、

Cálculo vectorial

Julián Uribe Castañeda

Universidad Pontificia Bolivariana

Cálculo vectorial

Julián Uribe Castañeda

Agradecimientos

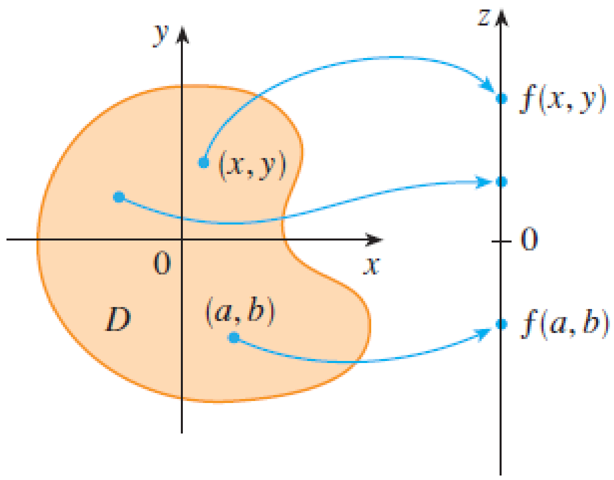
Índice general

Capítulo 1

Funciones de varias variables

1.1. Definiciones y ejemplos básicos

Definición 1.1.1 ***(Función):*** *Sean A y B conjuntos no vacíos. Entonces una función f de A en B es una relación entre A y B, tal que cada $x \in A$ está relacionado con un único elemento $f(x) \in B$.*

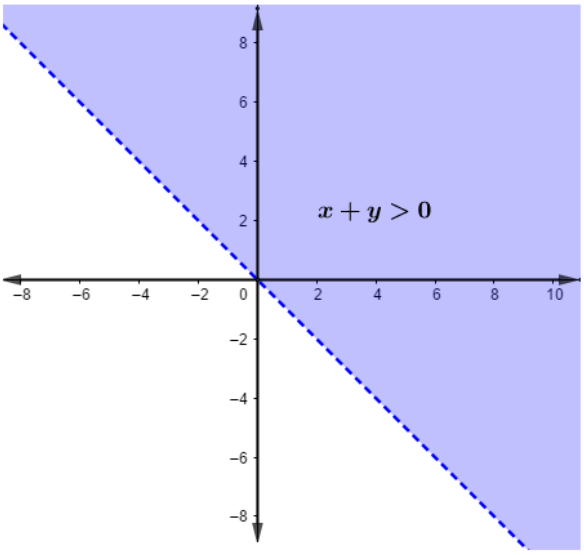


- *En este caso denotamos esta función por $f : A \longrightarrow B$ con $x \mapsto f(x) = y$.*
- *El conjunto A es llamado el dominio de la función $f : A \longrightarrow B$.*
- *El conjunto B es llamado el codominio de la función $f : A \longrightarrow B$.*
- *El rango de $f : A \longrightarrow B$ es el conjunto $\{f(x) \in B : x \in A\}$.*

Nota: En este capítulo trabajaremos con funciones $f : A \longrightarrow B$ con A y B subconjuntos de espacios euclídeos. Es decir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B = \mathbb{R}^m$.

Ejemplo 1.1.1 *Sea* $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por* $F(x,y) = (xy, ln(x+y), cos x)$*. Hallar el* $Dom(f) = A$*.*

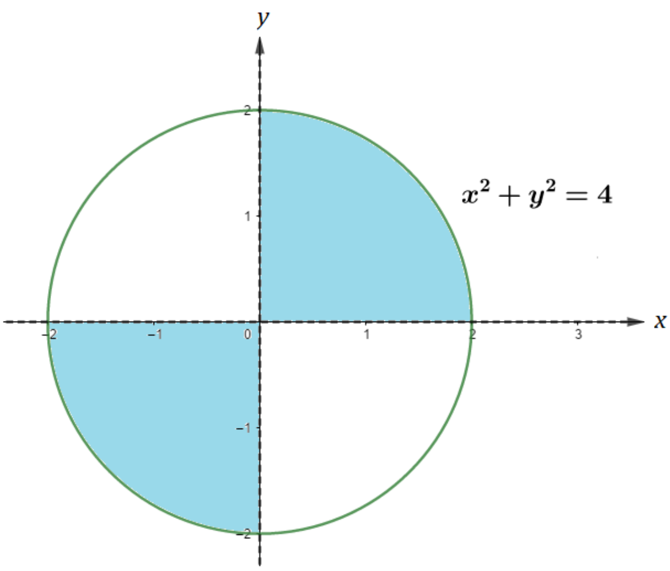
Solución: *En este caso el dominio es el conjunto de puntos* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $x + y > 0$*. Es decir* $Dom(F) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$*.*



Ejemplo 1.1.2 *Sea* $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por* $F(x,y) = (\sqrt{4 - x^2 - y^2}, ln(xy), sin x)$*. Hallar el* $Dom(f) = A$*.*

Solución: *En este caso el dominio es el conjunto de puntos* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *los cuales satisfacen que* $4 - x^2 - y^2 \geqslant 0$ *y* $xy > 0$*. Lo cual equivale a tener que*

$$Dom(F) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4 \ \ y \ \ x,y > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4 \ y \ x,y < 0\}.$$



Ejemplo 1.1.3 *Sea* $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por* $F(x,y) = \left(1, cos^{-1}\left(\frac{x}{x+y}\right), x^2+y\right)$. *Hallar el* $Dom(f) = A$.

Solución: *En este caso el dominio es el conjunto de puntos* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *los cuales satisfacen que* $\left|\frac{x}{x+y}\right| \leqslant 1$ *con* $x+y \neq 0$. *De esta forma tenemos que:*

$$\left|\frac{x}{x+y}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(x+y)^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow x^2 \leqslant (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant 2xy+y^2.$$

$$\left|\frac{x}{x+y}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant 2xy+y^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant y(2x+y).$$

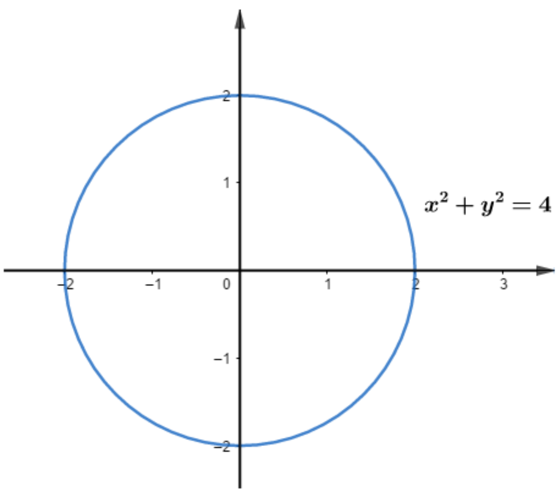
Por lo tanto tenemos que $y, 2x+y \geqslant 0$ *ó* $y, 2x+y \leqslant 0$. *De esta manera, tenemos que si definimos los conjuntos:*

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq 0,\ \ y, 2x+y \geqslant 0\}.$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq 0,\ \ y, 2x+y \leqslant 0\}.$$

Entonces $Dom(f) = B \cup C$.

Ejemplo 1.1.4 *Sea* $F : [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por* $F(\theta) = (2cos\theta, 2sin\theta)$. *Describir el rango de* F.

Solución: $Rango(F) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}$ *(Recordar las coordenadas polares).*



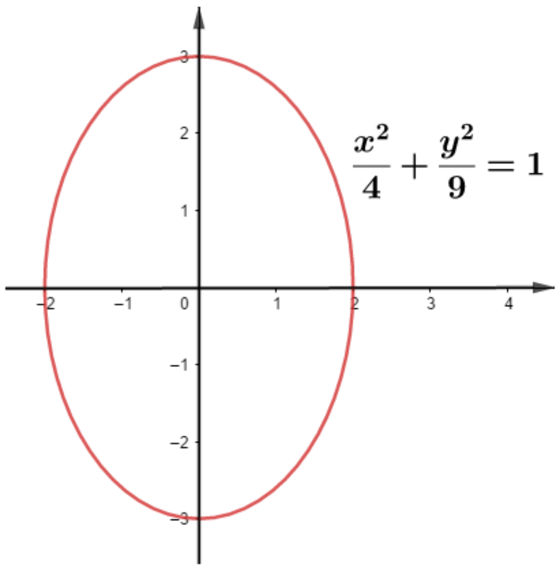
Ejemplo 1.1.5 *Sea $F:[0,2\pi]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definida por $F(\theta)=(2cos\theta,3sin\theta)$. Describir el rango de F.*

Solución: *Notemos que si $x=2cos\theta$ e $y=3sin\theta$, entonces*

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=cos^2\theta+sin^2\theta=1.$$

Por tanto, $Rango(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\right\}.$

.

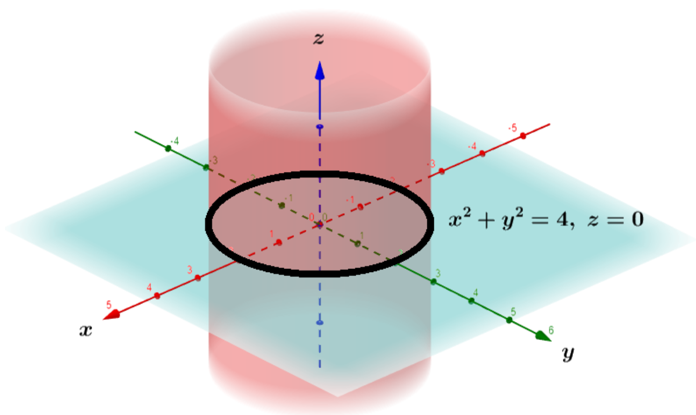


Ejemplo 1.1.6 *Sea $F:[0,2\pi]\times\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ definida por $F(\theta,z)=(2cos\theta,2sin\theta,0)$. Describir el rango de F.*

Solución: *Notemos que si $x=2cos\theta$ y $y=2sin\theta$, entonces*

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=cos^2\theta+sin^2\theta=1.$$

Por tanto, $Rango(F)=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2=4\}$ *(Circunferencia).*

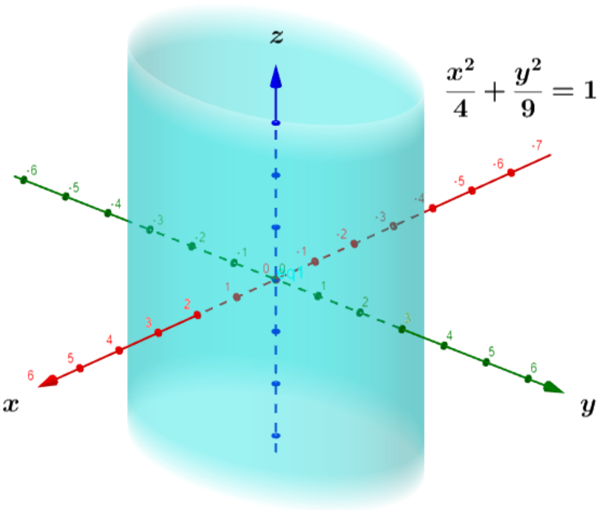


Ejemplo 1.1.7 *Sea* $F:[0,2\pi]\times\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ *definida por* $F(\theta,z)=(2cos\theta,3sin\theta,z)$. *Describir el rango de* F.

Solución: *Notemos que si* $x=2cos\theta$ *e* $y=3sin\theta$, *entonces*

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=cos^2\theta+sin^2\theta=1.$$

Por tanto, $Rango(F)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\right\}$ *(Cilindro).*

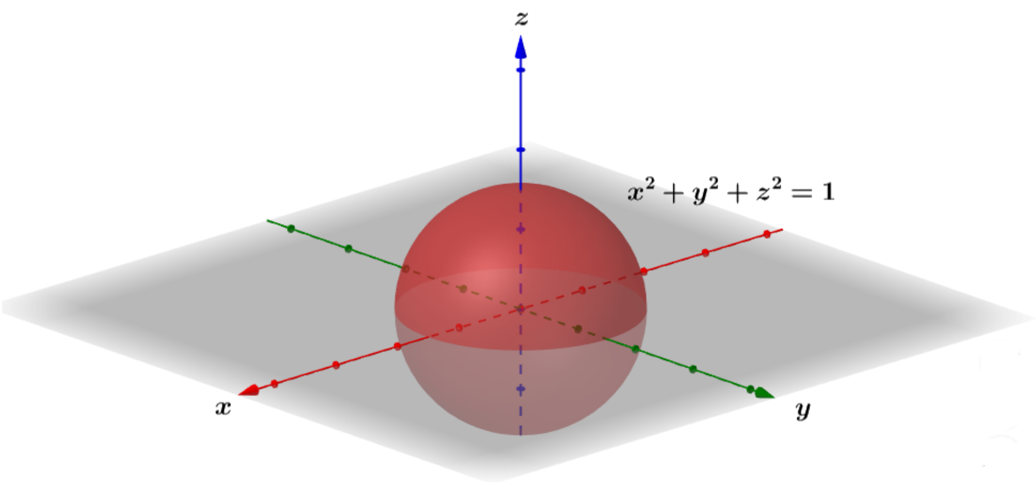


Ejemplo 1.1.8 *Sea* $F:[0,2\pi]\times[0,\pi]\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ *la función que está definida como* $F(\theta,\phi)=(cos\theta\sin\phi,sin\theta\sin\phi,cos\phi)$. *Describir el rango de* F.

Solución: *Notemos que si* $x=cos\theta\sin\phi$, $y=sin\theta\sin\phi$, $z=cos\phi$ *entonces*

$$x^2+y^2+z^2=1 \text{ (Coordenadas esféricas).}$$

Por tanto, $Rango(F)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2=1\}$ *(Esfera de radio 1 y centro* $(0,0,0)$*).*

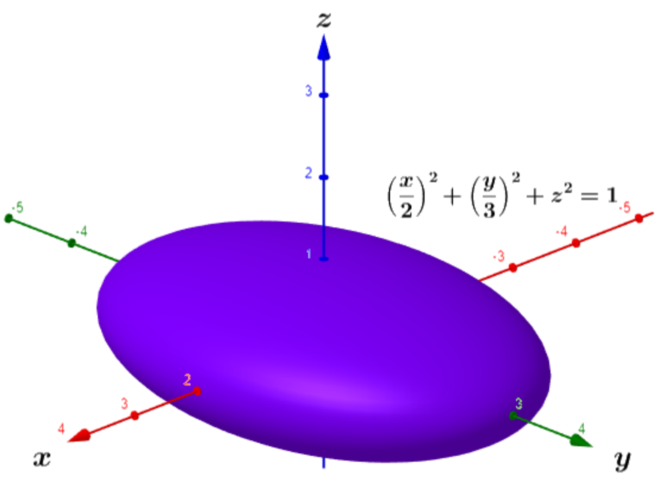


Ejemplo 1.1.9 *Sea* $F : [0,2\pi]\times[0,\pi]\subseteq\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *la función que está definida como* $F(\theta,\phi)=(2cos\theta\sin\phi, 3sin\theta\sin\phi, cos\phi)$. *Describir el rango de* F.

<u>Solución:</u> *Notemos que si* $x = 2cos\theta\sin\phi$, $y = 3sin\theta\sin\phi$, $z = cos\phi$ *entonces*

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2+z^2=1.$$

Por tanto, $Rango(F)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2+z^2=1\right\}$ *(Elipsoide).*

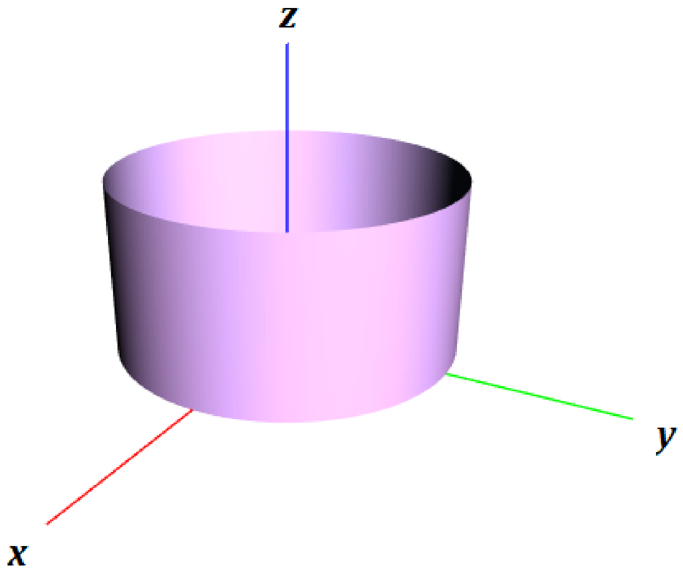


Ejemplo 1.1.10 *Sea* $F : [0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\subseteq\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *la función que está definida como* $F(r,\theta,z)=(rcos\theta, rsin\theta, z)$. *Describir el rango de* F.

<u>Solución:</u> *Notemos que si* $x = rcos\theta$, $y = rsin\theta$ *entonces*

$$x^2+y^2=r^2,\ 0\leqslant r^2\leqslant 1.$$

Por tanto, $Rango(F)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant\pi\}$ *(Cilindro sólido acotado).*



Ejercicio: Sea $F : [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,\pi] \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la función que está definida como $F(\rho,\theta,\phi) = (\rho cos\theta \sin\phi, \rho sin\theta \sin\phi, \rho cos\phi)$. Describir el rango de F.

1.2. Conjuntos de puntos descritos por funciones

Dada una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, podemos describir algunos conjuntos de puntos especiales los cuales son los siguientes:

- *Gráfica de f*: Es el conjunto definido por $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x \in A\}$.

- *Preimagen:* Dado $c \in \mathbb{R}^m$, entonces la preimagen de f bajo c es el conjunto descrito como $\{x \in A : f(x) = c\}$ y denotamos este conjunto por $f^{-1}(c)$.

- *Rango de f:* Es el conjunto definido por $\{f(x) \in \mathbb{R}^m : x \in A\}$.

Nota: Dado un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^N$, diremos que:

(1) $\boxed{S \text{ está descrito en forma explicita}}$, si $S = \textit{Gráfica}(f)$ para alguna función f.

(2) $\boxed{S \text{ está descrito en forma implícita}}$, si $S = f^{-1}(c)$ para alguna función f.

(3) $\boxed{S \text{ está descrito en forma paramétrica}}$, si $S = Rango(f)$ para alguna función f.

Ejemplo 1.2.1 *Dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$, describir los siguientes conjuntos:*

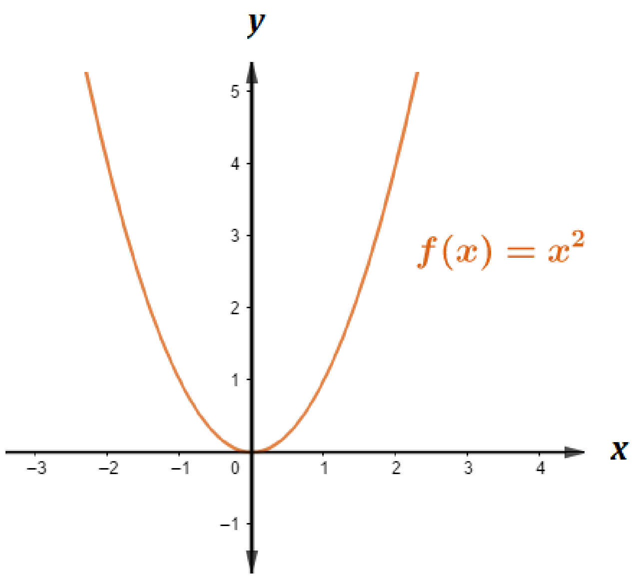
(1) *Gráfica*(f).

(2) $f^{-1}(1)$.

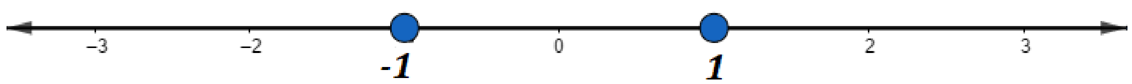
(3) $Rango(f)$.

<u>*Solución:*</u>

(1) *Gráfica*$(f) = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$.



(2) $f^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$.



(3) $Rango(f) = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\} = \{x^2 \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\} = [0, \infty)$.

Ejercicio: Dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^3 + 1$, describir los siguientes conjuntos:

(1) *Gráfica*(f).

(2) $f^{-1}(c)$ para algún $c \in \mathbb{R}$.

(3) $Rango(f)$.

Ejemplo 1.2.2 *Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = x^2 + y^2$, describir los siguientes conjuntos:*

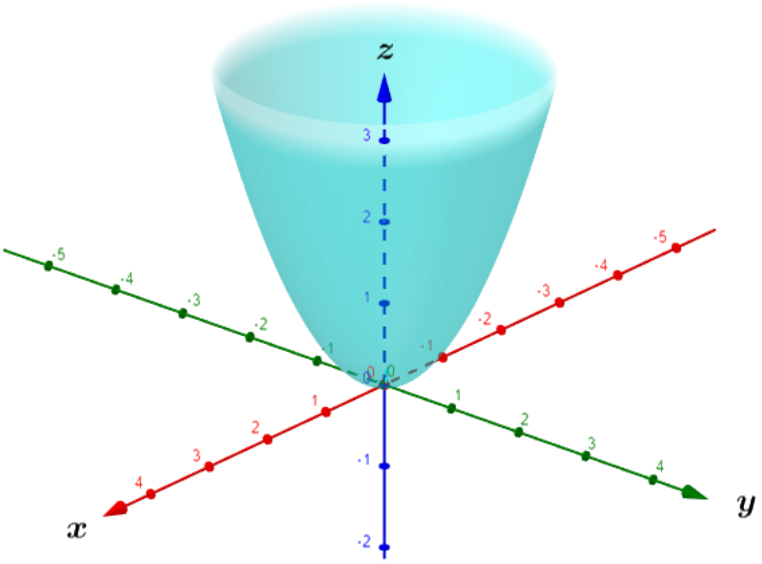
(1) *Gráfica*(f).

(2) $f^{-1}(16)$.

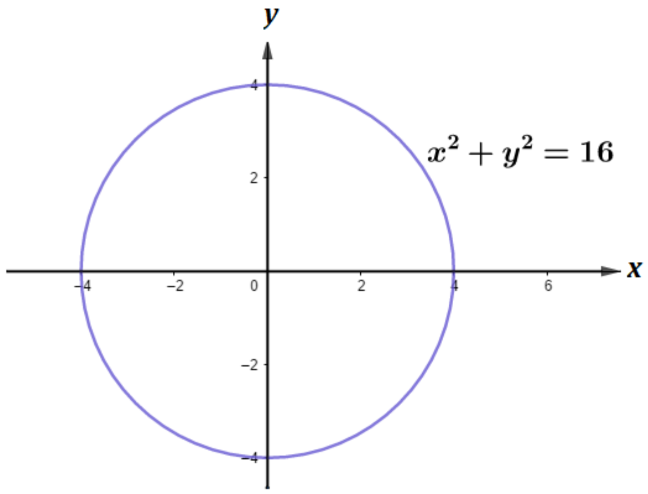
(3) $Rango(f)$.

Solución:

(1) *Gráfica*$(f) = \{(x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ *(paraboloide elíptico).*



(2) $f^{-1}(16) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 16\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16\}$.



(3) $Rango(f) = \{f(x, y) \in \mathbb{R} : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x^2 + y^2 \in \mathbb{R} : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = [0, \infty)$.

Ejemplo 1.2.3 *Dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $f(\theta) = (cos\theta, sin\theta)$, describir los siguientes conjuntos:*

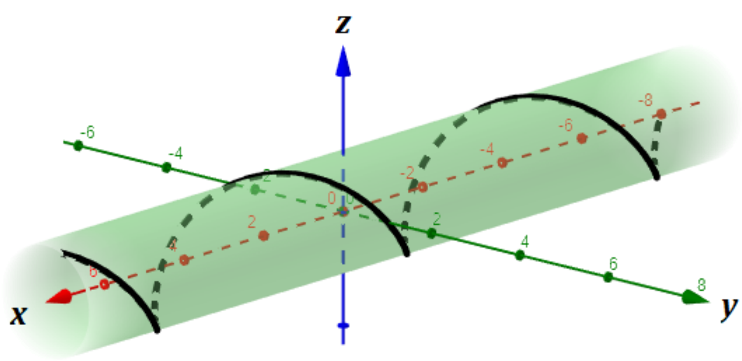
(1) *Gráfica(f).*

(2) *$f^{-1}((1, 0))$.*

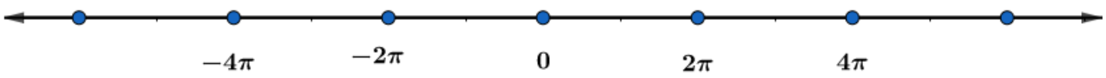
(3) *$Rango(f)$.*

<u>Solución:</u>

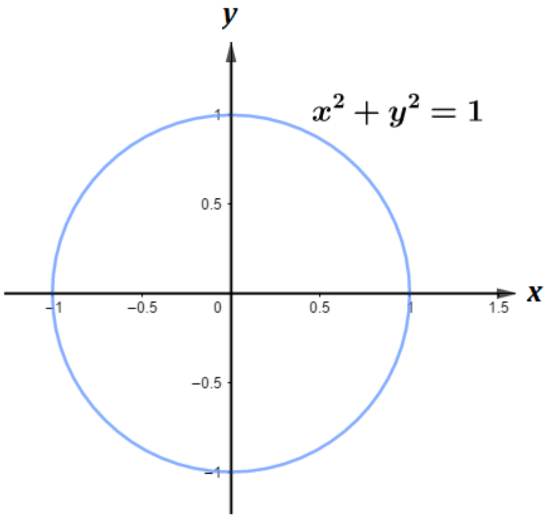
(1) *Gráfica$(f) = \{(\theta, cos\theta, sin\theta) \in \mathbb{R}^3 : \theta \in \mathbb{R}\}$ (hélice circular).*



(2) $f^{-1}((1,0)) = \{\theta \in R : f(\theta) = (1,0)\} = \{\theta \in \mathbb{R} : (cos\theta, sin\theta) = (1,0)\} = \{2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$.



