POLYTECH SORBONNE

Spécialité Electronique et informatique industrielle en partenariat

3ème année

Traitement du signal
Contrôle continu N°2 –19 juin 2020

NOM :	_ _ _ _ _ _ _ _ _ _
Prénom :	_ _ _ _ _ _ _ _ _ _
Groupe (entourer) :	**II** **HF**

Durée : 2 heures
Délai supplémentaire de 15 minutes pour pallier aux problèmes de connexion, accès à Moodle, etc.

Exercice 1

1a) Calculer la transformée en z, notée X(z), du signal x(n) défini par :

$$x(n) = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \quad \text{si } n \geq 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$ Précisez le domaine de convergence.

Indications : $\sin(x) = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$ $\quad \sin(\frac{\pi}{6}) = \dfrac{1}{2}$ $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty} (a)^n = \frac{1}{1-a}$ si $a < 1$

Correction :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \sin\frac{n\pi}{6}.z^{-n} = \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{n=+\infty}\left(e^{j\frac{n\pi}{6}} - e^{-j\frac{n\pi}{6}}\right).z^{-n} = \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{n=+\infty}\left(e^{j\frac{\pi}{6}}z^{-1}\right)^n - \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{n=+\infty}\left(e^{-j\frac{\pi}{6}}z^{-1}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-e^{j\frac{\pi}{6}}.z^{-1}}\right) - \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-e^{-j\frac{\pi}{6}}.z^{-1}}\right)$$

- Domaine de convergence : si $\left|e^{\pm j\frac{\pi}{6}}.z^{-1}\right| < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|z|} < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$

$$X(z) = \frac{1}{2j} \times \frac{1-e^{-j\frac{\pi}{6}}.z^{-1} - 1 + e^{+j\frac{\pi}{6}}.z^{-1}}{1+z^{-2} - z^{-1}\left(e^{+j\frac{\pi}{6}} + e^{-j\frac{\pi}{6}}\right)} = \frac{1}{2j} \times \frac{z^{-1}2j\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1+z^{-2} - 2z^{-1}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$\frac{z^{-1}\frac{1}{2}}{1+z^{-2} - 2z^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\frac{z^{-1}}{1-\sqrt{3}z^{-1} + z^{-2}}$$

1b) Calculer la TZ inverse de : $Y(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-0{,}5)}$ en décomposant tout d'abord Y(z) en éléments simples.

$$Y(z)=\frac{z}{(z-1)(z-0{,}5)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-0{,}5}=\frac{(A+B)z-(0{,}5A+B)}{(z-1)(z-0{,}5)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\\0{,}5A+B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\B=-1\end{cases}$$

$$Y(z)=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z-0{,}5}=\frac{2z^{-1}}{1-z^{-1}}-\frac{z^{-1}}{1-0{,}5z^{-1}}$$

$$\Rightarrow y(k)=2\times1^{k-1}\times u(k-1)-0{,}5^{k-1}\times u(k-1)=(2-0{,}5^{k-1})u(k-1)$$

Exercice 2

Soit le signal *h(k)* tel que : $h(0)=1; h(1)=0{,}75; h(2)=0{,}5; h(k)=0$ ailleurs.

2a) Déterminer la TZ, notée *H(z)*, de *h(k)*.

$$H(z)=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}h(k).z^{-k}=h(0)z^{-0}+h(1)z^{-1}+h(2)z^{-2}$$

$$H(z)=1+0{,}75z^{-1}+0{,}5z^{-2}$$

2b) Sachant que : $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$, déterminez l'équation donnant *y(k)* en fonction des valeurs de *x*

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=1+0{,}75z^{-1}+0{,}5z^{-2}\Rightarrow Y(z)=\left(1+0{,}75z^{-1}+0{,}5z^{-2}\right)X(z)$$

$$\Rightarrow y(k)=x(k)+0{,}75x(k-1)+0{,}5x(k-2)$$

Exercice 3

On considère un filtre numérique dont l'équation de récurrence est :

$$y(k) = -y(k-2) + x(k) - x(k-2)$$

3a) Est-ce l'équation d'un filtre récursif ? Purement récursif ? D'un filtre RII ou RIF ? Justifiez vos réponses.

