Rayo de Electrones Bitácora de Laboratorio

Sebastian Rodríguez

Laura Torres

Julian Avila

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Índice general

1	Aná	nálisis del Montaje Experimental					
	1.1	los Clásicos con Álgebra Geométrica	4				
		1.1.1	Modelo I: Campo Magnético Espacialmente Uniforme	4			
			Análisis de la Dinámica del Campo Magnético	5			
			Análisis del Campo Eléctrico Inducido	6			
		1.1.2	Modelo II: Campo a partir de la Ley de Biot-Savart	6			
			Campo Eléctrico en la Configuración anti-Helmholtz	7			
		1.1.3	Modelo III: Aproximación de Campo Cuadrupolar	7			
	1.2	Anális	sis de la Interacción de Espín	7			
		1.2.1	Comparación de Magnitudes	8			
		1.2.2	Efecto de la Precesión de Larmor	8			
2 Re		ultados Experimentales					
	2.1	2.1 Configuraciones de Campo Uniforme (Helmholtz)					
	2.2	Config	guraciones de Campo de Gradiente (Anti-Helmholtz)	9			
2.3 Configuración Mixta y Desdoblamiento del Haz				10			
3	Disc	cusión		12			
	3.1	Análisis del Desdoblamiento del Haz: Análogo Clásico vs. Efecto Cuántico					
		3.1.1	La Naturaleza de la Fuerza Dominante	12			
		3.1.2	Campos Dinámicos (AC) vs. Estáticos (DC)	12			
		3.1.3	Separación Clásica vs. Cuantizada	13			

1 Análisis del Montaje Experimental

El montaje experimental presenta simetrías notables que determinan los posibles efectos a observar. Independientemente de la dirección relativa de los campos magnéticos generados por cada par de bobinas coaxiales, el sistema exhibe una simetría de reflexión respecto a los planos xz, yz y xy. Esto se debe a la simetría axial intrínseca de las bobinas y a su disposición simétrica respecto al origen.

Además, si ambos pares de bobinas operan a la misma frecuencia, se obtiene una simetría rotacional de $\pi/2$ en el plano yz. En el caso general de frecuencias distintas, esta se reduce a una simetría de rotación de π . Estas simetrías son fundamentales para la construcción de los modelos teóricos y la simplificación de los cálculos. Por tanto, se espera que los patrones observados en la pantalla reflejen estas mismas simetrías.

1.1. Modelos Clásicos con Álgebra Geométrica

Se postula que la dinámica del electrón está gobernada por la fuerza de Lorentz. En el régimen de bajas energías (4.1 keV $\ll 511$ keV), los efectos relativistas son despreciables. De esta forma, la ecuación diferencial a resolver es la ecuación (1.1), donde -e y m son la carga y la masa del electrón, respectivamente. Los campos son el vector eléctrico E y el bivector magnético B.

La ecuación se presenta en el formalismo del álgebra geométrica $\mathcal{C}\ell_3(\mathbb{R})$. El término $\langle \dot{x}B\rangle_1$ denota la proyección de grado-1 (vector) del producto geométrico, el cual corresponde a la fuerza magnética.

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -e\left(\mathbf{E} + \langle \dot{\mathbf{x}}\mathbf{B} \rangle_1\right) \tag{1.1}$$

Para todos los modelos se asume que no existe interacción electrón-electrón. Aplicando las ecuaciones de Maxwell homogéneas,

$$\nabla E = -\partial_t B,\tag{1.2}$$

$$\langle \nabla \mathbf{B} \rangle_3 = 0, \tag{1.3}$$

se deduce la existencia de un potencial vectorial magnético $\mathbf{A} \in \mathcal{C}\ell^1$ (i.e $A = \langle A \rangle_1$) tal que $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \equiv \langle \nabla \mathbf{A} \rangle_2$. Sustituyendo en la ley de Faraday, se obtiene el campo eléctrico inducido en la ausencia de un potencial escalar ($\phi = 0$):

$$\nabla \mathbf{E} = -\partial_t \langle \nabla \mathbf{A} \rangle_2 \implies \langle \nabla (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) \rangle_2 = 0 \implies \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}. \tag{1.4}$$

1.1.1. Modelo I: Campo Magnético Espacialmente Uniforme

En una configuración de bobinas de Helmholtz, donde las corrientes fluyen en la misma dirección, se genera un campo magnético aditivo y notablemente uniforme en la región central entre ellas. Como primera aproximación, se postula que el campo magnético \boldsymbol{B} es espacialmente uniforme y depende únicamente del tiempo.

