

Qubit a Partir de Partícula en Pozo de Potencial

Sebastian Rodríguez, Laura Herrera, Julian Avila

Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

1. Planteamiento del problema

Se considera una partícula de masa m , carga q y espín $s = \frac{1}{2}$ confinada en un pozo unidimensional de longitud L :

El potencial $V(x)$ es:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L \\ \infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El estado físico de la partícula satisface la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial \Psi(x,t)} t = \hat{H}\Psi(x(t)) \quad \text{con} \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} D^2 x + V(x)$$

Las soluciones estacionarias son:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Se sabe que la partícula puede estar en una superposición lineal de estos estados estacionarios antes de ser medida:

$$|\psi\rangle = \alpha |n=1\rangle + \beta |n=2\rangle,$$

donde $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

A partir de este punto, se pide construir de manera progresiva la descripción lógica y computacional cuántica de este sistema.

2. Revisión conceptual del sistema físico

2.1. Funciones de onda normalizadas

Las funciones de onda normalizadas para los dos primeros estados estacionarios ($n = 1$ y $n = 2$) son:

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ \psi_2(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\end{aligned}$$

Comprobamos que las funciones de onda $\psi_n(x)$ están normalizadas dentro del dominio $[0, L]$.

$$\begin{aligned}\langle \psi_n | \psi_n \rangle &= \int_0^L \psi_n^*(x) \psi_n(x) dx = \int_0^L \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)^2 dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\end{aligned}$$

Recordando la identidad trigonométrica $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$:

$$\begin{aligned}\langle \psi_n | \psi_n \rangle &= \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{L} \left[\int_0^L dx - \int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[[x]_0^L - \left[\frac{L}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right]_0^L \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[(L - 0) - \left(\frac{L}{2n\pi} \sin(2n\pi) - \frac{L}{2n\pi} \sin(0) \right) \right] \\ &= \frac{1}{L} [L - (0 - 0)] = 1\end{aligned}$$

Por ende, las funciones $\psi_n(x)$ están normalizadas.

2.2. Verificación de Ortogonalidad

Verificamos la ortogonalidad para dos estados distintos $n \neq m$. En particular, para $n = 1$ y $m = 2$.

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \int_0^L \psi_n^*(x) \psi_m(x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

Usando la identidad $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$:

$$\begin{aligned}\langle\psi_n|\psi_m\rangle &= \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi x}{L}(n-m)\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{L}(n+m)\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{L} \left[\frac{L}{\pi(n-m)} \sin\left(\frac{\pi x}{L}(n-m)\right) - \frac{L}{\pi(n+m)} \sin\left(\frac{\pi x}{L}(n+m)\right) \right]_0^L \\ &= \frac{1}{\pi(n-m)} [\sin(\pi(n-m)) - \sin(0)] - \frac{1}{\pi(n+m)} [\sin(\pi(n+m)) - \sin(0)]\end{aligned}$$

Dado que n y m son enteros distintos, $(n-m)$ y $(n+m)$ son enteros. El seno de cualquier múltiplo entero de π (como $\sin(\pi(n-m))$) es cero.

$$\langle\psi_n|\psi_m\rangle = 0 - 0 = 0 \quad (\text{para } n \neq m)$$

Especificamente para $n = 1$ y $m = 2$:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$$

2.3. Interpretación física de la Ortogonalidad

La ortogonalidad $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$ implica consecuencias físicas fundamentales para la medición:

- **Distinguibilidad Perfecta:** Los estados ortogonales son perfectamente distinguibles. Si preparamos un estado que es ψ_1 o ψ_2 , una sola medición de un observable apropiado (como la energía) puede determinar con certeza cuál de los dos estados era.
- **Proyectores de Medida:** Estos estados ortogonales definen proyectores de medida asociados a cada autoestado, dados por $P_n = |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$. Estos proyectores cumplen la propiedad $P_n P_m = 0$ para $n \neq m$, lo que matemáticamente refuerza la idea de que los resultados son mutuamente excluyentes.
- **Mediciones Mutuamente Excluyentes:** Si el sistema está en el estado ψ_1 , la probabilidad de medir el valor de energía E_2 (asociado a ψ_2) es cero, y viceversa. La ortogonalidad implica que estos resultados son mutuamente excluyentes.
- **Base para Codificar Información:** Esta estructura ortogonal es óptima para la codificación de información binaria. Al elegir ψ_1 y ψ_2 como nuestros estados base, podemos representar los dos posibles estados de un sistema binario. La ventaja es que el sistema permite mediciones sin ambigüedad (100 % distinguibles).

3. Definición de la base lógica

Aquí se formaliza la elección de los estados estacionarios como la base lógica (o computacional) de un qubit, basándose en lo encontrado en la sección anterior.

3.1. Definición de estados lógicos

Se definen los estados de la base computacional (o lógica) utilizando los dos primeros autoestados de energía del sistema:

$$|0_L\rangle \equiv |\psi_1\rangle$$

$$|1_L\rangle \equiv |\psi_2\rangle$$

Se denota \mathcal{H}_L al subespacio de Hilbert generado por estos dos vectores base:

$$\mathcal{H}_L = \text{span}\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\} = \text{span}\{|0_L\rangle, |1_L\rangle\}$$

3.2. Demostración de Base Ortonormal

Para demostrar que el conjunto $\{|0_L\rangle, |1_L\rangle\}$ forma una base ortonormal para el subespacio \mathcal{H}_L , debemos probar dos condiciones: ortonormalidad e independencia lineal.

Ortonormalidad

Como se demostró en la Sección 1, los estados ψ_1 y ψ_2 son ortonormales. Por lo tanto, por definición:

- Normalidad: $\langle 0_L | 0_L \rangle = \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle = 1$ y $\langle 1_L | 1_L \rangle = \langle \psi_2 | \psi_2 \rangle = 1$.
- Ortogonalidad: $\langle 0_L | 1_L \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0$.

El conjunto es ortonormal.

Independencia Lineal

Para probar la independencia lineal, tomamos una combinación lineal de los vectores base igualada al vector cero:

$$a|0_L\rangle + b|1_L\rangle = 0 \quad \text{donde } a, b \in \mathbb{C}$$

Para que sean linealmente independientes, debemos demostrar que la única solución es $a = 0$ y $b = 0$.