(3) $Rango(f) = \{f(\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in \mathbb{R}\} = \{(cos\theta, sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in \mathbb{R}\}$.
$Rango(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.



Ejemplo 1.2.4 *Dada la función* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida como* $f(\theta, z) = (cos\theta, sin\theta, z)$*, describir los siguientes conjuntos:*

(1) *Gráfica*(f).

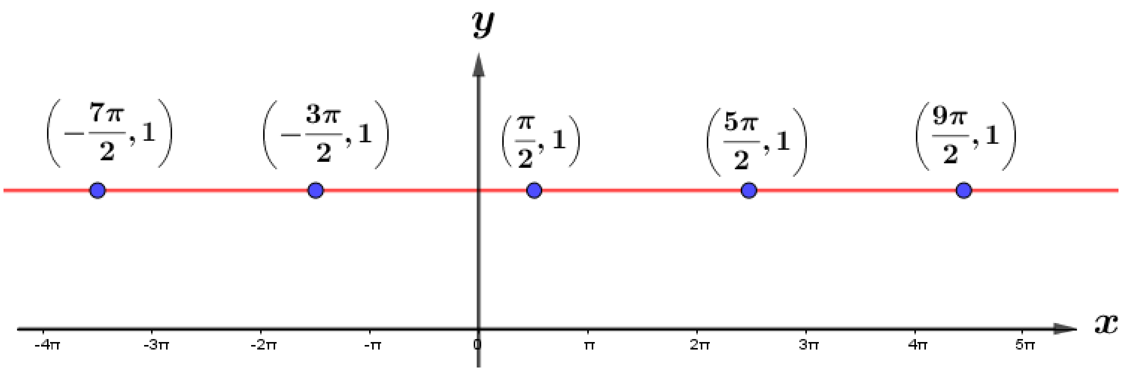
(2) $f^{-1}((0,1,1))$.

(3) $Rango(f)$.

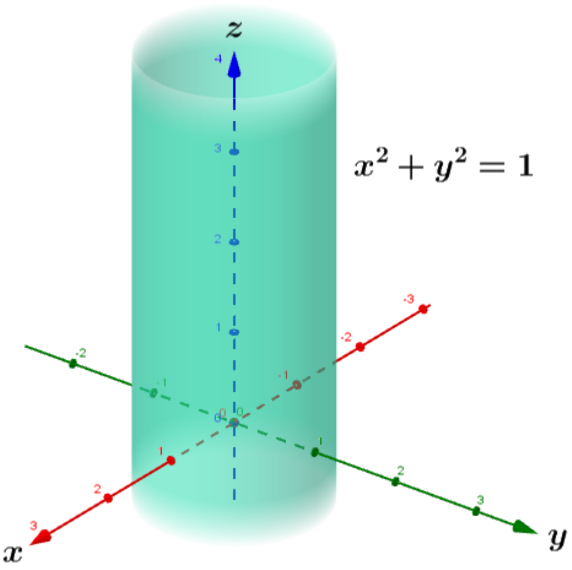
<u>Solución:</u>

(1) *Gráfica*$(f) = \{(\theta, z, cos\theta, sin\theta, z) \in \mathbb{R}^5 : (\theta, z) \in \mathbb{R}^2\}$.

(2) $f^{-1}((0,1,1)) = \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2 : f(\theta, z) = (0,1,1)\}$.
$f^{-1}((0,1,1)) = \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2 : (cos\theta, sin\theta, z) = (0,1,1)\} = \left\{ \left(2\pi n + \frac{\pi}{2}, 1\right) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{Z} \right\}$.



(3) $Rango(f) = \{f(\theta,z)\in\mathbb{R}^3 : (\theta,z)\in\mathbb{R}^2\} = \{(cos\theta, sin\theta, z)\in\mathbb{R}^3 : (\theta,z)\in\mathbb{R}^2\}$.
$Rango(f) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\}$ *(cilindro circular recto).*



Nota: En esta sección trabajaremos el siguiente problema:

$$\boxed{\text{Dado un subconjunto } S \text{ de } \mathbb{R}^N\text{, encontrar una función } f \text{ tal que } Gráfica(f)=S \text{ ó } f^{-1}(c)=S \text{ ó } Rango(f)=S.}$$

Ejemplo 1.2.5 *Dado el conjunto* $S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = x^2+1\}$, *encontrar una función* f *tal que:*

(1) *Gráfica*$(f) = S$.

(2) $f^{-1}(c) = S$ *para algún* c.

(3) $Rango(f) = S$.

Solución:

(1) *Sea* $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *definida como* $f(x)=x^2+1$. *Entonces es claro que Gráfica*$(f)=S$.

(2) *Sea* $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ *definida por* $f(x,y)=y-x^2$. *Entonces es fácil ver que* $f^{-1}(1)=S$.

(3) *Sea* $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ *definida como* $f(x)=(x,x^2+1)$. *Entonces* $Rango(f)=S$.

Ejercicio: Dado el conjunto $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=sin(x^3-20)\}$, encontrar una función f tal que:

(1) *Gráfica*$(f)=S$

(2) $f^{-1}(c)=S$ para algún c.

(3) $Rango(f)=S$.

Ejemplo 1.2.6 *Dado el conjunto* $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=x^2+y^2\}$, *encontrar una función* f *tal que:*

(1) *Gráfica*$(f)=S$.

(2) $f^{-1}(c)=S$ *para algún* c.

(3) $Rango(f)=S$.

Solución:

(1) *Consideremos la función* $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ *definida como* $f(x,y)=x^2+y^2$. *Entonces es claro que Gráfica*$(f)=S$.

(2) *Notemos que la ecuación* $z=x^2+y^2$ *equivale a tener la ecuación* $z-x^2-y^2=0$. *Por lo tanto si se define la función* $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ *como* $f(x,y,z)=z-x^2-y^2$. *Entonces es claro que* $f^{-1}(0)=S$.

(3) *Definimos la función* $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ *definida por* $f(x,y)=(x,y,x^2+y^2)$. *Entonces es claro que* $Rango(f)=S$.

Ejercicio: Dado el conjunto $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=\sqrt{4-x^2-y^2}\}$, encontrar una función f tal que:

(1) *Gráfica*$(f)=S$.

(2) $f^{-1}(c) = S$ para algún c.

(3) $Rango(f) = S$.

Ejemplo 1.2.7 *Dado el conjunto* $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$*, encontrar una función* f *tal que:*

(1) $f^{-1}(c) = S$ *para algún* c.

(2) $Rango(f) = S$.

Solución:

(1) *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como* $f(x, y) = x^2 + y^2$*. Entonces es claro que* $f^{-1}(1) = S$.

(2) *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(\theta) = (cos\theta, sin\theta)$*. Entonces* $Rango(f) = S$.

Pregunta: *Será posible que exista una función* f *tal que Gráfica*$(f) = S$*?*

Ejemplo 1.2.8 *Dado el conjunto* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$*, encontrar una función* f *tal que:*

(1) $f^{-1}(c) = S$ *para algún* c.

(2) $Rango(f) = S$.

Solución:

(1) *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como* $f(x, y, z) = x^2 + y^2$*. Entonces es claro que* $f^{-1}(1) = S$.

(2) *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por* $f(\theta, z) = (cos\theta, sin\theta, z)$*. Entonces* $Rango(f) = S$.

Pregunta: *Será posible que exista una función* f *tal que Gráfica*$(f) = S$*?*

Ejemplo 1.2.9 *Dado el conjunto* $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 = 1,\ y \geqslant 0\}$*, encontrar una función* f *tal que:*

(1) *Gráfica*$(f) = S$.

(2) $f^{-1}(c) = S$ *para algún* c.

(3) $Rango(f) = S$.

<u>*Solución:*</u>

(1) *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(x) = \left(x, \dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{3}\right)$. *Entonces se puede notar con facilidad que Gráfica*$(f) = S$.

(2) *Sea* $f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como* $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$. *Entonces es claro que* $f^{-1}(1) = S$.

(3) *Sea* $f : [0, \pi] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(\theta) = \left(\dfrac{cos\theta}{2}, \dfrac{sin\theta}{3}\right)$. *Entonces se puede ver que* $Rango(f) = S$.

Ejercicio: Dado el conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 = 25,\ y \geqslant 0\}$, encontrar una función f tal que:

(1) *Gráfica*$(f) = S$.

(2) $f^{-1}(c) = S$ para algún c.

(3) $Rango(f) = S$.

Capítulo 2

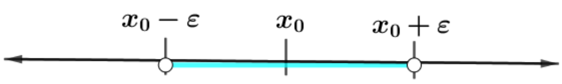
Topología en $\mathbb{R}^n$

Definición 2.0.1 ***(Bola abierta en*** $\mathbb{R}^n$***):*** *Sean* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *y* $\varepsilon > 0$*. Entonces definimos la bola abierta con centro en* x_0 *y de radio* ε *como el conjunto descrito por:*

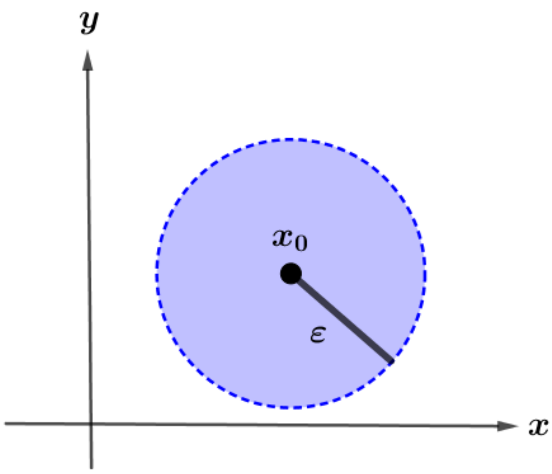
$$\boxed{B(x_0;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}}\ .$$

Ejemplo 2.0.1 *Veamos como lucen geométricamente la bola abierta para dimensiones* $n = 1, 2, 3$.

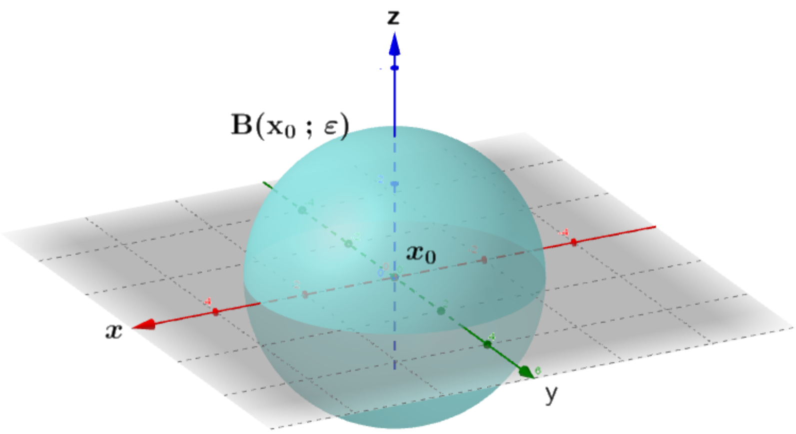
(1) *<u>$n = 1$:</u> La bola abierta se describe como* $B(x_0;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : \|x - x_0\| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon)$*, la cual es un intervalo abierto en la recta real.*



(2) *<u>$n = 2$:</u> La bola abierta se describe como* $B(x_0;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ *y geométricamente luce como:*



(3) *$\underline{n=3}$: La bola abierta se describe como $B(x_0;\varepsilon)=\{x\in\mathbb{R}^3:\|x-x_0\|<\varepsilon\}$ la cual se luce geométricamente como:*



Teniendo en cuenta que solo es la parte interna de la esfera sin tener en cuenta el borde.

Definición 2.0.2 ***(Bola agujereada y bola cerrada en $\mathbb{R}^n$):*** *Sean $x_0\in\mathbb{R}^n$ y $\varepsilon>0$. Entonces definimos:*

(1) *La bola agujereada con centro en x_0 y radio ε como el conjunto descrito por:*

$$\boxed{B^*(x_0;\varepsilon)=\{x\in\mathbb{R}^n:0<\|x-x_0\|<\varepsilon\}}.$$

(2) *La bola cerrada con centro en x_0 y radio ε como el conjunto descrito por:*

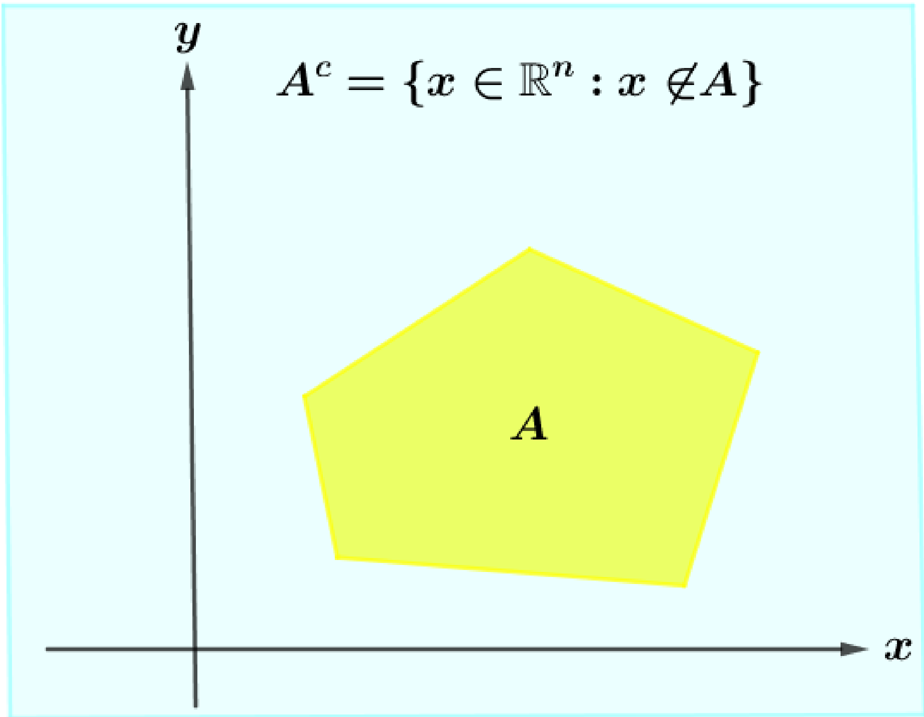
$$\boxed{\overline{B(x_0;\varepsilon)}=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x-x_0\|\leqslant\varepsilon\}}.$$

Ejercicio: Describir geométricamente $B^*(x_0;\varepsilon)$ y $\overline{B(x_0;\varepsilon)}$ para $n = 1,2,3$.

Definición 2.0.3 ***(Complemento de un conjunto):*** *Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces definimos el complemento de A como el conjunto descrito por:*

$$\boxed{A^c = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin A\}}\,.$$

Básicamente el complemento de A son todos los elementos que no están en A. Geométricamente podemos interpretar la definición anterior así:



Definición 2.0.4 ***(Punto interior, punto de acumulación y punto frontera):*** *Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces decimos que:*

(1) *x_0 es un punto interior de A, si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_0;\varepsilon) \subseteq A$. Además denotamos el conjunto de todos los puntos interiores de A como $int(A)$.*

(2) *x_0 es un punto de acumulación de A, si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $B^*(x_0;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Además denotamos el conjunto de todos los puntos de acumulación de A como $ac(A)$.*

(3) *x_0 es un punto frontera de A, si $B^*(x_0;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y $B^*(x_0;\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$. Además denotamos el conjunto de todos los puntos frontera de A como $Fr(A)$.*

Ejemplo 2.0.2 *En los siguientes literales, encontrar A^c, $int(A)$, $ac(A)$ y $Fr(A)$ donde:*

(1) $A=(0,1)$.

$A^c=(-\infty,0]\cup[1,\infty)$.
$int(A)=(0,1)$.
$ac(A)=[0,1]$.
$Fr(A)=\{0,1\}$.

(2) $A=[0,1)$.

$A^c=(-\infty,0)\cup[1,\infty)$.
$int(A)=(0,1)$.
$ac(A)=[0,1]$.
$Fr(A)=\{0,1\}$.

(3) $A=[0,1]$.

$A^c=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$.
$int(A)=(0,1)$.
$ac(A)=[0,1]$.
$Fr(A)=\{0,1\}$.

(4) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$.

$A^c=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1\}$.
$int(A)=\emptyset$.
$ac(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$.
$Fr(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$.

(5) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$.

$A^c=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1\}$.
$int(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$.
$ac(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 1\}$.
$Fr(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$.

(6) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 1\}$.

$A^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$.
$int(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.
$ac(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
$Fr(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

(7) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.

$A^c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 1\}$.
$int(A) = \emptyset$.
$ac(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.
$Fr(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.

(8) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

$A^c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 1\}$.
$int(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$.
$ac(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
$Fr(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.

(9) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

$A^c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$.
$int(A) = \emptyset$.
$ac(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
$Fr(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(10) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

$A^c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$.
$int(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.
$ac(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.
$Fr(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Definición 2.0.5 ***(Conjunto abierto y conjunto cerrado):*** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces decimos que:*

(1) *<u>A es un conjunto abierto</u>, si todos los puntos de A son puntos interiores. Es decir que $int(A) = A$.*

(2) *<u>A es un conjunto cerrado</u>, si todos los puntos de acumulación de A se encuentran en A. Es decir que $ac(A) \subseteq A$.*

Ejemplo 2.0.3 *Hallar el dominio de las siguientes funciones y además describir los conjuntos* $(Dom(f))^c$, $int(Dom(f))$, $ac(Dom(f))$ *y* $Fr(Dom(f))$.

(1) $f(x,y)=(\sqrt{1-x^2-y^2}, x+sin(y+20), 1)$.

· $Dom(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1-x^2-y^2\geqslant 0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R} : x^2+y^2\leqslant 1\}$.

· $(Dom(f))^c=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1\}$.

· $int(Dom(f))=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$.

· $ac(Dom(f))=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 1\}$.

· $Fr(Dom(f))=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$.

(2) $f(x,y,z)=(ln(1-x^2-y^2-z^2), ln(z), x+y^3)$.

· $Dom(f)=\{(x,y,z) : z>0,\ 1-x^2-y^2-z^2>0\}=\{(x,y,z) : z>0,\ x^2+y^2+z^2<1\}$.

· $(Dom(f))^c=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\geqslant 1\}\cup\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\leqslant 0\}$.

· $int(Dom(f))=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z>0,\ x^2+y^2+z^2<1\}$.

· $ac(Dom(f))=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\geqslant 0,\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$.

· $Fr(Dom(f))=\{(x,y,z) : z>0,\ x^2+y^2+z^2=1\}\cup\{(x,y,z) : z=0,\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$.

(3) $f(x,y,z)=(sen^{-1}(x^2+y^2)), ln(z), 1)$.

· $Dom(f)=\left\{(x,y,z) : z>0,\ -1\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\right\}=\left\{(x,y,z) : z>0,\ x^2+y^2\leqslant 1\right\}$.

· $(Dom(f))^c=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\leqslant 0\right\}\cup\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2>1\right\}$.

· $int(Dom(f))=\left\{(x,y,z) : z>0,\ x^2+y^2<1\right\}$.

· $ac(Dom(f))=\left\{(x,y,z) : z\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1\right\}$.

· $Fr(Dom(f))=\left\{(x,y,z) : z>0,\ x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{(x,y,z) : z=0,\ x^2+y^2\leqslant 1\right\}$.

(4) $f(x,y,z)=(cos(x^2+y^2), tan^{-1}(x^2+y^2+z^2), e^x+10)$.

· $Dom(f)=\mathbb{R}^3$.

· $(Dom(f))^c = \emptyset$.

· $int(Dom(f)) = \mathbb{R}^3$.

· $ac(Dom(f)) = \mathbb{R}^3$.

· $Fr(Dom(f)) = \emptyset$.

(5) $f(x,y) = \left(\dfrac{x}{|y-1|}, \dfrac{\sqrt{x}}{y^2-4}\right)$.

· $Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \notin \{-2,1,2\},\ x \geqslant 0\}$.

· $(Dom(f))^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \{-2,1,2\}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$.

· $int(Dom(f)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \notin \{-2,1,2\},\ x > 0\}$.

· $ac(Dom(f)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0\}$.

· $Fr(Dom(f)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \{-2,1,2\},\ x \geqslant 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$.

Ejercicio: Verificar si el dominio de las siguientes funciones es un conjunto abierto ó cerrado.

(1) $f(x,y) = (\sqrt{1-x^2-y^2}, x + sin(y+20), 1)$.

(2) $f(x,y,z) = (ln(1-x^2-y^2-z^2), ln(z), x+y^3)$.

(3) $f(x,y,z) = (sen^{-1}(x^2+y^2)), ln(z), 1)$.

(4) $f(x,y,z) = (cos(x^2+y^2), tan^{-1}(x^2+y^2+z^2), e^x+10)$.

(5) $f(x,y) = \left(\dfrac{x}{|y-1|}, \dfrac{\sqrt{x}}{y^2-4}\right)$.

Capítulo 3

Limites y continuidad

Definición 3.0.1 ***(Limite):*** *Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $L \in \mathbb{R}$ y $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a x_0, si:*

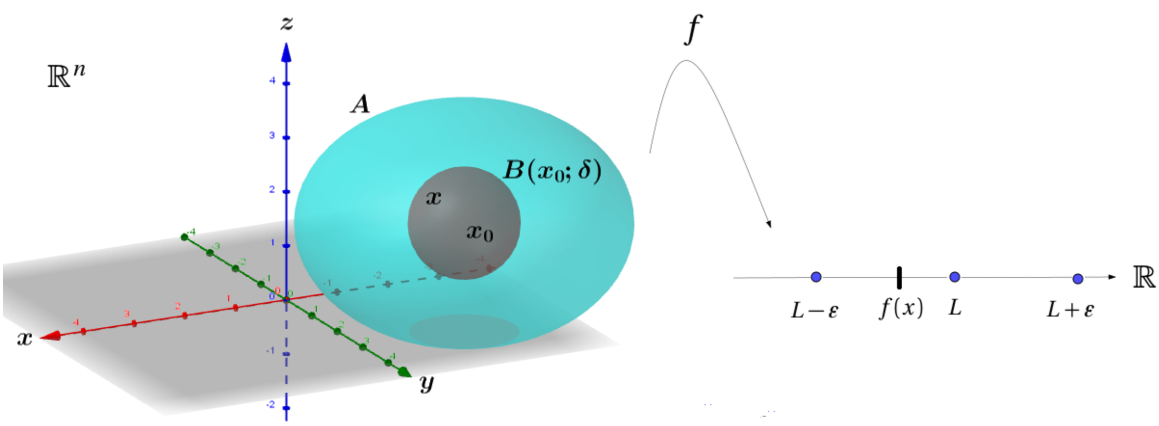
$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0\text{: } si \ \ 0 < \|x - x_0\| < \delta, \ entonces \ |\, f(x) - L\,| < \varepsilon}\,.$$

En este caso escribiremos $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = L$.

Nota: El recuadro de la definición anterior, equivale a tener que:

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0\text{: si } \ x \in B^*(x_0, \delta), \text{ entonces } f(x) \in B(L, \varepsilon) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)}$$

lo cual gráficamente podemos describir como:



Definición 3.0.2 ***(Continuidad):*** *Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es continua en x_0, si $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Nota: A continuación damos algunas propiedades de limites y continuidad de funciones. Para los amantes a las matemáticas, las pruebas de estas propiedades se darán en la última sección de este capítulo.

Teorema 3.0.1 ***(Propiedades-limites):*** *Sean* $c, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *y* $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones. Entonces tenemos que:*

(1) *Si* $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = l_1$ *y* $\lim\limits_{x \mapsto x_0} g(x) = l_2$, *entonces:*

$$\lim_{x \mapsto x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \mapsto x_0} f(x) \pm \lim_{x \mapsto x_0} g(x) = l_1 \pm l_2.$$

(2) *Si* $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = l_1$ *y* $c \in \mathbb{R}$, *entonces:*

$$\lim_{x \mapsto x_0} c f(x) = c \lim_{x \mapsto x_0} f(x) = c\, l_1.$$

(3) *Si* $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = l_1$ *y* $\lim\limits_{x \mapsto x_0} g(x) = l_2$, *entonces:*

$$\lim_{x \mapsto x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \mapsto x_0} f(x) \cdot \lim_{x \mapsto x_0} g(x) = l_1 \cdot l_2.$$

(4) *Si* $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = l_1$ *y* $\lim\limits_{x \mapsto x_0} g(x) = l_2 \neq 0$, *entonces:*

$$\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \mapsto x_0} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

□

Corolario 3.0.2 ***(Propiedades-continuidad):*** *Sean* $c \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *y* $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones continuas en* x_0. *Entonces tenemos que:*

(1) $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) \pm g(x) = \lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \mapsto x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0)$.

(2) $\lim\limits_{x \mapsto x_0} c f(x) = c \lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = c f(x_0)$.

(3) $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \mapsto x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0)$.

(4) Si $g(x_0)\neq 0$ *entonces* $\lim\limits_{x\longmapsto x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\longmapsto x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\longmapsto x_0} g(x)}=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

$\square$

Nota: Diremos que una función f es continua en un conjunto $A\subseteq\mathbb{R}^n$, si f es continua en cada uno de los puntos de A.

Observación: No hay ninguna sorpresa en las propiedades previas de limites y continuidad, ya que son exactamente los mismos resultados correspondientes a funciones de una única variable escalar de una sola variable. También es de esperar que algunas funciones básicas sean funciones continuas (por ejemplo las funciones constantes y las funciones polinómicas). El siguiente ejemplo nos ilustra esto.

