TD n°2 : Transformée de Fourier et modulation

Transformée de Fourier :	$g(t) \xrightarrow{TF} G(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j2\pi f t}dt$
Transformée de Fourier inverse :	$G(f) \xrightarrow{TFI} g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(f)e^{j2\pi t f}df$

Pour effectuer un changement de variable lors d'une intégration il suffit de transformer les différents paramètres : $u = f(t)$, $du = \frac{d f(t)}{dt}dt$, $t\in(a , b) \longrightarrow u\in(f(a) , f(b))$
On choisit en pratique $f(t)$ de manière à faire apparaître une intégrale plus simple ou connue en remplaçant t par $f^{-1}(u)$.

Définition du produit de convolution : $x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du$

Quelques propriétés de la distribution de Dirac :
Définition : fonction qui prend une valeur infinie en 0, et la valeur 0 partout ailleurs et dont l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ vaut 1 : $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1$, de même $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt = 1$.
La fonction est paire $\delta(f)=\delta(-f)$.

Multiplier cette distribution $\delta(t-t_0)$ par une autre fonction g a donc pour conséquence d'obtenir quelque chose de nul en dehors de $t=t_0$. Si l'on considère la fonction $t \longrightarrow g(t_0)$:

$\delta(t-t_0).g(t)=\delta(t-t_0).g(t_0)$ Cette expression permet donc de simplifier beaucoup de calculs et de faire apparaître des constantes que l'on peut sortir des intégrales.
On démontrera à l'aide de cela que :

- La transformée de Fourier de la distribution de Dirac est 1(toutes les fréquences présentes);
- La transformée de Fourier inverse de la fonction unité amène $\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi t f}dt$ que l'on exploite très souvent sous la forme $\delta(f-f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi t(f-f_0)}dt$ (raie à $f=f_0$) ;
- La distribution de Dirac est l'élément neutre de la convolution : $\delta(t)*f(t)=f(t)$;
- La distribution de Dirac retardée convoluée à une fonction retarde la fonction : $\delta(t-t_0)*f(t)=f(t-t_0)$.

$g(t)$	$G(f)$	$g(t)$	$G(f)$	$g(t)$	$G(f)$
$g(t-t_0)$			$G(f-f_0)$	$\delta(t)$	
$\cos(2\pi f_0 t)$		$\sin(2\pi f_0 t)$		$g^{(n)}(t)$	
$x(t).y(t)$		$x(t)*y(t)$			$G^{(n)}(f)$
$\prod_{\frac{T}{2}}(t)$		$Ш_T(t)$		$\Lambda_T(t)$	

Démarche à suivre TD 2

Exercice 1 : *suivre les étapes suivantes pour résoudre les questions du tableau :*

Transformée de Fourier de $\mathrm{g}(t-t_0)$ ***et transformée inverse de*** $\mathrm{G}(f-f_0)$ ***:***

1- Réciter les formules des transformées de Fourier directe et inverse, avec une fonction générique.

2- Remplacer par la fonction à étudier, ici une fonction avec un décalage temporel ou fréquentiel.

3- Effectuer un changement de variable $u=t-t_0$ ou $u=f-f_0$:

- établir du en fonction de dt ou de df ;

- exprimer les bornes de u en fonction des bornes de t ou de f ;

- exprimer t ou f en fonction de u pour pouvoir les remplacer dans l'intégrale ;

- Remplacer tous les termes dans l'intégrale pour faire totalement disparaître t et f .

4- Extraire une constante de l'intégrale en exploitant la formule $\mathrm{e}^{a+b}=\mathrm{e}^a.\mathrm{e}^b$.

5- Reconnaître une intégrale connue (on rechangera u par t ou par f) vue au point 1.

Transformée de Fourier de $\mathrm{g}^n(t)$ et transformée inverse de $\mathrm{G}^n(f)$:

1- Réciter les formules des transformées de Fourier directe et inverse, avec une fonction générique.

2- Remplacer par la fonction à transformer, ici une dérivée n-ième.

3- Effectuer une intégration par parties pour faire apparaître la dérivée n-1 de la fonction :

- Enoncer la formule d'intégration par parties ;

- Choisir d'intégrer $\mathrm{g}^n(t)$ et de dériver $\mathrm{e}^{j2\pi f t}$, écrire les termes u u' v v' ;

- Remplacer dans la formule d'intégration par parties ;

- Sortir les termes constants de l'intégrale et faire apparaître la formule $TF(g^{n-1}(t))$.