El campo total es la superposición de los campos generados por cada par de bobinas. En el formalismo de álgebra geométrica, este bivector es:

$$\mathbf{B}(t) = B_2(t)e_{31} + B_3(t)e_{12},\tag{1.5}$$

$$B_i(t) = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mu_0 n I_i(t)}{R} =: B_0 I_i(t), \tag{1.6}$$

donde μ_0 es la permeabilidad del vacío, n el número de vueltas de cada bobina, R su radio, y $I_i(t)$ la corriente de alimentación. El subíndice $i \in \{2,3\}$ denota el eje cartesiano correspondiente.

Dada la no unicidad del potencial vectorial magnético A, se adopta el gauge simétrico:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x} \mathbf{B}(t) \rangle_1. \tag{1.7}$$

Esta elección satisface correctamente la condición $\langle \nabla \mathbf{A} \rangle_2 = \mathbf{B}$. El campo eléctrico inducido se deriva de $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$, resultando en:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = -\frac{1}{2} \langle \boldsymbol{x} \, \partial_t \boldsymbol{B}(t) \rangle_1. \tag{1.8}$$

Análisis de la Dinámica del Campo Magnético

La estructura temporal del campo magnético, descrita en la ecuación (1.5), determina la naturaleza de la fuerza ejercida sobre el electrón. Para visualizar esta dinámica, se analiza la evolución del vector dual al bivector magnético, $\mathbf{B}^* = \mathbf{B}e_{123}^{-1}$. Esto equivale a realizar una gráfica paramétrica de la componente $B_3(t)$ en función de $B_2(t)$.

Cuando las corrientes $I_2(t)$ e $I_3(t)$ son sinusoidales, la trayectoria resultante es una figura de Lissajous. La morfología de esta figura depende críticamente de la razón de frecuencias, ω_2/ω_3 , y del desfase, ϕ , entre ambas señales.

En este experimento se utilizaron también señales cuadradas, generando dinámicas distintas. Para dos señales cuadradas, la trayectoria traza un perímetro rectangular, con transiciones que dependen de la relación de frecuencias. La combinación de una señal sinusoidal y una cuadrada produce una trayectoria confinada entre dos segmentos rectos, conectados por arcos sinusoidales.

La figura 1 ilustra estas tres configuraciones para una razón de frecuencia de 3:1 y un desfase nulo, mostrando la rica variedad de campos magnéticos temporales que se pueden generar.

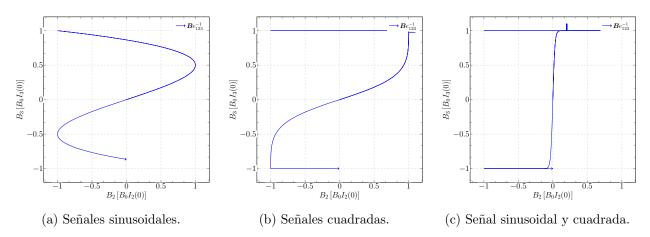


Figura 1: Evolución del vector de campo magnético \boldsymbol{B}^* en el plano yz para distintas formas de onda de la corriente. Se muestra una razón de frecuencias de 3:1 y un desfase $\phi = 0$.

Análisis del Campo Eléctrico Inducido

El campo eléctrico inducido E depende de la tasa de cambio del campo magnético, $\partial_t B$. Su magnitud es, por ende, proporcional a la frecuencia de las corrientes de alimentación. A continuación, se cuantifica su efecto en comparación con el campo magnético para las condiciones específicas del experimento.

La razón entre las magnitudes de las fuerzas eléctrica y magnética es:

$$rac{|oldsymbol{F}_E|}{|oldsymbol{F}_B|}pproxrac{|oldsymbol{E}|}{v|oldsymbol{B}|}$$

Para una señal sinusoidal, $|E| \approx R\omega |B|$, donde R es el radio de las bobinas, ω la frecuencia angular y v la velocidad del electrón. La razón de fuerzas es entonces $\approx R\omega/v$.

Con los parámetros del montaje, se tiene:

- Una frecuencia $f \approx 50 \,\mathrm{Hz}$, que implica una frecuencia angular $\omega = 2\pi f \approx 314 \,\mathrm{rad}\,\mathrm{s}^{-1}$.
- Una energía cinética de 4.1 keV, que corresponde a una velocidad del electrón de $v \approx 0.1c$.
- Un radio de bobinas R del orden de $6.2 \,\mathrm{cm}$.