Aplicamos el bra $\langle 0_L |$ por la izquierda:

$$\begin{aligned} \langle 0_L | (a|0_L\rangle + b|1_L\rangle) &= \langle 0_L | 0 \rangle \\ a\langle 0_L | 0_L \rangle + b\langle 0_L | 1_L \rangle &= 0 \\ a(1) + b(0) &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, aplicamos el bra $\langle 1_L |$ por la izquierda:

$$\langle 1_L | (a|0_L\rangle + b|1_L\rangle) = \langle 1_L | 0 \rangle$$

$$\begin{aligned} a\langle 1_L | 0_L \rangle + b\langle 1_L | 1_L \rangle &= 0 \\ a(0) + b(1) &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Dado que la única solución es $a = 0$ y $b = 0$, los vectores son linealmente independientes.

Al ser un conjunto de dos vectores linealmente independientes y ortonormales, forman una base para el subespacio de dimensión 2 que generan (\mathcal{H}_L).

3.3. Interpretación como Qubit Lógico e Implicaciones

Interpretar esta base como la de un qubit lógico es el paso fundamental que conecta la mecánica cuántica del pozo con la computación cuántica. Las implicaciones de esta elección son:

- **Sistema Efectivo de 2 Niveles (Qubit):** Al restringir el análisis al subespacio \mathcal{H}_L , el sistema físico (que tiene infinitos niveles) se trata como un sistema binario efectivo. Esta es la unidad básica de información cuántica, el qubit lógico. Un estado general del qubit es una superposición $|\psi\rangle = \alpha|0_L\rangle + \beta|1_L\rangle$.
- **Medición y Regla de Born:** El postulado de la medida se aplica a esta base. Si el sistema está en el estado $|\psi\rangle$, al medir en la base lógica (que físicamente corresponde a medir la energía), la probabilidad de obtener el resultado E_1 (estado $|0_L\rangle$) es $P(0) = |\langle 0_L | \psi \rangle|^2 = |\alpha|^2$, y la probabilidad de obtener E_2 (estado $|1_L\rangle$) es $P(1) = |\langle 1_L | \psi \rangle|^2 = |\beta|^2$.
- **Limitaciones Físicas (Fuga):** Esta es una idealización. El sistema físico real posee otros niveles ($n = 3, 4, \dots$). Una implicación crucial es que cualquier operación física sobre el qubit debe diseñarse cuidadosamente para no “excitar” la partícula a estos niveles superiores, lo que se conoce como *fuga* (leakage). El sistema debe permanecer dentro del subespacio \mathcal{H}_L .
- **Operaciones Unitarias (Puertas Lógicas):** La dinámica del qubit (las puertas lógicas) debe ser implementada mediante operaciones unitarias U que dejen el subespacio \mathcal{H}_L invariante ($U : \mathcal{H}_L \rightarrow \mathcal{H}_L$). Físicamente, esto exige la construcción de campos o perturbaciones externas que provoquen transiciones controladas solo entre $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$, sin afectar a otros estados.

4. Estado antes de la medición

4.1. Estado en la representación de posición

El estado general del qubit en el subespacio lógico \mathcal{H}_L es:

$$|\psi\rangle = \alpha|0_L\rangle + \beta|1_L\rangle$$

Usando la definición de la base lógica ($|0_L\rangle \equiv |\psi_1\rangle$ y $|1_L\rangle \equiv |\psi_2\rangle$), reescribimos el estado en términos de los autoestados de energía:

$$|\psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle$$

La representación en la base de posición $\Psi(x)$ se obtiene proyectando este estado sobre el bra $\langle x|$:

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \langle x|\psi \rangle \\ &= \langle x|(\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle) \\ &= \alpha\langle x|\psi_1\rangle + \beta\langle x|\psi_2\rangle \\ &= \alpha\psi_1(x) + \beta\psi_2(x)\end{aligned}$$

Sustituyendo explícitamente las funciones de onda normalizadas:

$$\Psi(x) = \alpha\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \beta\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

4.2. Cálculo de $|\Psi(x)|^2$ y Términos de Interferencia

La densidad de probabilidad de encontrar la partícula en la posición x se calcula como $|\Psi(x)|^2 = \Psi^*(x)\Psi(x)$. Asumiendo que las funciones de onda $\psi_n(x)$ son reales, pero los coeficientes α y β pueden ser complejos:

$$\begin{aligned}|\Psi(x)|^2 &= (\alpha^*\psi_1(x) + \beta^*\psi_2(x))(\alpha\psi_1(x) + \beta\psi_2(x)) \\ &= \alpha^*\alpha\psi_1(x)^2 + \beta^*\beta\psi_2(x)^2 + \alpha^*\beta\psi_1(x)\psi_2(x) + \beta^*\alpha\psi_1(x)\psi_2(x) \\ &= |\alpha|^2\psi_1(x)^2 + |\beta|^2\psi_2(x)^2 + (\alpha^*\beta + \beta^*\alpha)\psi_1(x)\psi_2(x)\end{aligned}$$

El término $(\alpha^*\beta + \beta^*\alpha)$ es igual a $2\text{Re}(\alpha^*\beta)$. Por lo tanto:

$$|\Psi(x)|^2 = \underbrace{|\alpha|^2|\psi_1(x)|^2}_{\text{Prob. estado 1}} + \underbrace{|\beta|^2|\psi_2(x)|^2}_{\text{Prob. estado 2}} + \underbrace{2\text{Re}(\alpha^*\beta)\psi_1(x)\psi_2(x)}_{\text{Término de Interferencia}}$$

Discusión de la interferencia:

Al analizar la densidad de probabilidad $|\Psi(x)|^2$, se observa que los dos primeros términos representan la suma de las densidades de probabilidad individuales para cada estado, ponderadas por sus respectivas probabilidades ($|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$). Sin embargo, a diferencia de lo que ocurriría en un sistema no cuántico, aparece un tercer término, conocido como el “término de interferencia cuántica”, el cual es un resultado directo del principio de superposición. El valor de este término depende crucialmente tanto del producto de *ambas* funciones de onda, $\psi_1(x)\psi_2(x)$, como de la relación de fase relativa entre los coeficientes α y β (contenida en la expresión $\text{Re}(\alpha^*\beta)$). Dependiendo de la posición x y de esta fase, el término de interferencia puede ser positivo (interferencia constructiva) o negativo (interferencia destructiva), modificando la densidad de probabilidad total de formas no clásicas.

