TD n°3 : Échantillonnage

coefficient de Fourier: $C_n(f)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)e^{-j2\pi f n t}dt$ avec $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(f)e^{j2\pi f_n x}$ $f_n=\frac{n}{T}$

formule valable si la fonction $x \longrightarrow f(x)$ est périodique de période T.

$g(t) \xrightarrow{TF} G(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j2\pi f t}dt$ et $G(f) \xrightarrow{TF^{-1}} g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(f)e^{j2\pi t f}df$

Définition du produit de convolution : $x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du$

Quelques propriétés de la distribution de Dirac :
Définition : fonction qui prend une valeur infinie en 0, et la valeur 0 partout ailleurs et dont l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ vaut 1 : $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1$, de même $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt = 1$
la fonction est paire $\delta(f)=\delta(-f)$

Multiplier cette distribution $\delta(t-t_0)$ par une autre fonction g a donc pour conséquence d'obtenir quelque chose de nul en dehors de $t=t_0$, si on considère la fonction $t \longrightarrow g(t_0)$:

$\delta(t-t_0).g(t)=\delta(t-t_0).g(t_0)$ Cette expression permet donc de simplifier beaucoup de calculs et de faire apparaître des constantes que l'on peut sortir des intégrales.
On démontrera à l'aide de cela :

- La transformée de Fourier de la distribution de Dirac est 1 (toutes les fréquences présentes)
- La transformée de Fourier inverse de la fonction unité amène $\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi t f}dt$ que l'on exploite très souvent sous la forme $\delta(f-f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi t(f-f_0)}dt$ (raie à $f=f_0$)
- La distribution de Dirac est l'élément neutre de la convolution : $\delta(t)*f(t)=f(t)$
- La distribution de Dirac retardée convoluée à une fonction retarde la fonction : $\delta(t-t_0)*f(t)=f(t-t_0)$

$g(t)$	$G(f)$	$g(t)$	$G(f)$	$g(t)$	$G(f)$
$g(t-t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}G(f)$	$e^{j2\pi f_0 t}g(t)$	$G(f-f_0)$	$\delta(t)$	1
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}$	$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j}$	$g^{(n)}(t)$	$(j2\pi f)^n G(f)$
$x(t).y(t)$	$X(f)*Y(f)$	$x(t)*y(t)$	$X(f)Y(f)$	$(-j2\pi t)^n g(t)$	$G^{(n)}(f)$
$\prod_{\frac{\tau}{2}}(t)$	$T\,\mathrm{sinc}(\pi f T)$	$Ш_T(t)$	$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-\frac{n}{T})$	$\Lambda_\tau(t)$	$T\,\mathrm{sinc}^2(\pi f T)$

La Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac en domaine temporel $Ш_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$

est un peigne de Dirac $\frac{1}{T}Ш_{\frac{1}{T}}(f)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{n}{T})$ dans le domaine fréquentiel.

Démarche à suivre TD 3

Exercice 1 *Vous devez suivre les étapes suivantes pour résoudre les diverses questions :*

a) Transformée de Fourier d'un signal périodique :

1- Réciter les formule du développement en séries de Fourier d'un signal périodique.

2- Réciter la formule de la Transformée de Fourier Directe pour une fonction générique.

3- Remplacer cette fonction générique par la somme infinie.

4- Echanger les signes Somme et Intégrale puis regrouper les exponentielles.

5- Reconnaître des Distributions de Dirac avec une formule connue.

6- Enoncer le résultat final.

7- Faire les correspondances entre signal périodique temporel et signal périodique dans le domaine fréquentiel, imaginer une décomposition en série de Fourier réciproque.

b) Signal échantillonné :

1- Réciter la formule d'un signal échantillonné.

2- L'exprimer sous la forme d'un produit avec un peigne de Dirac.

3- Calculer la Transformée de Fourier de ce produit en utilisant deux résultats du TD précédent.

4- Utiliser la dernière propriété de la Distribution de Dirac sur la convolution.

5- En déduire l'allure du spectre, conclure sur le spectre obtenu et la qualité d'échantillonnage.

Exercice 2

A) Echantillonnage Parfait :

1a- Exprimer le spectre $X^*(f)$ en fonction d'une somme infinie de spectre décalé en f.

2a- L'exprimer sous la forme d'une convolution avec un peigne de Dirac.

3a- Calculer la Transformée de Fourier Inverse de cette convolution avec les Formules du TD 2

4a- Exprimer $x^{*}(t)$ sous la forme d'une somme infinie

1b- Etablir la périodicité du spectre du signal échantillonné

2b- Conclure sur le recouvrement de spectre.

A) Echantillonnage Réel :

1- Exprimer le signal moyenné sous la forme d'une intégrale calculant la moyenne.

2- En utilisant une fonction porte, transformer cette intégrale bornée en intégrale non bornée.

3- Exprimer l'échantillonnage de ce signal réel et échanger somme et intégrale.

4- Utiliser une propriété de la Distribution de Dirac pour sortir une constante de la somme

5- Reconnaître un peigne de Dirac puis un produit de convolution.