3ème année

Traitement du signal
TP n°4 – Analyse de filtres

Préparation : *lire le sujet et reprendre les calculs des études théoriques + voir document réponse.*

Le but de ce TP est d'étudier plusieurs filtres numériques. Pour chaque filtre :

- visualiser la réponse indicielle
- visualiser la réponse impulsionnelle
- tracer la fonction de transfert
- représenter, dans le plan complexe Z, la position des pôles et des zéros.

Il est important de réaliser dès le début de la séance un programme structuré (fichier .m) afin de le réexploiter pour chacun des filtres à étudier.

1) Filtre du premier ordre purement récursif

Soit le filtre purement récursif du premier ordre de fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{1}{1 - a\, z^{-1}}$$

<u>Étude théorique de la fonction de transfert :</u>

$$H(f) = H(z)|_{z=e^{2\pi jfT_e}} = \frac{1}{1-a\,e^{-2\pi jfT_e}} = \frac{1}{1-a\cos(2\pi fT_e)+ja\sin(2\pi fT_e)}$$

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1-2a\ \cos(2\pi fT_e)+a^2\cos^2(2\pi fT_e)+a^2\sin^2(2\pi fT_e)}} = \frac{1}{\sqrt{1-2a\ \cos(2\pi fT_e)+a^2}}$$

$$Arg\big(H(f)\big) = -\arctan\left(\frac{a\sin(2\pi fT_e)}{1-a\cos(2\pi fT_e)}\right) ;\ Notons\ que\ 1 - a\cos(2\pi fT_e) > 0\ car\ |a| < 1$$

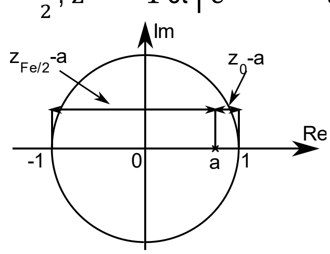
$$H(0) = \frac{1}{1-a}\ ;\ H\left(\frac{F_e}{2}\right) = \frac{1}{1+a}$$

<u>Note sur le lien entre la position du pôle et la nature du filtre :</u>

Le lien entre z et p, variable de Laplace, s'écrit : $z = e^{pT_e}$. En régime sinusoïdal, $p = j2\pi fT_e$ et $z = e^{j2\pi fT_e}$: z est une variable de module égal à 1 et de phase variable, en fonction de la fréquence f. Ainsi, le dénominateur de la fonction de transfert, que l'on peut écrire sous la forme $\left(e^{2\pi jfT_e} - a\right)$, évolue avec la fréquence.

Dans le cas où a est positif, pour $f = 0$, $z = 1$ et $\left|e^{2\pi jfT_e} - a\right|$ est « petit » ; alors $\frac{1}{\left|e^{2\pi jfT_e}-a\right|}$ est « grand » : les basses fréquences passent bien (peu d'atténuation)

Pour $f = \frac{F_e}{2}$, $z = -1$ et $\left|e^{2\pi jfT_e} - a\right|$ est « grand » ; alors $\frac{1}{\left|e^{2\pi jfT_e}-a\right|}$ est « petit » : les hautes fréquences sont atténuées.



La démarche est la même pour a négatif : le filtre est alors de type passe haut.

- Écrire un programme qui :
  - Demande à l'utilisateur de saisir la valeur de *a* (fonction *input*).
  - Calcule les réponses indicielle et impulsionnelle à partir de l'équation de récurrence.
  - Affiche les réponses indicielle et impulsionnelle.
  - Affiche le module de *H*(*f*) et sa phase.
  - Affiche les pôles et les zéros de la fonction de transfert **-** on utilisera la fonction Matlab *zplane*.

- Exploitation du programme : tester ce programme avec 3 valeurs de *a* :
  - Une pour obtenir un filtre de type passe-bas.
  - Une pour obtenir un filtre de type passe-haut.
  - Une pour vérifier que dans certains cas, le filtre est instable.