4.3. Observable físico de la base lógica

Se analiza a continuación qué observable físico corresponde a una medición en la base lógica $\{|0_L\rangle, |1_L\rangle\}$. Por definición, esta base se ha construido a partir de los estados

estacionarios del pozo de potencial: $|0_L\rangle \equiv |\psi_1\rangle$ y $|1_L\rangle \equiv |\psi_2\rangle$. Los estados estacionarios ψ_n son, por definición, los autoestados (eigenstates) del operador Hamiltoniano \hat{H} del sistema. Esto implica que los estados de nuestra base lógica tienen autovalores (eigenvalues) de energía definidos, tal como lo muestran las ecuaciones:

$$\hat{H}|0_L\rangle = \hat{H}|\psi_1\rangle = E_1|\psi_1\rangle = E_1|0_L\rangle$$

$$\hat{H}|1_L\rangle = \hat{H}|\psi_2\rangle = E_2|\psi_2\rangle = E_2|1_L\rangle$$

Por lo tanto, el observable físico que corresponde a una medición en la base computacional $\{|0_L\rangle, |1_L\rangle\}$ es la energía del sistema. Realizar una “medición computacional” en este qubit es físicamente equivalente a medir la energía de la partícula. Si el resultado de la medición es E_1 (lo cual ocurre con probabilidad $|\alpha|^2$), el estado ha colapsado a $|0_L\rangle$; si el resultado es E_2 (con probabilidad $|\beta|^2$), el estado ha colapsado a $|1_L\rangle$.

5. Inclusión del espín y carga

5.1. Espacio de estados total (Producto Tensorial)

El estado de la partícula no solo se describe por su posición (o nivel de energía), sino también por su espín. Para describir el estado completo, debemos combinar el espacio de estados de la parte espacial (nuestro qubit lógico) con el espacio de estados del espín.

El espacio de estados total \mathcal{H}_{total} es el producto tensorial del subespacio lógico \mathcal{H}_L (al que nos hemos restringido) y el espacio de espín \mathcal{H}_{spin} :

$$\mathcal{H}_{total} = \mathcal{H}_L \otimes \mathcal{H}_{spin}$$

Donde:

- $\mathcal{H}_L = \text{span}\{|0_L\rangle, |1_L\rangle\}$ es el espacio de 2 dimensiones del qubit lógico (energía).
- $\mathcal{H}_{spin} = \text{span}\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ es el espacio de 2 dimensiones del espín $s = 1/2$.

El espacio total resultante \mathcal{H}_{total} es, por lo tanto, un espacio de $2 \times 2 = 4$ dimensiones. La base de este espacio está formada por todas las combinaciones posibles:

$$\{|0_L\rangle \otimes |\uparrow\rangle, |0_L\rangle \otimes |\downarrow\rangle, |1_L\rangle \otimes |\uparrow\rangle, |1_L\rangle \otimes |\downarrow\rangle\}$$

A menudo, esto se abrevia como $\{|0_L\uparrow\rangle, |0_L\downarrow\rangle, |1_L\uparrow\rangle, |1_L\downarrow\rangle\}$

5.2. Significado físico del Producto Tensorial

El producto tensorial \otimes es la herramienta matemática que nos permite describir estados de sistemas compuestos o de un solo sistema con múltiples grados de libertad (como en este caso, posición y espín).

Significado Físico: Un estado en \mathcal{H}_{total} debe especificar *simultáneamente* la información de ambas partes. El producto tensorial nos dice que el estado de la partícula

es una combinación (ya sea separable o entrelazada) de un estado en \mathcal{H}_L y un estado en \mathcal{H}_{spin} .

Ejemplo Explícito: El estado que se propone es:

$$|\Psi\rangle = |0_L\rangle \otimes |\uparrow\rangle$$

Este es un *estado separable*. Su interpretación física es clara:

- La partícula se encuentra en el estado de energía E_1 (correspondiente al estado lógico $|0_L\rangle$).
- Y, al mismo tiempo, su espín está en el estado “arriba” ($|\uparrow\rangle$).

Un estado general en este espacio será una superposición de los 4 estados base, lo que permite también la existencia de *estados entrelazados* (no separables) entre el espacio y el espín, como por ejemplo $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0_L\uparrow\rangle + |1_L\downarrow\rangle)$.

5.3. Nuevos grados de libertad y efectos de la carga

Nuevos Grados de Libertad (Espín)

El espín añade un nuevo grado de libertad binario. Antes, nuestro sistema (el qubit lógico \mathcal{H}_L) era un sistema de 2 niveles. Al incluir el espín, el sistema completo \mathcal{H}_{total} se convierte en un sistema de 4 niveles.

Esta inclusión tiene implicaciones físicas significativas:

1. **Más información:** El sistema ahora puede almacenar dos qubits de información (uno en la energía/posición y otro en el espín).
2. **Nuevas interacciones:** Se pueden diseñar interacciones que actúen selectivamente sobre la parte espacial o sobre la parte de espín.
3. **Entrelazamiento:** Como se mencionó, permite la creación de entrelazamiento entre las propiedades espaciales y de espín de la *misma* partícula.

Efectos de la Carga Eléctrica (q)

La carga y el espín hacen que la partícula sea sensible a los campos electromagnéticos, lo cual es fundamental para su *control*:

- **Efecto de un Campo Eléctrico (\vec{E}):** La carga q interactuará con un campo eléctrico (p.ej., $\hat{V}_E = -q\vec{E} \cdot \vec{x}$). Un campo eléctrico puede usarse para modular el potencial del pozo $V(x)$, por ejemplo, “inclinándolo”. Esto modificaría las funciones de onda ψ_1, ψ_2 y sus energías E_1, E_2 . Un campo eléctrico permitiría, por tanto, controlar el qubit lógico espacial (p.ej., inducir transiciones entre $|0_L\rangle$ y $|1_L\rangle$).
- **Efecto de un Campo Magnético (\vec{B}):** La partícula, al tener espín $s = 1/2$, posee un momento dipolar magnético $\vec{\mu}$. Este momento magnético interactuará con un campo magnético externo \vec{B} a través del término de Zeeman ($\hat{H}_Z \approx -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$). Esta interacción afecta principalmente a los estados de espín ($|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$), rompiendo

su degeneración en energía. Por lo tanto, un campo magnético (especialmente uno oscilante) permitiría controlar el qubit de espín.

