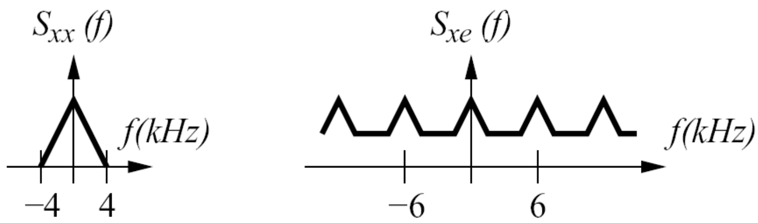
TD n°3 : Echantillonnage

Exercice 1 : échantillonnage

a) Que peut on dire de la transformée de Fourier d'un signal périodique ? En utilisant la dualité temps-fréquence pour la transformée de Fourier, que signifie le fait que la transformée de Fourier d'un signal $y(t)$ soit périodique ?

b) Soit $S_{xx}(f)$ la densité spectrale de puissance du signal $x(t)$. Le spectre $S_{xe}(f)$ obtenu après échantillonnage est représenté sur la figure suivante :



1. Déterminer la fréquence d'échantillonnage F_e utilisée.
2. Le signal a-t-il été correctement échantillonné ?

Exercice 2 : échantillonnage parfait et réel

On appelle échantillonnage d'un signal à temps continu $x(t)$ l'opération qui délivre un signal à temps discret x_n ou encore une suite numérique $\{x_n\}$ telle que :

$$x_n = x(t_n)$$

où les instants t_n sont appelés instants d'échantillonnage. L'échantillonneur est dit périodique de période T_e si $t_n = n\, T_e$. La question qui se pose est de savoir dans quelle mesure la suite $\{x_n\}$ peut correctement représenter le signal $x(t)$. Cette question est l'objet du théorème d'échantillonnage (ou théorème de Shannon) que l'on se propose d'établir pour un signal de spectre $X(f)$ à bande limitée : $|X(f)| = 0$ si $|f| > B$.

A - Échantillonnage Parfait

a) On considère le cas où le signal $x(t)$ a un spectre $X(f)$ à bande limitée. On appelle $x^*(t)$ le signal qui est tel que son spectre $X^*(f)$ soit la répétition de $X(f)$ avec la période $1/T_e \geq 2B$. Donner l'expression analytique du signal $X^*(f)$. Ce signal résulte de l'échantillonnage idéal de $x(t)$. Exprimer $x^*(t)$ en fonction des échantillons $x(t_n)$.

b) On appelle $x_E(t)$ le signal échantillonné idéal du signal $x(t)$ ainsi défini :

$$x_E(t) = x(t)\,Ш_{T_e}(t)$$

où $Ш_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_e)$ est un peigne de Dirac. Quelle condition doit-on imposer au couple $(1/T_e, B)$ pour que l'on puisse retrouver $x(t)$ à partir de $x_E(t)$ par un simple filtrage linéaire ?

B - Échantillonnage réel

Dans la pratique, on ne peut prélever $x(t)$ idéalement aux instants t_n (les dispositifs d'échantillonnage n'ayant pas un temps de réponse nul) mais on peut prélever le signal $x(t)$ sur l'intervalle $[t_n - \tau/2,\ t_n + \tau/2]$. L'échantillon obtenu est égal à la moyenne du signal durant l'intervalle de temps considéré. Soit $x_\tau^*(t)$ le signal échantillonné réel ainsi obtenu. Dans toute la suite, on considère que l'échantillonnage est périodique de période T_e ($t_n = n\,T_e$).

a) Montrer que le signal $x_\tau^*(t)$ peut s'écrire sous la forme $x_\tau^*(t) = p(t)\,Ш_{T_e}(t)$. Déterminer $p(t)$ ainsi que ses propriétés.

b) Calculer la transformée de Fourier du signal $x_\tau^*(t)$.

c) Vérifier que lorsque τ tend vers 0, on retrouve bien le spectre du signal échantillonné idéalement.