Ejemplo 3.0.1

(1) Las funciones constantes son funciones continuas: Si $c\in\mathbb{R}$ *y* $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ *es la función definida como*

$$f(x)=c$$

para todo $x\in\mathbb{R}^n$*, entonces* f *es continua en* $\mathbb{R}^n$*. Es decir que para cada* $x_0\in\mathbb{R}^n$ *se tiene que:*

$$\boxed{\lim_{x\longmapsto x_0} f(x)=f(x_0)=c}\,.$$

(2) Las funciones polinómicas son funciones continuas: Las funciones polinómicas se describen de la siguiente manera:

- *Funciones polinómicas de una variable* $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$*: Son funciones que se escriben de la forma:*

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

con $x\in\mathbb{R}$*. Los siguientes son algunos ejemplos de polinomios de una variable:*

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x)=2x^4+x^2-12x+6, \\ f(x)=2x^3+5x^2-x+20, \\ f(x)=-x^4+15. \end{array}}$$

- *Funciones polinómicas de dos variables* $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$*: Son funciones que se escriben de la forma:*

$$f(x,y)=\sum_{i,j} a_{(i,j)}x^i y^j$$

con $(x,y)\in\mathbb{R}^2$*. Los siguientes son algunos ejemplos de polinomios de 2 variables:*

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x,y)=2xy+x^2y^3-12x^4y, \\ f(x,y)=2x^2y^3+5x^2y^8-x^4+y, \\ f(x,y)=8xy+5y^8-x^4+6. \end{array}}$$

- *Funciones polinómicas de n variables* $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*: Son funciones que se escriben de la forma:*

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i_1,\dots,i_n} a_{(i_1,\dots,i_n)}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$$

con $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$*. Los siguientes son algunos ejemplos de funciones polinómicas de varias variables:*

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x,y,z)=2xyz+x^2y^3z^6-12x^4z+20, \\ f(x,y,z)=2x^2y^3z+5x^2y^8-x^4+z+10, \\ f(x,y,z,w)=8x^2yzw^5+5y^8-x^4w. \end{array}}$$

Entonces las funciones polinómicas son funciones continuas en $\mathbb{R}^n$*. Es decir que para cada* $x_0\in\mathbb{R}^n$ *se tiene que:*

$$\boxed{\lim_{x\mapsto x_0} f(x)=f(x_0)}.$$

(3) *Compuestas de funciones continuas son funciones continuas: Si* $g:A\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *es continua en* $a\in A$ *y* $f:B\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *es continua en* $g(a)\in B$*, entonces* $f\circ g$ *es continua en* $a\in A$*. Es decir que si* $\lim_{x\mapsto a} g(x)=g(a)$ *y* $\lim_{y\mapsto g(a)} f(y)=f(g(a))$*, entonces*

$$\boxed{\lim_{x\mapsto a}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(a)=f(g(a))}.$$

Los siguientes son algunos ejemplos de funciones continuas que se obtienen de funciones continuas conocidas.

- La función $H(x,y)=e^{x+y}$ es continua en $\mathbb{R}^2$, ya que $H=f\circ g$, con $g(x,y)=x+y$ y $f(x)=e^x$ las cuales son funciones continuas.

- La función $H(x,y)=sin\,(2xy+x^4y^2)$ es continua en $\mathbb{R}^2$, ya que $H=f\circ g$, con $g(x,y)=2xy+x^4y^2$ y $f(x)=sin(x)$ las cuales son funciones continuas.

- La función $H(x,y)=20\,cos\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$ es continua en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, ya que $H=f\circ g$, con $g(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ y $f(x)=20\,cos(x)$ las cuales continuas en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ y en $\mathbb{R}$ respectivamente.

- La función $H(x,y,z)=28\,xyz^2+z^3+\,sin\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right)$ es continua en $\mathbb{R}^3-\{(0,0)\}$ (¿por qué?).

Nota: Al final de la sección se mostrará una serie de ejercicios que prueban la continuidad de las funciones constantes y las funciones polinómicas. Por el momentos veamos algunos ejemplos que ilustren las propiedades anteriores.

Ejemplo 3.0.2 *Hallar los siguientes limites:*

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\frac{(e^x-1)(e^{2y}-1)}{xy}.$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\frac{e^{xy}sin(4xy)}{xy}.$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(1,0)}\frac{ln(x)sin(3y)}{xy-y}.$

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(1,1)}\frac{x^3-y^3}{x-y}.$

Solución:

(1) *Notemos inicialmente que:*

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^x-1)(e^{2y}-1)}{xy} = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^x-1)}{x}\cdot\frac{(e^{2y}-1)}{y},$$

además por propiedades de limites, tenemos que:

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^x-1)}{x}\cdot\frac{(e^{2y}-1)}{y} = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^x-1)}{x}\cdot \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^{2y}-1)}{y},$$

siempre y cuando los limites de la derecha existan. En este caso, ambos limites existes y se calculan de la siguiente manera:

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^x-1)}{x} \underset{\text{¿por qué?}}{=} \lim_{x\mapsto 0} \frac{e^x-1}{x} \underset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\mapsto 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1.$$

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^{2y}-1)}{y} \underset{\text{¿por qué?}}{=} \lim_{y\mapsto 0} \frac{e^{2y}-1}{y} \underset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{y\mapsto 0} \frac{2e^{2y}}{1} = 2e^0 = 2.$$

Por tanto

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^x-1)(e^{2y}-1)}{xy} = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^x-1)}{x}\cdot \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^{2y}-1)}{y} = 1\cdot 2 = 2.$$

$$\boxed{\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^x-1)(e^{2y}-1)}{xy} = 2}\,.$$

(2) *Notemos inicialmente que:*

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{e^{xy}\,sin(4xy)}{xy} = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} e^{xy}\cdot \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{sin(4xy)}{xy}$$

siempre y cuando los limites de la derecha existan. En este caso ambos limites existen y se calculan de la siguiente manera:

- $\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} e^{xy} = e^{0\cdot 0} = e^0 = 1,$ *ya que* e^{xy} *es continua en* $\mathbb{R}^2$.

- $\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{sin(4xy)}{xy} = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} 4\,\frac{sin(4xy)}{4xy} = 4 \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{sin(4xy)}{4xy}$. *Para calcular el limite anterior, observamos que:*

$$\boxed{\begin{array}{c} (x,y)\mapsto(0,0) \Rightarrow u = 4xy \mapsto 0 \\ y \\ \lim_{u\mapsto 0} \dfrac{sin(u)}{u} = 1, \end{array}}\,.$$

lo cual implica que $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} \dfrac{sin(4xy)}{4xy} = \lim\limits_{u\mapsto 0} \dfrac{sin(u)}{u} = 1$. *De esta manera tenemos que:*

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{e^{xy} sin(4xy)}{xy} = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} e^{xy} \cdot \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{sin(4xy)}{xy} = 1\cdot(4\cdot 1) = 4.$$

$$\boxed{\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{e^{xy} sin(4xy)}{xy} = 4}\,.$$

(3) *Notemos inicialmente que:*

$$\lim_{(x,y)\mapsto(1,0)} \frac{ln(x)sin(3y)}{xy-y} = \lim_{(x,y)\mapsto(1,0)} \frac{ln(x)sin(3y)}{(x-1)y},$$

y haciendo el cambio de variable $u = x-1$, *tenemos que:*

$$\lim_{(x,y)\mapsto(1,0)} \frac{ln(x)sin(3y)}{xy-y} = \lim_{(x,y)\mapsto(1,0)} \frac{ln(x)sin(3y)}{(x-1)y} \underset{\text{¿por qué?}}{=} \lim_{(u,y)\mapsto(0,0)} \frac{ln(u+1)sin(3y)}{uy} =$$

$$= \lim_{(u,y)\mapsto(0,0)} \frac{ln(u+1)}{u} \cdot \frac{sin(3y)}{y} = \lim_{(u,y)\mapsto(0,0)} \frac{ln(u+1)}{u} \cdot \lim_{(u,y)\mapsto(0,0)} \frac{sin(3y)}{y}$$

siempre que $\lim\limits_{(u,y)\mapsto(0,0)} \dfrac{ln(u+1)}{u}$ *y* $\lim\limits_{(u,y)\mapsto(0,0)} \dfrac{sin(3y)}{y}$ *existan. En este caso ambos limites existen y se calculan de la siguiente manera:*

$$\lim_{(u,y)\mapsto(0,0)} \frac{ln(u+1)}{u} \underset{\text{¿por qué?}}{=} \lim_{u\mapsto 0} \frac{ln(u+1)}{u} \underset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{u\mapsto 0} \frac{\frac{1}{u+1}}{1} = \frac{1}{0+1} = 1,$$

$$\lim_{(u,y)\mapsto(0,0)} \frac{sin(3y)}{y} \underset{\text{¿por qué?}}{=} \lim_{y\mapsto 0} \frac{sin(3y)}{y} \underset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{y\mapsto 0} \frac{3cos(3y)}{1} = 3(1) = 3.$$

De esta manera tenemos que:

$$\lim_{(x,y)\mapsto(1,0)} \frac{ln(x)sin(3y)}{xy-y} = \lim_{(u,y)\mapsto(0,0)} \frac{ln(u+1)}{u} \cdot \lim_{(u,y)\mapsto(0,0)} \frac{sin(3y)}{y} = 1\cdot 3 = 3.$$

$$\boxed{\lim_{(x,y)\mapsto(1,0)} \frac{ln(x)sin(3y)}{xy-y} = 3}\,.$$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(1,1)} \dfrac{x^3-y^3}{x-y} = \lim\limits_{(x,y)\mapsto(1,1)} \dfrac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x-y} = \lim\limits_{(x,y)\mapsto(1,1)} x^2+xy+y^2 = 3.$

Nota: En algunas ocasiones no podremos encontrar el limite de una función de varias variables por medio de manipulaciones algebraicas y propiedades de funciones continuas. Para este tipo de limites usaremos otras técnicas para garantizar su existencia, como por ejemplo trayectorias ó algún tipo de cambio de variable en el limite (como por ejemplo cambio de variable a coordenadas polares ó cambio de variable a coordenadas esféricas).

3.1. Trayectorias y limites.

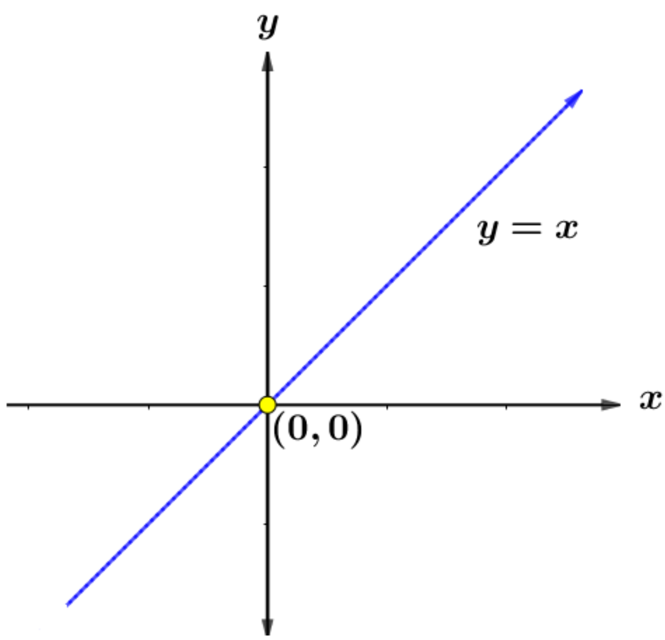
Definición 3.1.1 ***(Trayectoria):*** *Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, decimos que $T \subseteq \mathbb{R}^n$ es una trayectoria que pasa por x_0, si:*

- $x_0 \in T$.
- *Existe una sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T$ *tal que* $\lim\limits_{n\mapsto\infty} x_n = x_0$.

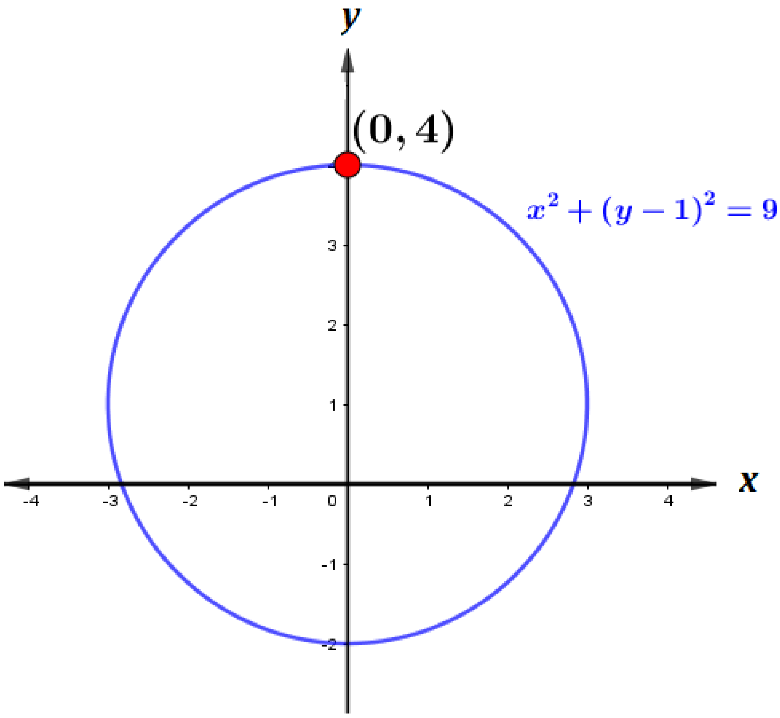
Nota: Aunque esta definición es muy teórica, lo que buscamos son trayectorias que sean gráficas de funciones conocidas que pasen por un punto dado. A continuación mostramos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.1.1 *Las siguientes son trayectorias que pasan por el punto dado:*

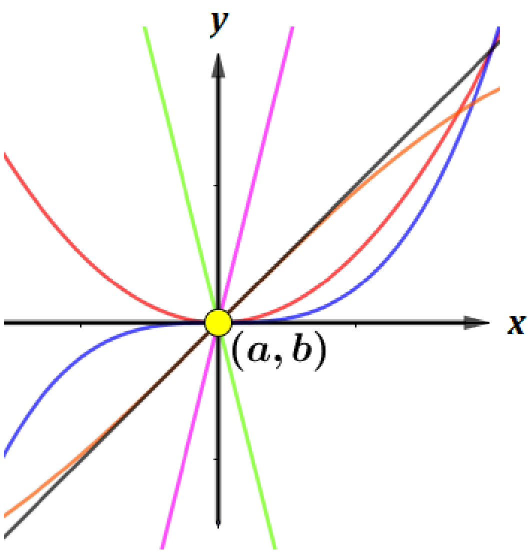
(1) *La recta* $y = x$ *es una trayectoria que pasa por* $(0,0)$.



(2) *La circunferencia* $x^2+(y-1)^2=9$ *es una trayectoria que pasa por* $(0,4)$.



(3) *Cabe resaltar que dado un punto* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, *existen infinitas trayectorias que pasan por este punto.*



Lo mismo sucede para cualquier punto $x_0\in\mathbb{R}^n$ *para* $n\geqslant 2$.

Nota: Es posible estudiar limites de funciones de varias variables por medio de trayectorias especificas. A continuación mostramos algunos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 3.1.2 *Sea* $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0). \end{cases}$ *Entonces:*

(1) *Hallar* $\lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} f(x,y)$.

(2) *Hallar* $\lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=0}} f(x,y)$.

(3) *Hallar* $\lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} f(x,y)$.

Solución:

(1) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} f(x,y) \underset{¿por\,qué?}{=} \lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} \dfrac{xx}{x^2+x^2} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} \dfrac{x^2}{x^2+x^2}$
$\underset{¿por\,qué?}{=} \lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{x^2}{2x^2} = \lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \frac{1}{2}}\,.$$

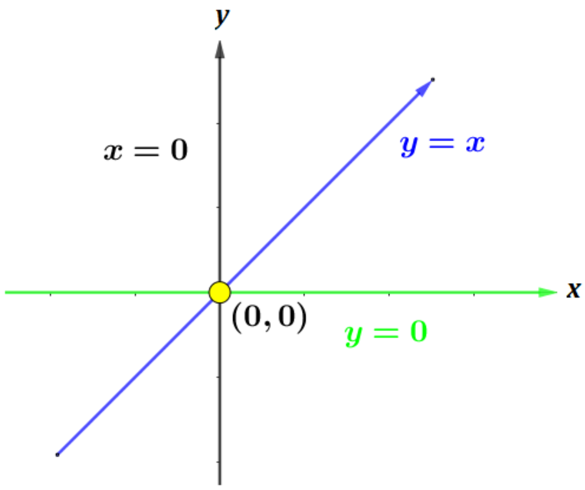
(2) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=0}} f(x,y) \underset{¿por\,qué?}{=} \lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=0}} \dfrac{x\,0}{x^2+0^2} \underset{¿por\,qué?}{=} \lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{0}{x^2}$
$= \lim\limits_{x\mapsto 0} 0 = 0$.

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = 0}\,.$$

(3) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} f(x,y) \underset{¿por\,qué?}{=} \lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} \dfrac{0\,y}{0^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} \dfrac{0}{y^2}$
$= \lim\limits_{y\mapsto 0} 0 = 0$.

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = 0}\,.$$

Observación: Es importante notar que en cada una de estas trayectorias pasa por el punto dado.



Además es importante tener en cuenta que no tiene sentido evaluar limites sobre trayectorias que no pasan por el punto dado.

Nota: El siguiente teorema nos muestra la relación entre la existencia de un limite y los limites por trayectorias.

Teorema 3.1.1 ***(Relación entre limites y trayectorias):*** *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función y* $L \in \mathbb{R}$*. Entonces:*

$$\boxed{\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = L} \iff \boxed{\begin{array}{c}\text{Para toda trayectoria } T \text{ que pasa por } x_0, \text{ se tiene que} \\ \displaystyle\lim_{\substack{x \mapsto x_0 \\ x \in T}} f(x) = L\end{array}}.$$

□

Corolario 3.1.2 *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función y* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*. Si* T_1 *y* T_2 *son trayectorias que pasan por* x_0 *tales que:*

$$\boxed{\lim_{\substack{x \mapsto x_0 \\ x \in T_1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \mapsto x_0 \\ x \in T_2}} f(x)}$$

entonces $\lim\limits_{x\longmapsto x_0} f(x)$ *no existe.*

$\square$

Nota: El corolario anterior nos muestra una condición suficiente para que el limite no exista. En los siguientes ejemplos mostramos la aplicación de este corolario.

Ejemplo 3.1.3 *Verificar que los siguientes limites no existen usando trayectorias adecuadas:*

(1) $\lim\limits_{(x,y)\longmapsto(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

(2) $\lim\limits_{(x,y)\longmapsto(0,0)} \dfrac{x^2y}{2x^4+y^2}$.

(3) $\lim\limits_{(x,y)\longmapsto(1,0)} \dfrac{y^2ln(x)}{2(x-1)^3-y^3}$.

(4) $\lim\limits_{(x,y,z)\longmapsto(0,0,1)} \dfrac{e^{xyz}-y^3-1}{x^2+y^2+(z-1)^2}$.

Solución: La idea de este ejemplo es tratar de encontrar trayectorias distintas que tengan limites correspondientes diferentes, para así aplicar el corolario anterior. De esta forma tenemos que:

(1) *Consideremos las trayectorias* $x=0$ *y* $y=x$*, entonces:*

- $$\lim_{\substack{(x,y)\longmapsto(0,0)\\ x=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\longmapsto(0,0)\\ x=0}} \frac{0y}{0^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\longmapsto(0,0)\\ x=0}} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\longmapsto 0} 0 = 0.$$

- $$\lim_{\substack{(x,y)\longmapsto(0,0)\\ y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\longmapsto(0,0)\\ y=x}} \frac{xx}{x^2+x^2} = \lim_{\substack{(x,y)\longmapsto(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\longmapsto 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\longmapsto 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

De esto tenemos que $\lim\limits_{(x,y)\longmapsto(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *no existe.*

(2) *Consideremos las trayectorias* $x=0$ *y* $y=x^2$*, entonces:*

- $$\lim_{\substack{(x,y)\longmapsto(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2y}{2x^4+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\longmapsto(0,0)\\ x=0}} \frac{0^2y}{2(0)^4+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\longmapsto(0,0)\\ x=0}} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\longmapsto 0} 0 = 0.$$

- $$\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^2y}{2x^4+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^2x^2}{2x^4+(x^2)^2} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^4}{2x^4+x^4} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{x^4}{3x^4} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

De esto tenemos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4+y^2}$ *no existe.*

(3) *Consideremos las trayectorias* $x=1$ *y* $y=x-1$*, entonces:*

- $$\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(1,0)\\ x=1}} \frac{y^2ln(x)}{2(x-1)^3-y^3} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(1,0)\\ x=1}} \frac{y^2ln(1)}{2(1-1)^3-y^3} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(1,0)\\ x=1}} \frac{0}{-y^3} = \lim_{y\mapsto 0} 0 = 0.$$

- $$\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(1,0)\\ y=x-1}} \frac{y^2ln(x)}{2(x-1)^3-y^3} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(1,0)\\ y=x-1}} \frac{(x-1)^2ln(x)}{2(x-1)^3-(x-1)^3} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(1,0)\\ y=x-1}} \frac{(x-1)^2ln(x)}{(x-1)^3} = \lim_{x\mapsto 1} \frac{ln(x)}{x-1}$$
$$\underset{l'Hôpital}{=} \lim_{x\mapsto 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1.$$

De esto tenemos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(1,0)} \frac{y^2ln(x)}{2(x-1)^3-y^3}$ *no existe.*

(4) *Consideremos las trayectorias* T_1 *y* T_2 *dadas por:*

$$T_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=0\},$$
$$T_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y,\ z=1\}.$$

Entonces

- $$\lim_{\substack{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)\\ (x,y,z)\in T_1}} \frac{e^{xyz}-y^3-1}{x^2+y^2+(z-1)^2} = \lim_{\substack{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)\\ y=0}} \frac{e^{xyz}-y^3-1}{x^2+y^2+(z-1)^2} = \lim_{\substack{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)\\ y=0}} \frac{e^{x0z}-0^3-1}{x^2+0^2+(z-1)^2}$$
$$= \lim_{\substack{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)\\ y=0}} \frac{1-0-1}{x^2+(z-1)^2} = \lim_{\substack{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)\\ y=0}} \frac{0}{x^2+(z-1)^2} = 0.$$

- $$\lim_{\substack{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)\\ (x,y,z)\in T_2}} \frac{e^{xyz}-y^3-1}{x^2+y^2+(z-1)^2} = \lim_{\substack{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)\\ x=y,\ z=1}} \frac{e^{xyz}-y^3-1}{x^2+y^2+(z-1)^2} = \lim_{\substack{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)\\ x=y,\ z=1}} \frac{e^{x(x)(1)}-x^3-1}{x^2+x^2+(1-1)^2}$$
$$= \lim_{x\mapsto 0} \frac{e^{x^2}-1}{2x^2} - \lim_{x\mapsto 0} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{e^{x^2}-1}{2x^2} - \lim_{x\mapsto 0} \frac{x}{2} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{e^{x^2}-1}{2x^2} - 0 = \lim_{x\mapsto 0} \frac{e^{x^2}-1}{2x^2}$$
$$\underset{l'Hôpital}{=} \lim_{x\mapsto 0} \frac{2xe^{x^2}}{4x} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{e^{x^2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

De esto tenemos que $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)} \frac{e^{xyz}-y^3-1}{x^2+y^2+(z-1)^2}$ *no existe.*

Nota: Hay que tener presente que es posible encontrar limites de funciones que sobre infinitas trayectorias coinciden, pero el limite como tal no. Por lo tanto, hay que tener mucho cuidado con el uso de las trayectorias, ya que estas solo nos ayudan a concluir que el limite de cierta función no existe. Para entender esto un poco mejor, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.4 *Sea* $f(x,y)=\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$, *entonces:*

(1) *Verificar que* $\lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=0$, *donde* m *es una constante cualquiera.*

(2) *Verificar que* $\lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=y^2}} f(x,y)=\dfrac{1}{8}$.

(3) *Verificar que* $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y)$ *no existe.*

Solución:

(1) $$\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=mx}}\frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}=\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=mx}}\frac{x^4(mx)^4}{(x^2+(mx)^4)^3}=\lim_{x\mapsto 0}\frac{m^4x^8}{(x^2+m^4x^4)^3}$$
$$=\lim_{x\mapsto 0}\frac{m^4x^8}{(x^2(1+m^4x^2))^3}=\lim_{x\mapsto 0}\frac{m^4x^8}{x^6(1+m^4x^2)^3}=\lim_{x\mapsto 0}\frac{m^4x^2}{(1+m^4x^2)^3}=\frac{m^4(0)^2}{(1+m^4(0)^2)^3}=\frac{0}{1}=0.$$

(2) $$\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=y^2}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=y^2}}\frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}=\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=y^2}}\frac{(y^2)^4y^4}{((y^2)^2+y^4)^3}=\lim_{y\mapsto 0}\frac{y^{12}}{2^3y^{12}}=\frac{1}{8}.$$

(3) *El limite no existe ya que existen trayectorias distintas con limites diferentes (literales (1) y (2)).*

Cuidado: Es posible encontrar funciones tales que el limite sobre cualquier trayectoria que ïmaginemos"que pase por un punto dado exista y coincida en todas estas trayectorias. En este tipo de casos solo sospechamos que el limite debe de existir. El siguiente ejemplo muestra esta situación.

Ejemplo 3.1.5 *Sea* $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$, *entonces:*

(1) *Verificar que* $\lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=0$, *donde* m *es una constante cualquiera.*

(2) *Verificar que* $\lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x^n}} f(x,y)=0$, *donde* $n\geqslant 1$.

Solución:

(1) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=mx}} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=mx}} \dfrac{x^2(mx)^2}{x^2+(mx)^2} = \lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{m^2x^4}{x^2(1+m^2)}$
$= \dfrac{m^2}{1+m^2} \lim\limits_{x\mapsto 0} x^2 = \lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{m^2x^4}{x^2(1+m^2)} = \dfrac{m^2}{1+m^2} \lim\limits_{x\mapsto 0} 0 = 0.$

(2) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x^n}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x^n}} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x^n}} \dfrac{x^2(x^n)^2}{x^2+(x^n)^2} = \lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{x^2x^{2n}}{x^2(1+x^{2n-2})}$
$= \lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n-2}} = \dfrac{0}{1+0} = 0.$

De lo anterior tenemos que el limite de f por diferentes tipos de trayectoria que pasan por $(0,0)$ existen y su valor es cero. Adicionalmente, el lector puede notar que cualquier otra trayectoria que use (que pase por $(0,0)$), el limite sobre esta es cero.