6. Observables de Pauli en el subespacio lógico

En esta sección, se definen los operadores análogos a las matrices de Pauli, pero que actúan exclusivamente dentro del subespacio lógico de 2D, \mathcal{H}_L .

6.1. Definición y Representación Matricial

Los operadores de Pauli en la base lógica $\{|0_L\rangle, |1_L\rangle\}$ se definen como:

$$\begin{aligned} X_L &= |0_L\rangle\langle 1_L| + |1_L\rangle\langle 0_L| \\ Y_L &= -i|0_L\rangle\langle 1_L| + i|1_L\rangle\langle 0_L| \\ Z_L &= |0_L\rangle\langle 0_L| - |1_L\rangle\langle 1_L| \end{aligned}$$

Para encontrar sus representaciones matriciales, usamos la correspondencia de los vectores base:

$$|0_L\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |1_L\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y los operadores (proyectores externos) correspondientes:

$$\begin{aligned} |0_L\rangle\langle 0_L| &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ |1_L\rangle\langle 1_L| &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ |0_L\rangle\langle 1_L| &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ |1_L\rangle\langle 0_L| &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sustituyendo estos en las definiciones, obtenemos las representaciones matriciales (que coinciden con las matrices de Pauli estándar, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$):

$$\begin{aligned} X_L &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ Y_L &\rightarrow -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ Z_L &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6.2. Verificación de la Relación de Comutación

Verificamos la relación $[X_L, Y_L] = 2iZ_L$ usando las matrices obtenidas. El comutador se define como $[X_L, Y_L] = X_L Y_L - Y_L X_L$.

Primero, calculamos los productos:

$$X_L Y_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0)(0) + (1)(i) & (0)(-i) + (1)(0) \\ (1)(0) + (0)(i) & (1)(-i) + (0)(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$Y_L X_L = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0)(0) + (-i)(1) & (0)(1) + (-i)(0) \\ (i)(0) + (0)(1) & (i)(1) + (0)(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Ahora, calculamos el comutador:

$$[X_L, Y_L] = X_L Y_L - Y_L X_L = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i - (-i) & 0 \\ 0 & -i - i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$$

Finalmente, comparamos con el lado derecho de la ecuación, $2iZ_L$:

$$2iZ_L = 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$$

Ambos resultados son idénticos, con lo que se verifica la relación de conmutación.

6.3. Significado como Observables Físicos

Estos operadores son hermíticos, lo que significa que corresponden a observables físicos medibles.

- **Observable Z_L :** El operador Z_L es diagonal en la base lógica. Sus autoestados son $|0_L\rangle$ (con autovalor $+1$) y $|1_L\rangle$ (con autovalor -1). Como vimos en la Sección 3, medir en esta base $\{|0_L\rangle, |1_L\rangle\}$ equivale a medir la energía del sistema (distinguiendo entre E_1 y E_2).
- **Observable X_L :** El operador X_L no es diagonal. Físicamente, representa transiciones (o “bit-flips”) entre los estados base ($X_L|0_L\rangle = |1_L\rangle$). Como observable, sus autoestados son los estados de superposición $|+_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_L\rangle + |1_L\rangle)$ y $|-_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_L\rangle - |1_L\rangle)$. Medir X_L significa medir en esta base de superposición, lo cual es físicamente distinto a medir la energía.
- **Observable Y_L :** Similarmente, Y_L representa transiciones con un desfase. Como observable, sus autoestados son $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0_L\rangle + i|1_L\rangle)$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0_L\rangle - i|1_L\rangle)$. Medir Y_L es medir en una base diferente a Z_L y X_L .

El hecho de que no commuten (ej. $[X_L, Y_L] \neq 0$) es la manifestación matemática del Principio de Incertidumbre de Heisenberg: no es posible conocer simultáneamente con precisión el valor de X_L y Y_L . Si se mide Z_L (energía) con certeza, el sistema está en

$|0_L\rangle$ o $|1_L\rangle$, estados en los que X_L y Y_L están en completa incertidumbre (tienen 50 % de probabilidad para cada resultado).

7. Medida Computacional y Rotaciones

7.1. Medida en la Base Computacional y Regla de Born

La **medida computacional** se define como la medición del observable Z_L . Como se estableció en el apartado 6, esta base lógica $\{|0_L\rangle, |1_L\rangle\}$ es la base de autoestados de Z_L , la cual, a su vez, corresponde a la base de autoestados de energía $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$.

Por lo tanto, medir en la base computacional es físicamente equivalente a medir la energía del sistema.

Dado un estado general del qubit en el subespacio \mathcal{H}_L :

$$|\psi\rangle = \alpha|0_L\rangle + \beta|1_L\rangle$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

La **Regla de Born**, aplicada a esta base, dicta las probabilidades de los resultados de la medición. La probabilidad de que la medición arroje el autovalor +1 (colapsando el estado a $|0_L\rangle$, correspondiente a la energía E_1) es:

$$P(0_L) = |\langle 0_L|\psi\rangle|^2 = |\alpha\langle 0_L|0_L\rangle + \beta\langle 0_L|1_L\rangle|^2 = |\alpha|^2$$

La probabilidad de que la medición arroje el autovalor -1 (colapsando el estado a $|1_L\rangle$, correspondiente a la energía E_2) es:

$$P(1_L) = |\langle 1_L|\psi\rangle|^2 = |\alpha\langle 1_L|0_L\rangle + \beta\langle 1_L|1_L\rangle|^2 = |\beta|^2$$

El valor esperado del observable Z_L es, por lo tanto:

$$\langle Z_L \rangle = (+1)P(0_L) + (-1)P(1_L) = |\alpha|^2 - |\beta|^2$$

7.2. Medición de $\langle X_L \rangle$ y $\langle Y_L \rangle$ mediante Rotaciones

Los observables X_L y Y_L no conmutan con Z_L (como se demostró en la sección anterior) y, por lo tanto, no conmutan con el Hamiltoniano restringido a \mathcal{H}_L . Esto implica que no pueden medirse simultáneamente con la energía.

