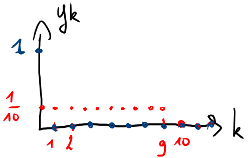
TD6 : Etude de filtres numériques.

Exercice 1 :

filtre moyenneur avec $N = 10$.

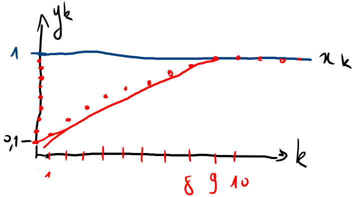
① $y_k = \frac{1}{10}\left(x_k + x_{k-1} + \cdots + x_{k-9}\right)$.

② Réponse impulsionnelle →



Stable ?
Stable car réponse impulsionnelle finie, car il existe k tq. $y_k = 0$ et reste à 0.

③ Réponse indicielle →



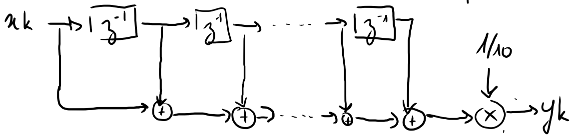
4) Fonction de transfert ?

TZ sur eq recurrence $\rightarrow$ $Y(z) = \frac{1}{10}\left(X(z) + z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) + \dots + z^{-9}X(z)\right).$

$$\hookrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{10}\left(1 + z^{-1} + \dots + z^{-9}\right).$$

5) Filtre RIF car aucun terme de récurrence (pas de dénominateur).

Schéma :



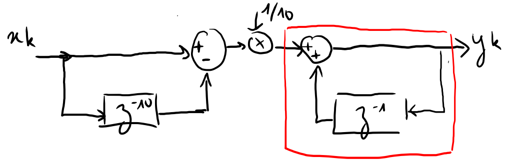
6) Somme des termes d'une suite géométrique

$$\begin{cases} 1+q+q^2+\dots+q^N = \dfrac{1-q^{(N+1)}}{1-q} \\ \downarrow \\ 1+q^{-1}+q^{-2}+\dots+q^{-N} = \dfrac{1-q^{-(N+1)}}{1-q^{-1}} \end{cases}$$

$$H(z) = \frac{1}{10}\,\frac{1-z^{-10}}{1-z^{-1}}.$$

On ne peut pas conclure sur le type de filtre.

Schéma:



$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{10}\,\frac{1 - z^{-10}}{1 - z^{-1}}$$

$$Y - z^{-1}Y = \frac{1}{10}\left(1 - z^{-10}\right)X$$

$$Y = \frac{1}{10}\left(1 - z^{-10}\right)X + z^{-1}Y$$

① Réponse en fréquence ?

On remplace z par $e^{j2\pi f T_e}$

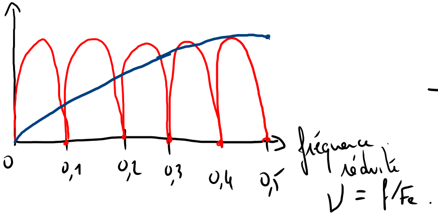
$$H(jf) = \frac{1}{10}\,\frac{1 - e^{-j2\pi f T_e 10}}{1 - e^{-j2\pi f T_e}}$$

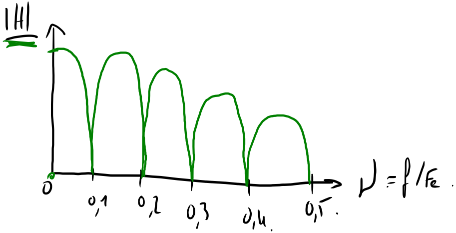
$$= \frac{1}{10}\,\frac{e^{-j2\pi f T_e 5}\left(e^{j2\pi f T_e 5} - e^{-j2\pi f T_e 5}\right)}{e^{-j\pi f T_e}\left(e^{j\pi f T_e} - e^{-j\pi f T_e}\right)}$$

$$H(jf) = \frac{1}{10}\,\underbrace{\frac{e^{-j2\pi f T_e 5}}{e^{-j\pi f T_e}}}_{e^{j\theta}}\,\frac{\sin(2\pi f T_e 5)}{\sin(\pi f T_e)} \rightarrow |H(jf)| = \frac{1}{10}\,\frac{\left|\sin(10\pi f T_e)\right|}{\left|\sin(\pi f T_e)\right|}$$

s'annule $f = \frac{N F_e}{10}$

s'annule $f = N F_e$





$$|H(jf)| = \frac{1}{10}\,\frac{|\sin(10\pi f T_e)|}{|\sin(\pi f T_e)|}$$

$|\sin(10\pi f T_e)|$ → s'annule en $f = n\frac{F_e}{10}$.