Sustituyendo estos valores se obtiene:

$$\frac{|\boldsymbol{F}_E|}{|\boldsymbol{F}_B|} pprox \frac{R\omega}{v} pprox 10^{-7}$$

Este resultado numérico, de orden 10^{-7} , confirma de manera contundente que la fuerza magnética es aproximadamente diez millones de veces mayor que la fuerza eléctrica. Por lo tanto, es una aproximación justificada considerar que la dinámica es gobernada exclusivamente por el campo magnético, omitiendo el término de E en el modelo.

1.1.2. Modelo II: Campo a partir de la Ley de Biot-Savart

En este modelo, se abandona la aproximación de campo uniforme para calcular el campo magnético de forma más fundamental. Se utiliza la ley de Biot-Savart para cada espira de las bobinas.

Se considera una única espira circular de radio R en el plano inferior del par de bobinas del eje z, ubicado en z = -R/2. Su geometría se parametriza por el vector $\mathbf{l}_1(\theta)$:

$$\boldsymbol{l}_1(\theta) = R\cos(\theta)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\theta)\boldsymbol{e}_2 - \frac{R}{2}\boldsymbol{e}_3. \tag{1.9}$$

El campo magnético bivectorial que esta espira genera en un punto arbitrario $\mathbf{r} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ está dado por la ley de Biot-Savart, integrada sobre el lazo cerrado:

$$\boldsymbol{B}_{1}(t,\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_{0}NI_{1}(t)}{4\pi} \oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{1} \wedge (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l}_{1})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l}_{1}|^{3}}, \tag{1.10}$$

donde N es el número de vueltas de la bobina y $I_1(t)$ es la corriente que circula por ella.

El campo de la segunda bobina del par, ubicada coaxialmente en z = +R/2, se deduce por simetría. Si la corriente $I_2(t)$ en la bobina superior circula en la misma dirección que $I_1(t)$ (configuración Helmholtz), la relación de simetría es distinta; no obstante, la forma del campo resultante es bien conocida por su alta uniformidad en la región central, para la cual existen soluciones analíticas estándar.

Por otro lado, si se considera una configuración anti-Helmholtz (corrientes opuestas), el sistema presenta una simetría de inversión. En este caso, el campo de la segunda bobina, B_2 , se relaciona con el de la primera mediante una reflexión sobre el origen:

$$\mathbf{B}_{2}(t,\mathbf{r}) = -\mathbf{B}_{1}(t,-\mathbf{r},I_{1}(t)). \tag{1.11}$$

Esta importante simplificación surge de la simetría axial de las bobinas combinada con la simetría de paridad de la configuración. El campo total del par de bobinas es entonces la superposición $\boldsymbol{B}_{\mathrm{par}}(t,\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2$. El mismo análisis se aplica a los otros pares de bobinas a lo largo de los demás ejes.

Campo Eléctrico en la Configuración anti-Helmholtz

Aunque el análisis cuantitativo previo ya justifica la dominancia de la fuerza magnética, la configuración anti-Helmholtz presenta una propiedad de simetría que refuerza esta conclusión.

Debido a la simetría axial y de inversión de esta configuración, el potencial vectorial magnético A es nulo a lo largo del eje de las bobinas. Como consecuencia directa, el campo eléctrico inducido, $E = -\partial_t A$, también es cero sobre dicho eje. Esto implica que en la región central del montaje, la más relevante para la trayectoria del haz, el efecto del campo eléctrico es aún más despreciable.

1.1.3. Modelo III: Aproximación de Campo Cuadrupolar

El campo generado por un par de bobinas en configuración anti-Helmholtz puede ser aproximado cerca de su centro por un campo de gradiente lineal, característico de un cuadrupolo magnético. Al superponer los campos de varios pares, se obtiene un campo cuadrupolar tridimensional.

Una aproximación lineal para dicho campo es:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = b(t) \left(-x_1 e_{23} + \frac{1}{2} x_2 e_{31} + \frac{1}{2} x_3 e_{12} \right). \tag{1.12}$$

Este campo satisface la condición de Maxwell $\langle \nabla \boldsymbol{B} \rangle_3 = 0$. La dependencia temporal del campo se engloba en el coeficiente b(t).

