POLYTECH SORBONNE

3ème année

Traitement du signal

TP n°3 – Corrélation, convolution, modulation et sous-échantillonnage

Préparation : *voir document réponse.*

I. Corrélation de signaux

1) Autocorrélation

L'autocorrélation réalise une comparaison entre un signal $x(t)$ et ses copies retardées (étude de ressemblance d'un signal avec lui-même au cours du temps). Elle est caractérisée par la fonction $C_{xx}(\tau)$ définie par la relation suivante pour les signaux :

- à énergie finie : $C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, \mathrm{d}t$ en $\mathrm{V}^2\,\mathrm{s}$ ($C_{xx}(0)$ = énergie du signal)
- à puissance finie : $C_{xx}(\tau) = \lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, x^*(t-\tau)\, \mathrm{d}t$ en V^2 ($C_{xx}(0)$ = puissance du signal)

Remarques :

- $|C_{xx}(\tau)| \leq C_{xx}(0)$
- si $x(t)$ est un signal périodique, la fonction $C_{xx}(\tau)$ est périodique de même période.
- si $x(t)$ est un signal réel, $C_{xx}(\tau)$ est paire.

La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation permet de calculer (théorème de Wiener-Kintchine) :

- la densité spectrale d'énergie (DSE) pour les signaux à énergie finie :

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xx}(\tau)\, \mathrm{e}^{-j2\pi f\tau}\, \mathrm{d}\tau = |X(f)|^2 \quad (\text{en } \mathrm{V}^2\,\mathrm{s}^2)$$

- la densité spectrale de puissance (DSP) pour les signaux à puissance finie :

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xx}(\tau)\, \mathrm{e}^{-j2\pi f\tau}\, \mathrm{d}\tau = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} |X(f)|^2 \quad (\text{en } \mathrm{V}^2 / \mathrm{Hz})$$

2) Intercorrélation

L'intercorrélation compare un signal $x(t)$ et un signal $y(t)$ retardé. Elle permet de mesurer la similitude entre ces deux signaux. Elle est caractérisée par la fonction $C_{xy}(\tau)$ définie par la relation suivante pour les signaux :

- à énergie finie : $C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t-\tau)\, \mathrm{d}t$
- à puissance finie : $C_{xy}(\tau) = \lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, y^*(t-\tau)\, \mathrm{d}t$

La transformée de Fourier de la fonction d'intercorrélation permet de calculer :

- la densité spectrale croisée d'énergie pour les signaux à énergie finie :

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xy}(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau = X(f)\, Y^*(f) \text{ (en V}^2\text{ s}^2\text{)}$$

- la densité spectrale croisée de puissance pour les signaux à puissance finie :

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xy}(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} X(f)\, Y^*(f) \text{ (en V}^2\text{ / Hz)}$$

3) Convolution

Le produit de convolution est une multiplication de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$. Il permet de représenter la déformation du signal $x(t)$ sous l'influence du second signal $y(t)$ retardé. Le produit de convolution est l'opération naturelle qui permet d'exprimer le signal de sortie d'un SLIT à partir de sa réponse impulsionnelle et du signal d'entrée. Il se définit de la façon suivante pour des signaux à énergie finie :

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y^*(t-\tau)\, d\tau$$

4) Fonction *xcorr* de Matlab

Pour calculer la fonction d'intercorrélation de deux signaux définis sur N points, on utilisera la fonction *xcorr* qui donne la fonction $C_{xy}(\tau)$ sur $2N$-1 points correspondant à des valeurs de τ comprises entre $-(N-1)\, T_e$ et $(N-1)\, T_e$:

- *xcorr*(*x*, *y*) calcule $\sum_{i=m+1}^{N} x(i)\, y^*(i-m) = \sum_{i=1}^{N-m} x(i+m)\, y^*(i)$ pour m compris entre $-(N-1)$ et $N-1$
- *xcorr*(*x*, *y*, 'biased') calcule $\frac{1}{N}$ *xcorr*(*x*, *y*)
- *xcorr*(*x*, *y*, 'unbiased') calcule $\frac{1}{N-m}$ *xcorr*(*x*, *y*)

La fonction d'autocorrélation du signal *x* se calcule par *xcorr(x)* ou *xcorr(x,x)*.

5) Travail pratique

On travaillera sur des signaux de N = 256 points et une fréquence d'échantillonnage F_e = 512 Hz.

a) autocorrélation d'une fonction sinusoïdale

On considère le signal $x_1(t) = a \cos(2\pi f_1 t)$ avec $a = 2$ V et $f_1 = 10{,}5$ Hz.

- Calculer et visualiser la fonction de corrélation $C_{x_1x_1}(\tau)$ en positionnant correctement le temps $\tau = 0$.

  On tracera sur la même figure les fonctions calculées
  - sans l'option *biased* de *xcorr*.
  - avec l'option *biased* de *xcorr*.
  - avec l'option *unbiased* de *xcorr*.
  - Tracer également sur la même figure la fonction d'autocorrélation théorique $C_{x_1x_1}(\tau) = \frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_1 \tau)$
  - Comparer les résultats.

Par la suite, <u>on utilisera l'option *unbiased* de *xcorr* dans les calculs.</u>

b) intercorrélation de deux fonctions sinusoïdales

On considère maintenant le signal $x_2(t) = \cos(2\,\pi\, f_2\, t + \pi/4)$ avec $f_2 = 60$ Hz.

- Calculer (à l'aide de Matlab) et visualiser la fonction d'intercorrélation $C_{x_1 x_2}(\tau)$.
- Conclusion ?

c) autocorrélation d'un bruit

On considère le bruit gaussien généré par la commande $x = randn(1,N)$ et le signal issu du filtrage de x par la commande $xf = filtrage\_reel(x,1/Fe,N,50)$.