$|\sin(\pi f T_e)|$ → s'annule en $f = N F_e$.

Le filtre passe-bas cf courbe.

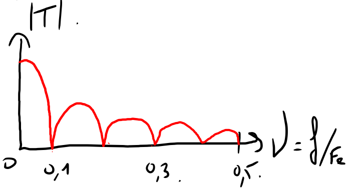
(8) BOZ → $B(j\omega) = \dfrac{1 - e^{-j\omega T_e}}{j\omega}$. avec $\omega = 2\pi f$.

$$T(jf) = B(jf)\,H(jf) = \frac{\cancel{1 - e^{-j2\pi f T_e}}}{2\pi j f}\,\frac{1}{10}\,\frac{1 - e^{-j2\pi f T_e 10}}{\cancel{1 - e^{-j2\pi f T_e}}} = \frac{e^{-j2\pi f T_e 5}\left(e^{j2\pi f T_e 5} - e^{-j2\pi f T_e 5}\right)}{2\pi j f 10}.$$

$$T(jf) = \frac{e^{-j2\pi f T_e 5}}{\pi f 10} \sin(2\pi f T_e 5) = \frac{T_e}{T_e} e^{-j2\pi f T_e 5} \frac{\sin(\pi f T_e 10)}{\pi f 10}$$

$$T(jf) = T_e \, e^{-j2\pi f T_e 5} \, \mathrm{sinc}(\pi f T_e 10)$$

$$|T(jf)| = T_e \, |\mathrm{sinc}(\pi f T_e 10)| \rightarrow \text{s'annule en } f = \frac{F_e}{10}$$



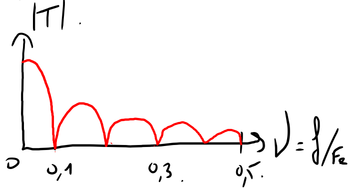
Phase

$$\mathrm{Arg}(T(jf)) = \frac{1}{10} \frac{1 - e^{-j2\pi f T_e 10}}{2\pi f}$$

$$T(jf) = \frac{e^{-j2\pi f T_e 5}}{\pi f 10} \sin(2\pi f T_e 5) = \frac{T_e}{T_e} e^{-j2\pi f T_e 5} \frac{\sin(\pi f T_e 10)}{\pi f 10}$$

$$T(jf) = T_e \, e^{-j2\pi f T_e 5} \operatorname{sinc}(\pi f T_e 10)$$

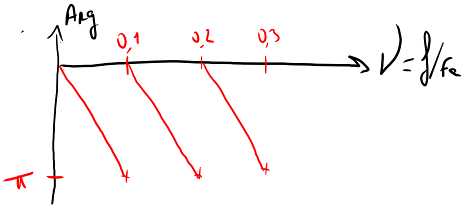
$|T(jf)| = T_e \, |\operatorname{sinc}(\pi f T_e 10)| \rightarrow$ s'annule en $f = \frac{F_e}{10}$



Phase

$$\operatorname{Arg}(T) = \frac{-10\pi f}{F_e} \; ; \; \frac{(N-1) F_e}{10} < f < \frac{N F_e}{10}$$

(À vérifier)



Exercice 2 :

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

- $a < -1$.

$a = -2 \rightarrow H(z) = \frac{Y}{X} = \frac{1}{1 + 2z^{-1}} \xrightarrow{TZ^{-1}} y_k + 2y_{k-1} = x_k.$

$y_k = x_k - 2y_{k-1}.$

réponse divergente → filtre instable.

- $-1 < a < 0$.

$a = 0,5. \rightarrow y_k = x_k - 0,5\, y_{k-1}.$

$y(0) = x(0) = 1$

$y(1) = x(1) - 0,5\, y_0 = -0,5$

$y(2) = x(2) - 0,5\, y_1 = 0,25.$

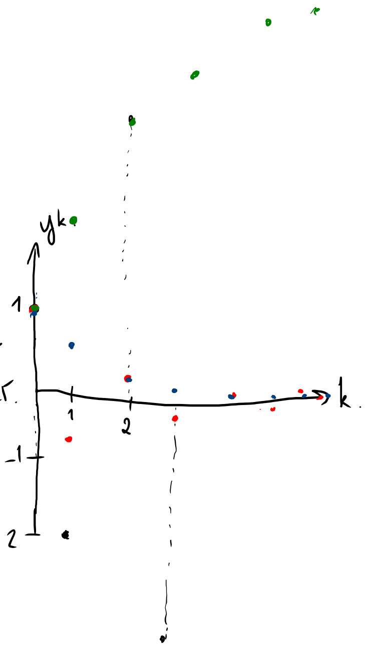
réponse convergente → filtre stable.

