POLYTECH SORBONNE

3ème année

Traitement du signal

TP n°2 – Analyse spectrale

Préparation : *lire le sujet + voir document réponse.*

I. Rappels sur l'analyse spectrale de signaux analogiques

1) Transformée de Fourier de signaux continus

La transformée de Fourier X(f) d'un signal non périodique x(t) se calcule en intégrant x(t) sur un intervalle de temps le plus large possible afin de pouvoir indiquer la contribution des fréquences f présentes dans le signal x(t) :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-2j\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

Cette fonction est complexe et admet donc une amplitude |X(f)| et une phase spectrale Arg[X(f)]. La transformée de Fourier inverse permettant de reconstruire le comportement temporel d'un signal à partir de son spectre en fréquence se définit en intégrant X(f) sur un intervalle de fréquence le plus large possible :

$$x(t) = TF^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,\mathrm{e}^{+2j\pi f t}\,\mathrm{d}f$$

Quelques propriétés permettent de calculer simplement la transformée de Fourier de signaux, telles que :

- la linéarité : $a_1\, x_1(t) + a_2\, x_2(t) \longleftrightarrow a_1\, X_1(f) + a_2\, X_2(f)$
- le théorème de Plancherel : $x_1(t)\, x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f) * X_2(f)$ et $x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f)\, X_2(f)$
- le décalage temporel (par rapport à un instant t_0) : $x(t - t_0) \longleftrightarrow \mathrm{e}^{+2j\pi f t_0} X(f)$
- le décalage fréquentiel (par rapport à une fréquence F_0) : $\mathrm{e}^{+2j\pi F_0 t} x(t) \longleftrightarrow X(f - F_0)$
- le changement d'échelle (d'une amplitude a) : $x(a\,t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{|a|} X(\dfrac{f}{a})$
- la dérivation : $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \longleftrightarrow j\,2\,\pi\, f\, X(f)$
- l'intégration : $\mathrm{Prim}[x(t)] \longleftrightarrow \dfrac{1}{j2\pi f} X(f)$

2) Transformée de Fourier pour des signaux périodiques

Dans le cas de signaux périodiques de fréquence f_0, leur décomposition en série de Fourier $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)\right]$ permet de simplifier le calcul de leur réponse spectrale en un spectre de raies (impulsions de Dirac fréquentielles) :

$$X(f) = a_0\,\delta(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{a_n - jb_n}{2}\,\delta(f - nf_0) + \frac{a_n + jb_n}{2}\,\delta(f + nf_0)\right] \quad \text{ou} \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,\delta(f - nf_0)$$

Il est à noter que la transformée de Fourier d'un peigne d'impulsions temporelles de Dirac (fig. 1) est également un peigne d'impulsions de Dirac, fréquentielles dans ce cas :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \longleftrightarrow X(f) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_0)$$

Ce résultat est utile pour la représentation de signaux discrets.