2) Filtre du premier ordre

On considère maintenant le filtre de fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{1-b\,z^{-1}}{1-a\,z^{-1}}$$

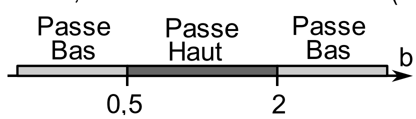
Étude théorique de la fonction de transfert :

$|\mathrm{H(f)}| = \frac{\sqrt{1-2\mathrm{b}\ \cos(2\pi \mathrm{f} \mathrm{T_e})+\mathrm{b}^2}}{\sqrt{1-2\mathrm{a}\ \cos(2\pi \mathrm{f} \mathrm{T_e})+\mathrm{a}^2}}$; $\mathrm{Arg}\big(\mathrm{H(f)}\big) = \arctan\left(\frac{\mathrm{b}\sin(2\pi \mathrm{f}\mathrm{T_e})}{1-\mathrm{b}\cos(2\pi \mathrm{f}\mathrm{T_e})}\right) - \arctan\left(\frac{\mathrm{a}\sin(2\pi \mathrm{f}\mathrm{T_e})}{1-\mathrm{a}\cos(2\pi \mathrm{f}\mathrm{T_e})}\right)$

Pour a=0,5 : $\mathrm{H}(0) = \frac{|1-\mathrm{b}|}{1-\mathrm{a}} = 2|1-\mathrm{b}|$; $\mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{F_e}}{2}\right) = \frac{|1+\mathrm{b}|}{1+\mathrm{a}} = \frac{2}{3}|1+\mathrm{b}|$

Afin de connaitre la nature du filtre, étudions la différence des modules ou, plus simplement, la différence de leurs carrés (ce qui renseigne tout autant sur le terme qui sera le plus grand des deux) :

$\mathrm{H}^2(0) - \mathrm{H}^2\left(\frac{\mathrm{F_e}}{2}\right) = 4\left[(1-\mathrm{b})^2 - \frac{1}{9}(1+\mathrm{b})^2\right] = \frac{16}{9}(1-2\mathrm{b})(2-\mathrm{b})$



Observons la nature du filtre au regard du pôle et du zéro :

Pôle : $\mathrm{z} = \mathrm{a}$, Zéro : $\mathrm{z} = \mathrm{b}$. a=0,5 : le dénominateur confère un comportement « passe-bas ».

Étudions le numérateur : si b=0,5, le numérateur et le dénominateurs se simplifient : filtre « passe-tout ». Si b<0,5 le numérateur $\left|\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \mathrm{f} \mathrm{T_e}} - \mathrm{b}\right|$ sera plus grand que le dénominateur $\left|\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \mathrm{f} \mathrm{T_e}} - \mathrm{a}\right|$ au voisinage de 1 et ce sera le contraire au voisinage de -1, d'où un comportement passe bas.

Ce comportement s'inverse pour donner un passe-haut lorsque b>0,5. Lorsque b=2, pour $\mathrm{f} = 0$, $\left|\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \mathrm{f} \mathrm{T_e}} - \mathrm{b}\right| = 1$ et $\left|\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \mathrm{f} \mathrm{T_e}} - \mathrm{a}\right| = 0{,}5$ soit $\frac{\left|\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \mathrm{f} \mathrm{T_e}} - \mathrm{b}\right|}{\left|\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \mathrm{f} \mathrm{T_e}} - \mathrm{a}\right|} = 2$ et pour $\mathrm{f} = \frac{\mathrm{F_e}}{2}$, $\left|\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \mathrm{f} \mathrm{T_e}} - \mathrm{b}\right| = 3$ et $\left|\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \mathrm{f} \mathrm{T_e}} - \mathrm{a}\right| = 1{,}5$ soit $\frac{\left|\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \mathrm{f} \mathrm{T_e}} - \mathrm{b}\right|}{\left|\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \mathrm{f} \mathrm{T_e}} - \mathrm{a}\right|} = 2$ également !

Et pour toute valeur de b>2, le numérateur en basses fréquence $|1-\mathrm{b}|$ sera proche du numérateur en hautes fréquences $|-1-\mathrm{b}|$, alors que le dénominateur vaut 0,5 en basses fréquences et 1,5 en hautes fréquences (division par un terme plus élevé) d'où à nouveau un comportement passe bas.

- Reprendre le programme précédent mais utiliser maintenant la fonction *filter* pour réaliser le filtrage.
  - On prendra *a=0,5*
  - *b* doit être un paramètre d'entrée.
  - Étudier les réponses temporelles et fréquentielles, avec différentes valeurs de *b*. Quels types de filtre obtient-on ?