En un experimento, la única medida física directa que se puede realizar es la medida computacional (medir la energía). Para obtener el valor esperado de X_L o Y_L , es necesario ejecutar una **rotación de base** unitaria sobre el estado $|\psi\rangle$ antes de realizar la medida computacional.

El objetivo es aplicar una transformación U que mapee los autoestados del observable deseado a los autoestados de Z_L .

7.2.1. Medición de $\langle X_L \rangle$

Para medir $\langle X_L \rangle$, debemos medir en la base de sus autoestados, $\{|+_L\rangle, |-_L\rangle\}$, donde $|\pm_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_L\rangle \pm |1_L\rangle)$.

La rotación unitaria requerida es el operador de **Hadamard**, H_L , que en el subespacio lógico se define como:

$$H_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_L + Z_L)$$

Este operador precisamente transforma la base de X_L en la base de Z_L :

$$H_L |+_L\rangle = |0_L\rangle \quad \text{y} \quad H_L |-_L\rangle = |1_L\rangle$$

El valor esperado de X_L se calcula como:

$$\langle X_L \rangle = \langle \psi | X_L | \psi \rangle = \langle \psi | X_L | \psi \rangle$$

Insertando la identidad $I = H_L^\dagger H_L$ (dado que $H_L = H_L^\dagger$ y $H_L^2 = I$) y usando la relación $X_L = H_L Z_L H_L$, obtenemos:

$$\langle X_L \rangle = \langle \psi | H_L^\dagger Z_L H_L | \psi \rangle = \langle \psi' | Z_L | \psi' \rangle$$

donde $|\psi'\rangle = H_L |\psi\rangle$.

Por lo tanto, para medir $\langle X_L \rangle$: 1. Se aplica la puerta H_L al estado $|\psi\rangle$ para obtener $|\psi'\rangle$. 2. Se realiza una medida computacional (de Z_L) sobre $|\psi'\rangle$. 3. El resultado es $\langle X_L \rangle = P'(0_L) - P'(1_L)$.

7.2.2. Medición de $\langle Y_L \rangle$

Análogamente, para medir $\langle Y_L \rangle$, debemos medir en su base de autoestados, $\{|i_L\rangle, |-i_L\rangle\}$, donde $|\pm i_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_L\rangle \pm i|1_L\rangle)$.

La rotación unitaria U_Y que mapea esta base a la base computacional es una rotación de $\pi/2$ alrededor del eje x , o equivalentemente, $U_Y = H_L S_L^\dagger$, donde $S_L = |0_L\rangle\langle 0_L| + i|1_L\rangle\langle 1_L|$ es la puerta de fase.

$$U_Y |i_L\rangle = |0_L\rangle \quad \text{y} \quad U_Y |-i_L\rangle = |1_L\rangle$$

El cálculo del valor esperado sigue la misma lógica:

$$\langle Y_L \rangle = \langle \psi | Y_L | \psi \rangle = \langle \psi | U_Y^\dagger Z_L U_Y | \psi \rangle = \langle \psi'' | Z_L | \psi'' \rangle$$

donde $|\psi''\rangle = U_Y |\psi\rangle$.

Para medir $\langle Y_L \rangle$: 1. Se aplica la puerta U_Y (o $H_L S_L^\dagger$) al estado $|\psi\rangle$. 2. Se realiza una medida computacional (de Z_L) sobre $|\psi''\rangle$. 3. El resultado es $\langle Y_L \rangle = P''(0_L) - P''(1_L)$.

7.3. Tabla Resumen de Rotaciones de Medida

El cuadro 1 resume el protocolo para medir los tres observables de Pauli en el subespacio lógico \mathcal{H}_L .

Cuadro 1 Protocolo de medición para los observables de Pauli en \mathcal{H}_L .

| Observable | Autoestados | Rotación U | Valor Esperado (Medido sobre $U \psi\rangle$) |
|------------|-----------------------------|-------------------|--|
| Z_L | $ 0_L\rangle, 1_L\rangle$ | I (Identidad) | $P(0_L) - P(1_L)$ |
| X_L | $ +_L\rangle, -_L\rangle$ | H_L | $P(0_L) - P(1_L)$ |
| Y_L | $ i_L\rangle, -i_L\rangle$ | $H_L S_L^\dagger$ | $P(0_L) - P(1_L)$ |

7.4. Representación en la Esfera de Bloch

El espacio de Hilbert bidimensional \mathcal{H}_L de un qubit puede representarse geométricamente mediante la **esfera de Bloch**.

Un estado normalizado $|\psi\rangle = \alpha|0_L\rangle + \beta|1_L\rangle$ depende de cuatro parámetros reales (las partes real e imaginaria de α y β), sujetos a una restricción de normalización. Ignorando una fase global (físicamente inobservable), el estado puede describirse con solo dos parámetros reales, θ y ϕ .

La parametrización estándar es:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0_L\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1_L\rangle$$

donde $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi)$.

Esta parametrización mapea cada estado puro del qubit a un punto (θ, ϕ) en la superficie de una esfera de radio unidad. Los autoestados de los operadores de Pauli corresponden a los puntos antipodales en los ejes cartesianos (figura 1).

- **Eje Z (Base Computacional):** Los autoestados de Z_L son los polos.
 - $|0_L\rangle$ (Polo Norte): $\theta = 0$.
 - $|1_L\rangle$ (Polo Sur): $\theta = \pi$.
- **Eje X:** Los autoestados de X_L están en el ecuador sobre el eje x .
 - $|+_L\rangle$ (Eje $x+$): $\theta = \pi/2, \phi = 0$.
 - $|-_L\rangle$ (Eje $x-$): $\theta = \pi/2, \phi = \pi$.
- **Eje Y:** Los autoestados de Y_L están en el ecuador sobre el eje y .
 - $|i_L\rangle$ (Eje $y+$): $\theta = \pi/2, \phi = \pi/2$.
 - $|-i_L\rangle$ (Eje $y-$): $\theta = \pi/2, \phi = 3\pi/2$.

