POLYTECH SORBONNE

3ème année

Traitement du signal
Contrôle continu n°1

NOM :	___________
Prénom :	___________
Groupe (*entourer*) :	II HF

Durée : 2 heures
Délai supplémentaire de 15 minutes, pour palier aux problèmes de connexion, accès à Moodle, etc.

Formules utiles :

$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$ $\sin^2(\theta) = \frac{1-cos(2\theta)}{2}$ $TF[e^{2\pi jf_0t}] = \delta(f - f_0)$

Exercice 1 :

On considère un signal sinusoïdal de période T qui traverse une diode. Le signal redressé simple alternance qui en résulte a pour expression : $x(t) = A\,sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ sur l'intervalle $\left[0;\frac{T}{2}\right]$ et $x(t) = 0$ sur l'intervalle $\left[\frac{T}{2};T\right]$

1) Quelles est la valeur de l'énergie du signal ?(Justifier !)

2) Calculer la puissance moyenne du signal

3) Calculer le coefficient c_0

4) Calculer le coefficient c_1

5) Calculer le coefficient c_{-1}

6) Montrer que, pour n ≠ 1 et n ≠ -1, le coefficient c_n de ce développement a pour expression : $c_n = \frac{A}{\pi}\frac{1}{1-n^2}$ si n est pair et $c_n = 0$ si n est impair

7) Si l'on programmait la somme des N premiers termes (N grand) de la décomposition en séries de Fourier, observerait-on le phénomène de Gibbs ? (justifier !)

Exercice 2 :

8) Calculer la Transformée de Fourier (TF) de la fonction $x(t) = cos(2\pi f_0 t - \varphi)$

Exercice 3 :

9) Calculer la transformée de Fourier inverse de la porte définie par

$$H(f) = 1 \; si \; 0 \leq f \leq f_0 \text{ et } H(f) = 0 \text{ sinon}$$

Exercice 4 :

On considère un signal analogique $x(t) = a \cos 2\pi f_0 t$ que l'on souhaite échantillonner à la fréquence F_e, c'est-à-dire avec un pas d'échantillonnage $T_e = 1/F_e$.

10) Montrer que les valeurs numériques obtenues $x(n\,T_e)$ coïncident avec les valeurs numériques $y(n\,T_e)$ obtenues en échantillonnant à la même fréquence le signal $y(t) = a \cos 2\pi(k\,F_e \pm f_0)t$ où k est un entier relatif. Après conversion analogique - numérique, il est alors impossible de savoir si la suite de valeurs numériques échantillonnées provient du signal x de fréquence f_0 ou bien du signal y de fréquence $k\,F_e \pm f_0$.

11) Pour une fréquence d'échantillonnage F_e = 1 kHz, déterminer la fréquence $f_1 = k\,F_e \pm f_0$ comprise entre 0 et $F_e/2$ où se "replie" :

- la fréquence f_0 = 600 Hz,

- la fréquence f_0 = 1200 Hz,

- la fréquence $f_0 = n$ kHz où n est un entier naturel.

Quelle est alors, dans ce dernier cas, l'allure du signal obtenu après échantillonnage ?

12) Comment éviter ce repliement des fréquences au moment de l'échantillonnage ?

Exercice 4 :

On considère le signal réel $x(n)$ suivant, acquis à la fréquence F_e = 2 Hz et défini sur 4 points (n = 0 à 3) :

$x(0) = 1$, $x(1) = 3$, $x(2) = 2$, $x(3) = 1$ ($x(n) = 0$ sinon).

On désire calculer sa transformée de Fourier discrète (TFD) sur N = 4 points.

13) Quelle est la résolution en fréquence ?

14) Comment la TFD considère-t-elle le signal temporel entre $t = -\infty$ et $t = +\infty$?

15) Expliquer la relation entre la valeur de la résolution en fréquence et la durée du motif de x(n)

16) Déterminer la TFD de x(n) pour les 3 premières composantes fréquentielles $X(k)$ ($0 \leq k \leq 2$).

17) Déduire la quatrième composante fréquentielle, sans aucun calcul (justifier !)

18) En intégrant la densité spectrale de puissance du signal définie comme $S(f) = |X(f)|^2 / T$, où T est la durée d'acquisition du signal, calculer la puissance P_f dans le domaine fréquence et vérifier qu'elle est bien égale à la puissance P_t calculée dans le domaine temporel.