3.2. Limites, cambios de variables y otros

Observación: De los dos ejemplos previos, surge una pregunta natural, la cual es:

> ¿Cómo probar la existencia de el limite de una función
> sin usar la definición original de limite?

Algunas posibles soluciones a esta pregunta, están dadas en los siguientes teoremas.

Teorema 3.2.1 ***(Cambio de variable a polares):*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $L \in \mathbb{R}$, entonces:*

$$\boxed{\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y) = L \iff \lim_{r\mapsto 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = L \ \textit{ para todo } \theta \in \mathbb{R}.}$$

□

Teorema 3.2.2 ***(Cambio de variable a esféricas):*** *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función y* $L \in \mathbb{R}$, *entonces:*

$$\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} f(x,y,z) = L \iff \lim_{\rho\mapsto 0^+} f(\rho cos\theta sin\phi, \rho sin\theta sin\phi, \rho cos\phi) = L$$
$$\text{para todo } \theta, \phi \in \mathbb{R}.$$

□

Nota: Existen otros cambios de variables que son muy útiles para encontrar limites de funciones pero aquí solo enunciamos los más usados. El siguiente teorema es también bastante útil para encontrar limites de funciones.

Teorema 3.2.3 ***(Estricción):*** *Sean* $f, g, h : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones y* $L \in \mathbb{R}$. *Entonces:*

- *Para todo* $x \in A$ *se tiene que* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
- $\lim\limits_{x\mapsto x_0} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto x_0} h(x) = L$.

Entonces se tiene que $\lim\limits_{x\mapsto x_0} g(x) = L$.

□

Ejemplo 3.2.1 *Verificar si los siguientes limites existen usando coordenadas polares.*

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$.

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^3 + 2x^2 + xy^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$.

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(4,5)} \frac{(x-4)^3\,(y-5)^2}{(x-4)^2 + (y-5)^2}$.

<u>*Solución:*</u>

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\mapsto 0^+} \frac{(rcos\theta)^3-(rsin\theta)^3}{r^2} = \lim_{r\mapsto 0^+} \frac{r^3\,(cos^3\theta - sin^3\theta)}{r^2} =$

$\displaystyle= \lim_{r\mapsto 0^+} \frac{r\,(cos^3\theta - sin^3\theta)}{1} = (cos^3\theta - sin^3\theta) \lim_{r\mapsto 0^+} r = (cos^3\theta - sin^3\theta)\cdot 0 = 0.$

Por tanto, tenemos que:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = 0}\,.$$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\mapsto 0^+} \frac{(rcos\theta)(rsin\theta)}{r^2} = \lim_{r\mapsto 0^+} \frac{r^2 cos\theta sin\theta}{r^2} = \lim_{r\mapsto 0^+} cos\theta sin\theta =$

$= cos\theta sin\theta.$

Por tanto, tenemos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ *no existe, ya que el limite anterior es no constante (para valores de θ diferentes obtenemos limites distintos).*

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^3+2x^2+xy^2+2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\mapsto 0^+} \frac{(rcos\theta)^3+2(rcos\theta)^2+(rcos\theta)(rsin\theta)^2+2(rsin\theta)^2}{r^2} =$

$\displaystyle= \lim_{r\mapsto 0^+} \frac{r^2\left(rcos^3\theta+2cos^2\theta+rcos\theta sin^2\theta+2sin^2\theta\right)}{r^2} =$

$\displaystyle= \lim_{r\mapsto 0^+} rcos^3\theta+2cos^2\theta+rcos\theta sin^2\theta+2sin^2\theta =$

$= 0\cdot\ cos^3\theta+2cos^2\theta+0\cdot cos\theta sin^2\theta+2sin^2\theta = 2cos^2\theta+2sin^2\theta = 2.$

Por tanto, tenemos que:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^3+2x^2+xy^2+2y^2}{x^2+y^2} = 2}\,.$$

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(4,5)} \frac{(x-4)^3\,(y-5)^2}{(x-4)^2+(y-5)^2} = \lim_{(x-4,y-5)\mapsto(0,0)} \frac{(x-4)^3\,(y-5)^2}{(x-4)^2+(y-5)^2} =$

$\displaystyle= \lim_{(u,v)\mapsto(0,0)} \frac{u^3\ v^2}{u^2+v^2} = \lim_{r\mapsto 0^+} \frac{(rcos\theta)^3\,(rsin\theta)^2}{r^2} = \lim_{r\mapsto 0^+} \frac{r^5 cos^3\theta sin^2\theta}{r^2} =$

$$= \lim_{r\mapsto 0^+} r^3 cos^3\theta sin^2\theta = cos^3\theta sin^2\theta \lim_{r\mapsto 0^+} r^3 = cos^3\theta sin^2\theta \cdot 0 = 0.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\mapsto(4,5)} \frac{(x-4)^3\,(y-5)^2}{(x-4)^2+(y-5)^2} = 0}\,.$$

Ejemplo 3.2.2 *Verificar si los siguientes limites existen usando coordenadas esféricas.*

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2+z^2}.$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)} \frac{x^2y(z-1)^2}{\left(x^2+y^2+(z-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$

Solución:

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{\rho\mapsto 0^+} \frac{(\rho cos\theta sin\phi)(\rho sin\theta sin\phi)^2}{\rho^2} =$

$$= \lim_{\rho\mapsto 0^+} \frac{\rho^3 cos\theta sin^2\theta sin^3\phi}{\rho^2} = \lim_{\rho\mapsto 0^+} \rho cos\theta sin^2\theta sin^3\phi = cos\theta sin^2\theta sin^3\phi \cdot \lim_{\rho\mapsto 0^+} \rho =$$

$$= cos\theta sin^2\theta sin^3\phi \cdot 0 = 0.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\boxed{\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2+z^2} = 0}\,.$$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \lim_{\rho\mapsto 0^+} \frac{\rho cos\theta sin\phi + \rho sin\theta sin\phi}{\sqrt{\rho^2}} =$

$$= \lim_{\rho\mapsto 0^+} \frac{\rho cos\theta sin\phi + \rho sin\theta sin\phi}{\rho} = \lim_{\rho\mapsto 0^+} \frac{\rho\left(cos\theta sin\phi + sin\theta sin\phi\right)}{\rho} =$$

$$\lim_{\rho\mapsto 0^+} cos\theta sin\phi + sin\theta sin\phi = cos\theta sin\phi + sin\theta sin\phi.$$

Por tanto, tenemos que $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ *no existe, ya que el limite anterior es no constante (para valores de* θ *y* ϕ *diferentes obtenemos limites distintos).*

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \frac{x^2yz^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\rho\mapsto 0^+} \frac{(\rho cos\theta sin\phi)^2(\rho sin\theta sin\phi)(\rho cos\phi)^2}{\rho^3} =$

$$\lim_{\rho\mapsto 0^+} \frac{\rho^5 cos^2\theta\ sin\theta\ sin^3\phi\ cos^2\phi}{\rho^3} = \lim_{\rho\mapsto 0^+} \rho^2 cos^2\theta\ sin\theta\ sin^3\phi\ cos^2\phi = 0.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\boxed{\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \frac{x^2yz^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0}.$$

Ejemplo 3.2.3 *Verificar si los siguientes limites existen usando el teorema de estricción.*

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \frac{x^2 sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Solución:

(1) *Notemos primero que* $x^2 \leqslant x^2+y^2$ *y* $y^2 \leqslant x^2+y^2$ *para todo* $x,y\in\mathbb{R}$. *Así tenemos que:*

$$0 \leqslant \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leqslant \frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2$$

para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. *Por tanto, tenemos que:*

- $0 \leqslant \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leqslant x^2+y^2$ *para cada* $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} x^2+y^2 = 0.$

Por tanto, el teorema de estricción nos dice que

$$\boxed{\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0}.$$

(2) *Notemos primero que* $x^2 \leqslant x^2+y^2+z^2$ *y* $-1 \leqslant sin(*) \leqslant 1$ *para todo* $x,y,z\in\mathbb{R}$. *Así tenemos que:*

- $-\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{(x^2+y^2+z^2)\ (-1)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leqslant \dfrac{x^2\ (-1)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leqslant \dfrac{x^2 sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

- $\dfrac{x^2 sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leqslant \dfrac{(x^2+y^2+z^2)\ sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\right).$

- $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) \leqslant \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot(1) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$

De lo anterior tenemos que para cada $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$*:*

$$\boxed{\begin{array}{c} -\sqrt{x^2+y^2+z^2} \leqslant \dfrac{x^2 sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leqslant \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \lim\limits_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} -\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \lim\limits_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 0 \end{array}}$$

lo cual implica por el teorema de estricción que

$$\boxed{\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \dfrac{x^2 sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0}\ .$$

Capítulo 4

Diferenciabilidad

El objetivo en esta parte es definir la derivada de una función de varias variables $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ donde n y m son enteros positivos. Es de esperar que la derivada de una función de varias variables sea un objeto más complicado que la derivada de una función de una sola variable escalar.

Primero se definirá una herramienta básica de cálculo de derivadas parciales, despues de eso se comenzará a comprender la diferenciabilidad por medio de la geometría de planos tangentes a superficies.

Recordar ***(Diferenciabilidad en cálculo de una variable):*** Sea $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in (a,b)$. Decimos que f es diferenciable en c, si el siguiente limite existe:

$$\boxed{\lim_{x \mapsto c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}}\ .$$

El cual denotaremos por $f'(c)$.

Definición 4.0.1 ***(Derivadas parciales):*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $a = (a_1, \ldots, a_n)$ es un punto interior de A. Definimos las derivadas parciales f en a como los siguientes limites si existen:*

$$\boxed{\begin{aligned}
f_{x_1}(a) &= \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(a+he_1)-f(a)}{h} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(a_1+h, a_2, \ldots, a_n)-f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h},\\
f_{x_2}(a) &= \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(a+he_2)-f(a)}{h} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(a_1, a_2+h, \ldots, a_n)-f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h},\\
&\ \ \vdots\\
f_{x_n}(a) &= \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(a+he_n)-f(a)}{h} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_n+h)-f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h}.
\end{aligned}}$$

Llamaremos a $f_{x_i}(a)$ la derivada parcial respecto a la variable x_i de f en a.

Ejemplo 4.0.1 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = x^2 + y^2$. Entonces cálcular $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$.*

- $f_x(x,y) = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{(x+h)^2+y^2-(x^2+y^2)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{x^2+2xh+h^2+y^2-x^2-y^2}{h} = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{2xh+h^2}{h} = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{2x+h}{1} = 2x.$

- $f_y(x,y) = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{x^2+(y+h)^2-(x^2+y^2)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{x^2+y^2+2yh+h^2-x^2-y^2}{h} = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{2yh+h^2}{h} = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{2y+h}{1} = 2y.$

Notemos que en este proceso consideramos las variables x, y como números reales. Por tanto pudimos haber encontrado a $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ por medio de reglas de derivación de cálculo diferencial sin usar a la definición de limite. Es decir:

- $f_x(x,y) = (x^2+y^2)_x = (x^2)_x + (y^2)_x = 2x$ *(considerando y constante).*

- $f_y(x,y) = (x^2+y^2)_y = (x^2)_y + (y^2)_y = 2y$ *(considerando x constante).*

Regla para determinar las derivadas parciales: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de varias variables con $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto f(x_1,\ldots,x_n)$. Entonces para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ se tiene que:

> Para determinar a $f_{x_i}(a)$ se conservan a las variables $x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ constantes y se deriva respecto a x_i con las reglas usuales de cálculo diferencial.

Ejemplo 4.0.2 *Si $f(x,y,z) = xy^2 + sin(z^3) + e^z$, determinar las derivadas parciales de f y encontrar $f_z(0,0,\pi)$.*

- $f_x(x,y,z) = (xy^2 + sin(z^3) + e^z)_x = y^2.$

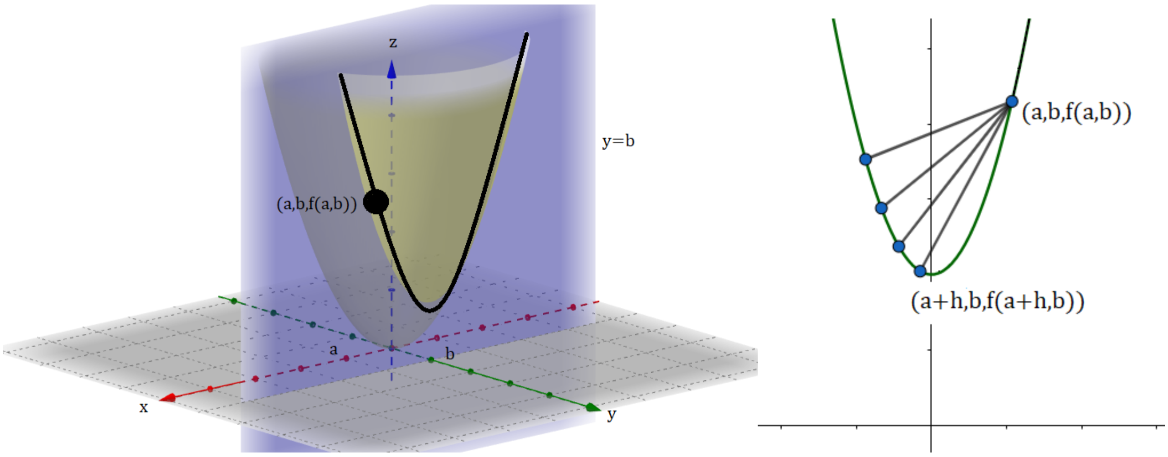
- $f_y(x,y,z) = (xy^2 + sin(z^3) + e^z)_y = 2xy.$

- $f_z(x,y,z) = (xy^2 + sin(z^3) + e^z)_z = 3z^2 cos(z^3) + e^z.$

De lo anterior tenemos que $f_z(0,0,\pi) = 3\pi^2 cos(\pi^3) + e^\pi.$

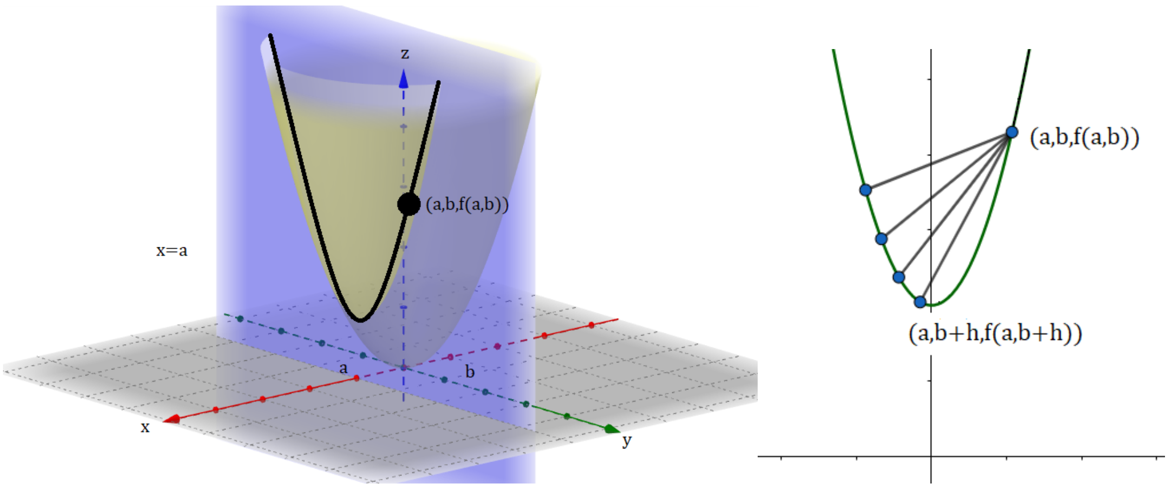
Observación: Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función la cual satisface que $f_x(a,b)$ y $f_y(a,b)$ existen. Entonces ¿cuál es la interpretación de las derivadas parciales de f en (a,b) respecto a la Gráfica(f)?

- $f_x(a,b) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$ $\big($la variable y es constante $y=b\big)$



Entonces se puede notar con facilidad que $f_x(a,b)$ es la pendiente de la recta tangente a gráfica de la función $g(x)=f(x,b)$ en el punto $x=a$.

- $f_y(a,b) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$ (la variable x es constante $x=a$).



Entonces se puede notar con facilidad que $f_y(a,b)$ es la pendiente de la recta tangente a gráfica de la función $h(y)=f(a,y)$ en el punto $y=b$.

Nota: En ocasiones para cálcular las derivadas parciales de una función es necesario recurrir a la definición, ya que posiblemente el punto donde se quiere encontrar la derivada parcial tiene alguna "irregularidad".

Ejemplo 4.0.3 *Sea* $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como* $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0). \end{cases}$

Encontrar las derivadas parciales de f *en todos los puntos.*

- *Si* $(x,y)\neq(0,0)$*, entonces* $f(x,y)=\dfrac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2}$ *y por tanto las derivadas parciales de* f *son:*

$$f_x(x,y)=\left(\frac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2}\right)_x=\frac{6xy(x^2+y^2)-2x(3x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{8xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$f_y(x,y)=\left(\frac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2}\right)_y=\frac{(x^2+y^2)(3x^2-3y^2)-2y(3x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{3x^4-6x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

- *Si* $(x,y)=(0,0)$*, entonces nos vemos obligados a aplicar la definición.*

$$f_x(0,0)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{\frac{3h^2(0)-(0)^3}{h^2+0^2}-0}{h}=0.$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{\frac{3(0)^2(h)-(h)^3}{(0)^2+h^2}-0}{h}=-1.$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$f_x(x,y)=\begin{cases} \dfrac{8xy^3}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3x^4-6x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y)\neq(0,0), \\ -1 & si\ (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

4.1. Derivadas parciales de orden superior

Hasta el momento, en nuestro estudio de la diferenciación hemos considerado solo derivadas parciales de primer orden. No obstante, es fácil imaginar el cálculo de derivadas parciales de segundo y tercer orden por medio de iterar el proceso de diferenciación respecto a una variable, mientras todas las demás permanecen constantes.

Ejemplo 4.1.1 *Sea $f(x,y,z)=x^2y+zcos(x)$, entonces las derivadas parciales de primer orden son:*

$f_x(x,y,z)=(x^2y+zcos(x))_x=2xy-zsin(x).$

$f_y(x,y,z)=(x^2y+zcos(x))_y=x^2.$

$f_z(x,y,z)=(x^2y+zcos(x))_z=cos(x).$

Las derivadas parciales de segundo orden son:

$(f_x)_x(x,y,z)=(2xy-zsin(x))_x=2y-zcos(x).$

$(f_x)_y(x,y,z)=(2xy-zsin(x))_y=2x.$

$(f_x)_z(x,y,z)=(2xy-zsin(x))_z=-sin(x)$

$(f_y)_x(x,y,z)=(x^2)_x=2x.$

$(f_y)_y(x,y,z)=(x^2)_y=0.$

$(f_y)_z(x,y,z)=(x^2)_z=0.$

$(f_z)_x(x,y,z)=(cos(x))_x=-sin(x).$

$(f_z)_y(x,y,z)=(cos(x))_y=0.$

$(f_z)_z(x,y,z)=(cos(x))_z=0.$

De la misma manera podemos encontrar las derivadas parciales de orden 3 y demás ordenes.

Notación (Derivadas parciales de orden superior): Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una función con $(x_1,\ldots,x_n)\mapsto f(x_1,\ldots,x_n)$. Entonces para cada $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ escribiremos:

$$\boxed{f_{x_ix_j}=(f_{x_i})_{x_j}.}$$

Siempre que las derivada parcial correspondientes de segundo orden exista. De forma análoga para $i_1,\ldots,i_k\in\{1,\ldots,n\}$ escribimos:

$$\boxed{f_{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}}=(\ldots(f_{x_{i_1}})_{x_{i_2}}\ldots)_{x_{i_k}}.}$$

Siempre que la derivada parcial de orden n exista.

Ejemplo 4.1.2 *Hallar f_{xyz} donde $f(x,y,z) = x^3y + sin(xz)$.*

$f_x(x,y,z) = (x^3y + sin(xz))_x = 3x^2y + zcos(xz)$.

$f_{xy}(x,y,z) = (3x^2y + zcos(xz))_y = 3x^2$.

$f_{xyz}(x,y,z) = (3x^2)_z = 0$.

Nota: Del ejemplo 4.1.1 sugiere que hay una relación entre las derivadas parciales de segundo orden mixtas ($f_{xy} = f_{yx}$, $f_{xz} = f_{zx}$ y $f_{zy} = f_{yz}$). De hecho bajo ciertas condiciones descritas en el siguiente teorema, tenemos la igualdad de las derivadas parciales mixtas.

Teorema 4.1.1 ***(Igualdad derivadas parciales mixtas).*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto f(x_1,\ldots,x_n)$, la cual satisface que*

(1) *A es un conjunto abierto.*

(2) *Las derivadas parciales de orden 1 y 2 son continuas en A.*

Entonces para cada $i, j \in \{1,\ldots,n\}$ se tiene que $\boxed{f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}}$.

□

Nota: Hay que tener en cuenta que es posible que las derivadas parciales mixtas sean diferentes (no se satisfacen todas las hipótesis del teorema anterior). Para entender esto, consideremos el siguiente ejercicio.

Ejercicio: Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Entonces:

(1) Cálcular $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.

(2) Cálcular $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ con $(x,y) \neq (0,0)$.

(3) Demostrar que f_x y f_y son continuas en $\mathbb{R}^2$.

(4) Demostrar que $f_{xy}(0,0)$ y $f_{yx}(0,0)$ existen y $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

(5) ¿Qué condición no satisface f en el teorema 4.1.1, para que falle la igualdad en las derivadas parciales mixtas?

4.2. Plano tangente y diferenciabilidad

Observación: Sea $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función diferenciable en $c\in(a,b)$. Entonces tenemos que:

$$\boxed{f'(c)=\lim_{x\mapsto c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}.$$

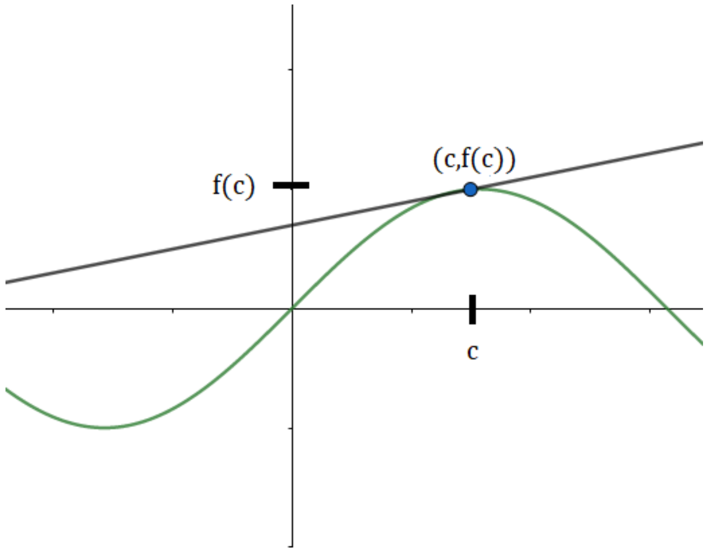
Por lo tanto, tenemos que:

$$f \text{ es diferenciable en } c \Leftrightarrow \lim_{x\mapsto c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c)=0$$
$$f \text{ es diferenciable en } c \Leftrightarrow \lim_{x\mapsto c}\frac{f(x)-f(c)-f'(c)\cdot(x-c)}{x-c}=0$$
$$f \text{ es diferenciable en } c \Leftrightarrow \lim_{x\mapsto c}\frac{f(x)-\big(f(c)+f'(c)\cdot(x-c)\big)}{x-c}=0$$

De esta última equivalencia podemos notar varias cosas:

(1) La función $\boxed{H(x)=f(c)+f'(c)\cdot(x-c)}$ es una función se aproxima a $f(x)$ para valores cercanos a c.

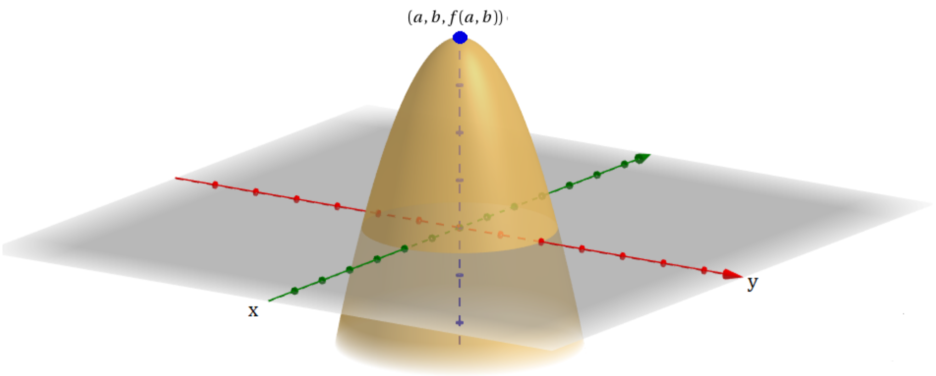
(2) La función $\boxed{H(x)=f(c)+f'(c)\cdot(x-c)}$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c,f(c))$. Además es claro que $H(c)=f(c)$ y $H'(c)=f'(c)$.



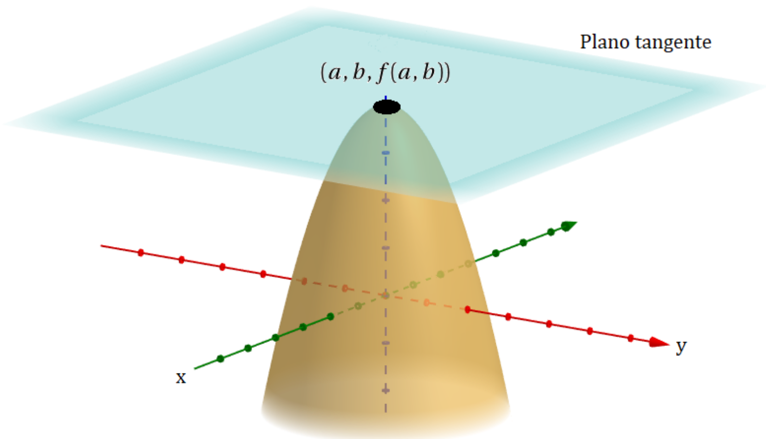
Observación (plano tangente): Supongamos ahora que $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función y sea $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Recordemos que la gráfica de f es el siguiente conjunto:

$$\text{Gráfica}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\} \text{ (una superficie en } \mathbb{R}^3).$$

Por tanto, el punto $(a, b, f(a, b))$ es un punto de la gráfica de f.