Este tipo de campo de gradiente es la base de las trampas magnéticas. Cuando las corrientes son tales que el campo apunta hacia el origen, se crea un pozo de potencial que confina el haz (efecto de *enfoque*). Inversamente, si el campo apunta hacia afuera, las partículas son repelidas del centro (desenfoque).

Con corrientes alternas, el sistema oscila entre un estado de enfoque y desenfoque. Esto puede resultar en un confinamiento dinámico neto del haz, un principio análogo al de las trampas de Paul para partículas cargadas.

1.2. Análisis de la Interacción de Espín

Hasta ahora, se ha modelado al electrón como una carga puntual clásica. Sin embargo, el electrón es una partícula cuántica con espín $\frac{1}{2}$, lo que le confiere un momento dipolar magnético intrínseco μ . Esta propiedad podría, en principio, dar lugar a una fuerza adicional si el campo magnético no es uniforme.

El momento magnético del electrón es $\mu = g_s \frac{-e}{2m} S$, donde S es el vector de espín y $g_s \approx 2$ es el factor g del electrón. En presencia de un campo magnético con gradiente, esto genera la fuerza de Stern-Gerlach:

$$F_{\text{espin}} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}^*),$$
 (1.13)

donde B^* es el vector dual al bivector de campo magnético B. A continuación se argumenta por qué esta fuerza es despreciable en comparación con la fuerza de Lorentz.

1.2.1. Comparación de Magnitudes

En el *Modelo I* (campo uniforme), $\nabla \boldsymbol{B}^* = 0$ por definición, por lo que $\boldsymbol{F}_{\text{espín}}$ es idénticamente nula. En los modelos más realistas con gradientes de campo (II y III), se puede estimar la razón entre la fuerza de espín y la fuerza de Lorentz:

$$\frac{|\boldsymbol{F}_{\mathrm{espin}}|}{|\boldsymbol{F}_{\mathrm{Lorentz}}|} \approx \frac{|\nabla (\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}^*)|}{|e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}^*|} \approx \frac{\mu_B |\nabla \boldsymbol{B}^*|}{ev |\boldsymbol{B}^*|}$$

donde $\mu_B = e\hbar/2m$ es el magnetón de Bohr. Suponiendo que el campo varía en una escala de longitud $L \sim R$ (el radio de las bobinas), entonces $|\nabla \mathbf{B}^*| \approx |\mathbf{B}^*|/R$. La razón se simplifica a:

$$\frac{|\boldsymbol{F}_{\mathrm{espin}}|}{|\boldsymbol{F}_{\mathrm{Lorentz}}|} \approx \frac{\hbar}{2mvR} \approx 10^{-11}$$

Este cálculo, usando los parámetros del montaje, demuestra que la fuerza de Lorentz es aproximadamente once órdenes de magnitud mayor que la fuerza derivada del espín, justificando plenamente su omisión.

1.2.2. Efecto de la Precesión de Larmor

Independientemente de la estimación anterior, existe un segundo argumento. En presencia de un campo B, el momento magnético μ del electrón no permanece fijo, sino que experimenta un torque que lo hace precesar alrededor de la dirección de B^* a la frecuencia de Larmor, ω_L .

Dado que la fuerza $\boldsymbol{F}_{\mathrm{espín}}$ depende de la orientación instantánea de $\boldsymbol{\mu}$, esta fuerza también oscilará rápidamente. En el tiempo que tarda el electrón en atravesar una región con gradiente de campo, su espín habrá completado muchas precesiones. El efecto neto de esta fuerza oscilante sobre la trayectoria macroscópica se promedia a cero.

Por estas dos razones, es físicamente justificable y computacionalmente necesario ignorar la interacción del espín para los propósitos de este estudio, y continuar tratando al electrón como una carga clásica.

2 Resultados Experimentales

En esta sección se presentan los resultados experimentales obtenidos al proyectar el haz de electrones sobre la pantalla fosforescente. Se analizan los patrones de deflexión observados, los cuales sirven como una visualización directa de la dinámica del electrón bajo las distintas configuraciones de campo magnético modeladas previamente. Los resultados no solo validan las predicciones teóricas sino que también revelan dinámicas complejas y no triviales en configuraciones de campos superpuestos.