- $0 < a < 1$

$a = 0,5 \rightarrow y_k = x_k + 0,5\, y_{k-1}.$ convergente → filtre stable.

- $a > 1$

$a = 2 \rightarrow y_k = x_k + 2y_{k-1}.$ divergent → instable.



pôles dans le cercle unité → filtre stable.

(2) $H(z) = \dfrac{1 - b z^{-1}}{1 - a z^{-1}}$.

$$H(jf) = \frac{1 - b e^{-j2\pi f T_e}}{1 - a e^{-j2\pi f T_e}} = \frac{\cancel{e^{-j\pi f T_e}}\left(e^{j\pi f T_e} - b e^{-j\pi f T_e}\right)}{\cancel{e^{-j\pi f T_e}}\left(e^{j\pi f T_e} - a e^{-j\pi f T_e}\right)}$$

$$|H| = \sqrt{\frac{1 - 2b\cos(2\pi f T_e) + b^2}{1 - 2a\cos(2\pi f T_e) + a^2}}.$$

$|H(0)|$, $\left|H\left(\frac{F_e}{2}\right)\right|$?

$\left.\begin{array}{l} b = \frac{1}{4} \\ a = \frac{3}{4}. \end{array}\right| \; b < a.$

$$|H(0)| = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2} + (1/4)^2}{1 - \frac{3}{2} + (3/4)^2}} = \sqrt{\frac{9/16}{1/16}} = 3.$$

$$\left|H\left(\frac{F_e}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1 + 1/2 + (1/4)^2}{1 + 3/2 + (3/4)^2}} = \sqrt{\frac{25/16}{49/16}} = 5/7.$$

$|H(0)| > \left|H\left(\frac{F_e}{2}\right)\right|$ filtre passe-bas.

③ $F = \dfrac{1}{H}$. $a > b$.

$$|F(0)| = \frac{1}{|H(0)|} = \frac{1}{3}.$$

$$\left|F\left(\frac{F_e}{2}\right)\right| = \frac{1}{\left|H\left(\frac{F_e}{2}\right)\right|} = \frac{7}{5}$$

filtre passe-haut car $\left|F\left(\frac{F_e}{2}\right)\right| > |F(0)|$.

④ Général ?

- Si $b < a \rightarrow$ passe-bas.
- Si $a < b < 1/a \rightarrow$ passe-haut.
- Si $b > 1/a \rightarrow$ passe-bas.

Calcul de l'argument de T :

$$\text{Arg}(T) = \text{Arg}\left(T_e \,\text{sinc}(10\pi f T_e)\right) + \text{Arg}\left(e^{-j 2\pi f T_e 5}\right).$$

0 car réel

$$-\frac{10\pi f}{F_e}.$$

$$\text{Arg}(T) = -\frac{10\pi f}{F_e}.$$

⚠ T s'annule lorsque $f = \frac{nF_e}{10}$ donc saut de la phase sur ces valeurs.

Exercice 2 :

② $H(jf) = \dfrac{1 - b\,e^{-j2\pi f T_e}}{1 - a\,e^{-j2\pi f T_e}} = \dfrac{1 - b(\cos 2\pi f T_e + j \sin 2\pi f T_e)}{1 - a(\cos 2\pi f T_e + j\sin 2\pi f T_e)}$.

$$|H(jf)| = \sqrt{\frac{(1 - b\cos 2\pi f T_e)^2 + b^2 \sin^2 2\pi f T_e}{(1 - a\cos 2\pi f T_e)^2 + a^2 \sin^2 2\pi f T_e}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - 2b\cos 2\pi f T_e + b^2(\sin^2 2\pi f T_e + \cos^2 2\pi f T_e)}{1 - 2a\cos 2\pi f T_e + a^2(\sin^2 2\pi f T_e + \cos^2 2\pi f T_e)}}$$

donc $|H(jf)| = \sqrt{\dfrac{1 - 2b\cos 2\pi f T_e + b^2}{1 - 2a\cos 2\pi f T_e + a^2}}$