Por lo tanto surge una pregunta geométrica natural.

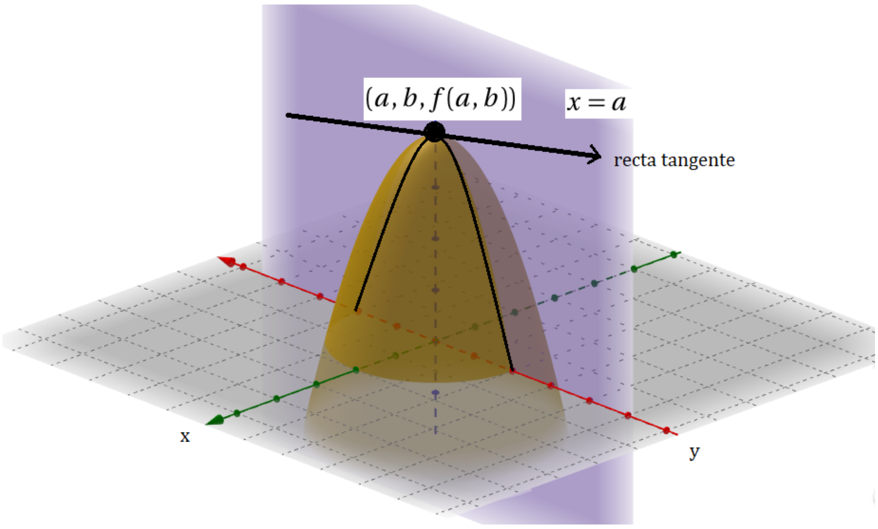


Para ver esto, notemos lo siguiente:

(1) Si consideremos la intersección del plano $x = a$ con la Gráfica(f), entonces la ecuación de la recta tangente a $\boxed{\text{Gráfica}(f) \bigcap \text{Plano}(x = a)}$ en el punto $(a, b, f(a, b))$ es:

$$(x, y, z) = tD + P = t(0, 1, f_x(a, b)) + (a, b, f(a, b)) \text{ con } t \in \mathbb{R},$$

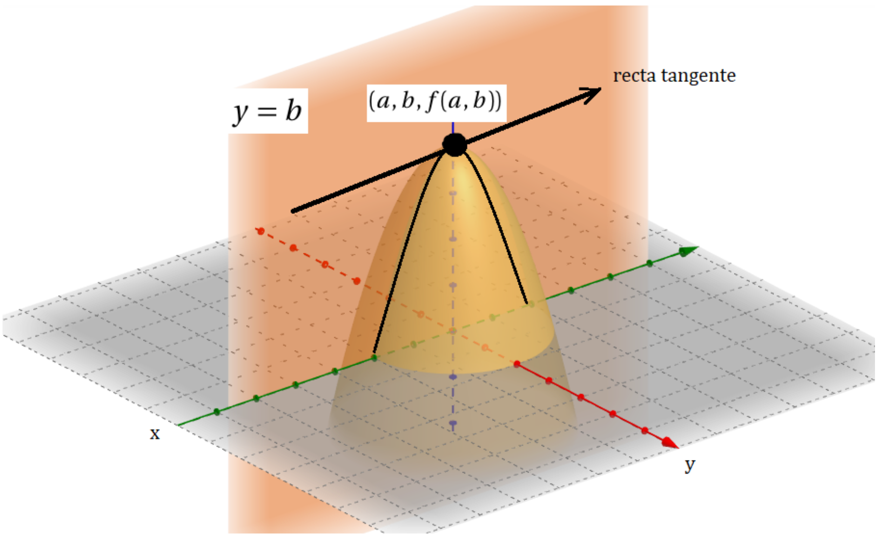
donde $D = (0, 1, f_x(a, b))$ es el vector director de la recta (¿por qué?) y $P = (a, b, f(a, b))$ un punto por donde pasa la recta.



(2) Si consideremos la intersección del plano $y=b$ con la Gráfica(f), entonces la ecuación de la recta tangente a $\boxed{\text{Gráfica}(f)\bigcap \text{Plano}(y=b)}$ en el punto $(a,b,f(a,b))$ es:

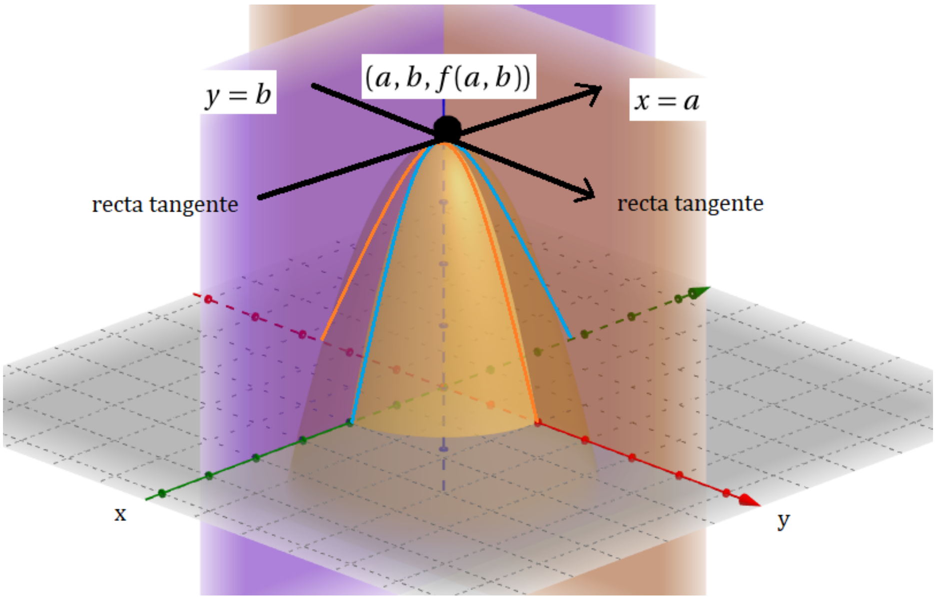
$$(x,y,z)=tD+P=t(1,0,f_x(a,b))+(a,b,f(a,b)) \text{ con } t\in\mathbb{R},$$

donde $D=(1,0,f_x(a,b))$ es el vector director de la recta (¿por qué?) y $P=(a,b,f(a,b))$ un punto por donde pasa la recta.



De lo anterior, podemos encontrar el plano tangente a Gráfica(f) en el punto $(a,b,f(a,b))$, mediante la ecuación normal del plano $\boxed{n\cdot(x-a,y-b,z-f(a,b))=0}$, donde n es el vector normal al plano tangente, el cual tiene ecuación:

$$n=(0,1,f_x(a,b))\times(1,0,f_y(a,b))=(-f_x(a,b),-f_y(a,b),1) \quad \text{(VECTOR NORMAL)}.$$



Por lo tanto, la ecuación del plano tangente a la Gráfica(f) en el punto $(a,b,f(a,b))$ es:

$$(-f_x(a,b),-f_y(a,b),1)\cdot(x-a,y-b,z-f(a,b))=0.$$
$$-f_x(a,b)(x-a)-f_y(a,b)(y-b)+z-f(a,b)=0.$$

Lo cual equivale a tener que $\boxed{z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)}$.

Lo anterior lo resumimos en el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1 ***(Ecuación plano tangente):*** *Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ una función y (a,b) es un punto interior de A. Entonces si:*

(1) *Si $f_x(a,b)$ y $f_y(a,b)$ existen.*

(2) *La gráfica de f tiene un plano tangente en $(a,b,f(a,b))$.*

Entonces la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en $(a,b,f(a,b))$ es:

$$\boxed{z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b).}$$

□

Observación: Recordemos que si $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función, entonces:

$$\boxed{f \text{ es diferenciable en } c \Longleftrightarrow \lim_{x\mapsto c}\frac{f(x)-\big(f(c)+f'(c)\cdot(x-c)\big)}{x-c}=0}\,.$$

Por lo tanto si quisieramos definir diferenciabilidad para funciones de 2 variables, notariamos los siguientes cambios en el limite anterior:

	Tangencia en el punto- ecuación	aproximación al punto
$f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(c)+f'(c)\cdot(x-c)$	$x-c$
$f:A\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(a,b)+f_x(a,b)\,(x-a)+f_y(a,b)\,(y-b)$	$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

Por lo tanto, del anterior análisis tenemos que la siguiente definición tiene sentido.

Definición 4.2.1 ***(Diferenciabilidad):*** *Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ una función y (a,b) es un punto interior de A. Decimos que f es diferenciable en (a,b), si:*

(1) *$f_x(a,b)$ y $f_y(a,b)$ existen (las derivadas parciales de f en (a,b) existen).*

(2) $$\lim_{(x,y)\mapsto(a,b)}\frac{f(x,y)-\big(f(a,b)+f_x(a,b)\cdot(x-a)+f_y(a,b)\cdot(y-b)\big)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0.$$

Nota: Las condiciones (1) y (2) de la definición anterior la podemos cambiar por la siguiente condición:

$$\lim_{(h,k)\mapsto(0,0)}\frac{f(a+h,b+k)-\big(f(a,b)+f_x(a,b)\cdot h+f_y(a,b)\cdot k\big)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

realizando los cambios de variable $x=a+h,\ y=b+k$.

Ejemplo 4.2.1 *Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ una función definida por $f(x,y)=x^2+y^2+1$. Verificar que f es diferenciable en $(2,1)$.*

Solución:

Para ver que f es diferenciable en $(2,1)$, tenemos que:

- *Encontrar las derivadas parciales de f en $(2,1)$.*

$$f_x(x,y) = 2x \quad \Rightarrow \quad f_x(2,1) = 2(2) = 4.$$
$$f_y(x,y) = 2y \quad \Rightarrow \quad f_y(2,1) = 2(1) = 2.$$

- *Condición limite.*

$$\lim_{(h,k)\mapsto(0,0)} \frac{f(2+h,1+k) - \left(f(2,1) + f_x(2,1)\cdot h + f_y(2,1)\cdot k\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\mapsto(0,0)} \frac{(2+h)^2 + (1+k)^2 + 1 - (6+4h+2k)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\mapsto(0,0)} \frac{4+4h+h^2+1+2k+k^2+1-6-4h-2k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\mapsto(0,0)} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\mapsto(0,0)} \sqrt{h^2+k^2} = 0.$$

Por lo tanto f es diferenciable en $(2,1)$.

Ejemplo 4.2.2 *Sea f la función definida como* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(1) *Demostrar que f no es continua en* $(0,0)$.

(2) *Demostrar que f no es diferenciable en* $(0,0)$.

<u>Solución:</u>

(1) *Recordemos que:*

$$\boxed{f \text{ es continua en } (0,0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y) = f(0,0)}\,.$$

Por lo tanto, si analizamos el limite $\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *aplicando coordenadas polares, tenemos que:*

$$\lim_{r\mapsto 0^+} \frac{r cos\theta \cdot r sin\theta}{r^2} = cos\theta sin\theta.$$

Con esto, nos podemos dar cuenta que el limite no existe ya que obtenemos una función no constante que depende de la variable θ (¿por qué es no constante?). Así f no es continua en $(0,0)$.

(2) *Veamos primero si las derivadas parciales existen.*

$$f_x(0,0) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0.$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{\frac{0 \cdot h}{0^2+h^2} - 0}{h} = 0.$$

Veamos ahora la condición del limite (para diferenciabilidad).

$$\lim_{(x,y) \mapsto (0,0)} \frac{f(x,y) - \big(f(0,0) + f_x(0,0) \cdot (x-0) + f_y(0,0) \cdot (y-0)\big)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = \lim_{(x,y) \mapsto (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$\lim_{(x,y) \mapsto (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \mapsto (0,0)} \frac{\frac{xy}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \mapsto (0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

De nuevo aplicamos coordenadas polares para estudiar el limite $\lim\limits_{(x,y) \mapsto (0,0)} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ *y de esta manera tenemos que:*

$$\lim_{r \mapsto 0^+} \frac{r cos\theta \cdot r sin\theta}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{r \mapsto 0^+} \frac{r cos\theta \cdot r sin\theta}{r^3} = \lim_{r \mapsto 0^+} \frac{cos\theta \cdot sin\theta}{r} =$$

$$\lim_{r \mapsto 0^+} \frac{cos\theta \cdot sin\theta}{r} = \begin{cases} 0 & si \ cos\theta \cdot sin\theta = 0, \\ \pm\infty & si \ cos\theta \cdot sin\theta \neq 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, f no es diferenciable en $(0,0)$.

Nota: En cálculo de una variable tenemos que si una función no es continua en un punto, entonces esta función no puede ser diferenciable en el mismo punto. El ejemplo anterior nos muestra un fenómeno similar, en donde una función de varias variables no es continua y tampoco diferenciable en el sentido descrito anteriormente. Debido a que la noción de diferenciabilidad para funciones de varias variables se definió a partir de ideas similares a las de calculo de una variable, entonces no será extraño que tengamos un resultado similar para este contexto. El siguiente teorema muestra la relación entre diferenciabilidad y continuidad para funciones de varias variables.

Teorema 4.2.2 ***(Diferenciable "$\Rightarrow$" continua):*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en (a,b), entonces f es continua en (a,b).*

$\square$

Corolario 4.2.3 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función la cual no es continua en (a,b), entonces f no es diferenciable en (a,b).*

$\square$

Ejemplo 4.2.3 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Entonces:

(1) *Hallar las derivadas parciales de f.*

(2) *Demostrar que f es diferenciable en $(0,0)$.*

<u>Solución:</u>

(1) *Para encontrar las derivadas parciales de f, tenemos los siguientes casos:*

- *Si $(x,y) \neq (0,0)$, entonces:*

$$f_x(x,y) = \left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right)_x = \frac{2xy^2(x^2+y^2) - 2x(x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y^2 + 2xy^4 - 2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$f_y(x,y) = \left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right)_y = \frac{2x^2y(x^2+y^2) - 2y(x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^4y + 2x^2y^3 - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}.$$

- *Si $(x,y) = (0,0)$, entonces:*

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^2 0^2}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0.$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{0^2 h^2}{0^2+h^2} - 0}{h} = 0.$$

Por tanto las derivadas parciales de f tienen la forma:

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0).\end{cases} \quad , \quad f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(2) *Para ver que f es diferenciable en $(0,0)$, analicemos el siguiente limite:*

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\frac{f(x,y)-\big(f(0,0)+f_x(0,0)\cdot(x-0)+f_y(0,0)\cdot(y-0)\big)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\frac{\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ahora, es fácil de ver que $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ *existe usando coordenadas polares de la siguiente manera:*

$$\lim_{r\mapsto 0^+}\frac{r^2cos^2\theta\cdot r^2sin^2\theta}{(r^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{r\mapsto 0^+}\frac{r^2cos^2\theta\cdot r^2sin^2\theta}{r^3}=\lim_{r\mapsto 0^+} rcos^2\theta\cdot sin^2\theta=0.$$

Así tenemos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0$, *lo cual implica que f es diferenciable en $(0,0)$.*

Nota: El siguiente teorema nos brinda una relación entre aquellas funciones que tienen derivadas parciales continuas y su correspondiente diferenciabilidad.

Teorema 4.2.4 *Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ una función la cual satisface que:*

(1) *A es abierto.*

(2) *f_x y f_y son continuas sobre A.*

Entonces f es diferenciable sobre A (en cada punto de A).

□

Ejemplo 4.2.4 *Las funciones polinómicas de 2 variables son funciones diferenciables en $\mathbb{R}^2$, debido a que las derivas parciales son funciones continuas (las derivadas parciales son polinomios de 2 variables, los cuales por resultado anterior son funciones continuas y el teorema anterior nos garantiza la diferenciabilidad). Por lo tanto las siguientes funciones son diferenciables en $\mathbb{R}^2$.*

(1) $f(x,y)=x-50y+x^2y+25x^2y^9+15.$

(2) $f(x,y)=10-5x^2-4y^2.$

(3) $f(x,y)=x+6y+xy+8x^2y.$

(4) $f(x,y)=\sum_{i,j}a_{ij}x^iy^j$ *donde para cada* i *y* j *se tiene que* a_{ij} *son números reales constantes (esta es la escritura genérica de un polinomio de dos variable).*

Ejemplo 4.2.5 *Sea* $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$*, entonces tenemos que:*

$$f_x(x,y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

$$f_y(x,y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Por tanto, f_x *y* f_y *son continuas en* $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1-x^2-y^2>0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$*, lo cual implica por el teorema 4.2.4 que* f *es diferenciable en* $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$.

Ejemplo 4.2.6 *Sea* $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}+1 & si\ (x,y)\neq(0,0),\\ 1 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ *entonces :*

(1) f *no es diferenciable en* $(0,0)$.

Para ver esto, es suficiente notar que f *no es continua en* $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}+1=\lim_{r\mapsto0^+}\frac{r\cos\theta\, r\sin\theta}{r^2}+1=\cos\theta\cdot\sin\theta+1.$$

Por tanto, el limite no existe ya que depende de la variable θ*, lo cual implica que* f *no es continua en* $(0,0)$.

(2) f_x *y* f_y *son continuas en* $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

Para ver esto, es suficiente notar que f_x *y* f_y *se pueden calcular fácilmente para valores* $(x,y)\neq(0,0)$. *En este caso tenemos que:*

$$f_x(x,y)=\left(\frac{xy}{x^2+y^2}+1\right)_x=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$f_y(x,y)=\left(\frac{xy}{x^2+y^2}+1\right)_y=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Por lo tanto f_x y f_y son funciones continuas en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

(3) *f es diferenciable únicamente en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.*

Esto es por (1),(2) y el teorema 4.2.4.

Nota: De hecho en el ejemplo anterior, pudimos haber estudiado un poco más las derivadas parciales de f, para darnos cuenta que:

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}\qquad f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Además f_x y f_y son solo continuas en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, ya que si fueran continuas en $\mathbb{R}^2$, entonces por el teorema 4.2.4 tendríamos que f sería diferenciable en $\mathbb{R}^2$, pero ya sabemos que no es diferenciable en $(0,0)$.

Ejemplo 4.2.7 *Sea* $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \textit{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \textit{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ *la función del ejemplo 4.2.3, entonces:*

(1) *Las derivadas parciales de f son:*

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \textit{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \textit{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}\qquad f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & \textit{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \textit{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(2) *Se puede probar que las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ (ejercicio).*

Por lo tanto, el teorema 4.2.4 nos dice que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

Pregunta: Dada $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una función con $n\geqslant 3$ y $a\in A$ entonces:

¿Cómo definir diferenciabilidad para f en a?

Para $n\in\{1,2\}$ podemos interpretar ó estudiar el comportamiento de la geometría de la gráfica de la función, pero cuando $n\geqslant 3$, no podemos interpretar la geometría de la gráfica de la función (¿por qué?). Por lo tanto, lo que haremos es dar una definición similar a la definición de diferenciabilidad para $n=2$. Para esto notemos las siguientes similitudes:

	expresión derivadas parciales	aproximación al punto
$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$	$f(a)+\sum\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}(a)\cdot(x_i-a_i)$	$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2}$
$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$	$f(a,b)+f_x(a,b)\,(x-a)+f_y(a,b)\,(y-b)$	$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

De esta manera definimos diferenciabilidad para funciones $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

Definición 4.2.2 ***(Diferenciabilidad):*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un punto interior de A. Decimos que f es diferenciable en a, si:*

(1) $f_{x_1}(a), \ldots, f_{x_n}(a)$ *existen (las derivadas parciales de f en a existen).*

(2) $$\lim_{x\mapsto a} \frac{f(x)-\left(f(a)+\sum\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}(a)\cdot(x_i-a_i)\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2}} = 0.$$

Nota: A continuación damos la relación de diferenciabilidad y continuidad para funciones de varias variables.

Teorema 4.2.5 ***(Diferenciable " $\Rightarrow$ " continua):*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en a, entonces f es continua en a.*

□

Corolario 4.2.6 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función la cual no es continua en a, entonces f no es diferenciable en a.*

□

Ejemplo 4.2.8 *Sea* $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2} & si\ (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & si\ (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$ *Mostrar que f no es diferenciable en* $(0,0,0)$.

<u>Solución:</u> *Para ver esto, probaremos únicamente que f no es continua en* $(0,0,0)$.

$$\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}.$$

Aplicando coordenadas esféricas, tenemos que:

$$\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{\rho\mapsto 0^+} \frac{\rho cos\theta sin\phi \cdot \rho sin\theta sin\phi}{\rho^2} = cos\theta sin\theta sin^2\phi.$$

Por tanto, este limite no existe ya que depende de las variables θ y ϕ. Esto implica a su vez que f no es continua en $(0,0,0)$.

Ejemplo 4.2.9 *Sea* $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^2y(z-1)^2}{x^2+y^2+(z-1)^2} & si\ (x,y,z) \neq (0,0,1), \\ 0 & si\ (x,y,z) = (0,0,1). \end{cases}$ *Entonces:*

(1) *Encontrar las derivadas parciales de f en* $(0,0,1)$.

(2) *Verificar si f es diferenciable en* $(0,0,1)$.

<u>*Solución:*</u>

(1) *Derivadas parciales:*

- $f_x(0,0,1) = \lim_{h\mapsto 0} \dfrac{f(0+h,0,1)-f(0,0,1)}{h} = \lim_{h\mapsto 0} \dfrac{\dfrac{h^2\cdot 0\cdot(1-1)^2}{h^2+0^2+(1-1)^2}-0}{h} = 0.$

- $f_y(0,0,1) = \lim_{h\mapsto 0} \dfrac{f(0,0+h,1)-f(0,0,1)}{h} = \lim_{h\mapsto 0} \dfrac{\dfrac{0^2\cdot h\cdot(1-1)^2}{0^2+h^2+(1-1)^2}-0}{h} = 0.$

- $f_z(0,0,1) = \lim_{h\mapsto 0} \dfrac{f(0,0,1+h)-f(0,0,1)}{h} = \lim_{h\mapsto 0} \dfrac{\dfrac{0^2\cdot 0\cdot(1+h-1)^2}{0^2+0^2+(1+h-1)^2}-0}{h} = 0.$

(2) *Para verificar la diferenciabilidad de f en el punto* $(0,0,1)$ *analicemos el siguiente limite:*

$$\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)} \frac{f(x,y,z)-\big(f(0,0,1)+f_x(0,0,1)\cdot(x-0)+f_y(0,0,1)\cdot(y-0)+f_z(0,0,1)\cdot(z-1)\big)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-1)^2}} =$$

$$\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)} \frac{f(x,y,z)-\big(0+0\cdot x+0\cdot y+0\cdot(z-1)\big)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}} = \lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)} \frac{\dfrac{x^2y(z-1)^2}{x^2+y^2+(z-1)^2}}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}} =$$

$$\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)} \frac{x^2y(z-1)^2}{\big(x^2+y^2+(z-1)^2\big)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \frac{x^2yz^2}{\big(x^2+y^2+z^2\big)^{\frac{3}{2}}}.$$

Aplicando coordenadas esféricas $\big(x=\rho cos\theta sin\phi,\ y=\rho sin\theta sin\phi,\ z=\rho cos\phi\big)$ *tenemos que:*

$$\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \frac{x^2yz^2}{\big(x^2+y^2+z^2\big)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\rho\mapsto0^+} \frac{(\rho cos\theta sin\phi)^2(\rho sin\theta sin\phi)(\rho cos\phi)^2}{\rho^3} =$$

$$\lim_{\rho\mapsto0^+} \frac{\rho^5 cos^2\theta\ sin\theta\ sin^3\phi\ cos^2\phi}{\rho^3} = \lim_{\rho\mapsto0^+} \rho^2 cos^2\theta\ sin\theta\ sin^3\phi\ cos^2\phi = 0.$$

Por tanto, f *es diferenciable en* $(0,0,1)$.

Nota: El siguiente teorema nos brinda una relación entre aquellas funciones que tienen derivadas parciales continuas y su correspondiente diferenciabilidad.

Teorema 4.2.7 *Sea* $f: A\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función la cual satisface que:*

(1) *A es abierto.*

(2) *Las derivadas parciales de f son continuas sobre A.*

Entonces f es diferenciable sobre A (en cada punto de A).

□

Ejemplo 4.2.10 *Sea* $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^2y(z-1)^2}{x^2+y^2+(z-1)^2} & si\ (x,y,z)\neq(0,0,1), \\ 0 & si\ (x,y,z)=(0,0,1) \end{cases}$ *la función del ejemplo 4.2.9, entonces se puede ver que las derivadas parciales de f son continuas en* $\mathbb{R}^3-\{(0,0,1)\}$, *lo cual implica por el teorema 4.2.7 que f es diferenciable en* $\mathbb{R}^3-\{(0,0,1)\}$. *Además como f es diferenciable en* $(0,0,1)$ *(ejemplo 4.2.9), entonces f es diferenciable en todos los puntos de* $\mathbb{R}^3$.

Nota: A continuación, definimos diferenciabilidad para funciones de la forma:

$$\boxed{f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m}.$$

Donde $f(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x))$ para cada $x \in A$ y $\{f^i : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\}_{i=1}^m$.

Definición 4.2.3 ***(Diferenciabilidad):*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función donde para cada $x \in A$ se tiene que $f(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x))$ con $\{f^i : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\}_{i=1}^m$. Decimos que f es diferenciable en a, si para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ se tiene que f^i es diferenciable en a en el sentido de la definición 4.2.2.*

Ejemplo 4.2.11 *Sea $f(x, y) = (ln(x), \sqrt{1 - x^2 - y^2}, e^{x+y})$, entonces tenemos que:*

(1) *Las funciones componente de f son:*

· $f^1(x, y) = ln(x)$.