3) Filtre du second ordre

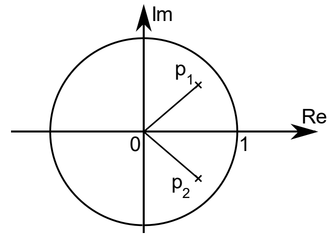
On considère maintenant le filtre du second ordre :

$$H(z) = \frac{1}{1-2r\,cos(2\pi f_0 T_e)\ z^{-1}+r^2 z^{-2}} = \frac{1}{(1-r\ e^{2j\pi f_0 T_e}\ z^{-1})\ (1-r\ e^{-2j\pi f_0 T_e}\ z^{-1})}$$ avec $0 \leq f_0 T_e \leq 0{,}5$ et $r > 0$

Étude théorique de la fonction de transfert :

$$\mathrm{H(z)} = \frac{1}{1-2\mathrm{r}\cos(2\pi \mathrm{f_0 T_e})\ \mathrm{z}^{-1}+\mathrm{r}^2\mathrm{z}^{-2}} = \frac{1}{(1-\mathrm{r}\ \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\pi \mathrm{f_0 T_e}}\ \mathrm{z}^{-1})\ (1-\mathrm{r}\ \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\pi \mathrm{f_0 T_e}}\ \mathrm{z}^{-1})}$$

Pôles : $\mathrm{p_1} = \mathrm{r}\ \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\pi \mathrm{f_0 T_e}}$ et $\mathrm{p_2} = \mathrm{r}\ \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\pi \mathrm{f_0 T_e}}$



Calculons le module de la fonction de transfert en fonction de la fréquence :

$$|\mathrm{H(f)}| = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{r}^2-2\mathrm{r}\cos(2\pi(\mathrm{f}-\mathrm{f_0})\mathrm{T_e})}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{r}^2-2\mathrm{r}\cos(2\pi(\mathrm{f}+\mathrm{f_0})\mathrm{T_e})}}$$

- Étudions le cas où les pôles sont doubles et que r est proche de 1 :

p_1=p_2 soit $2\mathrm{j}\pi \mathrm{f_0 T_e} = -2\mathrm{j}\pi \mathrm{f_0 T_e}[2\pi]$: $2\mathrm{f_0 T_e} = \mathrm{k}$ entier, soit $\mathrm{f_0} = \mathrm{k}\frac{\mathrm{F_e}}{2}$

- Si k=0, $\mathrm{f_0} = 0$; p1=p2=+ r : pôles réels positifs → filtre passe bas :

$$|\mathrm{H(0)}| = \frac{1}{1+\mathrm{r}^2-2\mathrm{r}\cos(2\pi(\mathrm{f_0})\mathrm{T_e})} = \frac{1}{1+\mathrm{r}^2-2\mathrm{r}} = \frac{1}{(1-\mathrm{r})^2}$$
$$\left|\mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{F_e}}{2}\right)\right| = \frac{1}{1+\mathrm{r}^2+2\mathrm{r}\cos(2\pi(\mathrm{f_0})\mathrm{T_e})} = \frac{1}{1+\mathrm{r}^2+2\mathrm{r}} = \frac{1}{(1+\mathrm{r})^2}$$

Avec 0<r<1, $(1-\mathrm{r})^2 < (1+\mathrm{r})^2$ et $|\mathrm{H(0)}| > \left|\mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{F_e}}{2}\right)\right|$ filtre passe bas.

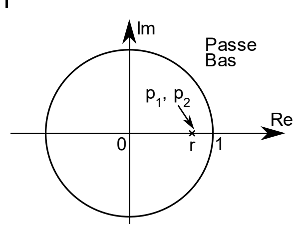
- Si k=1, $\mathrm{f_0} = \frac{\mathrm{F_e}}{2}$; p1=p2=-r : pôles réels négatifs → filtre passe haut :

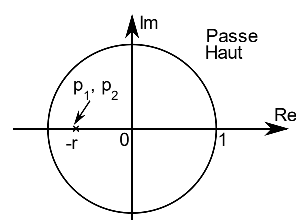
$$|\mathrm{H(0)}| = \frac{1}{1+\mathrm{r}^2-2\mathrm{r}\cos(2\pi(\mathrm{f_0})\mathrm{T_e})} = \frac{1}{1+\mathrm{r}^2+2\mathrm{r}} = \frac{1}{(1+\mathrm{r})^2}$$
$$\left|\mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{F_e}}{2}\right)\right| = \frac{1}{1+\mathrm{r}^2+2\mathrm{r}\cos(2\pi(\mathrm{f_0})\mathrm{T_e})} = \frac{1}{1+\mathrm{r}^2-2\mathrm{r}} = \frac{1}{(1-\mathrm{r})^2}$$

Avec 0<r<1, $(1+\mathrm{r})^2 > (1-\mathrm{r})^2$ et $|\mathrm{H(0)}| < \left|\mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{F_e}}{2}\right)\right|$ filtre passe haut.