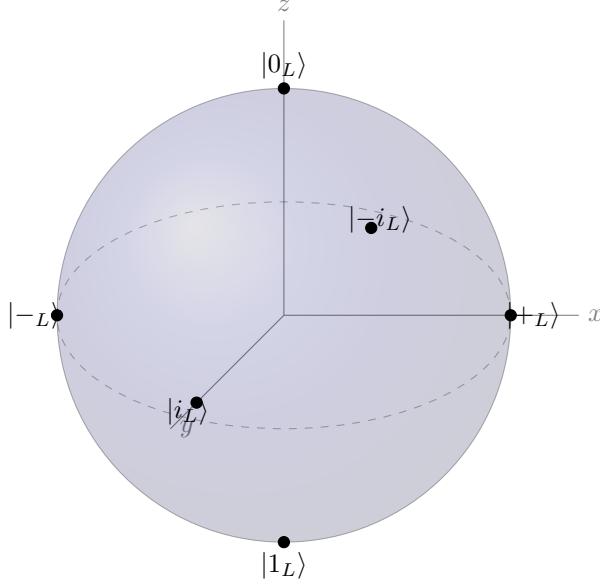


Figura 1 La esfera de Bloch, mostrando la parametrización (θ, ϕ) de un estado genérico $|\psi\rangle$ y la ubicación de los autoestados de X_L , Y_L y Z_L .

8. Conexión con la Ecuación de Schrödinger y Dinámica de Puertas

8.1. Ecuación de Schrödinger en el Subespacio Lógico

La dinámica de cualquier estado cuántico $|\psi(t)\rangle$ está gobernada por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

donde \hat{H} es el Hamiltoniano total del sistema.

Nos interesa la dinámica *restringida* al subespacio lógico $\mathcal{H}_L = \text{span}\{|0_L\rangle, |1_L\rangle\}$. Suponiendo que el sistema permanece confinado a este subespacio (es decir, ignorando la fuga (leakage) a estados $n \geq 3$), podemos proyectar el Hamiltoniano físico sobre esta base.

El Hamiltoniano de la partícula libre (sin perturbaciones externas) en el pozo es $\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} D_x^2 + V(x)$. Los estados $|0_L\rangle$ y $|1_L\rangle$ son, por definición, autoestados de \hat{H}_0 con autovalores E_1 y E_2 respectivamente.

El Hamiltoniano efectivo para el sistema libre, \hat{H}_{free} , actuando solo dentro de \mathcal{H}_L , se obtiene proyectando \hat{H}_0 :

$$\hat{H}_{\text{free}} = \hat{P}_L \hat{H}_0 \hat{P}_L$$

donde $\hat{P}_L = |0_L\rangle\langle 0_L| + |1_L\rangle\langle 1_L|$ es el proyector sobre \mathcal{H}_L . Los elementos de matriz de este Hamiltoniano son:

$$\langle j_L | \hat{H}_0 | k_L \rangle = E_k \langle j_L | k_L \rangle = E_k \delta_{jk} \quad \text{para } j, k \in \{0, 1\}$$

Esto se debe a la ortonormalidad de la base. Por lo tanto, el Hamiltoniano efectivo es diagonal en la base lógica:

$$\hat{H}_{\text{free}} = E_1 |0_L\rangle\langle 0_L| + E_2 |1_L\rangle\langle 1_L|$$

Y la ecuación de Schrödinger para un estado $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}_L$ se convierte en:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = (E_1 |0_L\rangle\langle 0_L| + E_2 |1_L\rangle\langle 1_L|) |\psi(t)\rangle$$

8.2. Hamiltoniano Efectivo y Rotación en la Esfera de Bloch

Podemos reescribir \hat{H}_{free} en términos de los operadores de Pauli Z_L e I_L , usando las definiciones $Z_L = |0_L\rangle\langle 0_L| - |1_L\rangle\langle 1_L|$ y $I_L = |0_L\rangle\langle 0_L| + |1_L\rangle\langle 1_L|$.

$$|0_L\rangle\langle 0_L| = \frac{1}{2}(I_L + Z_L) \quad \text{y} \quad |1_L\rangle\langle 1_L| = \frac{1}{2}(I_L - Z_L)$$

Sustituyendo en \hat{H}_{free} :

$$\hat{H}_{\text{free}} = E_1 \frac{1}{2}(I_L + Z_L) + E_2 \frac{1}{2}(I_L - Z_L)$$

$$\hat{H}_{\text{free}} = \frac{E_1 + E_2}{2} I_L + \frac{E_1 - E_2}{2} Z_L$$

El operador de evolución temporal $U(t) = \exp(-i\hat{H}_{\text{free}}t/\hbar)$ es:

$$U(t) = \exp\left(\frac{-i(E_1 + E_2)t}{2\hbar}\right) I_L \exp\left(\frac{-i(E_1 - E_2)t}{2\hbar} Z_L\right)$$

El primer término, $\exp(-i(E_1 + E_2)t/2\hbar)I_L$, es una **fase global**. No tiene consecuencias físicas medibles, ya que el vector de estado en la esfera de Bloch es invariante bajo fases globales.

El término físicamente relevante es el segundo. Definiendo la frecuencia de transición (o frecuencia de Larmor del qubit) como $\omega_{12} = (E_2 - E_1)/\hbar$, podemos reescribir el Hamiltoniano físicamente relevante (ignorando la fase global) como:

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{E_1 - E_2}{2} Z_L = -\frac{\hbar\omega_{12}}{2} Z_L$$

El operador de evolución temporal (sin fase global) es:

$$U_{\text{eff}}(t) = \exp\left(-i\hat{H}_{\text{eff}}t/\hbar\right) = \exp\left(i\frac{\omega_{12}t}{2}Z_L\right)$$

Este operador es, por definición, el operador de rotación alrededor del eje z de la esfera de Bloch por un ángulo $\theta_Z(t) = -\omega_{12}t$.

$$U_{\text{eff}}(t) = R_Z(-\omega_{12}t)$$

Esto demuestra que la **evolución libre** del qubit (cuando se deja sin perturbar) es simplemente una rotación continua alrededor del eje z a una velocidad constante ω_{12} . Las poblaciones $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$ (probabilidades de medir E_1 o E_2) permanecen constantes, mientras que la fase relativa entre los dos estados evoluciona en el tiempo. Esto es coherente con el hecho de que $|0_L\rangle$ y $|1_L\rangle$ son estados estacionarios (autoestados de energía).