· $f^2(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

· $f^3(x, y) = e^{x+y}$.

(2) *Las funciones componente de f son diferenciables en:*

· *Diferenciabilidad de $f^1(x, y) = ln(x)$: Las derivadas parciales de f^1 son:*

$$f_x^1(x, y) = \frac{1}{x}, \qquad f_y^1(x, y) = 0.$$

Las cuales son continuas únicamente en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ (¿por qué?). De esta forma, el teorema 4.2.7 nos dice que f^1 es diferenciable en cada punto de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

· *Diferenciabilidad de $f^2(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$: Las derivadas parciales de f^2 son:*

$$f_x^2(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \qquad f_y^2(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Las cuales son continuas únicamente en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - y^2 > 0\}$. De esta forma, el teorema 4.2.7 nos dice que f^2 es diferenciable en cada punto de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

· *Diferenciabilidad de $f^3(x, y) = e^{x+y}$: Es claro que f^3 es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ (¿por qué?).*

Entonces f es diferenciable en cada punto del conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ x > 0\}$.

4.3. Derivadas direccionales

Definición 4.3.1 ***(Derivada direccional):*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $a \in A$ un punto interior. Dado $u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, definimos:*

$$\boxed{f_u(a) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(a+hu) - f(a)}{h}},$$

si el limite existe y lo llamaremos la derivada direccional de f en a con dirección u.

Observación: Es fácil de darse cuenta, que las derivadas parciales de una función son casos particulares de derivadas direccionales.

$$\boxed{\begin{array}{l}
f_{x_1}(a) = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(a_1+h, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(a+he_1) - f(a)}{h} = f_{e_1}(a), \\
f_{x_2}(a) = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(a_1, a_2+h, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(a+he_2) - f(a)}{h} = f_{e_2}(a), \\
\qquad \vdots \\
f_{x_n}(a) = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(a_1, a_2, \ldots, a_n+h) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(a+he_n) - f(a)}{h} = f_{e_n}(a).
\end{array}}$$

Donde para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que e_i es aquel vector en $\mathbb{R}^n$ que tiene un 1 en la i-esima componente y cero en las demás componentes.

Ejemplo 4.3.1 *Sea $f(x, y, z) = 2xy^2 + z + 20$. Encontrar $f_{(1,1,0)}(0,0,0)$.*

$$f_{(1,1,0)}(0,0,0) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f((0,0,0) + h(1,1,0)) - f(0,0,0)}{h} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(h,h,0) - f(0,0,0)}{h}$$

$$f_{(1,1,0)}(0,0,0) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{2h \cdot h^2 + 0 + 20 - 20}{h} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{2h^3}{h} = \lim_{h \mapsto 0} 2h^2 = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que $f_{(1,1,0)}(0,0,0) = 0$.

Nota: El siguiente teorema nos brinda una forma rápida de encontrar las derivadas direccionales de una función, a partir de la diferenciabilidad de la función. En este caso, solo necesitaremos encontrar las derivadas parciales de la función para conocer el valor de la derivada direccional.

Teorema 4.3.1 *Supongamos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $a \in A$ y $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, entonces $f_u(a)$ existe y además:*

$$\boxed{f_u(a) = (f_{x_1}(a), \ldots, f_{x_n}(a)) \bullet (u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(a) u_i.}$$

$\square$

Ejemplo 4.3.2 *Dada la función $f(x, y, z) = x^2 - 5xy + y^3 + z$, encontrar $f_{(1,2,3)}(1, 0, 1)$.*

- *Es fácil notar que f es diferenciable en $\mathbb{R}^3$ debido a que sus derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^3$ (teorema 4.2.7).*

- *Las derivadas parciales de f en $(1, 0, 1)$ son:*

$$f_x(x, y, z) = 2x - 5y \quad \Rightarrow \quad f_x(1, 0, 1) = 2(1) - 5(0) = 2.$$
$$f_y(x, y, z) = -5x + 3y^2 \quad \Rightarrow \quad f_y(1, 0, 1) = -5(1) + 3(0)^2 = -5.$$
$$f_z(x, y, z) = 1 \quad \Rightarrow \quad f_z(1, 0, 1) = 1.$$

- *Como f es diferenciable en $(1, 0, 1)$, entonces el teorema 4.3.1 nos dice que:*

$$f_{(1,2,3)}(1, 0, 1) = (f_x(1, 0, 1), f_y(1, 0, 1), f_z(1, 0, 1)) \bullet (1, 2, 3),$$
$$f_{(1,2,3)}(1, 0, 1) = f_x(1, 0, 1) \cdot 1 + f_y(1, 0, 1) \cdot 2 + f_z(1, 0, 1) \cdot 3,$$
$$f_{(1,2,3)}(1, 0, 1) = 2 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 2 - 10 + 3 = -5.$$

Por lo tanto, tenemos que $f_{(1,2,3)}(1, 0, 1) = -5$.

Nota: Tener en cuenta que la fórmula del teorema 4.3.1 para encontrar la derivada direccional solo la debemos usar si sabemos que la función es diferenciable en el punto. Para comprender esto, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.3 *Sea* $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & si\ (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ *Entonces:*

(1) *Dado* $(u,v)\neq(0,0)$*, hallar* $f_{(u,v)}(0,0)$.

(2) *¿Dónde es* f *continua?*

(3) *¿Dónde es* f *diferenciable?*

(4) *Encontrar las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.

(5) *¿Podemos aplicar el teorema 4.3.1 para encontrar* $f_{(u,v)}(0,0)$ *con* $(u,v)\neq(0,0)$*?*

Solución:

(1) *Dado* $(u,v)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$*, tenemos que:*

$$f_{(u,v)}(0,0)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f((0,0)+h(u,v))-f(0,0)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(hu,hv)-0}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{\frac{(hu)\cdot(hv)^2}{(hu)^2+(hv)^4}}{h}$$

$$f_{(u,v)}(0,0)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{h^3\cdot uv^2}{h^3u^2+h^5v^4}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{uv^2}{u^2+h^2v^4}=\begin{cases}\dfrac{uv^2}{u^2} & si\ \ u\neq 0,\\ 0 & si\ \ u=0.\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{v^2}{u} & si\ \ u\neq 0,\\ 0 & si\ \ u=0.\end{cases}$$

$$f_{(u,v)}(0,0)=\begin{cases}\dfrac{v^2}{u} & si\ \ u\neq 0,\\ 0 & si\ \ u=0.\end{cases}$$

(2) f *solo es continua únicamente en* $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ *(¿por qué?).*

(3) *Como derivadas parciales de* f *son continuas en* $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ *(¿por qué?), entonces el teorema 4.2.7 nos dice que* f *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$*. Además como* f *no es continua en* $(0,0)$*, entonces* f *no es diferenciable en* $(0,0)$*. De esta manera, tenemos que* f *es diferenciable unicamente en* $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

(4) *Las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$ *son:*

$$f_x(0,0)=f_{(1,0)}(0,0)=\frac{0^2}{1}=0,\qquad f_y(0,0)=f_{(0,1)}(0,0)=0.$$

(5) *Es importante notar que no podemos aplicar el teorema 4.3.1 para cálcular* $f_{(u,v)}(0,0)$*, ya que* f *no es diferenciable en* $(0,0)$*. Sin embargo, es posible que ambas partes de la igualdad existan.*

$$f_{(u,v)}(0,0) = \begin{cases} \dfrac{v^2}{u} & si \;\; u \neq 0, \\ 0 & si \;\; u = 0 \end{cases},$$

$$(f_x(0,0), f_y(0,0)) \bullet (u,v) = (0,0) \cdot (u,v) = 0 \cdot u + 0 \cdot v = 0.$$

Pero es claro que para $u \neq 0$ y $v \neq 0$ tenemos que $\boxed{f_{(u,v)}(0,0) \neq 0}$.

Observación: (Interpretación geométrica de la derivada direccional): Supongamos que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ y $(u,v) \neq (0,0)$. Entonces:

$$\boxed{f_{(u,v)}(a,b) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f((a,b)+h(u,v)) - f(a,b)}{h}}.$$

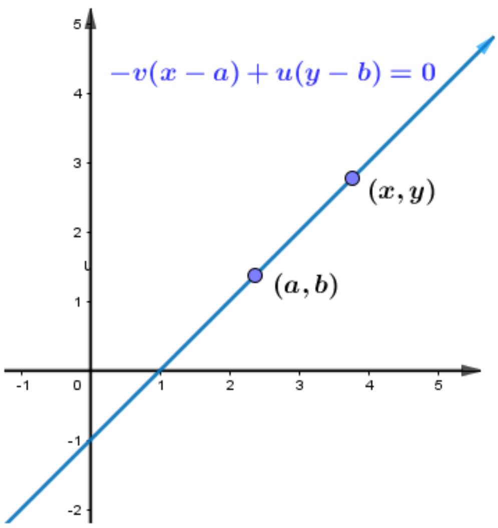
Para interpretar la derivada direccional de f en (a,b) con dirección (u,v), tenemos que estudiar la expresión:

$$\boxed{(x,y) = (a,b) + h(u,v) \quad \text{con } h \in \mathbb{R}.}$$

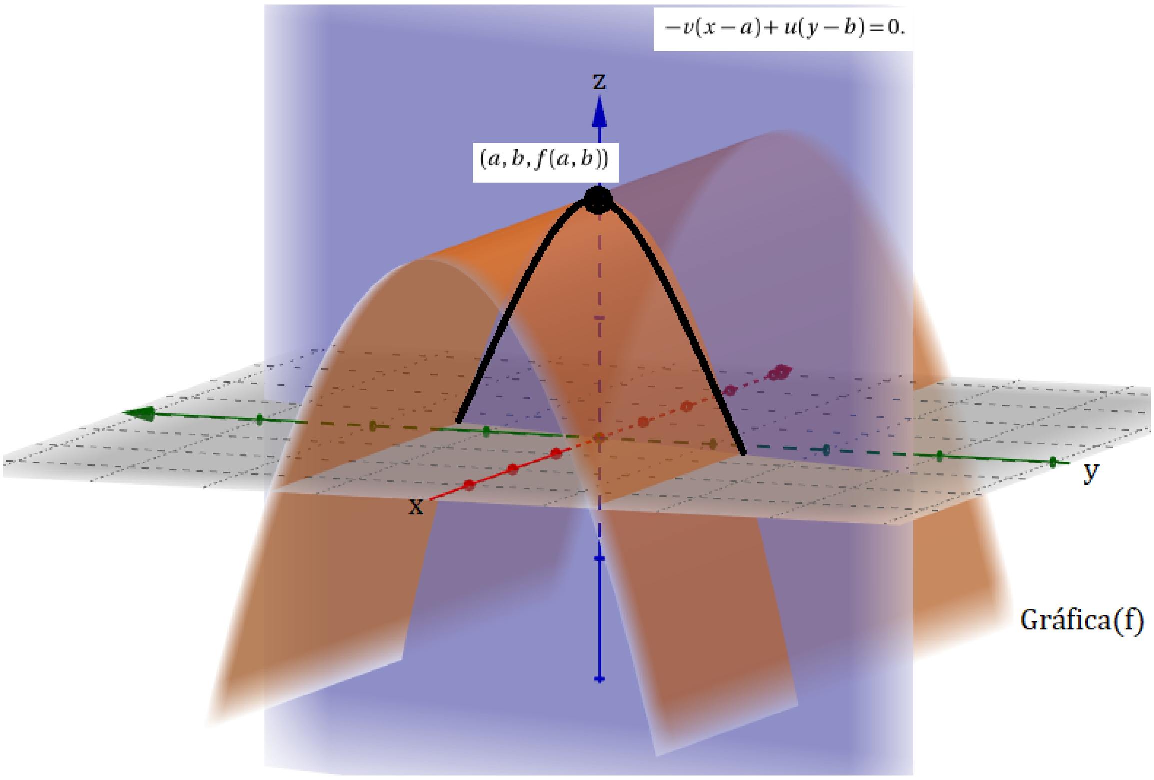
Esta expresión corresponde a la ecuación vectorial paramétrica de una recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el punto (a,b) y tiene vector director (u,v). Una forma similar de describir esta recta, es por medio de <u>la ecuación normal de la recta</u>, la cual tiene la forma:

$$(-v,u) \cdot (x-a, y-b) = 0.$$

$$-v(x-a) + u(y-b) = 0.$$



Además, cabe resaltar que esta ecuación corresponde a la ecuación de un plano en el espacio, el cual corta a la gráfica de f en el punto $(a,b,f(a,b))$ como se muestra en la siguiente figura.



Por tanto, es fácil darse cuenta que la derivada direccional de f en (a,b) con dirección (u,v), representa la pendiente de la curva

$$\boxed{\text{Gráfica}(f)\bigcap \text{Plano}\big(-v(x-a)+u(y-b)=0\big)}$$

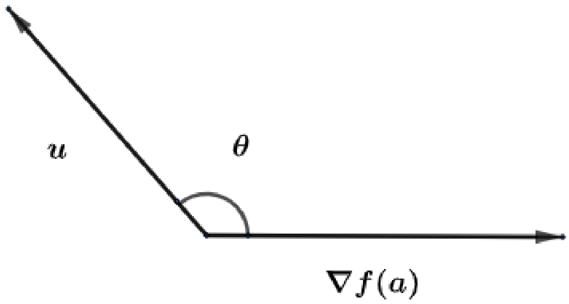
en el punto $(a,b,f(a.b))$.

Observación: Supongamos que $f: A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función diferenciable en $a\in A$, entonces el teorema 4.3.1 nos dice que

$$\boxed{f_u(a)=\nabla f(a)\bullet u=(f_{x_1}(a),\ldots,f_{x_n}(a))\cdot u}$$

para todo $u\in\mathbb{R}^n-\{0\}$. Además de geometría analítica tenemos que

$$\boxed{f_u(a)=\nabla f(a)\bullet u=\|\nabla f(a)\|\,\|u\|\,cos\theta},$$



donde θ es el ángulo entre $\nabla f(a)$ y u. De esta forma, si u es un vector unitario entonces:

(1) Si $\theta = 0$, entonces $\nabla f(a)$ y u son vectores con la misma dirección y como u es unitario se tiene que

$$\boxed{u = \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}} .$$

En este caso tenemos que

$$f_u(a) = \nabla f(a) \bullet u = ||\nabla f(a)||\ ||u||\ cos(0) = ||\nabla f(a)|| \ .$$

(2) Si $\theta = \pi$, entonces $\nabla f(a)$ y u son vectores con dirección contraria y como u es unitario se tiene que

$$\boxed{u = -\frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}} .$$

En este caso tenemos que

$$f_u(a) = \nabla f(a) \bullet u = ||\nabla f(a)||\ ||u||\ cos(\pi) = -||\nabla f(a)|| \ .$$

(3) En general, si suponemos que u es un vector unitario, entonces:

$$-1 \leqslant cos\theta \leqslant 1.$$

$$-||\nabla f(a)|| \leqslant ||\nabla f(a)||\ cos\theta \leqslant ||\nabla f(a)||.$$

$$-||\nabla f(a)|| = -||\nabla f(a)||\ ||u|| \leqslant f_u(a) = ||\nabla f(a)||\ ||u|| cos\theta \leqslant ||\nabla f(a)||\ ||u|| = ||\nabla f(a)||.$$

$$\boxed{-\|\nabla f(a)\| \leqslant f_u(a) \leqslant -\|\nabla f(a)\|}\,.$$

De lo anterior tenemos que:

- La derivada direccional $f_u(a)$ es máxima cuando u apunta en la misma dirección que $\nabla f(a)\left(u=\dfrac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}\right)$.
- La derivada direccional $f_u(a)$ es mínima cuando u apunta en la dirección contraria de $\nabla f(a)\left(u=-\dfrac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}\right)$.

Ejemplo 4.3.4

(a) *Si $f(x,y)=x^{ey}$, determine la razón de cambio de f en el punto $(2,0)$ con dirección $(-3,4)$.*

(b) *¿En qué dirección unitaria tiene f la máxima razón de cambio sobre el punto $(2,0)$? ¿Cuál es la máxima razón de cambio?*

Solución:

(a) *En este caso lo que nos piden es $f_{(-3,4)}(2,0)=\nabla f(2,0)\bullet(-3,4)$ (f es diferenciable en $(2,0)$). De donde*

$$\nabla f(x,y)=(f_x(x,y),f_y(x,y)=((x^{ey})_x,(x^{ey})_y)=(e\,y\,x^{ey-1},e\,x^{ey}\,l\,n(x)).$$
$$\nabla f(2,0)=(e(0)2^{e(0)-1},e2^{e(0)}\,l\,n(2))=(0,e\cdot l\,n(2)).$$

Por lo tanto,

$$f_{(-3,4)}(2,0)=\nabla f(2,0)\bullet(-3,4)=(0,e\cdot l\,n(2))\bullet(-3,4)=4e\cdot l\,n(2).$$
$$\boxed{f_{(-3,4)}(2,0)=4e\cdot l\,n(2)}\,.$$

(b) *Recordando la observación anterior, tenemos que la dirección unitaria donde f tiene máxima razón de cambio sobre el punto $(2,0)$ es*

$$(u,v)=\frac{\nabla f(2,0)}{\|\nabla f(2,0)\|}=\frac{(0,e\cdot l\,n(2))}{\|(0,e\cdot l\,n(2))\|}=\frac{1}{\sqrt{e^2(l\,n(2))^2}}(0,e\cdot l\,n(2))=\frac{1}{e\cdot l\,n(2)}(0,e\cdot l\,n(2)),$$
$$(u,v)=\left(\frac{0}{e\cdot l\,n(2)},\frac{e\cdot l\,n(2)}{e\cdot l\,n(2)}\right)=(0,1).$$

Además la máxima razón de cambio es $||\nabla f(2,0)|| = e \cdot ln(2)$.

Ejemplo 4.3.5 *Suponga que la temperatura de un punto* (x,y,z) *en el espacio está dada por* $T(x,y,z) = \dfrac{80}{1+x^2+2y^2+3z^2}$*, donde* T *se mide en grados Celsius y* x,y,z *en metros.*

(a) *¿En qué dirección unitaria disminuye más rápido la temperatura del punto* $(1,1,-2)$*?*

(b) *¿Cuál es la razón de cambio mínima de la temperatura en el punto* $(1,1,-2)$*?*

Solución:

(a) *En este caso nos preguntan en que dirección* (u,v,w) *es más pequeña la derivada direccional* $T_{(u,v,w)}(1,1,-2)$*, lo cual debido a la observación anterior se tiene en la dirección*

$$(u,v,w) = -\frac{\nabla T(1,1,-2)}{||\nabla T(1,1,-2)||},$$

donde

$$\nabla T(x,y,z) = \left(-\frac{160x}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}, -\frac{320y}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}, -\frac{480z}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\right).$$

$$\nabla T(x,y,z) = \frac{160}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}(-x,-2y,-3z).$$

$$\nabla T(1,1,-2) = \frac{5}{8}(-1,-2,6).$$

$$||\nabla T(1,1,-2)|| = \left\|\frac{5}{8}(-1,-2,6)\right\| = \frac{5}{8}\sqrt{41}.$$

Obteniendo que la dirección unitaria en la cuál disminuye más rápido la temperatura es

$$(u,v,w) = -\frac{\nabla T(1,1,-2)}{||\nabla T(1,1,-2)||} = -\frac{\frac{5}{8}(-1,-2,6)}{\frac{5}{8}\sqrt{41}} = \left(\frac{1}{\sqrt{41}}, \frac{2}{\sqrt{41}}, -\frac{6}{\sqrt{41}}\right).$$

$$(u,v,w) = \left(\frac{1}{\sqrt{41}}, \frac{2}{\sqrt{41}}, -\frac{6}{\sqrt{41}}\right).$$

(b) *Según la observación anterior, tenemos que la razón de cambio mínima la tenemos en la dirección* $(u,v,w) = \left(\frac{1}{\sqrt{41}}, \frac{2}{\sqrt{41}}, -\frac{6}{\sqrt{41}}\right)$ *y es* $-||\nabla T(1,1,-2)|| = -\frac{5}{8}\sqrt{41}$.

4.4. Matriz jacobiana

Definición 4.4.1 ***(Matriz jacobiana):*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función y $a \in A$ es un punto interior con $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x) = (f^1(x), \ldots, f^m(x))$. Definimos la matriz:*

$$Df(a) = \begin{bmatrix} f^1_{x_1}(a) & f^1_{x_2}(a) & f^1_{x_3}(a) & \ldots & f^1_{x_n}(a) \\ f^2_{x_1}(a) & f^2_{x_2}(a) & f^2_{x_3}(a) & \ldots & f^2_{x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^m_{x_1}(a) & f^m_{x_2}(a) & f^m_{x_3}(a) & \ldots & f^m_{x_n}(a) \end{bmatrix},$$

si cada una de las derivadas parciales de las componentes de f en el punto a existen y la llamaremos la matriz jacobiana de f en a.

Ejemplo 4.4.1 *Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $f(x, y, z) = (x^2 + y, z + xy - 1, x^4)$. Hallar $Df(x, y, z)$ y $Df(1, 0, 5)$.*

Solución: Es fácil notar que $f^1(x, y, z) = x^2 + y$, $f^2(x, y, z) = z + xy - 1$, $f^3(x, y, z) = x^4$. Lo cual implica:

$$Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} f^1_x(x,y,z) & f^1_y(x,y,z) & f^1_z(x,y,z) \\ f^2_x(x,y,z) & f^2_y(x,y,z) & f^2_z(x,y,z) \\ f^3_x(x,y,z) & f^3_y(x,y,z) & f^3_z(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 1 & 0 \\ y & x & 1 \\ 4x^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, de esta igualdad podemos concluir que:

$$Df(1, 0, 5) = \begin{bmatrix} 2(1) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4(1)^3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4.4.2 *Sean $G(x, y, z) = (f(x, y), z)$ con $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} + 1 & si\ (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & si\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$*

Entonces:

(1) *Hallar $Df(0, 0)$.*

(2) *Hallar $Df(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.*

(3) *Hallar $DG(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.*

Solución:

(1) *$Df(0,0)=[f_x(0,0)\ \ f_y(0,0)]$. Por lo tanto es suficiente hallar las derivadas parciales de f en $(0,0)$.*

$$f_x(0,0)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{\dfrac{h^2 0^2}{h^2+0^2}+1-1}{h}=0.$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{\dfrac{0^2 h^2}{0^2+h^2}+1-1}{h}=0.$$

Por tanto, $Df(0,0)=[f_x(0,0)\ \ f_y(0,0)]=[0\ \ 0]$

(2) *Si $(x,y)\neq(0,0)$, entonces tenemos que:*

$$f_x(x,y)=\frac{2xy^2(x^2+y^2)-x^2y^2(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x^3y^2+2xy^4-2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$f_y(x,y)=\frac{2x^2y(x^2+y^2)-x^2y^2(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x^4y+2x^2y^3-2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Por lo tanto, tenemos que las derivadas parciales de f se describen de la siguiente manera:

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases},\quad f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

De esta manera, tenemos que:

$$Df(x,y)=\begin{cases}\left[\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\ \ \dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}\right] & si\ (x,y)\neq(0,0),\\ [0\ \ 0] & si\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(3) *Recordando la definición de matriz jacobiana, tenemos que:*

$$DG(x,y,z)=\begin{bmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) & f_z(x,y)\\ (z)_x & (z)_y & (z)_z\end{bmatrix}=\begin{cases}\begin{bmatrix}\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} & si\ (x,y)\neq(0,0),\\ \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} & si\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Nota: A continuación daremos la relación entre las matrices jacobianas de una función y su diferenciabilidad.

Teorema 4.4.1 *Supongamos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una función. Entonces*

$$\boxed{f \text{ es diferenciable en } a \Longleftrightarrow \begin{cases} (1) & Df(a) \text{ existe.} \\ (2) & \lim\limits_{x \mapsto a} \dfrac{f(x) - \big(f(a) + Df(a)\cdot(x-a)\big)}{\|x-a\|} = 0_m \in \mathbb{R}^m. \end{cases}}$$

□

Definición 4.4.2 ***(Aproximación lineal):*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función y $a \in A$. Definimos la aproximación lineal de f en **a**, como la función:*

$$\boxed{L(x) = f(a) + Df(a)\cdot(x-a)} \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}^n.$$

*En ocasiones también decimos que L es la ecuación del plano tangente de f en **a**.*

Nota: En el caso en que f es una función diferenciable en a, el teorema anterior nos dice que

$$\lim_{x \mapsto a} \frac{f(x) - L(x)}{\|x-a\|} = \lim_{x \mapsto a} \frac{f(x) - \big(f(a) + Df(a)\cdot(x-a)\big)}{\|x-a\|} = (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^m.$$

Por lo tanto, $L(x) \approx f(x)$ para valores de x cercanos al punto a (¿por qué?).

Ejemplo 4.4.3 *Dada la función $f(x,y) = (x^2 + y, xy + 5)$, determinar su aproximación lineal en el punto $(1,2)$. Luego úsela para aproximar $f(1{,}1\,;\,2{,}1)$.*

Solución:

La aproximación lineal de f en $(1,2)$ se describe como:

$$L(x,y) = f(1,2) + Df(1,2)\cdot\big[(x,y) - (1,2)\big] = f(1,2) + Df(1,2)\cdot\ (x-1, y-2),$$

donde $f(1,2) = (\,(1)^2 + 2\,,\,(1)\cdot(2) + 5\,) = (3,7)$ y además

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} f_x^1 & f_y^1 \\ f_x^2 & f_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x^2+y)_x & (x^2+y)_y \\ (xy+5)_x & (xy+5)_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ y & x \end{bmatrix}.$$

$$Df(1,2) = \begin{bmatrix} 2(1) & 1 \\ (2) & (1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

De esta manera, tenemos que la aproximación lineal de f *en* $(1,2)$ *es:*

$$L(x,y)=f(1,2)+Df(1,2)\cdot(x-1,y-2)=(3,7)+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x-1\\ y-2\end{bmatrix},$$

$$L(x,y)=(3,7)+\begin{bmatrix}2(x-1)+y-2\\ 2(x-1)+y-2\end{bmatrix}=(3,7)+(\ 2(x-1)+y-2\ ,\ 2(x-1)+y-2\ ),$$

$$L(x,y)=(3+2(x-1)+y-2\ ,\ 7+2(x-1)+y-2)=(2x+y-1,2x+y+3),$$

$$\boxed{L(x,y)=(2x+y-1,2x+y+3)}.$$

Luego $L(1{,}1\ ;\ 2{,}1)=(2(1{,}1)+(2{,}1)-1\ ;\ 2(1{,}1)+(2{,}1)+3)=(3{,}3\ ;\ 7{,}3)$.