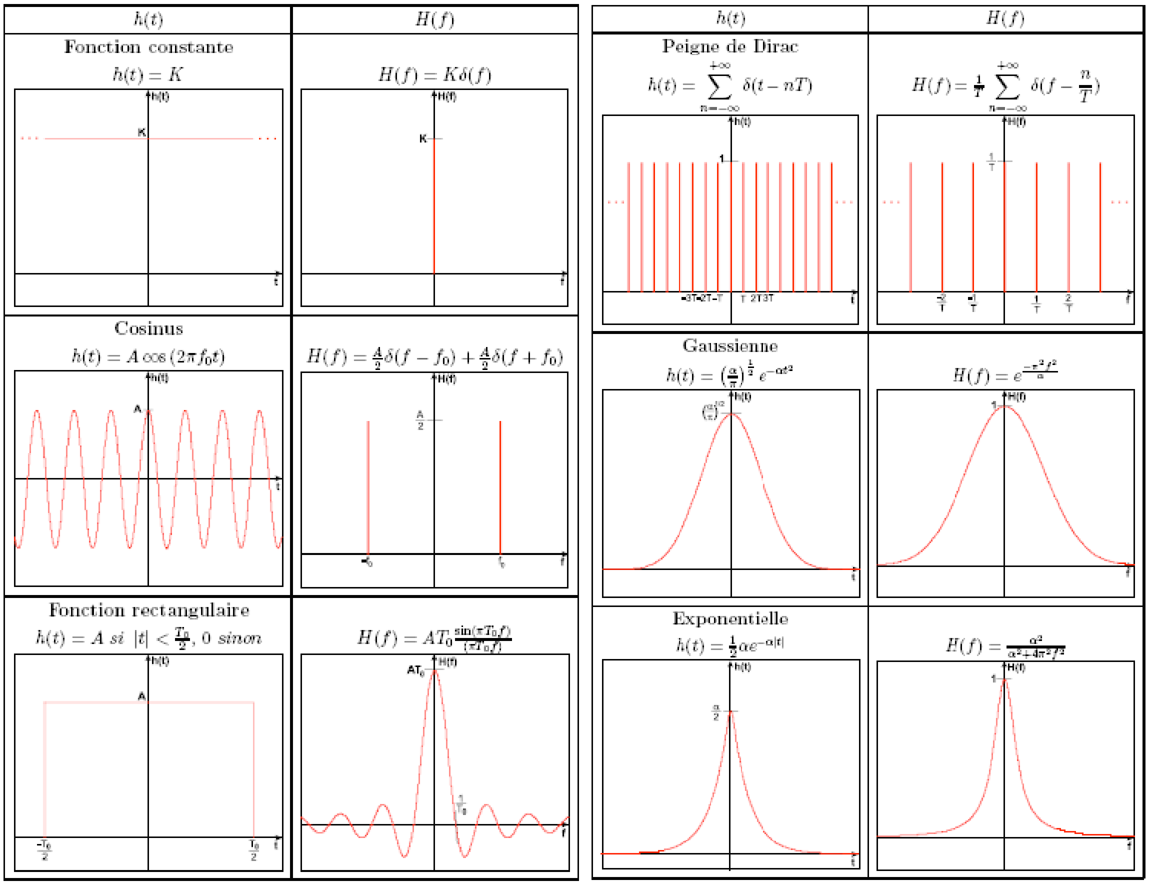

Fig.1 Quelques exemples de transformées de Fourier

3) Densité spectrale d'énergie (signaux à énergie finie)

La relation de Parseval permet de mettre en évidence la conservation de l'énergie *E* du signal par transformation :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df$$

La densité spectrale d'énergie (DSE) d'un signal $x(t)$ est définie comme le carré du module de sa transformée de Fourier :

$$\text{DSE}\,[x(t)] = |X(f)|^2.$$

Elle peut être également définie à partir de la fonction d'autocorrélation du signal (cf. TP 3).

4) Densité spectrale de puissance (signaux à puissance finie)

Pour les signaux à puissance finie, on définit la densité spectrale de puissance (DSP) $S(f)$ du signal à partir du carré du module de la transformée de Fourier du signal mesuré sur un temps T :

$$S_x(f) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \left| X_T(f) \right|^2$$

La puissance du signal peut alors se calculer dans le domaine temps ou le domaine fréquence :

$$P = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) \, \mathrm{d}f$$

La DSP peut être également définie à partir de la fonction d'autocorrélation du signal (cf. TP 3).

II. Analyse spectrale de signaux sous Matlab – Signaux discrets

1) Transformée de Fourier de signaux échantillonnés

L'analyse spectrale de signaux sous Matlab implique une analyse de signaux échantillonnés à une période T_e. Ainsi, un signal $x(t)$ est représenté par le signal $x_e(t)$ qui n'est autre que la convolution de l'amplitude du signal $x(t)$ à chaque instant d'échantillonnage $n\,T_e$ avec un peigne de Dirac temporel:

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\, \delta(t - nT_e)$$

Dans ce cas, d'après le théorème de Plancherel et de la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac temporel, la transformée de Fourier du signal échantillonné $x_e(t)$ s'écrit simplement de la manière suivante :

$$X_e(f) = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k\,F_e) \qquad \text{avec} \quad F_e = \frac{1}{T_e}$$

Si le signal comporte des informations à une fréquence maximale F_{max} de telle sorte que F_{max} respecte la condition de Shannon, c'est-à-dire $F_{max} \leq F_e/2$, le spectre fréquentiel d'un signal échantillonné est alors continu et périodisé avec une période fréquentielle égale à F_e. Ce spectre est également symétrique par rapport à $F_e/2$ et défini sur une bande spectrale de largeur F_e (fig. 2 - cas a). Si le signal comporte des informations à une fréquence maximale F_{max} qui ne respecte pas la condition de Shannon, le spectre fréquentiel du signal échantillonné comportera un recouvrement de spectre comme le montre le cas b de la figure 2.