8.3. Interpretación como Puerta Cuántica

La dinámica descrita por $U_{\text{eff}}(t)$ es en sí misma una **puerta cuántica**. Si dejamos el sistema evolucionar libremente durante un tiempo $t = \phi/(-\omega_{12})$, implementamos la puerta $R_Z(\phi)$. Esta es una puerta de fase.

Sin embargo, para la computación cuántica universal, se requiere la capacidad de implementar *rotaciones arbitrarias* en la esfera de Bloch, no solo rotaciones R_Z . Específicamente, se necesita control sobre al menos un eje de rotación adicional (por ejemplo, X_L).

Esto se logra aplicando un Hamiltoniano de interacción externo dependiente del tiempo, $\hat{H}_{\text{int}}(t)$. Como se discutió previamente, la carga q y el espín s de la partícula proporcionan los “manejadores” para este control.

Por ejemplo, la aplicación de un campo eléctrico externo $\vec{E}(t)$ puede modular el potencial $V(x)$. Si este campo oscila a una frecuencia ω cercana a la frecuencia de resonancia ω_{12} , inducirá transiciones entre $|0_L\rangle$ y $|1_L\rangle$. En el marco de la aproximación de onda rotante (RWA), este Hamiltoniano de interacción, visto en el marco giratorio, puede tomar la forma de:

$$\hat{H}_{\text{RWA}} \propto \Omega X_L$$

donde Ω es la frecuencia de Rabi, que es proporcional a la amplitud del campo \vec{E} aplicado.

La evolución bajo este Hamiltoniano, $U_X(t) = \exp(-i(\Omega't)X_L)$, corresponde a una **rotación alrededor del eje x** (una puerta R_X).

Al tener la capacidad de generar rotaciones R_Z (mediante la evolución libre controlada por tiempos de espera) y rotaciones R_X (mediante la aplicación de campos resonantes), se puede construir cualquier operación unitaria $U \in SU(2)$ (cualquier puerta de un solo qubit) mediante la composición de estas rotaciones (por ejemplo, $U = R_Z(\phi_1)R_X(\theta)R_Z(\phi_2)$).

Por lo tanto, la “dinámica de puertas” es la implementación de operaciones $SU(2)$ deseadas mediante la conmutación controlada y temporizada de Hamiltonianos de evolución libre ($\propto Z_L$) e interacción ($\propto X_L$ o Y_L).

9. Glosario

A continuación, se definen los conceptos clave introducidos en el desarrollo del trabajo.

Espacio de Hilbert (\mathcal{H}): Es un espacio vectorial complejo (donde viven los kets, $|\psi\rangle$) dotado de un producto interno, que además es completo. En mecánica cuántica, el conjunto de todos los posibles estados de un sistema físico forma un espacio de Hilbert.

Producto Interno: Es una función (denotada $\langle \cdot, \cdot \rangle$) que toma dos vectores de un espacio vectorial V y devuelve un escalar en el campo F sobre el cual V está definido (usualmente \mathbb{R} o \mathbb{C}). Esta función debe satisfacer propiedades específicas: ser positiva-definida, tener simetría conjugada ($\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle^*$) y ser lineal en uno de sus argumentos (en mecánica cuántica, por convención, es lineal en el segundo argumento, el ket). En el contexto de un espacio de Hilbert complejo (\mathbb{C}), el producto interno $\langle \phi | \psi \rangle$ devuelve un número complejo. Su propósito es definir la geometría del espacio, permitiendo calcular normas ($\|\psi\|^2 = \langle \psi | \psi \rangle$), probabilidades y verificar la ortogonalidad ($\langle \phi | \psi \rangle = 0$).

Estado Propio (Autoestado): Un vector $|\psi\rangle$ (distinto de cero) que, al ser actuado por un operador \hat{A} , no cambia su “dirección” en el espacio de Hilbert, sino que solo es multiplicado por un escalar a , llamado autovalor. Satisface la ecuación de autovalores $\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle$. Los estados estacionarios ψ_n son autoestados del Hamiltoniano \hat{H} .

Superposición Lineal: Matemáticamente, es un sinónimo de combinación lineal. Es una expresión formada por la suma de vectores de un espacio vectorial (como los kets $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$), donde cada vector es multiplicado por un coeficiente escalar (como $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$). La forma general es $|\Psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle$. El Principio de Superposición es el postulado fundamental de la mecánica cuántica que establece que si $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son estados válidos de un sistema, cualquier superposición lineal de ellos (con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$) también es un estado físico válido, que existe como una combinación de ambos hasta que se realiza una medición.

Base Lógica: Un conjunto de estados ortonormales ($\{|0_L\rangle, |1_L\rangle\}$) elegidos de un espacio de Hilbert para representar bits de información. Se les llama “lógicos” o “computacionales” porque abstraen la física subyacente (en este caso, los niveles de energía) a los conceptos de 0 y 1.

Qubit (Qubit Lógico): La unidad básica de información cuántica. Es un sistema cuántico de dos niveles (como los dos estados de energía ψ_1, ψ_2) cuya base lógica es $|0_L\rangle$ y $|1_L\rangle$. Su estado general es una superposición lineal $|\psi\rangle = \alpha|0_L\rangle + \beta|1_L\rangle$.

Observable: Cualquier propiedad física de un sistema que, en principio, puede ser medida (ej. energía, posición, momento, espín). En el formalismo cuántico, cada

observable está representado por un operador hermítico. Los resultados de una medición solo pueden ser los autovalores de dicho operador.

Operador Hermítico: Un operador \hat{A} que es igual a su propio adjunto (conjugado transpuesto), es decir, $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$. Son fundamentales porque garantizan dos cosas: 1) Sus autovalores son siempre números reales (lo cual es necesario, ya que las mediciones dan resultados reales). 2) Sus autoestados forman una base ortonormal para el espacio de Hilbert.