Ejemplo 4.4.4 *Dada la función* $f(x,y,z)=(x^2+y,z+5)$, *determinar su aproximación lineal en el punto* $(0,0,0)$. *Luego sela para aproximar* $f(0{,}1\ ;\ -0{,}1\ ;0{,}1)$.

Solución:

La aproximación lineal de f *en* $(0,0,0)$ *se describe como:*

$$L(x,y,z)=f(0,0,0)+Df(0,0,0)\cdot((x,y,z)-(0,0,0))=f(0,0,0)+Df(0,0,0)\cdot(x,y,z).$$

Donde $f(0,0,0)=(\ (0)^2+0\ ,\ 0+5\ )=(0,5)$ *y además*

$$Df(x,y,z)=\begin{bmatrix}f_x^1 & f_y^1 & f_z^1\\ f_x^2 & f_y^2 & f_z^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(x^2+y)_x & (x^2+y)_y & (x^2+y)_z\\ (z+5)_x & (z+5)_y & (z+5)_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

$$Df(0,0,0)=\begin{bmatrix}2(0) & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

De esta manera, tenemos que la aproximación lineal de f *en* $(0,0,0)$ *es:*

$$L(x,y,z)=f(0,0,0)+Df(0,0,0)\cdot(x,y,z)=(0,5)+\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

$$L(x,y)=(0,5)+\begin{bmatrix}y\\ z\end{bmatrix}=(0,5)+(y,z)=(y,z+5).$$

$$\boxed{L(x,y,z)=(y,z+5)}.$$

Luego $L(0{,}1\ ;\ -0{,}1\ ;\ 0{,}1) = (-0{,}1\ ;\ 0{,}1+5) = (-0{,}1\ ;\ 5{,}1)$.

Ejercicio: Dada la función $f(x,y,z) = (e^x + y^2, 5z^3 - 20xy, z+15)$, determinar su aproximación lineal en el punto $(0,1,1)$. Luego úsela para aproximar $f(0\ ;\ 1{,}1\ ; 0{,}9)$.

Ejercicio: Dada la función $f(x,y) = (-e^y + 2x^3, 5y^3 - 10xy^2, 15x + 2y)$, determinar su aproximación lineal en el punto $(1,0)$. Luego úsela para aproximar $f(0{,}9\ ;\ 0{,}1)$.

4.5. Regla de la cadena

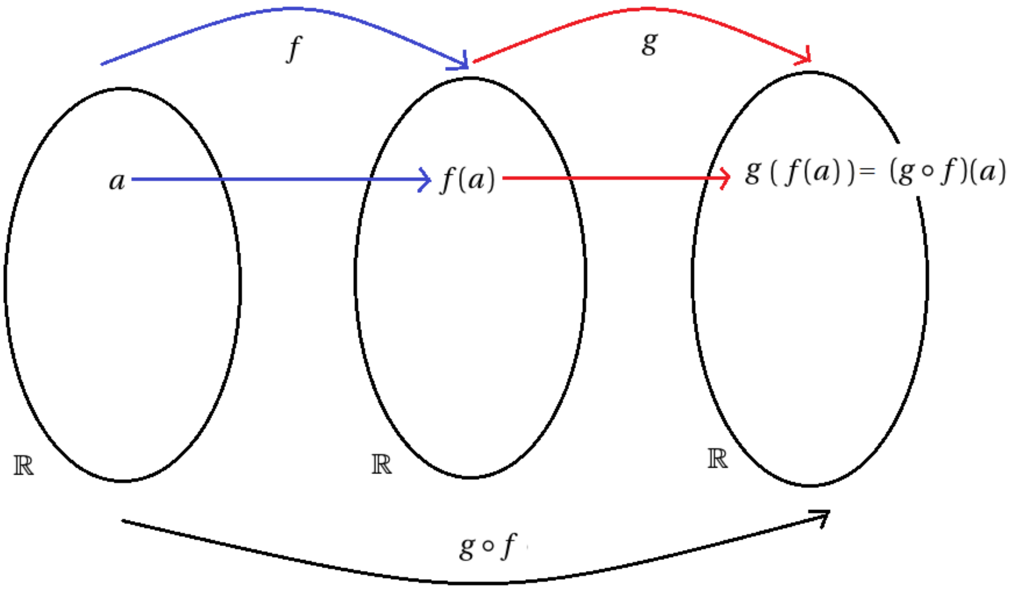
Nota: Recordemos la regla de la cadena para cálculo de una variable:

Supongamos que $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones las cuales satisfacen que:

(1) f es diferenciable en a.

(2) g es diferenciable en $f(a)$.

Entonces $g \circ f$ es diferenciable en a y además $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.



Ejemplo 4.5.1 *Supongamos que* $g(x) = sin(x)$ *y* $f(t) = t^3 + t$. *Entonces:*

(1) *La función* $g \circ f$ *se describe como* $(g \circ f)(t) = g(f(t)) = g(t^3 + t) = sin(t^3 + t)$.

(2) *Las derivadas de* f *y* g *son* $g'(x) = cos(x)$ *y* $f'(t) = 3t^2 + 1$.

(3) *La regla de la cadena nos indica como encontrar la derivada de* $g \circ f$ *con respecto a la variable* t:

$$(g \circ f)'(t) = g'(f(t)) \cdot f'(t) = g'(t^3 + t) f'(t) = cos(t^3 + t) \cdot (3t^2 + 1).$$

Nota: A continuación, daremos la regla de la cadena para funciones de varias variables.

Teorema 4.5.1 ***(Regla de la cadena):*** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ son funciones las cuales satisfacen que:*

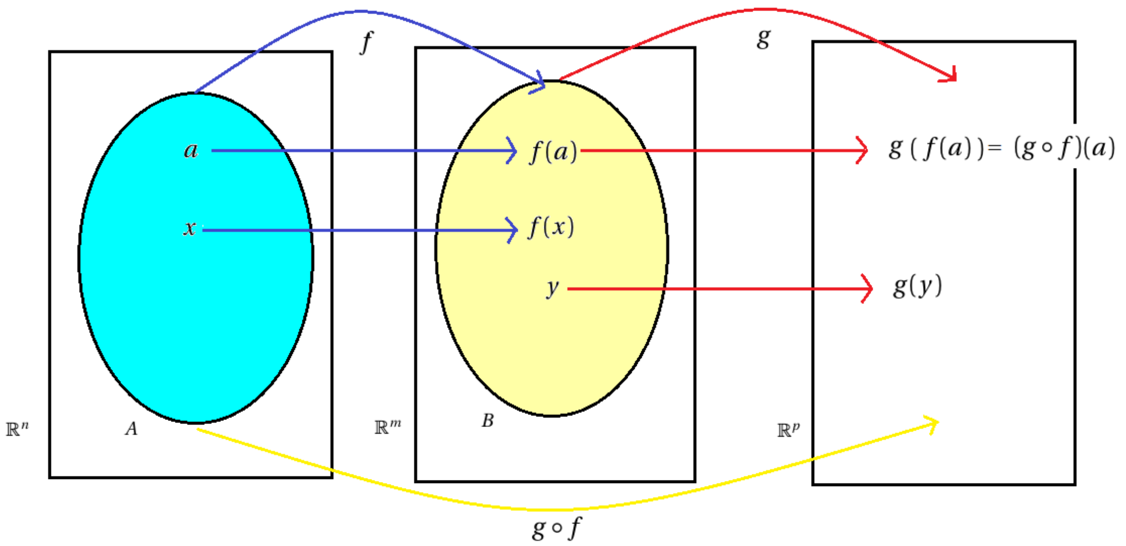
(1) $f(A) \subseteq B$.

(2) *f es diferenciable en a.*

(3) *g es diferenciable en $f(a)$.*

Entonces $g \circ f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ es una función diferenciable en a y además:

$$\boxed{D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a).}$$



□

Ejemplo 4.5.2 *Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ funciones diferenciables las cuales satisfacen las siguientes propiedades:*

· $g(0,0) = (1,2)$, $g(1,2) = (3,5)$, $Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ y $Dg(1,2) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

· $f(0,0) = (3,5)$, $f(4,1) = (1,2)$, $Df(3,5) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ y $Df(4,1) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Entonces

(a) *Calcular* $D(f\circ g)(1,2)$.

(b) *Calcular* $D(g\circ f)(4,1)$.

(c) *Hallar la aproximación lineal de* $g\circ f$ *en el punto* $(4,1)$. *Luego úsela para aproximar* $(g\circ f)(4,1\ ;\ 0{,}9)$.

Solución:

(a) *El teorema 4.5.1, nos dice que* $D(f\circ g)(1,2)=Df(g(1,2))\cdot Dg(1,2)=Df(3,5)\cdot Dg(1,2)$. *De esta forma tenemos que:*

$$D(f\circ g)(1,2)=Df(3,5)\cdot Dg(1,2)=\begin{bmatrix}1&1\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+5&3+7\\6+25&9+35\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&10\\31&44\end{bmatrix}.$$

(b) *El teorema 4.5.1, nos dice que* $D(g\circ f)(4,1)=Dg(f(4,1))\cdot Df(4,1)=Dg(1,2)\cdot Df(4,1)$. *De esta forma tenemos que:*

$$D(g\circ f)(4,1)=Dg(1,2)\cdot Df(4,1)=\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&2\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+3&4+9\\-5+7&10+21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&13\\2&31\end{bmatrix}.$$

(c) *La aproximación lineal de* $g\circ f$ *en* $(4,1)$ *se describe como:*

$$L(x,y)=(g\circ f)(4,1)+D(g\circ f)(4,1)\cdot(x-4,y-1).$$

$$L(x,y)=(3,5)+\begin{bmatrix}1&13\\2&31\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-4\\y-1\end{bmatrix}=(3,5)+\begin{bmatrix}x-4+13(y-1)\\2(x-4)+31(y-1)\end{bmatrix}.$$

$$L(x,y)=(3,5)+\begin{bmatrix}x+13y-17\\2x+31y-39\end{bmatrix}=(3,5)+(x+13y-17,2x+31y-39).$$

$$\boxed{L(x,y)=(x+13y-14,2x+31y-34)}\ .$$

Luego $L(4{,}1\ ;\ 0{,}9)=((4{,}1)+13(0{,}9)-14\ ;\ 2(4{,}1)+31(0{,}9)-34)=(1{,}8\ ;\ 2{,}1)$.

Ejemplo 4.5.3 *Usar la regla de la cadena (teorema 4.5.1) para hallar la ecuación del plano tangente a* $g\circ f$ *en el punto* $(1,1)$, *donde* $f(x,y)=(3x^2-y^3-2,y^3+1,e^{x-y}+1)$ *y* $g(x,y,z)=(3x+y^2,ye^z)$.

Solución:

La ecuación del plano tangente $g\circ f$ *en* $(1,1)$ *se describe como:*

$$L(x,y)=(g\circ f)(1,1)+D(g\circ f)(1,1)\cdot((x,y)-(1,1))=(g\circ f)(1,1)+D(g\circ f)(1,1)\cdot(x-1,y-1).$$

$$\boxed{L(x,y)=(g\circ f)(1,1)+Dg(f(1,1))\cdot Df(1,1)\cdot(x-1,y-1)}\,.$$

Donde

$$(g\circ f)(1,1)=g(f(1,1))=g(3(1)^2-(1)^3-2,1^3+1,e^{1-1}+1)=g(0,2,2)=(3(0)+(2)^2,2e^2).$$

$$(g\circ f)(1,1)=(4,2e^2).$$

$$Df(x,y)=\begin{bmatrix} f_x^1 & f_y^1\\ f_x^2 & f_y^2\\ f_x^3 & f_y^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(3x^2-y^3-2)_x & (3x^2-y^3-2)_y\\ (y^3+1)_x & (y^3+1)_y\\ (e^{x-y}+1)_x & (e^{x-y}+1)_y\end{bmatrix}.$$

$$Df(x,y)=\begin{bmatrix}6x & -3y^2\\ 0 & 3y^2\\ e^{x-y} & -e^{x-y}\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ Df(1,1)=\begin{bmatrix}6 & -3\\ 0 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

$$Dg(x,y,z)=\begin{bmatrix} g_x^1 & g_y^1 & g_z^1\\ g_x^2 & g_y^2 & g_z^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(3x+y^2)_x & (3x+y^2)_y & (3x+y^2)_z\\ (ye^z)_x & (ye^z)_y & (ye^z)_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2y & 0\\ 0 & e^z & ye^z\end{bmatrix}.$$

$$Dg(x,y,z)=\begin{bmatrix}3 & 2y & 0\\ 0 & e^z & ye^z\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ Dg(0,2,2)=\begin{bmatrix}3 & 4 & 0\\ 0 & e^2 & 2e^2\end{bmatrix}.$$

De lo anterior, tenemos que el plano tangente de $g\circ f$ *en el punto* $(1,1)$ *es:*

$$L(x,y)=(g\circ f)(1,1)+Dg(f(1,1))\cdot Df(1,1)\cdot(x-1,y-1).$$

$$L(x,y)=(4,2e^2)+\begin{bmatrix}3 & 4 & 0\\ 0 & e^2 & 2e^2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6 & -3\\ 0 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x-1\\ y-1\end{bmatrix}.$$

$$L(x,y)=(4,2e^2)+\begin{bmatrix}18 & 3\\ 2e^2 & e^2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x-1\\ y-1\end{bmatrix}=(4,2e^2)+\begin{bmatrix}18(x-1)+3(y-1)\\ 2e^2(x-1)+e^2(y-1)\end{bmatrix}.$$

$$L(x,y)=(4,2e^2)+(18x+3y-21,2e^2x+e^2y-3e^2)=(18x+3y-17,2e^2x+e^2y-e^2).$$

$$\boxed{L(x,y)=(18x+3y-17, 2e^2x+e^2y-e^2)}\,.$$

Observación: Supongamos que $f: A\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g: B\subseteq\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ son las funciones que satisfacen las hipótesis del teorema anterior las cuales están definidas como:

$$x=(x_1,\ldots,x_n)\in A\mapsto f(x)=(f^1(x),\ldots,f^m(x))\in\mathbb{R}^m.$$

$$y=(y_1,\ldots,y_m)\in B\mapsto g(y)=(g^1(y),\ldots,g^p(y))\in\mathbb{R}^p.$$

Entonces podemos notar las siguientes cosas:

(1) La función compuesta $g\circ f: A\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ esta definida como

$$x\in A\mapsto (g\circ f)(x)=g(f(x))=(g^1(f(x)),\ldots,g^p(f(x))\in\mathbb{R}^p.$$

(2) Las matrices $Df(a), Dg(f(a))$ y $D(g\circ f)(a)$ son:

$$Df(a)=\begin{bmatrix} f^1_{x_1}(a) & f^1_{x_2}(a) & f^1_{x_3}(a) & \ldots & f^1_{x_n}(a)\\ f^2_{x_1}(a) & f^2_{x_2}(a) & f^2_{x_3}(a) & \ldots & f^2_{x_n}(a)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f^m_{x_1}(a) & f^m_{x_2}(a) & f^m_{x_3}(a) & \ldots & f^m_{x_n}(a)\end{bmatrix},$$

$$Dg(f(a))=\begin{bmatrix} g^1_{y_1}(f(a)) & g^1_{y_2}(f(a)) & g^1_{y_3}(f(a)) & \ldots & g^1_{y_m}(f(a))\\ g^2_{y_1}(f(a)) & g^2_{y_2}(f(a)) & g^2_{y_3}(f(a)) & \ldots & g^2_{y_m}(f(a))\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ g^p_{y_1}(f(a)) & g^p_{y_2}(f(a)) & g^p_{y_3}(f(a)) & \ldots & g^p_{y_m}(f(a))\end{bmatrix},$$

$$D(g\circ f)(a)=\begin{bmatrix} (g^1\circ f)_{x_1}(a) & (g^1\circ f)_{x_2}(a) & (g^1\circ f)_{x_3}(a) & \ldots & (g^1\circ f)_{x_n}(a)\\ (g^2\circ f)_{x_1}(a) & (g^2\circ f)_{x_2}(a) & (g^2\circ f)_{x_3}(a) & \ldots & (g^2\circ f)_{x_n}(a)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (g^p\circ f)_{x_1}(a) & (g^p\circ f)_{x_2}(a) & (g^p\circ f)_{x_3}(a) & \ldots & (g^p\circ f)_{x_n}(a)\end{bmatrix}.$$

(3) El teorema 4.5.1 nos dice que $D(g\circ f)(a)=Dg(f(a))\cdot Df(a)$, lo cual equivale a que para cada $i\in\{1,\ldots,p\}$ y cada $j\in\{1,\ldots,n\}$:

$$(g^i\circ f)_{x_j}(a)=[\, g^i_{y_1}(f(a)) \;\; g^i_{y_2}(f(a))\ldots \;\; g^i_{y_m}(f(a))\,]\cdot\begin{bmatrix} f^1_{x_j}(a)\\ f^2_{x_j}(a)\\ \vdots\\ f^m_{x_j}(a)\end{bmatrix}=\sum_{k=1}^m g^i_{y_k}(f(a))f^k_{x_j}(a).$$

$$\boxed{(g^i \circ f)_{x_j}(a) = \sum_{k=1}^{m} g^i_{y_k}(f(a)) f^k_{x_j}(a)}\;.$$

De esta última igualdad, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.5.2 ***(Regla de la cadena):*** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones las cuales satisfacen que:*

(1) $f(A) \subseteq B$.

(2) *f es diferenciable en a.*

(3) *g es diferenciable en $f(a)$.*

Entonces $g \circ f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable en a y además para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que:

$$\boxed{(g^i \circ f)_{x_j}(a) = \sum_{k=1}^{m} g^i_{y_k}(f(a)) f^k_{x_j}(a)}\;.$$

$\square$

Ejemplo 4.5.4 *Sean $x, y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas como $x(r,\theta) = r cos\theta$, $y(r,\theta) = r sin\theta$. Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ esta definida como $f(x, y) = x^2 + y^2$, entonces:*

(1) *Hallar $f \circ g$ donde $g(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta))$.*

(2) *Hallar $(f \circ g)_r$ y $(f \circ g)_\theta$ usando la regla de la cadena.*

Solución:

(1) $(f \circ g)(r,\theta) = f(g(r,\theta)) = f(x(r,\theta), y(r,\theta)) = f(r cos\theta, r sin\theta) = (r cos\theta)^2 + (r sin\theta)^2$, *lo cual muestra que $(f \circ g)(r,\theta) = r^2$.*

(2) *Recordemos que la regla de la cadena nos dice que:*

$(f\circ g)_r(r,\theta)=f_x(rcos\theta,rsin\theta)x_r(r,\theta)+f_y(rcos\theta,rsin\theta)y_r(r,\theta).$

$(f\circ g)_\theta(r,\theta)=f_x(rcos\theta,rsin\theta)x_\theta(r,\theta)+f_y(rcos\theta,rsin\theta)y_\theta(r,\theta).$

Donde tenemos que:

$f_x=2x,\ f_y=2y,\ \ x_r=cos\theta,\ \ x_\theta=-rsin\theta,\ \ y_r=sin\theta,\ \ y_\theta=rcos\theta.$

Así al reemplazar estos valores, se obtiene:

$$(f\circ g)_r(r,\theta)=(2rcos\theta)(cos\theta)+(2rsin\theta)(sin\theta)=2r,$$
$$(f\circ g)_\theta(r,\theta)=(2rcos\theta)(-rsin\theta)+(2rsin\theta)(rcos\theta)=0.$$

Nota: Del ejemplo anterior podemos notar que $(f\circ g)_r$ y $(f\circ g)_\theta$ los pudimos haber encontrado más fácilmente sin el uso de la regla de la cadena, ya que:

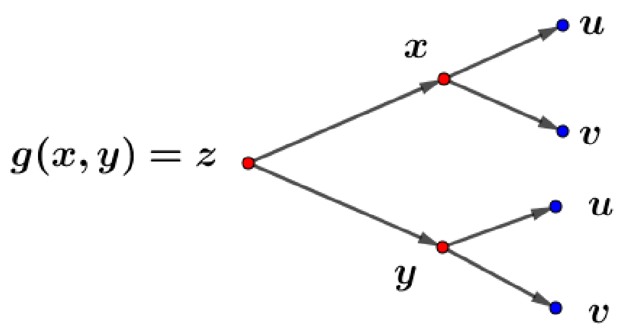
$$(f\circ g)_r=(r^2)_r=2r,$$
$$(f\circ g)_\theta=(r^2)_\theta=0.$$

Aunque en ocasiones la regla de la cadena será más sencilla de usar. El siguiente ejemplo demuestra esta situación.

Ejemplo 4.5.5 *Sean* $x,y:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ *definidas como* $x(u,v)=u^2-v^2$, $y(u,v)=v^2-u^2$. *Si* $g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ *es una función diferenciable descrita como* $g(x,y)=z$. *Demostrar que:*

$$vz_u+uz_v=0.$$

Solución: Notemos primero la dependencia de las variables



Por lo tanto, tiene sentido únicamente hablar de las derivadas parciales z_x, z_y, x_u, x_v, y_u *y* y_v. *Por lo tanto, podemos preguntarnos:*

¿Qué significan las derivadas parciales z_u y z_v?

La respuesta a esta pregunta es que estas derivadas parciales son las derivadas parciales de la función compuesta $z = g(u^2-v^2, v^2-u^2)$, ya que $x(u,v) = u^2-v^2$, $y(u,v) = v^2-u^2$. Esto significa que si definimos la función $f(u,v) = (x,y) = (u^2-v^2, v^2-u^2)$, entonces:

$$(g\circ f)(u,v) = g(f(u,v)) = g(u^2-v^2, v^2-u^2).$$
$$z_u = (g\circ f)_u.$$
$$z_v = (g\circ f)_v.$$

Por lo tanto, la regla de la cadena nos dice que:

$z_u = (g\circ f)_u = g_x x_u + g_y y_u = z_x x_u + z_y y_u = z_x(2u) + z_y(-2u) = 2u(z_x - z_y)$.

$z_v = (g\circ f)_v = g_x x_v + g_y y_v = z_x(-2v) + z_y(2v) = 2v(-z_x + z_y)$.

Luego tenemos que

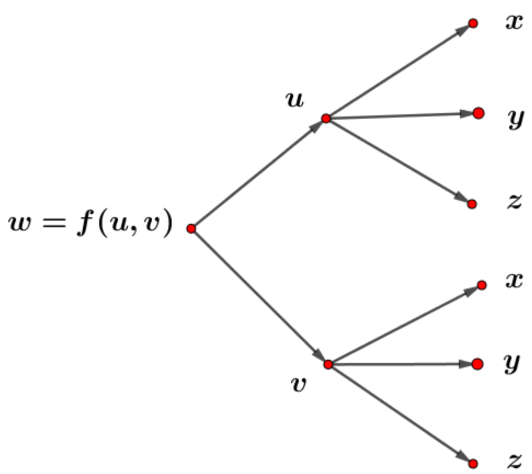
$$v z_u + u z_v = v[2u(z_x - z_y)] + u[2v(-z_x + z_y)] = 2uv(z_x - z_y) - 2uv(z_x - z_y) = 0.$$

Lo cual demuestra que $v z_u + u z_v = 0$.

Ejemplo 4.5.6 *Supongamos que $w = f\left(\dfrac{y-x}{xy}, \dfrac{z-x}{xz}\right)$ es una función diferenciable respecto a las variables $u = \dfrac{y-x}{xy}$ y $v = \dfrac{z-x}{xz}$. Demostrar que:*

$$x^2 w_x + y^2 w_y + z^2 w_z = 0.$$

Solución: *Notemos primero la dependencia de las variables*



Por tanto, la regla de la cadena nos dice que

- $w_x = w_u u_x + w_v v_x = w_u \left(\dfrac{y-x}{xy}\right)_x + w_v \left(\dfrac{z-x}{xz}\right)_x$

$$w_x = w_u \left(\frac{-xy - y(y-x)}{x^2y^2}\right) + w_v \left(\frac{-xz - z(z-x)}{x^2z^2}\right) = w_u \left(\frac{-y^2}{x^2y^2}\right) + w_v \left(\frac{-z^2}{x^2z^2}\right).$$

- $w_y = w_u u_y + w_v v_y = w_u \left(\dfrac{y-x}{xy}\right)_y + w_v \left(\dfrac{z-x}{xz}\right)_y$

$$w_y = w_u \left(\frac{xy - x(y-x)}{x^2y^2}\right) = w_u \left(\frac{x^2}{x^2y^2}\right).$$

- $w_z = w_u u_z + w_v v_z = w_u \left(\dfrac{y-x}{xy}\right)_z + w_v \left(\dfrac{z-x}{xz}\right)_z = \dfrac{w_v}{z^2}.$

Por lo tanto, tenemos que

$$x^2 w_x + y^2 w_y + z^2 w_z = \left(-\frac{x^2y^2}{x^2y^2} + \frac{x^2y^2}{x^2y^2}\right) w_u + \left(-\frac{x^2z^2}{x^2z^2} + \frac{z^2}{z^2}\right) w_v = 0.$$

Nota: Cabe resaltar que el ejemplo anterior lo pudimos haber hecho sin hacer uso de la regla de la cadena (¿por qué?).