- Filtre récursif à cause du terme $y(k-2)$
- Pas purement récursif à cause du terme $x(k-2)$
- Filtre RII car l'expression de $y(k)$ sans termes $y(k-n)$ contient un nombre infini de termes $x(k-n)$

3b) Déterminer sa fonctions de transfert, H(z).

$$Y(z) = -z^{-2}Y(z) + X(z) - z^{-2}X(z) \Rightarrow Y(z)(1+z^{-2}) = X(z)(1-z^{-2})$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-z^{-2}}{1+z^{-2}} = \frac{z^2-1}{z^2+1}$$

3c) Exprimer son gain complexe et représenter les courbes du module et de la phase entre 0 et Fe/2.

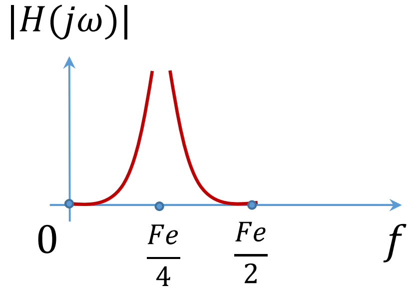
$$z = e^{i\omega Te} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{e^{2j\omega Te}-1}{e^{2j\omega Te}+1} = \frac{e^{j\omega Te}\left[e^{j\omega Te}-e^{-j\omega Te}\right]}{e^{j\omega Te}\left[e^{j\omega Te}+e^{-j\omega Te}\right]} = \frac{2j\sin(\omega Te)}{2\cos(\omega Te)} = j\tan(\omega Te)$$

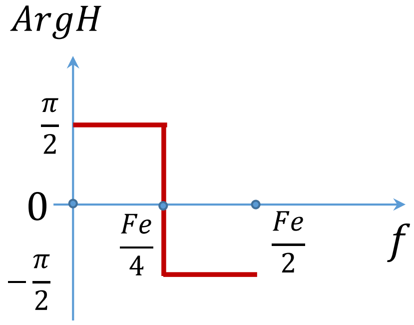
Pour $0 < f < Fe/2$ alors $0 < \omega Te < \pi$

$$|H(j\omega)| = |\tan(\omega Te)|$$

$$ArgH = \frac{\pi}{2} \quad \text{quand} \quad \tan(\omega Te) > 0$$

$$\text{et} \quad ArgH = -\frac{\pi}{2} \quad \text{quand} \quad \tan(\omega Te) < 0$$





Exercice 4
Un système possédant une entrée x(k) et une sortie y(k) est décrit par les trois équations suivantes :

$$y(k) = y(k-1) + 2v(k) + v(k-1)$$
$$v(k) = 2v(k-1) + w(k)$$
$$w(k) = x(k) + 2x(k-1)$$

4a) En utilisant la TZ, démontrez que l'équation de récurrence décrivant la totalité de ce système est de la forme suivante :

$$y(k) = 3y(k-1) - 2y(k-2) + 2x(k) + 5x(k-1) + 2x(k-2)$$

<u>Correction</u>

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + 2V(z) + z^{-1}V(z) \Rightarrow \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{2+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$V(z) = 2z^{-1}V(z) + W(z) \Rightarrow \frac{V(z)}{W(z)} = \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