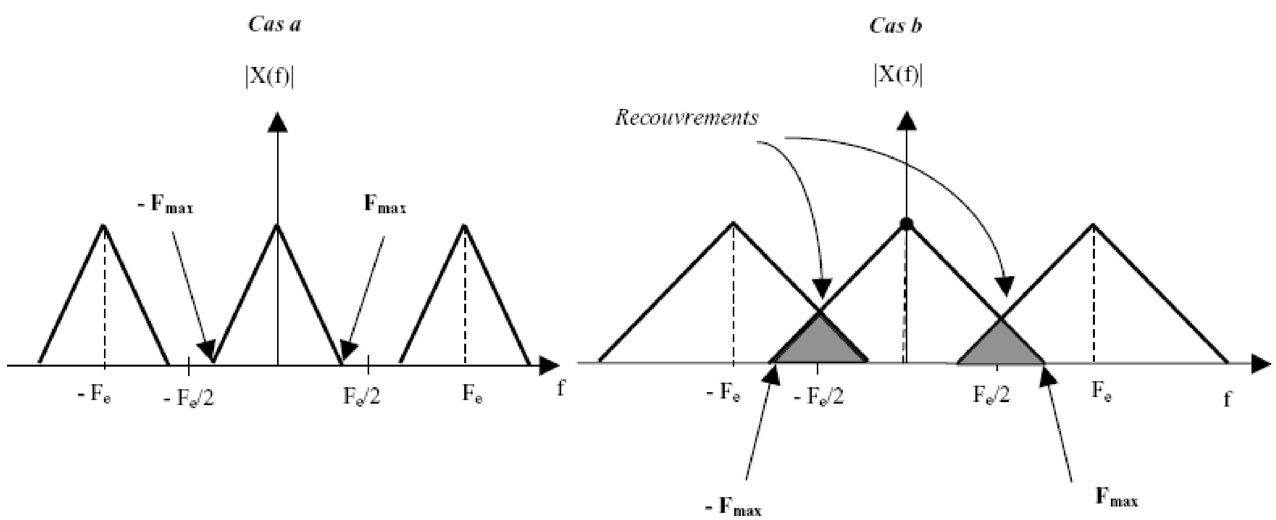

Fig.2 Spectre d'un signal échantillonné
(cas a : critère de Shannon respecté - cas b : critère de Shannon non respecté)

2) Transformée de Fourier Discrète (TFD) de signaux échantillonnés sous Matlab

La représentation mathématique sous Matlab qui nécessite non seulement un échantillonnage mais également un fenêtrage temporel des signaux à représenter (nombre d'échantillons *N* fini), implique une analyse spectrale correspondant à des signaux de type discret dont le comportement en fréquence ne peut être connu qu'à partir de la transformée de Fourier Discrète (TFD).

Si le signal échantillonné comporte un nombre fini *N* de points, le spectre fréquentiel de ce signal sera par TFD périodisé avec une période fréquentielle égale à F_e, et discrétisé en un nombre *N* de points fréquentiels avec une résolution spectrale égale à $\Delta f = F_e/N$. La symétrie par rapport à $F_e/2$ ainsi que la définition sur une bande spectrale de largeur F_e, apparaissent de la même façon que précédemment (fig. 2). Si le signal comporte des informations à une fréquence maximale F_{max} qui ne respecte pas la condition de Shannon, le spectre fréquentiel discrétisé du signal comportera également un recouvrement (fig. 2 - cas b).

Sous Matlab, pour calculer la transformée de Fourier discrète de ces signaux, définis sur *N* points, on utilisera la fonction « fft », qui correspond à un algorithme optimisé, appelé Transformée de Fourier Rapide (TFR ou FFT en anglais).

$$\text{FFT : pour } 1 \le k \le N : \; X(k) = T_e \; fft[x(n)] = T_e \sum_{n=1}^{N} x(n)\, \mathrm{e}^{-j2\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}}$$

$$\text{inverse FFT : pour } 1 \le n \le N : \; x(n) = \frac{1}{T_e}\, ifft[X(k)] = \frac{1}{T_e}\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} X(k)\, \mathrm{e}^{+j2\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}}$$

Le résultat de cette instruction est une suite complexe de *N* points régulièrement répartis sur l'axe des fréquences avec un pas de $\Delta f = 1/(NT_e)$ Hz. En conséquence, la plage de fréquence étudiée va de 0 Hz à $(N\text{-}1)/(NT_e)$ Hz.