4- L'intégration par parties faisant apparaître deux termes, se restreindre à un certain type de fonctions pour en faire disparaître le premier.

5- Opérer par récurrence et généraliser la formule obtenue.

Transformée de Fourier de $\delta(t)$ ***:***

1- Réciter la formule de la transformée de Fourier directe, avec une fonction générique.

2- Remplacer par la fonction à transformer, ici la distribution de Dirac.

3- Exploiter la formule $\delta(t-t_0).g(t)=\delta(t-t_0).g(t_0)$ pour la fonction exponentielle.

4- Sortir de l'intégrale le terme constant que l'on a fait apparaître.

5- Reconnaître la définition de la distribution de Dirac et en déduire donc ce que vaut $TF(\delta(t))$.

6- Exprimer $TF^{-1}(1)=\delta(t)$ pour faire apparaître une formule très utile pour la suite.

Transformée de Fourier de $\sin(2\pi f_0 t)$ ***et*** $\cos(2\pi f_0 t)$ ***:***

1- Réciter la formule de la transformée de Fourier directe, avec une fonction générique.

2- Remplacer par la fonction à étudier, ici l'une des deux fonctions trigonométriques.

3- Décomposer les fonction $\cos$ et $\sin$ sous forme de somme et de différence de fonctions exponentielles.

4- Séparer en deux intégrales et regrouper les exponentielles en utilisant la formule $e^{a}.e^{b}=e^{a+b}$.

5- Reconnaître des distributions de Dirac.

6- Dessiner les spectres des transformées de Fourier.

Transformée de Fourier de $x(t)*y(t)$ *:*

1- Réciter la formule de la transformée de Fourier directe et du produit de convolution.

2- Remplacer par la fonction à étudier, ici un produit de convolution qui est une intégrale.

3- Echanger les intégrales : $\int_t \int_u \ldots du\, dt$ est réorganisée en $\int_u \int_t \ldots dt\, du$.

4- Reconnaître la Transformée de Fourier d'un signal décalé dans le temps et remplacer par la formule établie en tout début de TD.

5- Réorganiser la formule, sortir le terme qui ne dépend pas de la variable u

6- Reconnaître une seconde Transformée de Fourier.

7- Donner le résultat final.

Transformée de Fourier de $\mathrm{x}(t).\mathrm{y}(t)$ ***:***

1- Réciter la formule de la transformée de Fourier directe et du produit de convolution .

2- En raison de symétrie par rapport à la question précédente, on s'attend au résultat suivant : $TF(\mathrm{x}(t).\mathrm{y}(t))=TF(\mathrm{x}(t))*TF(\mathrm{y}(t))$. On fait alors la démonstration à l'envers en partant de ce résultat escompté en exprimant une triple intégrale :

- convolution $TF(\mathrm{x}(t))*TF(\mathrm{y}(t))=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{X}(u).\mathrm{Y}(f-u)du$ car une TF dépend de f ;
- $\mathrm{X}(u)$ est une TF donc s'exprime sous la forme d'une intégrale en fonction de t ;
- $\mathrm{Y}(f-u)$ est une TF donc une intégrale dans laquelle la variable f a été remplacée par la variable $f-u$. On prendra une variable d'intégration différente t' .

3- Echanger les intégrales : $\int_u (\int_t ...dt)(\int_{t'} ...dt')du$ est réorganisée en $\int_t \int_{t'} ... \int_u ...du \quad dt'dt$.

4- Reconnaître dans l'intégrale sur u une distribution de Dirac $\delta(t-t')$.

5- Exploiter la formule $\delta(t-t_0).g(t)=\delta(t-t_0).g(t_0)$ pour faire disparaître la variable t pour la fonction $x(t)$.

6- Séparer les intégrales dépendantes de la variable t et de la variable t' .

7- Reconnaître la définition d'une distribution de Dirac .

8- Identifier l'expression de $TF(\mathrm{x}(t).\mathrm{y}(t))$.

Transformée de Fourier de $\prod_{\frac{T}{2}}(t)$ *:*

1- Réciter la formule de la transformée de Fourier directe avec une fonction générique.

