrio las barras 1 y 2, se observa que la tangente de ambas se desvía del eje horizontal un ángulo θ_i . Esto permite construir un triángulo rectángulo con las componentes x_i e y_i de la posición del punto de aplicación de la fuerza elástica para cada barra, generalizada a cualquier fracción de la longitud l , como se muestra en la Figura ??.

Las coordenadas x_i e y_i están definidas como:

$$x_1 = c \cdot l \sin(\theta_1), \quad x_2 = c \cdot l \sin(\theta_2) \quad (1)$$

$$y_1 = c \cdot l \cos(\theta_1), \quad y_2 = c \cdot l \cos(\theta_2) \quad (2)$$

El triángulo resultante está definido por un ángulo ψ_1 , que cumple la relación $\beta_1 + \psi_1 = \theta_1$, donde β_1 corresponde al ángulo entre la tangente de la barra 1 y la línea

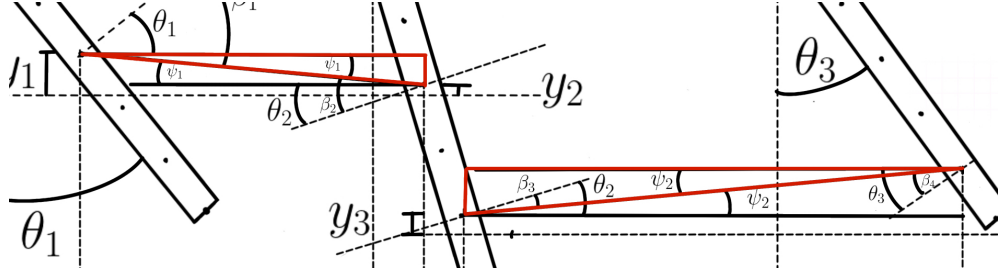


Figura 3 Construcción geométrica para determinar la posición del punto de aplicación de la fuerza.

recta que conecta los puntos de aplicación. A partir de este triángulo se obtiene la expresión para la elongación del resorte entre las barras 1 y 2:

$$x_{01} + \Delta x_1 = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (a + x_2 - x_1)^2} \quad (3)$$

Y el ángulo ψ_1 está dado por:

$$\psi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{y_2 - y_1}{a - x_1 + x_2} \right) \quad (4)$$

De forma análoga, para las barras 2 y 3 se utiliza el punto de aplicación dl , resultando en:

$$\psi_2 = \tan^{-1} \left(\frac{y_4 - y_3}{a - x_3 + x_4} \right), \quad (5)$$

$$x_{02} + \Delta x_2 = \sqrt{(y_4 - y_3)^2 + (a + x_4 - x_3)^2} \quad (6)$$

Donde:

$$x_3 = d \cdot l \sin(\theta_2), \quad x_4 = d \cdot l \sin(\theta_3) \quad (7)$$

$$y_3 = d \cdot l \cos(\theta_2), \quad y_4 = d \cdot l \cos(\theta_3) \quad (8)$$

El torque gravitacional sobre cada barra está dado por:

$$\tau_{g_i} = \sin(\theta_i) y_{cm_i} m_i g \quad (9)$$

Donde y_{cm_i} es la posición del centro de masa de la barra i .

Para los torques elásticos, se deben considerar los ángulos β_i , definidos como:

$$\beta_1 + \psi_1 = \theta_1, \quad \beta_2 + \psi_1 = \theta_2, \quad (10)$$

$$\beta_2 + \psi_2 = \theta_2, \quad \beta_4 + \psi_2 = \theta_3 \quad (11)$$

Debido a las distintas posiciones de aplicación entre los pares de barras, aparecen cuatro ángulos β_i , donde los índices 2 y 3 están relacionados con la barra central.

La sumatoria de torques, considerando sentido antihorario como positivo, da lugar a:

$$\begin{aligned}\sum \tau_{m1} &= \cos(\beta_1) c l k_1(\Delta x_1) - \sin(\theta_1) y_{cm1} m_1 g = I_1 \ddot{\theta}_1, \\ \sum \tau_{m2} &= \cos(\beta_3) d l k_2(\Delta x_2) - \cos(\beta_2) c l k_1(\Delta x_1) - \sin(\theta_2) y_{cm2} m_2 g = I_2 \ddot{\theta}_2, \\ \sum \tau_{m3} &= -\cos(\beta_2) d l k_2(\Delta x_2) + \sin(\theta_3) y_{cm3} m_3 g = I_3 \ddot{\theta}_3\end{aligned}$$

Aproximaciones para ángulos pequeños

Con el fin de encontrar una solución analítica aproximada que permita calcular las frecuencias naturales del sistema, se aplican las siguientes aproximaciones:

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &\approx \theta, \\ \cos(\theta) &\approx 1, \\ \tan(\theta) &\approx \theta\end{aligned}$$

Aplicando estas aproximaciones, las coordenadas se convierten en:

$$\begin{aligned}x_1 &= c \cdot l \cdot \theta_1, & x_2 &= c \cdot l \cdot \theta_2 \\ x_3 &= d \cdot l \cdot \theta_2, & x_4 &= d \cdot l \cdot \theta_3 \\ y_1 &= c \cdot l, & y_2 &= c \cdot l \\ y_3 &= d \cdot l, & y_4 &= d \cdot l\end{aligned}$$

Si se cumple que $x_{01} = x_{02} = a$, las elongaciones de los resortes se simplifican a:

$$\Delta x_1 = cl(\theta_2 - \theta_1), \quad \Delta x_2 = dl(\theta_3 - \theta_2)$$

Además, si se asume que $\tan(\psi_i) \approx \psi_i \approx 0$, entonces $\beta_i \approx \theta_i$, lo que simplifica la sumatoria de torques a:

$$\begin{aligned}\sum \tau_{m1} &= cl \cdot k_1(cl(\theta_2 - \theta_1)) - \theta_1 \cdot y_{cm1} \cdot m_1 g = I_1 \cdot \ddot{\theta}_1, \\ \sum \tau_{m2} &= dl \cdot k_2(dl(\theta_3 - \theta_2)) - cl \cdot k_1(cl(\theta_2 - \theta_1)) - \theta_2 \cdot y_{cm2} \cdot m_2 g = I_2 \cdot \ddot{\theta}_2, \\ \sum \tau_{m3} &= dl \cdot k_2(dl(\theta_3 - \theta_2)) + \theta_3 \cdot y_{cm3} \cdot m_3 g = I_3 \cdot \ddot{\theta}_3\end{aligned}$$

Finalmente, el sistema de ecuaciones diferenciales queda:

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}_1 &= \theta_1 \left(\frac{(cl)^2 k_1 - x_{cm1} m_1 g}{I_1} \right) + \theta_2 \left(-\frac{k_1 (cl)^2}{I_1} \right) \\
\ddot{\theta}_2 &= \theta_1 \left(\frac{k_1 (cl)^2}{I_2} \right) + \theta_2 \left(-\frac{k_1 (cl)^2}{I_2} + \frac{k_2 (dl)^2}{I_2} + \frac{x_{cm2} m_2 g}{I_2} \right) + \theta_3 \left(\frac{k_2 (dl)^2}{I_2} \right) \\
\ddot{\theta}_3 &= \theta_2 \left(\frac{k_2 (dl)^2}{I_3} \right) + \theta_3 \left(-\frac{k_2 (dl)^2}{I_3} - \frac{x_{cm3} m_3 g}{I_3} \right)
\end{aligned} \tag{12}$$

4. Resultados

5. Discusión

6. Conclusiones