<u>Remarque importante</u> : les termes T_e et $1/T_e$ sont indispensables pour garder une cohérence dans les unités (si $x(n)$ est en V, $X(k)$ est en V.s, et par TF inverse $x(n)$ est bien en V).

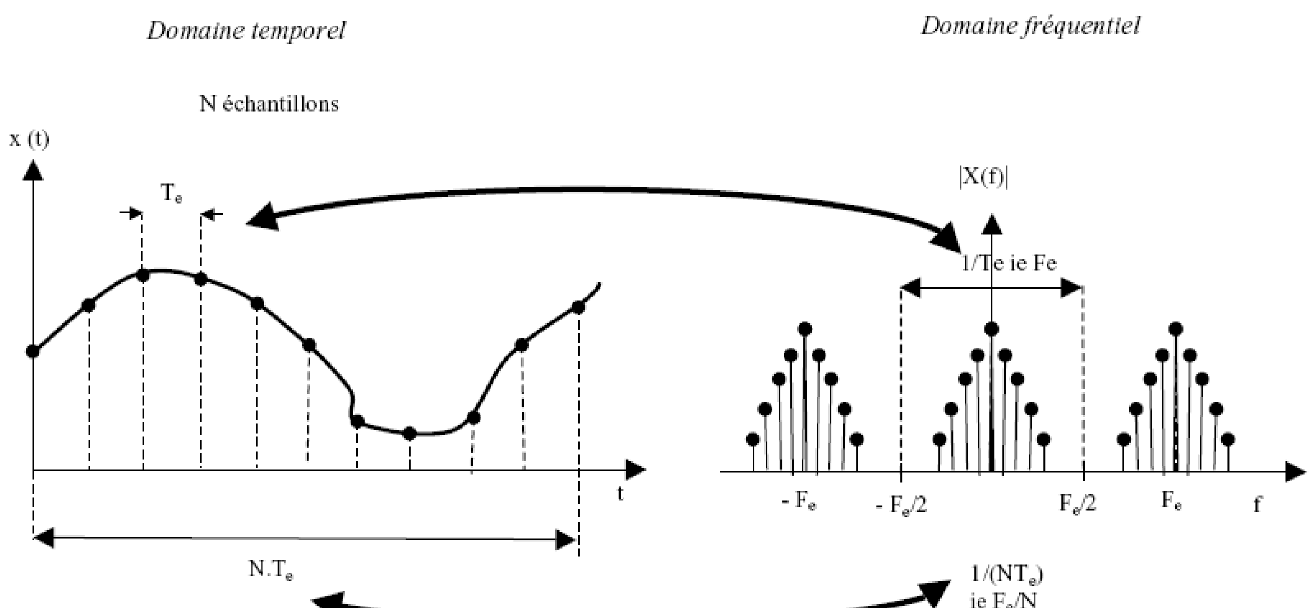

Fig.3 TFD d'un signal échantillonné sur *N* points (critère de Shannon respecté)

a) Retrouver avec Matlab les résultats de la TFD du signal défini sur 4 points dans l'exercice 2 du TD4 (F_e = 1 Hz, $x(0) = 1$, $x(1) = 2$, $x(2) = 1$, $x(3) = 1$, les autres $x(n)$ sont nuls). Quel est en réalité le signal temporel considéré par la TFD ?

On considère maintenant les signaux suivants :

$$x_1(t) = \cos(2\pi f_1 t + \pi/4) \qquad \text{et} \qquad x_2(t) = 2\cos(2\pi f_2 t + \pi/3)$$

avec f_1 = 2 Hz et f_2 = 5,34 Hz

b) Quelle période d'échantillonnage maximale T_m peut-on prendre pour numériser ces deux signaux ?

c) On échantillonne ces signaux sur N = 256 points avec une période $T_e = 2/N$. Visualiser les signaux $x_1(n\,T_e)$ et $x_2(n\,T_e)$.

d) On étudie d'abord le signal x_1. Tracer les parties réelle et imaginaire de la transformée de Fourier de x_1 sur la même figure en utilisant la fonction *subplot*. On effectuera les tracés dans la gamme de fréquences [0, F_e]. Comparer l'amplitude et la position des raies obtenues à leurs valeurs théoriques.