2.1. Configuraciones de Campo Uniforme (Helmholtz)

Tal como se anticipó en el análisis del Modelo I, las configuraciones basadas exclusivamente en bobinas de Helmholtz generaron trayectorias cerradas y estables en la pantalla, conocidas como figuras de Lissajous. Se verificó de manera sistemática que la topología de estas figuras es una función directa de los parámetros de control de las corrientes de alimentación. Específicamente, la razón de frecuencias enteras (ω_1/ω_2) determina el número de lóbulos de la figura a lo largo de cada eje, mientras que la diferencia de fase (ϕ) controla la apertura y la simetría de la trayectoria, pasando de líneas diagonales ($\phi = 0$) a elipses o círculos ($\phi = \pi/2$). Esta correspondencia directa entre los parámetros de entrada y la forma de la traza valida el modelo de campo uniforme como una excelente aproximación para describir la dinámica macroscópica del haz en campos cruzados.



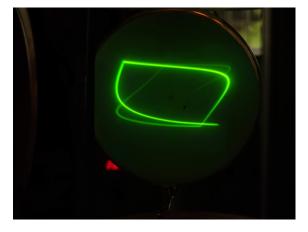


Figura 1: Figuras de Lissajous observadas en la pantalla para diferentes razones de frecuencia y desfases entre las corrientes de los pares de bobinas en configuración Helmholtz.

2.2. Configuraciones de Campo de Gradiente (Anti-Helmholtz)

En marcado contraste con la configuración anterior, los campos de gradiente, generados por pares de bobinas en modo anti-Helmholtz, produjeron patrones de naturaleza radial. El haz no trazaba una curva, sino que convergía en un punto central y se expandía hacia afuera de forma periódica. Se

observó una pulsación rítmica del haz, donde el radio máximo del patrón circular en la pantalla era proporcional a la amplitud de la corriente, mientras que la frecuencia de la pulsación coincidía con la de la corriente de alimentación. Este comportamiento es la manifestación visual directa del efecto de enfoque (cuando el haz colapsa al centro) y desenfoque (cuando se expande) predicho por el modelo cuadrupolar, confirmando la capacidad de dichos campos para manipular la sección transversal del haz.

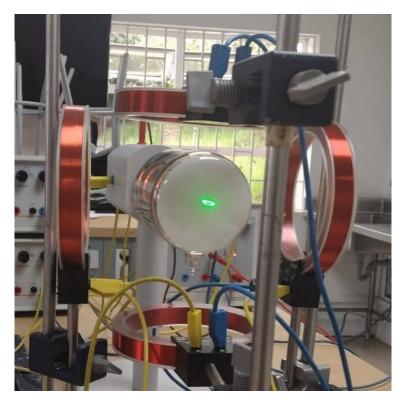


Figura 2: Patrón radial observado para la configuración anti-Helmholtz.

2.3. Configuración Mixta y Desdoblamiento del Haz

Una configuración híbrida, empleando un par de bobinas en modo Helmholtz (generando un campo relativamente uniforme en una dirección) y otro en modo anti-Helmholtz (generando un campo de gradiente en la otra), produjo el resultado más sorprendente. Se observó que el haz de electrones, en lugar de trazar una curva o expandirse, se dividía y oscilaba de forma estable entre dos posiciones discretas y bien definidas, como si la pantalla presentara dos atractores estables para la trayectoria.

Este desdoblamiento del haz en dos puntos evoca, por su apariencia visual, al patrón obtenido en el histórico experimento de Stern-Gerlach. No obstante, es fundamental subrayar que la física subyacente no corresponde a una separación de estados de espín. Mientras que la separación de espín es un fenómeno cuántico discreto dependiente de un momento magnético intrínseco, el desdoblamiento observado aquí es de naturaleza dinámica y puramente clásica. Se postula que la topología compleja del campo magnético mixto crea un potencial con dos mínimos locales, guiando al haz a saltar entre estas dos trayectorias estables a la frecuencia de los campos. Dada la naturaleza no trivial de este resultado, se posterga un análisis teórico detallado para la sección de Discusión.

