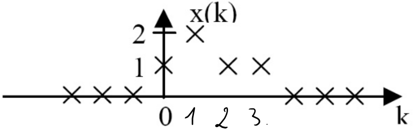
TD4 : Transformée de Fourier Discrète

Exercice 1.

$F_e = 1\,Hz \rightarrow T_e = 1\,s$



① TFD sur 4 points ?

$$X(n) = T_e \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

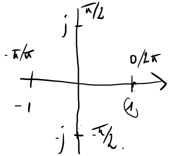
$$= \sum_{0}^{3} x(k) e^{-j2\pi \frac{kn}{4}}$$

$$= \sum_{0}^{3} x(k) \left(e^{-j2\pi \frac{n}{4}}\right)^k$$

$$X(n) = x(0)\left(e^{-j2\pi \frac{n}{4}}\right)^0 + x(1)\left(e^{-j2\pi \frac{n}{4}}\right)^1 + x(2)\left(e^{-j2\pi \frac{n}{4}}\right)^2 + x(3)\left(e^{-j2\pi \frac{n}{4}}\right)^3.$$

$$X(n) = 1 + 2e^{-j2\pi \frac{n}{4}} + \left(e^{-j2\pi \frac{n}{4}}\right)^2 + \left(e^{-j2\pi \frac{n}{4}}\right)^3.$$

② $n = \{0, 1, 2, 3\}$.



$e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$

$e^{-j\pi} = -1$

$e^{-j\frac{3\pi}{2}} = j$

$e^{-j2\pi} = 1$

$$\left[\begin{array}{l} X(0) = 1 + 2 + 1 + 1 = 5 \\ X(1) = 1 - 2j + (-j)^2 + (-j)^3 = 1 - 2j - 1 + j = -j \\ X(2) = 1 - 2 + (-1)^2 + (-1)^3 = -1 \\ X(3) = 1 + 2j + (+j)^2 + (j)^3 = j \end{array}\right.$$

$X(4) = 1 + 2 + 1 + 1 = 5 = X(0)$.

③

$X(4) = X(0) = X(4-0) = X^*(0)$. $N = 4$

$X(4-1) = X(3) = X^*(1)$.

$X(4-2) = X(2) = X^*(2)$

$X(N-p) = X^*(p)$, valable uniquement si $x(k)$ est réel.

Exercice 2 :

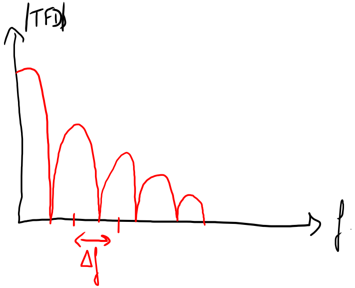
$F_e = 10\ kHz$ et $N = 1024$.

① Si fréquence $> \frac{F_e}{2}$, alors repliement spectral

② Intervalle entre $X(p)$ et $X(p+1) = \Delta f$.

On sait que la TFD à N points en temporel donne N raies en fréquentiel dans l'intervalle $]0; F_e[$.

$$\Delta f = \frac{F_e}{N}$$



Application : $\Delta f = \frac{10\,000}{1024} = 9,7\ Hz$

(3) $$X(N-p) = Te \sum_{0}^{N-1} x(k)\, e^{-j2\pi\frac{(N-p)k}{N}}$$

$$= Te \sum_{0}^{N-1} x(k) \underbrace{e^{-j2\pi\frac{N k}{N}}}_{1} e^{j2\pi\frac{kp}{N}}$$

$$= Te \sum_{0}^{N-1} x(k)\, e^{j2\pi\frac{kp}{N}}$$

si $x(k)$ est réel, $x(k) = x^*(k)$ et on a également $e^{j\theta} = \left(e^{-j\theta}\right)^*$

$$X(N-p) = Te \sum_{0}^{N-1} x^*(k) \left(e^{-j2\pi\frac{kp}{N}}\right)^*$$

$$= \Big(\underbrace{Te \sum_{0}^{N-1} x(k)\, e^{-j2\pi\frac{kp}{N}}}_{X(p)}\Big)^*$$

$\hookrightarrow$ $X(N-p) = X^*(p)$ si $x(k)$ est réel.

Exercice 3 : x_k périodique sur N points $\Rightarrow x_{k+N} = x_k$.

$$X_{2N}(n) = T_e \sum_{0}^{2N-1} x_k e^{-j2\pi\frac{nk}{2N}}$$

$$= T_e \sum_{0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi\frac{nk}{2N}} + T_e \sum_{N}^{2N-1} x_k e^{-j2\pi\frac{nk}{2N}}$$

chgt de variable.

$k' = k - N \Rightarrow \begin{cases} k = N \rightarrow k' = 0. \\ k = 2N-1 \rightarrow k' = N-1. \end{cases}$

$k = k' + N.$

$$= T_e \sum_{0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi\frac{nk}{2N}} + T_e \sum_{0}^{N-1} x_{k'+N} e^{-j2\pi\frac{n(k'+N)}{2N}}$$

$$= T_e \sum_{0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi\frac{nk}{2N}} + T_e \sum_{0}^{N-1} x_{k'} e^{-j2\pi\frac{nk}{2N}}$$

$e^{-j\cancel{2}\pi\frac{n\cancel{N}}{\cancel{2N}}}$. $e^{-j\pi n} = \left(e^{-j\pi}\right)^n = (-1)^n$.

$$= T_e \sum_{0}^{N-1} x_k e^{-2\pi j\frac{nk}{2N}} \left(1 + (-1)^n\right).$$

- n impair
  $\hookrightarrow (-1)^n = -1 \Rightarrow X_{2N}(n) = 0$
- n pair
  $\hookrightarrow (-1)^n = 1 \Rightarrow X_{2N}(n) = 2T_e \sum_{0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi\frac{n}{2}\frac{k}{N}} = 2X_{1N}\left(\frac{n}{2}\right).$

Donc utiliser 2 périodes, n'amène pas plus d'informations seulement plus d'énergie.