<u>Rappel</u> : le signal $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ a pour TF : $X(f) = \frac{A}{2}e^{j\theta}\,\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}e^{-j\theta}\,\delta(f + f_0)$

e) Tracer le module et la densité spectrale de puissance du signal x_1 sur une nouvelle figure et comparer l'amplitude des raies obtenues à leurs valeurs théoriques.

f) Calculer la puissance du signal x_1 dans le domaine fréquence et vérifier que l'on obtient bien la même valeur que dans le domaine temporel ($A^2/2$).

g) Reprendre les questions d, e et f pour le signal x_2 mais cette fois-ci sans chercher à calculer les valeurs théoriques des grandeurs demandées. On expliquera pourquoi les raies spectrales du signal sont définies sur plusieurs fréquences.

h) Quel phénomène se produit lorsque $T_e > T_m$? Quelles seraient les fréquences apparentes des signaux x_1 et x_2 si on les échantillonnait à la fréquence F_e = 3,2 Hz sur N = 32 points ?

3) Transformée de Fourier Discrète (TFD) de signaux échantillonnés avec fenêtrage temporel supplémentaire

Afin de limiter le nombre de points de calcul de la TFD, il est possible de restreindre la définition du signal temporel à transformer en fréquence sur un intervalle de temps particulier (fenêtrage). L'utilisation d'une fenêtre rectangulaire (que l'on peut qualifier de fenêtre naturelle) produit une distorsion du spectre du signal observé. Cette distorsion est inévitable. Dans le cas précis de la fenêtre rectangulaire, on constate l'apparition de lobes secondaires dont les amplitudes sont relativement élevées. Ceci provient du fait que la fenêtre possède des discontinuités (passage de 0 à 1). Ces lobes secondaires empêchent l'observation de signaux comportant des raies de faible amplitude. On appelle ce phénomène la résolution d'amplitude de la fenêtre.

On définit le rapport (*Ampl. lobe second)* / (*Ampl. lobe principal)* exprimé en dB pour quantifier ce phénomène. Il peut donc être judicieux de choisir une fenêtre à bord "doux" comme une fenêtre triangulaire par exemple pour annuler ces discontinuités. Différentes fenêtres ont été développées de façon à diminuer l'amplitude des lobes secondaires : Hamming, Hanning, Bartlett, Blackman... (ces fenêtres sont fournies dans Matlab par des fonctions portant leur nom). En contrepartie, toutes ces fenêtres présentent l'inconvénient d'élargir le lobe central (largeur du lobe central = $2/T_{fenêtre}$ pour une fenêtre rectangulaire). Cette limitation peut être très gênante dans le cas de l'observation de signaux comportant des fréquences très voisines. C'est ce qu'on appelle la résolution fréquentielle de la fenêtre, cette résolution est variable selon le type de fenêtre utilisé, on donne généralement la largeur du lobe principal exprimé en Hz ou en (Nb de pts de la fenêtre)$^{-1}$.

Par exemple dans le cas d'un signal sinusoïdal (fig. 4), dont le spectre d'origine est égal à deux raies aux fréquences f_o et $-f_o$, on trouve pour le spectre du signal fenêtré par un rectangle le spectre du sinus cardinal (lobe principal de largeur $2/T_{fenêtre}$ + lobes secondaires d'amplitudes décroissantes) centré à $+f_o$ et $-f_o$. En effet, si $h(t)$ est la fenêtre rectangulaire de 0 à T, la transformée de Fourier du signal sinusoïdal fenêtré a pour expression :

$$TF\left[(\cos 2\pi f_o t).\,h(t)\right]=\left[\frac{1}{2}\delta(f-f_o)+\frac{1}{2}\delta(f+f_o)\right]*H(f)=\frac{1}{2}H(f-f_o)+\frac{1}{2}H(f+f_o)$$

où $H(f)$ est un sinus cardinal : $H(f)=\mathrm{e}^{-j\pi fT}\dfrac{\sin\pi fT}{\pi f}=T\,\mathrm{e}^{-j\pi fT}\operatorname{sinc}\,\pi fT$