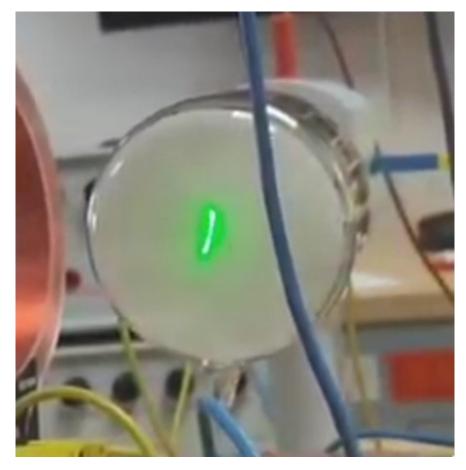


Figura 3: Representación del desdoblamiento del haz observado con la configuración mixta. El punto luminoso del electrón oscila entre las dos posiciones estables (P1 y P2), un efecto clásico que recuerda visualmente al resultado de Stern-Gerlach.

3 Discusión

Los resultados experimentales presentados confirman en gran medida los modelos teóricos. Las figuras de Lissajous y los patrones de enfoque se corresponden bien con las predicciones para campos uniformes y de gradiente, respectivamente. Sin embargo, el resultado más revelador es el desdoblamiento del haz en la configuración mixta, cuyo análisis merece una discusión aparte y detallada.

3.1. Análisis del Desdoblamiento del Haz: Análogo Clásico vs. Efecto Cuántico

La observación de un haz que se desdobla en dos puntos discretos evoca inmediatamente al célebre experimento de Stern-Gerlach (SG), un pilar de la mecánica cuántica que demostró la cuantización del espín. A pesar de esta semejanza visual, una análisis riguroso revela que el fenómeno observado en este montaje es de naturaleza puramente clásica. A continuación, se exponen las características fundamentales que impiden catalogarlo como un efecto SG.

3.1.1. La Naturaleza de la Fuerza Dominante

El argumento más contundente reside en la naturaleza de la partícula y la fuerza que gobierna su trayectoria. El experimento SG original utiliza partículas neutras (átomos de plata) para aislar la interacción entre el momento dipolar magnético y el gradiente del campo. La fuerza responsable de la separación es la fuerza de Stern-Gerlach, $F_{\rm espín} = \nabla (\mu \cdot B^*)$.

En nuestro experimento, la partícula es un electrón, una partícula cargada. Como se demostró cuantitativamente en la apartado 1.2, la fuerza de Lorentz que actúa sobre la carga del electrón es aproximadamente 10¹¹ veces mayor que cualquier posible fuerza sobre su espín. Por lo tanto, la dinámica observada es, casi en su totalidad, el resultado de la fuerza de Lorentz. El desdoblamiento no proviene de una interacción con el espín, sino de una compleja interacción de la carga del electrón con los campos externos.

3.1.2. Campos Dinámicos (AC) vs. Estáticos (DC)

El experimento SG canónico requiere un campo magnético *estático* (DC) con un gradiente espacial muy pronunciado y constante en el tiempo. La separación que produce es, por tanto, estática: los átomos son desviados permanentemente hacia una de dos trayectorias.

Nuestro montaje, en cambio, se basa fundamentalmente en campos dinámicos (AC) que oscilan a una frecuencia de 50 Hz. El patrón observado no es una separación estática, sino una oscilación del haz entre dos puntos. El electrón no elige una de dos trayectorias fijas, sino que es guiado alternativamente a una y otra posición por los campos que varían en el tiempo. Esta dependencia temporal es ajena al concepto del experimento SG.

3.1.3. Separación Clásica vs. Cuantizada

La separación en el experimento SG es una manifestación directa de la *cuantización del espacio*. Para una partícula de espín-1/2, existen únicamente dos proyecciones de espín posibles, lo que resulta en exactamente dos haces. La magnitud de esta separación depende de constantes fundamentales de la naturaleza.

En nuestro experimento, la posición de los dos puntos observados no está fijada por constantes fundamentales, sino que depende de los parámetros *clásicos* y continuamente ajustables del sistema: la geometría de las bobinas, la amplitud y frecuencia de las corrientes, y la energía inicial del haz. Se postula que la topología del campo mixto crea un *potencial efectivo* con dos mínimos locales. La posición de estos mínimos puede ser modificada alterando los voltajes y corrientes, algo que sería imposible en un desdoblamiento cuántico verdadero.

En conclusión, el fenómeno observado es un fascinante análogo clásico del experimento de Stern-Gerlach. Demuestra cómo una compleja ingeniería de campos electromagnéticos clásicos y dependientes del tiempo puede generar un comportamiento que simula visualmente un resultado cuántico. Lejos de ser una medición del espín, es un testimonio de la riqueza de la dinámica no lineal en el electromagnetismo clásico.