TD 1 :

Exercice 1 :

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + 2m\frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f_0 = \omega_0 2\pi = 50 \text{ Hz} \\ m = 0,1 \end{cases}$$

① $F_e = 500$ Hz ? Bon choix car on peut travailler jusqu'à 250 Hz et ici $f_0 = 50$ Hz.

Partie 1 :

② cf cours → $y_N = \frac{x_N - x_{N-1}}{T_e}$

③ (cours) TZ → $Y = X\frac{1 - z^{-1}}{T_e}$ donc $H_d = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$.

④ cf cours.

⑤ nb retards ?

F est du 2^{nd} ordre → p^2 sera remplacé par $\left(\frac{1-z^{-1}}{T_e}\right)^2$ donc 2 retards (terme en z^{-2}).

⑥ $$F(z) = \frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0}\left(\frac{1-z^{-1}}{T_e}\right) + \frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{1-z^{-1}}{T_e}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0 T_e} - \frac{2m}{\omega_0 T_e} z^{-1} + \frac{1}{\omega_0^2 T_e^2}\left(1 - 2z^{-1} + z^{-2}\right)}$$

donc $$F(z) = \frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0 T_e} + \frac{1}{\omega_0^2 T_e^2} - z^{-1}\left(\frac{2m}{\omega_0 T_e} + \frac{2}{\omega_0^2 T_e^2}\right) + z^{-2}\frac{1}{\omega_0^2 T_e^2}}$$

Application Numérique.

$$F(z) = \frac{0,26}{1 - 1,398 z^{-1} + 0,658 z^{-2}} \rightarrow Y(1 - 1,398 z^{-1} + 0,658 z^{-2}) = 0,26 X.$$

TZ^{-1} $$y_n - 1,398\, y_{n-1} + 0,658\, y_{n-2} = 0,26 x_n \rightarrow y_n = 0,26\, x_n + 1,398\, y_{n-1} - 0,658\, y_{n-2}$$

7) $y_0 = 0,26$

$y_1 = (0,26)(1,398)$.

$y_2 = (0,26)(1,398)^2 - (0,658)(0,26)$ etc.

Stable ?

calcul des poles.

$$\Delta = (-1,398)^2 - 4 \times 0,658 = -0,68 \rightarrow p_{1,2} = \frac{1,398 \pm i\sqrt{0,68}}{2}$$

$$\|p_{1,2}\| = \sqrt{\frac{1,398^2 + (\sqrt{0,68})^2}{2}} \simeq 0,811 < 1 \quad \text{donc filtre stable.}$$

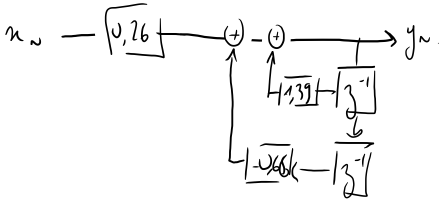
8) filtre RII - purement recursif (y_n ne dépend pas de x_{n-k}, $k>0$).

9) Supposons $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 1$, sachant que $x_n = 1 \ \forall n \geq 0$.

alors $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = 1,398 - 0,658 + 0,26 = 0,99 \sim \underline{1}$ donc on a bien $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = 1$.

(10) $$H(z)\Big|_{z=e^{j\omega T_e}} = \frac{0,26}{1 - 1,398\, e^{-j\omega T_e} + 0,658\, e^{-2j\omega T_e}}$$

(11) Réalisation (Schéma).



Partie 2 :

12) cf cours $y_n = y_{n-1} + \frac{x_n + x_{n-1}}{2} T_e$.

13) TZ $Y = Y z^{-1} + X \frac{1+z^{-1}}{2} T_e$. donc $H = \frac{Y}{X} = \frac{T_e}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$.

14) (cf cours)

15) $$F(z) = \frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0}\frac{T_e}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{T_e^2}{4}\left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)^2} = \frac{(1-z^{-1})^2}{(1-z^{-1})^2 + \frac{mT_e}{\omega_0}(1+z^{-1})(1-z^{-1}) + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{T_e}{4}(1+z^{-1})^2}$$

$$= \frac{1 + z^{-2} - 2z^{-1}}{1 + z^{-2} - 2z^{-1} + \frac{mT_e}{\omega_0}(1 + z^{-1} - 1 - z^{-2}) + \frac{T_e}{4\omega_0^2}(1 + z^{-2} + 2z^{-1})}$$

donc $$F(z) = \frac{0{,}055(1 + z^{-2} - 2z^{-1})}{1 - 1{,}552 z^{-1} + 0{,}89 z^{-2}}.$$

$$Y(1-1{,}55\,z^{-1}+0{,}89\,z^{-2}) = X(1+z^{-2}-2z^{-1})\,0{,}085.$$

$$TZ^{-1} \quad y_n = 0{,}085(x_n + x_{n-2} - 2x_{n-1}) + 1{,}55\,y_{n-1} - 0{,}89\,y_{n-2}.$$

(16) $y_0 = 0{,}085.$

$y_1 = 1{,}55\,(0{,}085) + 0{,}085 \times 2.$

$y_2 = (1{,}55)^2(0{,}085) + (1{,}55)(0{,}085 \times 2) - 0{,}89\,(0{,}085.)$ etc.

