TD n°7 : Synthèse de filtres numériques

Exercice 1 :

La réponse d'un filtre analogique est donnée par la fonction de transfert suivante :

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + 2m\dfrac{p}{\omega_0} + \left(\dfrac{p}{\omega_0}\right)^2} \qquad \text{avec } m = 0{,}1 \text{ et } f_0 = \omega_0/2\pi = 50 \text{ Hz.}$$

On souhaite réaliser la synthèse d'un filtre numérique équivalent en utilisant deux méthodes :

– <u>méthode 1</u> : équivalence de la dérivation
– <u>méthode 2</u> : transformation bilinéaire

1. La fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$ est fixée à 500 Hz. Ce choix vous semble t-il justifié ?

<u>Première partie</u> : synthèse par la méthode "équivalence de la dérivation"

Soit une fonction $x(t)$ sur laquelle sont prélevés les échantillons $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Soit $y(t)$ la fonction dérivée de $x(t)$ dont les échantillons sont notés $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

2. Donner une approximation de la fonction $y(t) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ sous forme d'une relation entre x_n, x_{n-1} et y_n.

3. Appliquer la transformée en Z et en déduire la fonction $H_d(z) = Y(z)/X(z)$.

4. Montrer que le passage de la fonction de transfert $F(p)$ à la fonction de transfert en Z $F(z)$ se fait en remplaçant p par $(1 - z^{-1})/T_e$.

5. Avant de calculer l'équation de récurrence du filtre, évaluer le nombre de retards nécessaires.

6. Montrer que l'équation de récurrence s'écrit : $y_n = 1{,}398\, y_{n-1} - 0{,}658\, y_{n-2} - 0{,}260\, x_n$.

7. Calculer les premiers termes de la réponse impulsionnelle. Le filtre est-il stable ?

8. S'agit-il d'un filtre RIF ou RII ? Le filtre est-il purement régressif ?

9. Retrouver la valeur finale en sortie lorsque l'entrée est un échelon.

10. Quelle est la fonction de transfert $F_e(j\omega)$ du filtre échantillonné ?

11. Proposer un schéma de réalisation du filtre.

Deuxième partie : synthèse par la méthode "transformation bilinéaire"

Soit une fonction $x(t)$ sur laquelle sont prélevés les échantillons x_1, x_2, …, x_n. Soit $y(t)$ l'intégrale de $x(t)$ dont les échantillons sont notés y_0, y_1, ..., y_n.

12. Donner une approximation de la fonction $y(t) = \int_0^t x(u)\,\mathrm{d}u$ sous forme d'une relation entre y_n, y_{n-1}, x_n et x_{n-1}.

13. Appliquer la transformée en Z et en déduire la fonction $H_i(z) = Y(z)/X(z)$.

14. Montrer que l'opération d'intégration consiste à remplacer p par $\dfrac{2\,(1-z^{-1})}{T_e\,(1+z^{-1})}$.

15. Montrer que la relation de récurrence du filtre s'écrit :

$$y_n = 1{,}552\ y_{n-1} - 0{,}892\ y_{n-2} + 0{,}085\ (x_n + 2\ x_{n-1} + x_{n-2}).$$

16. Calculer les premiers termes de la réponse impulsionnelle. Le filtre est-il stable ?

17. S'agit-il d'un filtre RIF ou RII ? Le filtre est-il purement régressif ?

18. Retrouver la valeur finale en sortie lorsque l'entrée est un échelon.

19. Proposer un schéma de réalisation du filtre.

Exercice 2 :

A partir du gabarit idéal d'un filtre passe-bas (transmission idéale en bande passante, atténuation totale en bande atténuée), on souhaite réaliser un filtre numérique en utilisant la synthèse par série de Fourier. La fréquence de coupure est fixée à B = 50 Hz et la fréquence d'échantillonnage vaut $F_e = 1/T_e$ = 500 Hz. On souhaite limiter la réponse impulsionnelle à 15 échantillons.

1. Représenter la réponse fréquentielle en amplitude $H(f)$ du filtre passe-bas idéal.

2. Calculer la transformée de Fourier inverse de $H(f)$.

3. Représenter la réponse impulsionnelle du filtre. Caractériser cette réponse (causalité, réponse finie ou infinie).

4. Effectuer l'opération la plus simple permettant de rendre cette réponse finie (sur 15 échantillons) et causale. Quelle sera la conséquence de cette opération sur la réponse fréquentielle du filtre ?

5. Calculer les valeurs numériques de la réponse impulsionnelle. Donner l'équation de récurrence du filtre. Proposer un schéma de réalisation du filtre.

6. Donner les premiers termes de la réponse indicielle du filtre et la représenter.