2- La fonction Porte étant définie par morceaux, couper l'intégrale définie sur $]-\infty;+\infty[$ en trois intégrales sur $]-\infty;-\frac{T}{2}]$ $[\frac{-T}{2};\frac{T}{2}]$ $[\frac{T}{2};+\infty[$ où la fonction porte est définie facilement.

3- Effectuer le calcul de chaque intégrale.

4- Exprimer le résultat sous la forme d'un sinus cardinal.

5- En multipliant par une amplitude $\frac{1}{T}$ et en faisant tendre T vers 0, retrouver $TF(\delta(t))$.

Transformée de Fourier de $Ш_T(t)$ *:*

1- Réciter la formule de la transformée de Fourier directe avec une fonction générique :

2- Exprimer la fonction Peigne de Dirac sous la forme d'une somme infinie de distribution de Dirac.

3- Décomposer en série de Fourier cette fonction périodique en appliquant la méthode du TD1:

- Réciter les formules de la reconstitution en série de Fourier et des coefficients C_n
- Remplacer dans la formule des C_n la fonction générique par la somme du point 2-)
- Echanger les symboles somme et intégrale.
- Trouver pour quelle valeur de n l'intégrale est non nulle.
- En déduire la valeur de C_n .

4- Injecter la reconstitution en série de Fourier dans la formule de la transformée de Fourier.

5- Echanger à nouveau les symboles somme et intégrale.

6- Reconnaître des distributions de Dirac au niveau des intégrales.

7- Exprimer la transformée de Fourier du Peigne sous la forme d'un peigne de Dirac.

Transformée de Fourier de $\Lambda_T(t)$ ***:***

1- Réciter la formule de la transformée de Fourier directe avec une fonction générique.

2- La fonction Triangle étant définie par morceaux, couper l'intégrale définie sur $]-\infty;+\infty[$ en quatre intégrales sur les domaines $]-\infty;-T]$ $[-T;0]$ $[0;T]$ $[T;+\infty[$ .Exprimer pour les domaines du milieu ce que vaut la fonction en utilisant les valeurs clefs suivantes : La fonction vaut 0 en $t=-T$ et en $t=T$ et vaut 1 en $t=0$

3- Calculer rapidement les intégrales pour les domaines extrêmes.

4- Utiliser des intégrations par parties pour faire disparaître les termes en $(1-\frac{t}{T})$ et $(1+\frac{t}{T})$ en les dérivant.

6- Après calcul regrouper les termes exponentiels pour faire apparaître un $\cos$.

7- Utiliser une formule de trigonométrie $1-\cos(2x)=2\sin^2 x$ pour faire apparaître un $\sin$ puis une fonction $sinc$:

Transformée de $g(t-t_0)$: $G_\Delta(f)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t-t_0)\,e^{-j2\pi f t}\,dt$, on choisit le changement de variable simple : $u=t-t_0$ d'où on déduit les paramètres suivants : $t=u+t_0$ et $dt=du$, les bornes restent inchangées : $t\in(-\infty,+\infty) \longrightarrow u\in(-\infty,+\infty)$ Le calcul donne alors :

$$G_\Delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,e^{-j2\pi f(u+t_0)}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,e^{-j2\pi f u}\,e^{-j2\pi f t_0}\,du = e^{-j2\pi f t_0}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,e^{-j2\pi f u}\,du$$

car $e^{a+b} = e^a \,.\, e^b$ et on sort un terme constant (qui ne contient pas la variable d'intégration).

On obtient : $g(t-t_0) \xrightarrow{TF} G_\Delta(f) = e^{-j2\pi f t_0}\ G(f)$ sachant que $g(t) \xrightarrow{TF} G(f)$

Transformée de $G(f-f_0)$: $g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(f-f_0)\,e^{j2\pi t f}\,df$, on choisit le changement de variable simple $u=f-f_0$ d'où on déduit les paramètres suivants : $f=u+f_0$ et $d f=du$, les bornes restent inchangées : $f\in(-\infty,+\infty) \longrightarrow u\in(-\infty,+\infty)$ Le calcul donne alors :

$g(t) = e^{-j2\pi f_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty} G(u)\,e^{-j2\pi t u}\,du$ car $e^{a+b} = e^a * e^b$ et on peut sortir un terme constant.