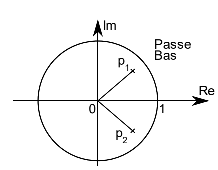
Si r est proche de 1 :

- pour $\mathrm{f_0} = 0$ le filtre est de type passe-bas avec $|\mathrm{H(0)}|$ grand (filtre sélectif) ; $\mathrm{p_1} = \mathrm{p_2} = \mathrm{r}$
- pour , $\mathrm{f_0} = \frac{\mathrm{F_e}}{2}$ le filtre est de type passe-haut avec $\left|\mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{F_e}}{2}\right)\right|$ grand (filtre sélectif) ; $\mathrm{p_1} = \mathrm{p_2} = -\mathrm{r}$

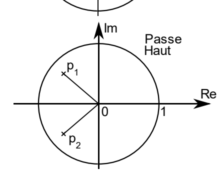




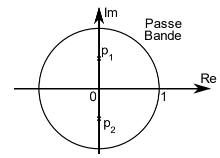
- Dans le cas de pôles quelconques :
  - nous aurons un comportement passe-bas avec $|\mathrm{H(0)}| > \left|\mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{F_e}}{2}\right)\right|$ si :
    $1+\mathrm{r}^2+2\mathrm{r}\cos(2\pi \mathrm{f_0 T_e}) > 1+\mathrm{r}^2-2\mathrm{r}\cos(2\pi \mathrm{f_0 T_e})$ soit $\cos(2\pi \mathrm{f_0 T_e}) > 0$
    p_1 et p_2 appartiennent au demi-disque droit.



  - nous aurons de la même façon un comportement passe-haut si $\cos(2\pi \mathrm{f_0 T_e}) < 0$
    p_1 et p_2 appartiennent au demi-disque gauche.



- enfin, si p_1 et p_2 se trouvent à la frontière, c'est-à-dire sur l'axe des imaginaires purs : le filtre sera de type passe-bande : $\cos(2\pi f_0 T_e) = 0$ soit $2\pi f_0 T_e = \frac{\pi}{2}$ et par suite $f_0 = \frac{1}{4T_e} = 0{,}25$ si $T_e = 1$.



<u>*Pour aller plus loin :*</u>
si *r* est proche de 1 et si l'on introduit deux zéros, l'un en z_1 = 1 et l'autre en z_2 = -1, *le numérateur de H(f) s'annule pour z=z_1 et pour z=z_2. Pour l'analyse en fréquence, nous étudions la fonctions de transfert pour* $z = e^{2j\pi f T_e}$*. Ainsi, pour* $f = 0$*, z=1=z_1 : la fonction de transfert s'annule. De même, pour* $f = \frac{F_e}{2}$ *, z=-1=z_2 : la fonction de transfert s'annule également. Le comportement est de type passe bande.*

- Reprendre le programme précédent et programmer ce nouveau filtre.
  - Prendre la valeur de f_0 qui conduit à un passe-bas et faire varier *r*. Quelles modifications cela entraîne-t-il ?
  - Prendre la valeur de f_0 qui conduit à un passe-haut. Conclusions.
  - Tester le programme pour des valeurs de f_0 intermédiaires et vérifier que *r* modifie la bande passante du filtre.
  - Pour f_0=*0,2*, faire varier *r* et observer les réponses temporelles du filtre. Conclure.
  - Quelle est la largeur de bande pour *r* proche de 1.

4) Application : détection de 0 et 1 en modulation FSK (Frequency Shift Keying)

On désire transmettre un message binaire, composé d'une suite de 0 et 1, en mode FSK :
- pour transmettre un 1, on émet un signal sinusoïdal à une fréquence f_1, durant un temps T_{ech}
- pour transmettre un 0, on émet un signal sinusoïdal de même durée, T_{ech}, à une fréquence f_2.

On donne T_{ech} = 1 ms et F_e = 100 kHz.

- Charger, à l'aide de la fonction *load*, le signal **"signal.mat"** codé par une modulation FSK, avec f_1 = 40 kHz et f_2 = 20 kHz.
- Filtrer avec le filtre d'ordre 2 pour supprimer le bruit et en déduire le signal transmis initialement.
- On tracera la fonction de transfert du filtre et les densités spectrales de puissance du signal initial et du signal filtré pour constater l'effet du filtre.
- Mêmes questions avec **"signal2.mat"** codé par modulation FSK, avec f_1 = 40 kHz et f_2 = 35 kHz.
- Étudier la réponse du filtre en fonction de *r*. Conclusion.

Aide Matlab :

- *Input :* `a=input('a= ');`
- *Zplane :* `zplane(num,den)`
- Création d'une impulsion unité et d'un échelon :
  - `imp=zeros(1,N);   imp(1)=1; %impulsion`
  - `ind=ones(1,N); %echelon`
- *Filter :* `rep_ind=filter(num,den,ind);`
- *Load :* `load signal ;`
- La longueur du signal est obtenue ainsi : `N=length(signal);`