POLYTECH
SORBONNE

3ème année

Traitement du signal

TP n°1 – Analyse temporelle et échantillonnage

Préparation : *voir document réponse.*

I. Reconstruction d'un signal continu dans le domaine temporel sous Matlab

La représentation de signaux temporels sous Matlab peut être effectuée uniquement sur un intervalle de temps bien délimité, c'est-à-dire à bornes finies. Les signaux sont alors définis par N points espacés d'un intervalle de temps T_e (le « pas » d'échantillonnage) ayant chacun une valeur déterminée (ou amplitude) à un instant $t_k = k\ T_e$ avec k nombre entier allant de 0 à $N-1$ (fig. 1).

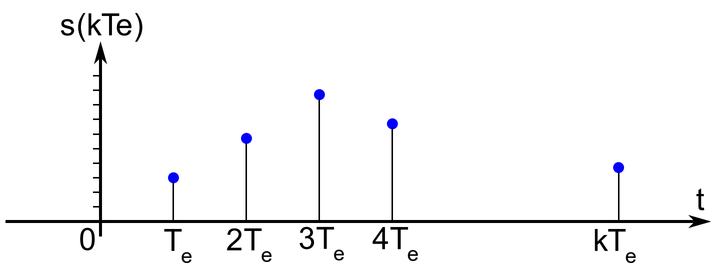

Fig.1 : Représentation temporelle d'un signal numérique

À l'aide de Matlab :

a) Représentez graphiquement en fonction du temps t le signal $S = 5 \sin(2\pi F t + 0{,}6)$ sur $N = 200$ points en prenant $F = 0{,}5$ Hz et $T_e = 10$ ms.
Combien de période(s) du signal observez-vous ?

b) En utilisant la fonction *subplot*, tracer en fonction du temps dans la même figure quatre sous-figures contenant le signal S calculé pour les fréquences 0,5 Hz, 1,5 Hz, 5 Hz et 95 Hz. A quoi le phénomène observé sur la fréquence 95 Hz est-il dû ?

II. Reconstruction d'un signal périodique par sa décomposition en série de Fourier

Un signal périodique peut également être représenté par une combinaison linéaire de signaux sinusoïdaux (série de Fourier), comme l'indique la figure 2.
Un signal périodique $x(t)$ de période T_0, c'est-à-dire de fréquence $F_0 = 1/T_0$, peut donc être décomposé en série de Fourier, c'est à dire en une somme de fonctions sinusoïdales de fréquence $n\,F_0$, multiples de F_0, sous la forme trigonométrique suivante :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos(2\pi n F_0 t) + b_n \sin(2\pi n F_0 t)\right] \qquad \text{avec} \qquad a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,\mathrm{d}t$$

et si $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos(2\pi n F_0 t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\sin(2\pi n F_0 t)\,\mathrm{d}t$$

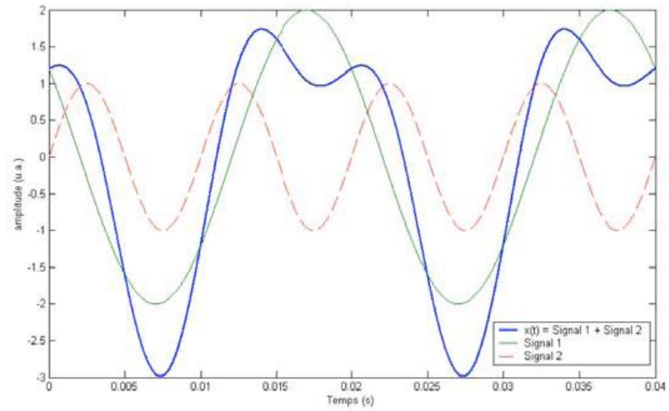

Fig.2 : Représentation temporelle d'un signal périodique par la somme de deux sinusoïdes

On peut aussi écrire : $x(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{j2\pi n F_0 t}$ avec $c_n = \displaystyle\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi n F_0 t}\,\mathrm{d}t$

Dans le cas de signaux réels, quelques propriétés ont été démontrées en cours :

- $c_{-n} = c_n^*$
- pour un signal réel et pair : $c_{-n} = c_n$ donc $b_n = 0$
- pour un signal réel et impair : $c_{-n} = -c_n$ donc $a_n = 0$

Par ailleurs, d'après le théorème de Parseval, il est possible de calculer simplement la puissance P d'un signal périodique à partir du coefficient c_n de la série de Fourier équivalente: $P = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n\right|^2$

À l'aide de Matlab :

a) En utilisant le développement en série de Fourier du signal carré ci-dessous vu dans le TD1, représentez le signal $x(t)$ sur une seule période pour un nombre d'harmoniques qui augmente progressivement, en prenant :
E = 5 V, T = 2 s, T_e = 0,01 s et a = 1/4.
On utilisera la fonction *pause* pour observer à l'écran chaque harmonique et le signal obtenu après l'addition de cet harmonique.
Examinez la contribution des différents harmoniques sur la reconstitution du signal.

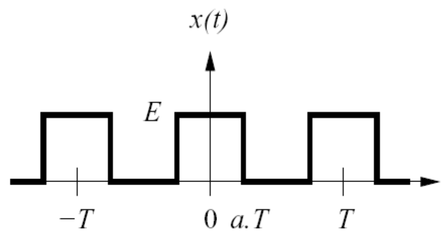

Fig.3 : Signal carré du TD1

b) Qu'observe-t-on pour un nombre d'harmoniques suffisamment grand aux points de discontinuité du signal ? Expliquez le phénomène de Gibbs.

c) Déterminer le rang n qui permet d'avoir 99 % de la puissance du signal. On vérifiera que le calcul de la puissance dans le domaine temps et dans le domaine fréquence donne bien la même valeur.

d) En prenant $E = \dfrac{1}{2aT}$, faire tendre a vers 0 pour faire apparaître un peigne de Dirac (on modifiera le paramètre T_e si nécessaire).

e) En utilisant le développement en série de Fourier du signal triangle ci-dessous vu dans le TD1, représentez le signal $x(t)$ sur une seule période pour un nombre d'harmoniques qui augmente progressivement, en prenant :
E = 5 V, T = 2 s, T_e = 0,01 s et $\tau = T/4$.

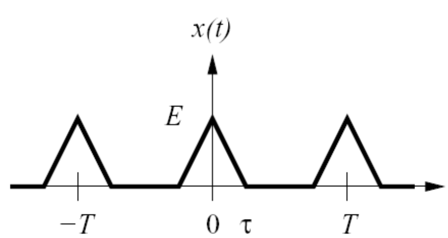

Fig.4 : Signal triangle du TD1

Aide Matlab :

- Écrire les programmes dans des fichiers (scripts). Lancer avec la commande *Run* (flèche verte)
- Utiliser des fichiers différents pour les différents exercices.
- Commencer le code par quelques commentaires qui vous rappelleront plus tard de quoi traite ce fichier.
- Écraser les anciennes variables et fermer les anciennes fenêtres grâce aux instructions suivantes :
  - clear all
  - close all
- construire une variable temporelle : ***t=0:Te:(N-1)*Te;***
- ATTENTION : ne pas utiliser la fonction sinc de Matlab ; utiliser $\frac{\sin(x)}{x}$
- utiliser la fonction subplot pour grouper certaines courbes;
- boucle for pour l'ajout d'harmoniques :

```
for i=1:n
    disp(['nombre harmoniques = ',num2str(i)])
…
end
```

- pour le calcul de la puissance dans le domaine temporel, utiliser le produit de matrices :
  ligne x colonne = nombre : $S*S'$