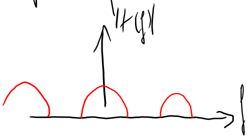
TD3 : Echantillonnage.

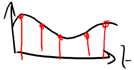
Exercice 1 :

① • signal périodique de période T → TF présente des raies à $f = \frac{N}{T}$ (harmoniques).

• TF périodique

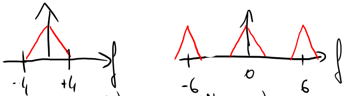


→ signal présente des raies dans le domaine temporel.



typique d'un signal échantillonné.

②



$$x_e(t) = x(t) \cdot \text{Ш}_{T_e}(t) = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t - NT_e) = \sum_N x(NT_e)\,\delta(t - NT_e)$$

$$\text{Ш}_{T_e} = \sum \delta(t - NT_e)$$

$$\hookrightarrow X_e(f) = TF(x(t) \cdot \text{Ш}_{T_e}) = X(f) * \frac{1}{T_e}\,\text{Ш}_{1/T_e}(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{N=-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta\left(f - \frac{N}{T_e}\right) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{N}{T_e}\right)$$

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_e}\right).$$

Spectre de raies avec les raies qui sont situées en $\frac{n}{T_e} \to nF_e$.

↳ d'après la figure $F_e = 6$ kHz.

- respect de Shannon pour avoir un signal bien échantillonné.

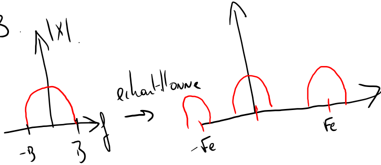
$f_{max} \leq \frac{F_e}{2}$ donc ici $f_{max} \leq 3$ kHz.

Or $f_{max} = 4$ kHz donc le signal n'est pas correctement échantillonné.

Exercice 2 :

A. Échantillonnage Parfait.

$|X(f)| = 0$ si $|f| > 3$.



$$X^*(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(f - nF_e) = X(f) * \text{Ш}_{F_e}(f)$$

$$\hookrightarrow x^*(t) = TF^{-1}\left(X^*(f)\right) = TF^{-1}\left(X(f) * \text{Ш}_{F_e}\right)$$

$$= TF^{-1}\left(X(f)\right)\, TF^{-1}\left(\text{Ш}_{F_e}\right)$$

$$= x(t)\ T_e\, \text{Ш}_{T_e}(t)$$

$$= T_e \sum_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \delta(t - nT_e)$$

$$\to TF\left(\text{Ш}_{T_e}\right) = \frac{1}{T_e}\, \text{Ш}_{1/T_e} = F_e\, \text{Ш}_{F_e}$$

dualité TF $\updownarrow$

$$\to TF^{-1}\left(\text{Ш}_{F_e}\right) = \frac{1}{F_e}\, \text{Ш}_{1/F_e} = T_e\, \text{Ш}_{T_e}$$

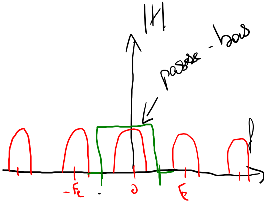
$$\to x(t)\,\delta(t - t_0) = x(t_0)\,\delta(t - t_0)$$

donc $$x^*(t) = T_e \sum_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(nT_e)}_{x(t_n)}\, \delta(t - nT_e)$$

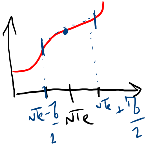
② $x_E = x(t)\, \text{Ш}_{T_e} \Rightarrow X_E(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(f - nF_e) = \frac{1}{T_e} X^*(f)$

Shannon $\to \underset{f_{max}}{B} \leqslant \frac{F_e}{2}$ avec $F_e = \frac{1}{T_e}$ $\to$ filtre passe-bas $F_c = \frac{F_e}{2}$

$\hookrightarrow$ limite $B = F_e/2$



3. Echantillonnage réel



① $$x^*_\tau(nT_e) = \frac{1}{\tau}\int_{nT_e-\frac{\tau}{2}}^{nT_e+\tau/2} x(t)\,dt.$$

$$x^*_\tau(nT_e) = \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-nT_e)\,x(t)\,dt.$$ avec $h(t-nT_e) \to$ fonction porte $\Pi_{\tau/2}(t)$.

↳ $$x^*_\tau(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x^*_\tau(nT_e)\,\delta(t-nT_e).$$ $\iff \to x^*_\tau(t) = x(t).\text{Ш}_{T_e}.$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u-nT_e)\,x(u)\,du\right)\delta(t-nT_e).$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \sum_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{h(u-nT_e)\,\delta(t-nT_e)}_{h(u-t)\,\delta(t-nT_e)}\,du. = \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\,h(u-t)\underbrace{\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_e)}_{\text{Ш}_{T_e}}\,du.$$

$$x^*_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, h(u-t)\, du}_{x(t) * h(-t)} \; Ш_{T_e}.$$

$$\text{donc } x^*_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \underbrace{x(t) * h(-t)}_{p(t)} \cdot Ш_{T_e}.$$

<u>Spectre du $p(t)$:</u>

$$P(f) = \frac{1}{\tau} X(f)\; TF(h(-t)) = \frac{1}{\tau} X(f) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{\tau/2}(-t)\, e^{-2\pi j f(-t)}\, dt}_{\tau \operatorname{sinc}(\pi f \tau)}$$

$$= \frac{1}{\tau} X(f)$$

$$\text{donc } P(f) = X(f) \operatorname{sinc}(\pi f \tau).$$

② $$X^*_\tau(f) = TF(p(t)\, Ш_{T_e}) = P(f) * \frac{1}{T_e} Ш_{1/T_e} = \frac{1}{T_e} \left(X(f) \operatorname{sinc}(\pi f \tau) * \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - nF_e) \right).$$

$$X^*_\tau(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(f - nF_e) \operatorname{sinc}(\pi \tau (f - nF_e))$$

③ $\tau \to 0$ $\Rightarrow$ fonction porte h tend vers un Dirac $\delta(t)$

$$X^*_{\tau \to 0}(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(f - nF_e)\, \mathrm{sinc}(\pi \tau (f - nF_e)).$$

$$\mathrm{sinc}(\pi\tau(f - nF_e)) \xrightarrow[\tau \to 0]{} \mathrm{sinc}(0) = 1.$$

donc $X^*_{\tau \to 0}(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(f - nF_e)$.

↳ cas idéal, cf exo 1.