- Tracer dans une figure les signaux x et xf et dans une autre figure leurs fonctions d'autocorrélation.

Le signal x est un bruit blanc, sa fonction d'autocorrélation est un Dirac (indépendance des points d'abscisses temporelles différentes).

- Est-ce le cas pour le signal filtré xf ? Pourquoi ?

d) intercorrélation d'une fonction sinusoïdale et d'un bruit

On considère le signal $x_1 = \cos(2\,\pi\, f_1\, t)$ de fréquence $f_1 = 10$ Hz et le signal $x_2 = 0.1\cos(2\,\pi\, f_1\, t + \pi/6) + \mathrm{randn}(1,N)$ issu de la transmission très bruitée du signal x_1.

- Tracer le signal x_2 pour constater qu'il est impossible d'identifier la sinusoïde contenue dans le signal x_2.
- Montrer ensuite que la fonction d'intercorrélation des signaux x_1 et x_2 permet de remonter à la fréquence f_1.

e) intercorrélation de deux bruits décalés en temps

Charger successivement les deux signaux *x.mat* et *y.mat* par l'instruction « *load* » (exemple : *load x*). Ces deux signaux de 256 points sont issus de 2 capteurs espacés d'une distance connue dans une canalisation et mesurant donc le même écoulement avec un décalage temporel.

- Tracer les deux signaux et essayer d'estimer le retard du signal *y.mat* sur le signal *x.mat*.
- Montrer ensuite que la fonction d'intercorrélation de ces deux signaux permet de déterminer précisément ce retard et permet donc de remonter à la vitesse de l'écoulement.

f) lien entre la fonction de corrélation et la DSP

$$
\begin{tikzcd}
\underline{\text{domaine temps}} & & \underline{\text{domaine fréquence}} \\
x(t) \arrow[rr, "T.\,Fourier"] \arrow[d] & & X(f) \arrow[d] \\
C_x(\tau) \arrow[rr, "T.\,Fourier"] & & S_x(f)
\end{tikzcd}
$$

- Vérifier, pour le signal $x(t) = a\cos(2\,\pi\, f_1\, t)$ avec $a = 2$ V et $f_1 = 10{,}5$ Hz, que sa DSP est bien la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation.

Du fait de la structure spécifique utilisée par Matlab pour stocker les fonctions de corrélation, on utilisera les lignes de code suivantes pour calculer la transformée de Fourier de $C_x(\tau)$:

```
cx=xcorr(x,'biased'); % divise xcorr par N %
c=cx(N:2*N-1);          % on ne garde que la partie droite (tau>0) de xcorr
C=fft(c,N)*Te;          % FFT de la partie droite de xcorr
T_Fourier_Cx=2*real(C)-Te*c(1);
```

II. Modulation et démodulation de signaux

a) Visualiser le signal $x_1(t)$ précédent modulé en amplitude avec porteuse, $(1 + x_1) \cos 2\pi f_p t$, et sans porteuse, $x_1 \cos 2\pi f_p t$, avec la fréquence $f_p = 70$ Hz.

b) Effectuer l'analyse spectrale de ces signaux. Quelle est la fréquence limite f_p de la porteuse ?

c) On désire démoduler les signaux obtenus précédemment : pour cela, on multiplie à nouveau chaque signal modulé par le signal $\cos 2\pi f_p t$.

- Représenter le spectre des signaux après démodulation.
- Que faut-il faire pour retrouver $x_1(t)$?
- Visualiser les signaux démodulés et leurs spectres.
- En déduire la nouvelle fréquence limite f_p.

d) Filtrer chaque signal démodulé par le filtre défini par la fonction « *filtrage_reel* » : si $e(t)$ et $s(t)$ sont l'entrée et la sortie du filtre : *s* = *filtrage_reel* (*e*, T_e, *Nombre_points_signal_e*, *fréquence_coupure*).

- Représenter les signaux ainsi filtrés.

e) On désire traiter les signaux « s_1 » et « s_2 » définis sur 2048 points ($T_e = 1/512$ s) que l'on chargera successivement par l'instruction « *load* » (exemple : *load* s_1). Le but du traitement est de transmettre sur un même canal ces deux signaux en faisant en sorte que la bande utile de « s_1 » (de bande de fréquence [0-5 Hz]) occupe, durant la transmission, la bande [30-40 Hz] et que la bande utile de « s_2 » (de bande de fréquence [0-5 Hz]) soit transmise entre 90 et-100 Hz.

- Déterminer et réaliser l'ensemble des opérations à effectuer.

III. Echantillonnage et sous échantillonnage

a) Construire le signal $x(t)$ constitué de la somme d'un bruit blanc gaussien centré réduit (obtenu avec la fonction « *randn* ») et d'une sinusoïde d'amplitude 1 V et de fréquence 60 Hz ($N = 2048$, $T_e = 1/512$ s).

- Visualiser le signal et sa DSP.

b) Construire le signal $y(t)$ en prélevant 1 échantillon sur 8 du signal $x(t)$ à l'aide de l'ordre "*y=x(1:8:end);*".

- Quelle est la période d'échantillonnage de $y(t)$ et sa résolution en fréquence ?
- Après avoir visualisé le signal $y(t)$ et sa DSP, expliquer pourquoi une telle pratique modifie l'information contenue dans le signal $x(t)$.

c) Construire le signal $z(t)$ en prélevant 1 échantillon sur 8 du signal résultant du filtrage du signal $x(t)$ par la fonction « *filtrage_reel* » précédemment définie.

- Mêmes questions.
- Vérifier que les DSP de $x(t)$ et $z(t)$ sont identiques sur la plage [0-32 Hz].