Producto Tensorial (\otimes): Es una operación algebraica que construye un nuevo espacio vectorial $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ a partir de dos espacios \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B . Si $\dim(\mathcal{H}_A) = n$ y $\dim(\mathcal{H}_B) = m$, entonces $\dim(\mathcal{H}_{AB}) = n \times m$. Físicamente, es la operación matemática que permite construir el espacio de Hilbert de un sistema compuesto a partir de los espacios de sus subsistemas (ej. $\mathcal{H}_{total} = \mathcal{H}_L \otimes \mathcal{H}_{spin}$). Un estado en este espacio combinado especifica el estado de todas sus partes simultáneamente y permite la existencia del entrelazamiento.

Espín: Una forma intrínseca de momento angular que posee una partícula (como el electrón). Es una propiedad puramente cuántica, sin un análogo clásico directo, que se describe como un grado de libertad interno de la partícula (ej. “arriba” $| \uparrow \rangle$ y “abajo” $| \downarrow \rangle$ para una partícula de espín $s = 1/2$).

Operadores de Pauli: Un conjunto de tres operadores hermíticos (X_L, Y_L, Z_L) que son fundamentales para describir la dinámica y los observables de un sistema de dos niveles (qubit). Físicamente, están relacionados con las mediciones del espín en las tres direcciones espaciales (x, y, z) y matemáticamente forman una base para los operadores del qubit.

Entrelazamiento: Un fenómeno puramente cuántico que describe una correlación entre dos o más sistemas (como qubits) que no puede existir en la física clásica. Un sistema compuesto se dice entrelazado si su estado cuántico total no puede ser factorizado o descrito como una simple combinación de los estados individuales de sus subsistemas (es decir, no es un estado separable). Como resultado, una medición realizada sobre uno de los sistemas parece influir instantáneamente en el resultado de la medición sobre el otro, sin importar la distancia que los separe.

Regla de Born: Postulado fundamental que conecta el formalismo matemático del vector de estado $|\psi\rangle$ con los resultados de una medición. Si un sistema se mide en una base ortonormal $\{|\phi_i\rangle\}$, la probabilidad de obtener el resultado asociado al autoestado $|\phi_i\rangle$ es $P(i) = |\langle\phi_i|\psi\rangle|^2$.

Esfera de Bloch: Representación geométrica del espacio de estados puros de un qubit (un sistema de dos niveles) \mathcal{H}_L . Cada estado $|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0_L\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1_L\rangle$ se mapea a un punto único en la superficie de una esfera de radio unidad mediante los ángulos (θ, ϕ) . Los estados ortogonales ocupan puntos antipodales.

Puerta cuántica: Operación fundamental que transforma el estado de un qubit. Matemáticamente, se describe como una *rotación unitaria* U (un operador en $SU(2)$) que actúa sobre el vector de estado en la esfera de Bloch. Físicamente, se implementa mediante la evolución temporal $U(t) = \exp(-i\hat{H}_{\text{eff}}t/\hbar)$ bajo un Hamiltoniano efectivo \hat{H}_{eff} aplicado de forma controlada.

Medida computacional: Proceso de medición de un qubit en la base lógica (o computacional) $\{|0_L\rangle, |1_L\rangle\}$. Corresponde a medir el observable $Z_L = |0_L\rangle\langle 0_L| -$

$|1_L\rangle\langle 1_L|$. En el sistema físico del pozo de potencial, esta medición es físicamente equivalente a medir la energía (distinguiendo entre E_1 y E_2).

Hamiltoniano efectivo: Operador que describe la dinámica de un sistema restringido a un subespacio de interés (como el subespacio lógico \mathcal{H}_L). Se obtiene proyectando el Hamiltoniano físico completo \hat{H} sobre dicho subespacio ($\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{P}_L \hat{H} \hat{P}_L$) y, comúnmente, omitiendo términos que solo contribuyen a una fase global, como los proporcionales al operador identidad I_L .

Rotación unitaria: Transformación lineal U en un espacio de Hilbert que preserva el producto interno (y, por tanto, la norma de los vectores y la probabilidad total). Satisface la condición $U^\dagger U = I$. Según la ecuación de Schrödinger, la evolución temporal de cualquier sistema cuántico cerrado es una rotación unitaria. Las puertas cuánticas son implementaciones físicas de rotaciones unitarias específicas.

Subespacio invariante: Subespacio vectorial $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ tal que, al aplicar un operador \hat{A} , todos los vectores de \mathcal{S} se transforman en vectores que también pertenecen a \mathcal{S} (es decir, $\hat{A}|\psi\rangle \in \mathcal{S}$ para todo $|\psi\rangle \in \mathcal{S}$). En el diseño de un qubit lógico, el objetivo es que el subespacio \mathcal{H}_L sea invariante bajo la evolución temporal $U(t)$ de las puertas, evitando la fuga (leakage) a estados fuera del subespacio computacional.

Coherencia cuántica: Propiedad de un sistema cuántico para mantener una superposición de estados con una relación de fase relativa definida, como en $|\psi\rangle = \alpha|0_L\rangle + \beta|1_L\rangle$. La coherencia es la responsable de los términos de interferencia. Matemáticamente, la coherencia se cuantifica por los elementos fuera de la diagonal de la matriz de densidad ρ . La pérdida de esta relación de fase (decoherencia) destruye la superposición y la interferencia.

Referencias

- [1] Hassani, S. (ed.): Mathematical Methods. SpringerLink. Springer, New York, NY (2009). Description based upon print version of record
- [2] Dirac, P.A.M.: The Principles Of Quantum Mechanics, 4. ed. (rev.), repr. edn. International series of monographs on physics, vol. 27. Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford [u.a.] (2010). Hier auch später erschienene, unveränderte Nachdrucke
- [3] Nielsen, M.A., Chuang, I.L.: Quantum Computation And Quantum Information: 10th Anniversary Edition. Cambridge University Press, ??? (2012). <https://doi.org/10.1017/cbo9780511976667>
- [4] Kitaev, A.J.: Classical And Quantum Computation. Graduate studies in mathematics, vol. volume 47. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (2002). Includes bibliographical references (pages 251-254) and index. Description based on print version record.