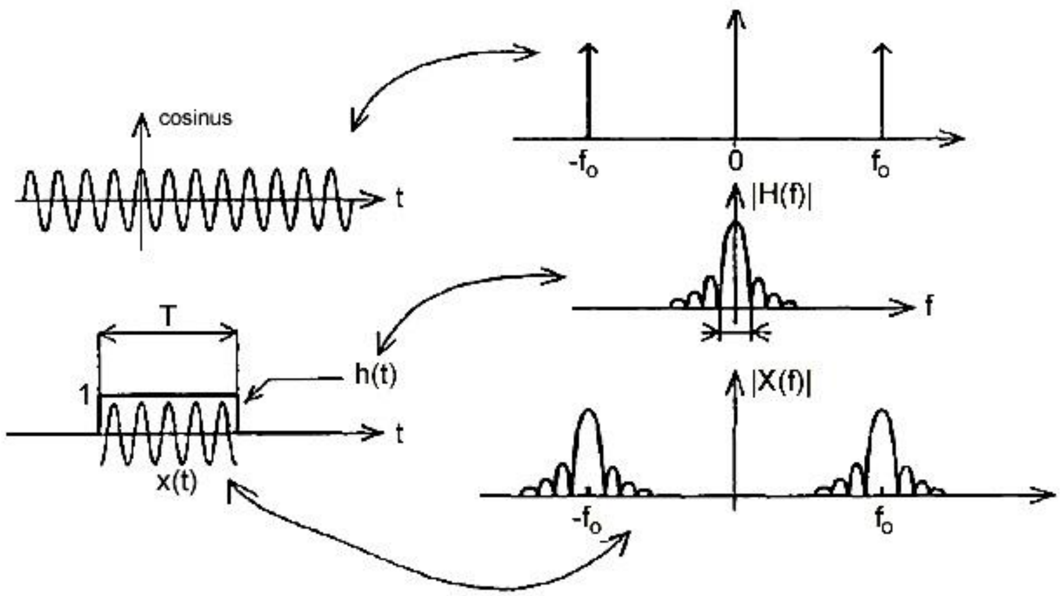

Fig.4 Fenêtrage temporel d'un signal sinusoïdal – Influence sur le spectre obtenu

a) Pour faire apparaître le sinus cardinal, on reprend les signaux x_1 et x_2 définis plus haut (N = 256, $T_e = 2/N$). On tracera d'abord sur la même figure le module de la TF du signal x_1 calculée sur les N = 256 points du signal et la TF du signal x_1 calculée sur 100 N points (la fonction fft(x1,100*N) calcule la TF sur 100 N points en complétant le signal x_1 par des zéros). On utilisera donc 2 axes de fréquence, l'un de résolution $1/(N\,T_e)$ et l'autre de résolution $1/(100\,N\,T_e)$. On fera un zoom de 0 à 10 Hz pour voir apparaître le sinus cardinal dû à la fenêtre rectangulaire. Reprendre la question pour le signal x_2.

b) <u>Fenêtre de Hanning</u> : tracer dans la même figure le signal x_2 et le signal x_2 fenêtré par la fenêtre de Hanning. Quels sont les effets de la fenêtre de Hanning ? Tracer ensuite la densité spectrale de puissance de x_2 et celle du signal x_2 fenêtré par la fenêtre de Hanning après avoir multiplié cette DSP par 8/3 pour compenser la perte de puissance due au fenêtrage. On effectuera les tracés de DSP avec la fonction *semilogy*. Commenter l'effet du filtrage obtenu sur la DSP du signal. Montrer que la puissance du signal brut x_2 est proche de celle du signal x_2 fenêtré multipliée par 8/3.

c) <u>Résolution en amplitude</u> : pour montrer l'intérêt des fenêtres d'apodisation pour détecter des signaux de faible amplitude, on considère le signal $x_3(t) = x_2(t) + 0{,}0001\cos(2\,\pi\,f_3\,t)$ où la fréquence f_3 est égale par exemple à 4 f_2. Tracer dans une même figure les densités spectrales de puissance des signaux x_3 fenêtrés par la fenêtre rectangulaire, par la fenêtre de Hanning et par la fenêtre de Blackman (on prendra le facteur 3,28 pour compenser la perte de puissance due à la fenêtre de Blackman). Comparer les différents résultats et conclure quant à l'efficacité de ces fenêtres.

Aide Matlab :

- transformée de Fourier discrète : X=fft(x); si le nombre de points de x(t) est une puissance de 2, Matlab utilise l'algorithme rapide Fast Tourier Transform ; dans le cas contraire, Matlab utilise la TFD classique.
- Transformée de Fourier inverse : x=ifft(X);
- Pour les tracés en fréquence, ne pas oublier de définir une variable fréquence : f=Fe/N*(0 :N-1); plot(f,abs(X))
- subplot : pour le tracé de plusieurs courbes dans la même fenêtre graphique
  ex : subplot (4,1,1);plot(t,x); subplot (4,1,2);plot(f,abs(X)); subplot (4,1,3);plot(f,angle(X));
- *semilogy*
- hanning
- blackman