<u>Stable ?</u> pôles.

$$\Delta = (-1{,}55)^2 - 4 \times 0{,}89 = -1{,}16 \qquad p_{1,2} = \frac{1{,}55 \pm i\sqrt{1{,}16}}{2}.$$

$$\|p_{1,2}\| = \sqrt{\frac{(1{,}55)^2 + (\sqrt{1{,}16})^2}{2}} = 0{,}944 < \underline{1} \quad \text{donc stable.}$$

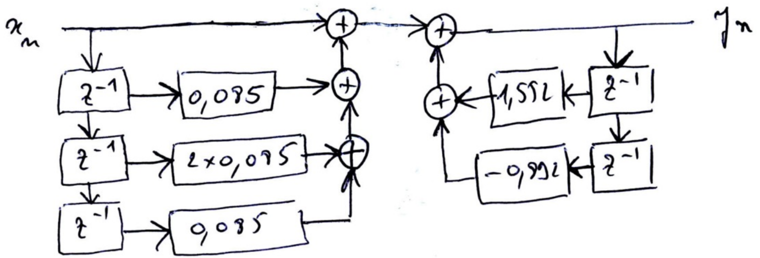
(17) filtre RII - filtre regressif (pas purement regressif car y_n dépend de x_{n-1} et x_{n-2}).

(18) Supposons $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$, $x_n = 1$ $\forall n \geq 0$.

alors $\lim_{n\to\infty} y_n = 1{,}55 - 0{,}89 + 0{,}085 \times 4 = 1$.

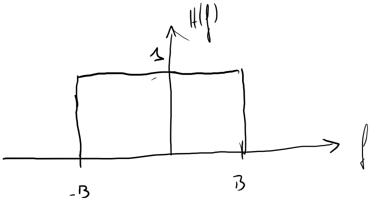
on a bien $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$.

(19)



Exercice 2 :

①



$B = 50\ Hz$

$F_e = 500\ Hz$

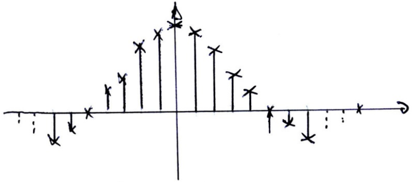
② $$h(n) = \frac{1}{F_e}\int_{-\infty}^{+\infty} H(f)\, e^{j2\pi f n T_e}\, df = \frac{1}{F_e}\int_{-B}^{B} e^{j2\pi f n T_e}\, df = \frac{1}{F_e}\left(\frac{e^{j2\pi n f T_e}}{j2\pi n T_e}\right)_{-B}^{B}$$

$$h(n) = \frac{1}{\cancel{F_e}}\,\frac{1}{\pi n \cancel{T_e}}\,\frac{e^{j2\pi n B T_e} - e^{-j2\pi n B T_e}}{2j} = \frac{1}{\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{10}\right)$$

BT_e 1/10

$$h(n) = \frac{2}{10}\,\frac{\sin\left(\frac{2}{10}\pi n\right)}{\frac{2}{10}\pi n} \text{ donc } h(n) = \frac{1}{5}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi n}{5}\right).$$

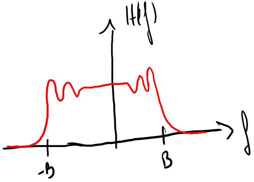
③ $h(0) = 0{,}2$
$h(1) = 0{,}187$
$h(2) = 0{,}151$
$h(3) = 0{,}100$
$h(4) = 0{,}0468$
$h(5) = 0$
$h(6) = -0{,}031$
$h(7) = -0{,}037$



et $h(-n) = h(n) \ \forall n$

④ Troncature → on conserve de $h(-7)$ à $h(7)$ → décalage de $7T_e$.

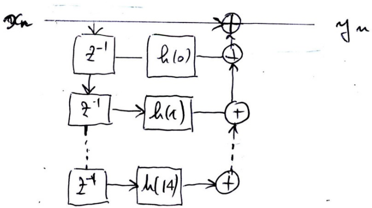
En fréquentiel :



Réponse impulsionnelle

⇒
$h(0) = -0{,}037$ $h(1) = -0{,}031$ $h(2) = 0$ $h(3) = 0{,}0468$
$h(4) = 0{,}100$ $h(5) = 0{,}151$ $h(6) = 0{,}187$ $h(7) = 0{,}2$
$h(8) = 0{,}187$ $h(9) = 0{,}151$ $h(10) = 0{,}100$ $h(11) = 0{,}0468$
$h(12) = 0$ $h(13) = -0{,}031$ $h(14) = -0{,}037$

⑥ Equation de recurrence $y_n = \sum_{k=0}^{14} h(k)\, x(n-k)$.



⑦ Réponse indicielle. $x_n = 1$ $n \geq 0$.

$y_0 = h_0$.

$y_1 = h_0 + h_1$

$y_2 = h_0 + h_1 + h_2$.

etc

$\rightarrow$ $y_{15} = \sum_{0}^{14} h(k) \sim 1$ donc $y_n \sim 1$ si $n \geq 14$.