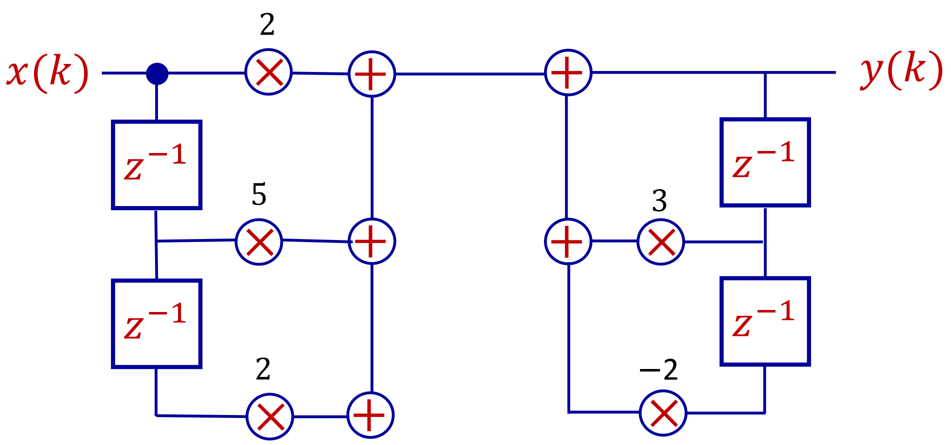
$$W(z) = X(z) + 2z^{-1}X(z) \Rightarrow \frac{W(z)}{X(z)} = 1+2z^{-1}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{V(z)} \times \frac{V(z)}{W(z)} \times \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{(2+z^{-1})(1+2z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{2+z^{-1}+4z^{-1}+2z^{-2}}{1-z^{-1}-2z^{-1}+2z^{-2}} = \frac{2+5z^{-1}+2z2}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$$

$$\Rightarrow y(k) = 3y(k-1) - 2y(k-2) + 2x(k) + 5x(k-1) + 2x(k-2)$$

4b) Proposer un schéma de réalisation de ce système en utilisant les notations suivantes :

$\boxed{z^{-1}}$ **:** opérateur retard, $\overset{a}{\otimes}$: opérateur multiplication par *a* et $\oplus$ opérateur addition.



Exercice 5

On veut réaliser un filtre numérique à partir du filtre analogique de fonction de transfert $H_c(p) = \frac{\tau\, p}{1+\tau\, p}$ en utilisant l'invariance de la dérivation.

5a) Démontrer la relation donnant le lien entre *p* et *z* si l'on impose **l'invariance de la dérivation**, à savoir : $p = \frac{1-z^{-1}}{T_e}$, où T_e est le pas d'échantillonnage ($T_e = 1/F_e$).

En analogique : $y = \frac{dx}{dt} \Rightarrow Y(p) = p.X(p) \Rightarrow H(p) = p$

En numérique : $y = \frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t-Te)-x(t)}{Te} = \frac{x(n)-x(n-1)}{Te} \Rightarrow H(z) = \frac{1-z^{-1}}{Te}$

Invariance de la dérivation : $p = \frac{1-z^{-1}}{Te}$

5b) Déterminer la fonction de transfert *H*(*z*) du filtre numérique obtenu.

$$H(z) = \frac{\tau \frac{1-z^{-1}}{Te}}{1+\tau \frac{1-z^{-1}}{Te}} = \frac{\tau(1-z^{-1})}{Te+\tau-\tau z^{-1}}$$

5c) Déterminer l'équation aux différences de ce filtre.

$$H(z) = \frac{\tau(1-z^{-1})}{Te+\tau-\tau z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z)\left[Te+\tau-\tau z^{-1}\right] = X(z)\left[\tau(1-z^{-1})\right] \Rightarrow Y(z) = \frac{\tau}{Te+\tau} X(z)(1-z^{-1})$$

$$\Rightarrow y(n) = \frac{\tau}{Te+\tau} y(n-1) + \frac{\tau}{Te+\tau}\left[x(n)-x(n-1)\right]$$

5d) Ce filtre est-il stable ? Justifiez votre réponse.

Pôle $z^{-1} = \frac{Te+\tau}{\tau} \Rightarrow |z| = \frac{\tau}{Te+\tau} < 1 \Rightarrow \text{filtre stable}$