4.6. Funciones de clase C^r

Definición 4.6.1 ***(Funciones de clase*** C^r***):*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y A es un conjunto abierto. Entonces:*

- *Decimos que f es una función de clase C^0 sobre A, si f es continua sobre A. En este caso escribimos $f \in C^0(A;\mathbb{R})$.*

- *Decimos que f es una función de clase C^1 sobre A, si f tiene derivadas parciales de orden 1 continuas sobre A. En este caso escribimos $f \in C^1(A;\mathbb{R})$.*

- *Para $r > 1$, decimos que f es una función de clase C^r sobre A, si las derivadas parciales de orden r de f son funciones continuas sobre A. En este caso escribimos $f \in C^r(A;\mathbb{R})$.*

- *Decimos que f es una función de clase C^∞ sobre A, si $f \in C^r(A;\mathbb{R})$ para cada $r \geqslant 0$. En este caso escribimos $f \in C^\infty(A;\mathbb{R})$.*

Para funciones de la forma $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, decimos que f es de clase C^r sobre A, si las componentes de f son funciones de clase C^r sobre A y en este caso escribimos $f \in C^r(A; \mathbb{R}^m)$.

Observación: Por medio de los teoremas 4.2.5 y 4.2.7, tenemos las siguientes relaciones sobre $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto.

$$\boxed{\text{Funciones de clase } C^\infty} \subseteq \ldots \subseteq \boxed{\text{Funciones de clase } C^2} \subseteq \boxed{\text{Funciones de clase } C^1} \subseteq \boxed{\text{Funciones diferenciables}}$$

$$\boxed{\text{Funciones diferenciables}} \subseteq \boxed{\text{Funciones continuas}} \subseteq \boxed{\text{Funciones}}\ .$$

Ejemplo 4.6.1 *Las funciones polinómicas son funciones de clase C^∞ sobre todo su dominio, ya que las derivadas parciales de todos los ordenes son fuciones continuas en todo su dominio.*

(1) *$f(x, y) = x^5 y + 40xy^{10} + x - 8y$ es una función de clase C^∞ sobre R^2.*

(2) *$f(x, y, z) = x^6 yz + 40xy^{10}z^8 - 8y - 8xz - z$ es una función de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}^3$.*

(3) *$f(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ es una función de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}^2$ (escritura general de un polinomio de dos variables).*

(4) *$f(x, y, z) = \sum_{i,j,k} a_{i,j,k} x^i y^j z^k$ es una función de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}^3$ (escritura general de un polinomio de tres variables).*

Ejemplo 4.6.2 *Sea $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & si\ (x, y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x, y) = (0,0) \end{cases}$. Entonces podemos notar que:*

(1) *f no es continua en $(0,0)$ (aplicar coordenadas polares para verificarlo).*

(2) *Si* $(x,y)\neq(0,0)$, *entonces* $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. *De esta forma podemos notar que* f *es una función de clase* C^∞ *sobre* $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, *ya que las derivadas parciales de cualquier orden de* f *son continuas en* $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ *(¿por qué?).*

Por tanto, tenemos que f *solo es de clase* C^∞ *sobre* $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

Ejemplo 4.6.3 *Sea* $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$ *Entonces*

(1) *Verificar donde* f *es de clase* C^1.

(2) *Verificar donde* f *es de clase* C^2.

(3) *Verificar donde* f *es de clase* C^∞.

<u>Solución:</u>

(1) *En el ejemplo 4.2.3, encontramos que:*

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0).\end{cases}\quad,\quad f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Además aplicando coordenadas polares y propiedades de funciones continuas, tenemos que f_x *y* f_y *son continuas en* $\mathbb{R}^2$ *(ejercicio). Lo cual nos dice que* $f\in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$.

(2) *Las derivadas parciales de orden 2 de* f *son las siguientes:*

$$f_{xx}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2y^4(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3} & si\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$f_{xy}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3} & si\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$f_{yx}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3} & si\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$f_{yy}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^4(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3} & si\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Además usando coordenadas polares y propiedades de funciones continuas, es fácil probar que las derivadas parciales de orden 2 solo son continuas en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. *Esto nos dice precisamente que* $f \in C^2(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}; \mathbb{R})$.

(3) *Si* $(x, y) \neq (0,0)$, *entonces* $f(x, y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$. *De esta forma podemos notar que* f *es una función de clase* C^∞ *sobre* $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, *ya que las derivadas parciales de cualquier orden de* f *son continuas en* $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ *(¿por qué?). Además por la parte (2), tenemos que las derivadas parciales de orden 2 de* f *no son continuas en* $(0,0)$, *lo cual implica que* f *solo es de clase* C^∞ *sobre* $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Nota: El siguiente teorema que nos dice que la compuesta de funciones de clase C^r es de clase C^r. Como resultado particular, la compuesta de funciones de clase C^∞ es tambien una función de clase C^∞.

Teorema 4.6.1 *Sean* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *y* $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *funciones que satisfacen las siguientes propiedades:*

(1) A *y* B *son conjuntos abiertos con* $f(A) \subseteq B$.

(2) f *es una función de clase* C^r *sobre* A.

(3) g *es una función de clase* C^r *sobre* B.

Entonces $g \circ f$ *es una función de clase* C^r *sobre* A.

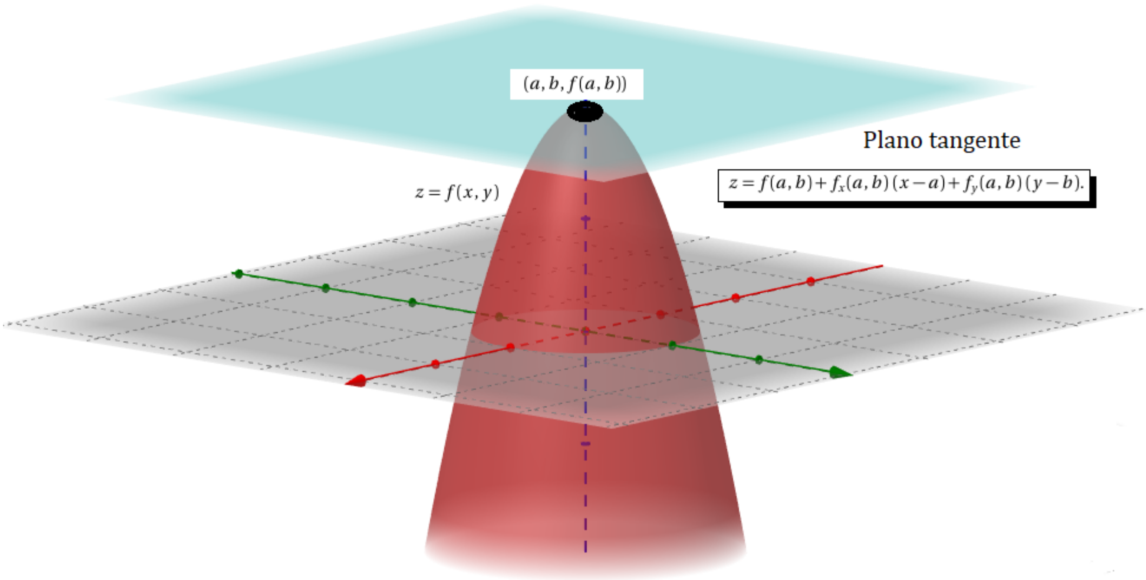
□

Ejemplo 4.6.4 *Sea* $h(x, y) = sin(x^2 + y^2)$, *entonces* h *es una función de clase* C^∞ *sobre* $\mathbb{R}^2$, *ya que* $h = g \circ f$ *con* $g(x) = sin(x)$ *y* $f(x, y) = x^2 + y^2$, *con* $g \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ *y* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$.

Ejemplo 4.6.5 *Sea* $L(x, y, z) = 5e^{cos(x+y+z)}$, *entonces* L *es una función de clase* C^∞ *sobre* $\mathbb{R}^3$, *ya que* $h = g \circ f \circ h$ *con* $g(x) = 5e^x$, $f(x) = cos(x)$ *y* $h(x, y, z) = x + y + z$, *con* $g \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ *y* $h \in C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$.

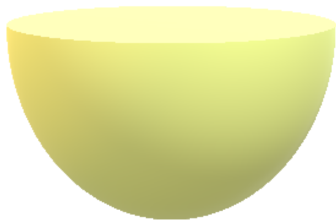
4.7. Planos tangentes

El teorema 4.2.1 nos dice como encontrar el plano tangente a una superficie S que es la gráfica de una función $z = f(x, y)$ en un punto $(a, b, f(a, b))$.



Pero no todas las superficies son la gráfica de una función $z = f(x, y)$. Un ejemplo particular de esto es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ya que al despejar la variable z, tenemos que $z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$.

$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$



$z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$

Por lo tanto la pregunta natural que surge es ¿cómo encontrar la ecuación del plano tangente a un punto (a, b, c) en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

- Si el punto (a, b, c) se encuentra en el la parte superior de la esfera, entonces tenemos que $(a, b, c) = (a, b, \sqrt{1-a^2-b^2})$ y de esta manera, aplicando el teorema 4.2.1, tenemos que la ecuación del plano tangente a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en el punto (a, b, c) es:

$$z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b) \quad \left(f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2} \right),$$
$$z=c-\left(\frac{2a}{\sqrt{1-a^2-b^2}}\right)(x-a)-\left(\frac{2b}{\sqrt{1-a^2-b^2}}\right)(y-b).$$

- Si el punto (a,b,c) se encuentra en el la parte inferior de la esfera, entonces tenemos que $(a,b,c)=(a,b,-\sqrt{1-a^2-b^2})$ y de esta manera, aplicando el teorema 4.2.1, tenemos que la ecuación del plano tangente a $x^2+y^2+z^2=1$ en el punto (a,b,c) es:

$$z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b) \quad \left(f(x,y)=-\sqrt{1-x^2-y^2} \right),$$
$$z=c+\left(\frac{2a}{\sqrt{1-a^2-b^2}}\right)(x-a)+\left(\frac{2b}{\sqrt{1-a^2-b^2}}\right)(y-b).$$

Pero en ambos casos, tenemos un problema en los puntos del ecuador de la esfera. Es decir aquellos puntos de la forma $(a,b,0)$ con $a^2+b^2=1$ (¿por qué?). Aunque con un poco de trabajo se puede arreglar esto, el siguiente teorema nos dice como encontrar la ecuación del plano tangente a una superficie descrita de esta "forma".

Teorema 4.7.1 *Supongamos que $f: A\subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f\in C^1(A;\mathbb{R})$. Si $x_0\in S=f^{-1}(c)=\{x\in A: f(x)=c\}$, entonces:*

(1) *$\nabla f(x_0)=\left(f_{x_1}(x_0),\ldots,f_{x_n}(x_0)\right)$ es un vector perpendicular a S en el punto x_0.*

(2) *Si $n=3$ y $\nabla f(x_0)\neq 0$, entonces el plano tangente a S en x_0 es $\boxed{\nabla f(x_0)\cdot(x-x_0)=0}$.*

(3) *Si $n>3$ y $\nabla f(x_0)\neq 0$, entonces el hiperplano tangente a S en x_0 es $\boxed{\nabla f(x_0)\cdot(x-x_0)=0}$.*

□

Ejemplo 4.7.1 *Sea S la esfera $x^2+y^2+z^2=1$, entonces:*

(a) *Verificar que el punto $(0,0,1)$ se encuentra en la esfera.*

(b) *Encontrar la ecuación del plano tangente S en el punto $(0,0,1)$.*

Solución:

(a) *Reemplazando* $(x, y, z) = (3, -1, 2)$ *en la ecuación, tenemos que*

$$0^2 + 0^2 + 1^1 = 1.$$

Lo cual prueba que $(0, 0, 1)$ *es un punto de* S.

(b) *Es claro que* $S = f^{-1}(1)$, *con* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. *Además tenemos que*

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x, f_y, f_z) = (2x, 2y, 2z).$$
$$\nabla f(0, 0, 1) = (0, 0, 2).$$

Por tanto, el teorema anterior nos dice que la ecuación del plano tangente a S *en el punto* $(0, 0, 1)$ *es*

$$\nabla f(0, 0, 1) \cdot (x - 0, y - 0, z - 1) = 0.$$
$$(0, 0, 2) \cdot (x, y, z - 1) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; 2(z - 1) = 0.$$

Así la ecuación del plano tangente es $\boxed{z = 1}$.

Ejercicio: Sea S la esfera con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Si $(a, b, c) \in S$, encontrar la ecuación del plano tangente a S en un punto (a, b, c).

Ejemplo 4.7.2 *Consideremos la superficie* S *descrita por la ecuación* $x^3 y - y z^2 + z^5 = 9$, *entonces:*

(a) *Verificar que el punto* $(3, -1, 2)$ *se encuentra en la superficie.*

(b) *Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto* $(3, -1, 2)$.

Solución:

(a) *Reemplazando* $(x, y, z) = (3, -1, 2)$ *en la ecuación, tenemos*

$$(3)^3(-1) - (-1)(2)^2 + (2)^5 = -27 + 4 + 32 = 9.$$

Lo cual prueba que $(x, y, z) = (3, -1, 2)$ *es un punto de la superficie* S.

(b) *Es claro que* $S = f^{-1}(9)$, *con* $f(x, y, z) = x^3 y - y z^2 + z^5$. *Además tenemos que*

$$\nabla f(x,y,z)=(f_x,f_y,f_z)=(3x^2y,x^3-z^2,-2yz+5z^4).$$
$$\nabla f(3,-1,2)=(-27,23,84).$$

Por tanto, el teorema anterior nos dice que la ecuación del plano tangente a S en el punto $(3,-1,2)$ *es*

$$\nabla f(3,-1,2)\cdot(x-3,y-(-1),z-2)=0.$$
$$(-27,23,84)\cdot(x-3,y+1,z-2)=0 \;\Rightarrow\; -27(x-3)+23(y+1)+84(z-2)=0.$$

Así la ecuación del plano tangente es $\boxed{-27x+23y+84z=64}$.

Ejemplo 4.7.3 *Sea S la hiperesfera de radio 2 descrita como $x^2+y^2+z^2+w^2=4$. Entonces*

(a) *Verificar que el punto $(x,y,z,w)=(-1,1,1,-1)$ se encuentra en S.*

(b) *Encontrar la ecuación del hiperplano tangente a S en el punto $(x,y,z,w)=(-1,1,1,-1)$.*

Solución:

(a) *Reemplazando $(x,y,z,w)=(-1,1,1,-1)$ en la ecuación, tenemos*

$$(-1)^2+(1)^2+(1)^2+(-1)^2=4.$$

Lo cual prueba que $(x,y,z,w)=(-1,1,1,-1)$ se encuentra en la hiperesfera S.

(b) *Es claro que $S=f^{-1}(4)$, con $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+w^2$. Además tenemos que*

$$\nabla f(x,y,z,w)=(f_x,f_y,f_z,f_w)=(2x,2y,2z,2w).$$
$$\nabla f(-1,1,1,-1)=(-2,2,2,-2).$$

Por tanto, el teorema anterior nos dice que la ecuación del hiperplano tangente a S en el punto $(-1,1,1,-1)$ *es*

$$\nabla f(-1,1,1,-1)\cdot(x-(-1),y-1,z-1,w-(-1))=0.$$
$$(-2,2,2,-2)\cdot(x+1,y-1,z-1,w+1)=0 \;\Rightarrow\; -2(x+1)+2(y-1)+2(z-1)-2(w+1)=0.$$

Así la ecuación del plano tangente es $\boxed{-x+y+z-w=0}$.

Nota: *En algunos casos, es posible encontrar superficies que no tienen plano tangente definido en un punto, por tanto es posible encontrar superficies donde no se puede aplicar el teorema 4.7.1. A continuación mostramos una superficie que presenta este tipo de problemas.*

Ejemplo 4.7.4 *Sea S la superficie definida por la*

$$\boxed{S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z^4=x^2+y^2\}}\ .$$

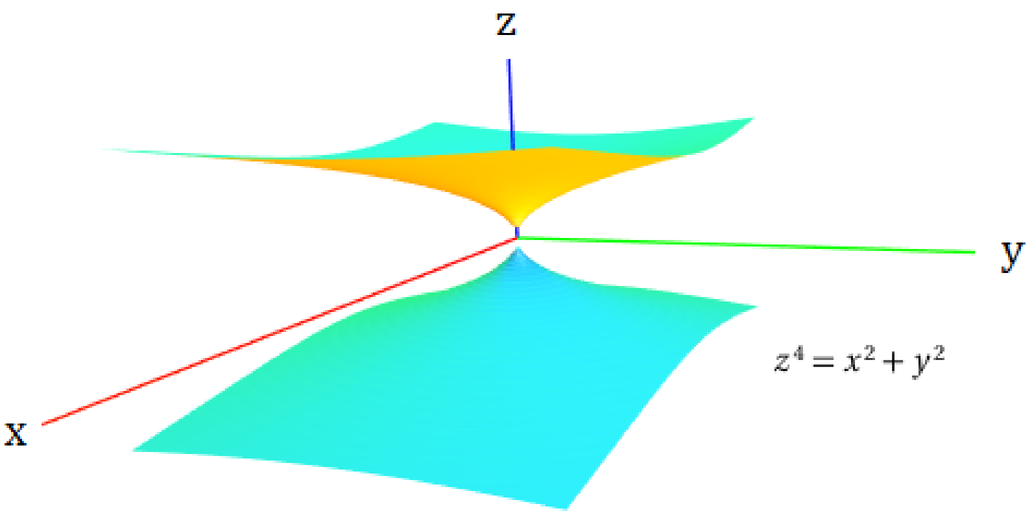
Entonces es claro que

$$\boxed{S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z^4=x^2+y^2\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^4=0\}=f^{-1}(0),}$$

donde $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^4$. *Además es fácil comprobar que:*

- $(0,0,0)\in S$.
- $\nabla f(x,y,z)=(2x,2y,-4z^3)$.

Por lo tanto $\nabla f(0,0,0)=(0,0,0)$ *y de esta manera no podemos hallar la ecuación del plano tangente a* S *en* $(0,0,0)$ *por medio del teorema 4.7.1. De hecho se puede mostrar con un poco más de trabajo que* S *no tiene un plano tangente en* $(0,0,0)$.



4.8. Teorema de la función implícita

El teorema de la función implícita surge de manera natural al tener una ecuación de la forma:

$$\boxed{f(x_1,\ldots,x_n)=c.}$$

Donde deseamos despejar una variable como por ejemplo x_n en término de las demás variables $x_1,\ldots,x_{n-1}$ para así tener que $x_n=g(x_1,\ldots,x_{n-1})$ (x_n es función de las variables $x_1,\ldots,x_{n-1}$).

Ejemplo 4.8.1 *Consideremos la ecuación $x^2+y^2=1$, entonces es fácil ver que podemos despejar la variable y en términos de la variable x y además $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. En este caso tenemos que $f(x,y)=x^2+y^2$ y $c=1$.*

Nota: Aunque en el ejemplo anterior podemos despejar la variable y en términos de la variable x, es posible que tengamos casos donde por métodos convencionales no se pueda despejar la variable deseada. Para entender esto, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.8.2 *Consideremos la ecuación descrita por $xy^2+x^4ln(y^2+1)+20y=0$. Entonces es fácil ver que por métodos convencionales no podemos despejar la variable y en términos de la variable x. Además $f(x,y)=xy^2+x^4ln(y^2+1)+20$ y $c=0$.*

De lo anterior surgen las siguientes preguntas:

(1) Si $f(x_1,\ldots,x_n)=c$, entonces ¿será posible encontrar a x_n como función de las variables restantes $x_1,\ldots,x_{n-1}$?

(2) Si x_n es función de las variables $x_1,\ldots,x_{n-1}$, digamos que $x_n=g(x_1,\ldots,x_{n-1})$, entonces para cada $i\in\{1,\ldots,n-1\}$ ¿cuánto es $(x_n)_{x_i}=g_{x_i}=$?

El siguiente teorema da respuesta a estas preguntas, bajo ciertas condiciones que debe de satisfacer la función f.

Teorema 4.8.1 ***(Función implícita-versión 1):*** *Supongamos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que satisface:*

- *A es abierto.*
- *$f \in C^1(A;\mathbb{R})$.*
- *$x_0 = (a_1,\ldots,a_{n-1},a_n) \in f^{-1}(c) = \{x \in A : f(x) = c\}$ satisface que $f_{x_n}(x_0) \neq 0$.*

Entonces existe una función $g : U \longrightarrow V$, donde $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ y $V \subseteq \mathbb{R}$ son conjuntos abiertos con $(a_1,\ldots,a_{n-1}) \in U$, $a_n \in V$ y g satisface que:

(1) $g(a_1,\ldots,a_{n-1}) = a_n$.

(2) $g \in C^1(U;\mathbb{R})$.

(3) $f(x_1,\ldots,x_{n-1},g(x_1,\ldots,x_{n-1})) = c$ *para cada* $(x_1,\ldots,x_{n-1}) \in U$.

(4) $g_{x_i}(x_1,\ldots,x_{n-1}) = -\dfrac{f_{x_i}(x_1,\ldots,x_{n-1},g(x_1,\ldots,x_{n-1}))}{f_{x_n}(x_1,\ldots,x_{n-1},g(x_1,\ldots,x_{n-1}))}$ *para* $1 \leqslant i \leqslant n-1$ *y cada* $(x_1,\ldots,x_{n-1}) \in U$.

□

Ejemplo 4.8.3 *Verificar que cerca del punto $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ podemos solucionar la ecuación $x^2+y^2=1$ para y en términos de x. Además encontrar $y_x\left(\frac{1}{2}\right)$.*

<u>Solución:</u>

Sea $f(x,y) = x^2+y^2$, entonces:

- $f \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$.
- $f\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4} = 1.$
- $f_y\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} \neq 0.$

Por lo tanto, el teorema de la función implícita nos dice que podemos solucionar la ecuación $x^2+y^2=1$ para y en función de x alrededor de $x=\frac{1}{2}$, con $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Además tenemos que:

$$y_x\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{f_x\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{f_y\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Nota: Cabe destacar que el ejemplo anterior que si despejamos la variable y, entonces obtenemos que $y=\pm\sqrt{1-x^2}$, y como tenemos que $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ entonces esto nos obliga a que $y=\sqrt{1-x^2}$. De esta manera tenemos $y_x=\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ y así:

$$y_x\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

El cual es el mismo resultado obtenido previamente.

Ejemplo 4.8.4 *Verificar que cerca del punto $(0,0)$ podemos solucionar*

$$\boxed{xy^2+x^4ln(y^2+1)+20y=0,}$$

para y en términos de la variable x. Además encontrar $y_x(0)$.

<u>Solución:</u>

Sea $f(x,y)=xy^2+x^4ln(y^2+1)+20y$, entonces:

- *$f\in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ (¿por qué?).*
- *$f(0,0)=0$.*
- *$f_y(0,0)=\left(2xy+\frac{2x^4y}{y^2+1}+20\right)(0,0)=20\neq 0$.*

Por lo tanto, el teorema de la función implícita nos dice que podemos solucionar la ecuación $xy^2+x^4ln(y^2+1)+20y=0$ para y en función de x alrededor del punto $x=0$, con $y(0)=0$. Además tenemos que:

$$y_x(0) = -\frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = -\frac{0}{20} = 0.$$

Ejercicio: Verificar que cerca del punto $(0,0,1)$ podemos solucionar $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, para z en términos de las variables x e y. Además encontrar $z_x(0,0)$.

Ejemplo 4.8.5 *Sea S la superficie descrita por la ecuación $z^2y^2 + x^2y = 2$.*

(1) Utilice el teorema de la función implícita para determinar cerca de cuales puntos es posible describir a S localmente como la gráfica de una función C^1, $z = g(x,y)$.

(2) ¿Cerca de cuales puntos puede describirse a S (localmente) como la gráfica de una función $x = g(y,z)$?

(3) ¿Cerca de cuales puntos puede describirse a S (localmente) como la gráfica de una función $y = h(x,z)$?

Solución:

(1) Sea $f(x,y,z) = z^2y^2 + x^2y$, entonces es claro que $f \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ y $f_z(x,y,z) = 2zy^2$. Entonces:

$$\boxed{f_z(x,y,z) = 2zy^2 \neq 0 \iff z \neq 0 \;\; y \;\; y \neq 0}\,.$$

Por lo tanto, el teorema de la función implícita nos dice que cerca de los puntos

$$\{(x,y,z) \in S \subseteq \mathbb{R}^3 : z \neq 0\,,\; y \neq 0\}$$

es posible describir S localmente como la gráfica de una función C^1, $z = g(x,y)$.

(2) Si aplicando el teorema de la función implícita, tenemos que S puede describirse localmente como la gráfica de una función C^1, $x = g(y,z)$ en el conjunto:

$$\{(x,y,z) \in S : f_x(x,y,z) \neq 0\} = \{(x,y,z) \in S : 2xy \neq 0\},$$

$$\{(x,y,z) \in S : f_x(x,y,z) \neq 0\} = \{(x,y,z) \in S : x \neq 0\} \cap \{(x,y,z) \in S : y \neq 0\},$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\{(x,y,z) \in S : f_x(x,y,z) \neq 0\} = \{(x,y,z) \in S : x \neq 0\}. \\ \text{(¿por qué se tiene esta igualdad?)}\end{array}}$$

Pero en este caso, es posible despejar la variable x en la ecuación $z^2y^2+x^2y=2$, con lo cual obtenemos que $x=\pm\sqrt{\frac{2-z^2y^2}{y}}$. En este caso, podemos ver que sobre cada punto de S podemos describir a S localmente como la gráfica de una función $x=g(y,z)$.

$(*)$ *Se puede ver fácilmente que las funciones $x=\pm\sqrt{\frac{2-z^2y^2}{y}}$ son de clase C^1 sobre el conjunto*

$$\{(x,y,z)\in S : x\neq 0\}\ \textit{(ejercicio)}.$$

Por tanto hay que tener cuidado, ya que en ocasiones se puede encontrar la función, pero no es de clase C^1 sobre S, y además el teorema de la función implícita nos garantiza la solución bajo ciertas condiciones, más no nos garantiza que en los puntos donde las condicones fallan no podamos encontrar solución.

(3) *De forma similar podríamos aplicar el teorema de la función implícita para verificar una solución, pero en este caso podemos despejar la variable $\underline{y}$ de la ecuación*

$$z^2y^2+x^2y=2,$$

para tener un resultado más preciso.

$$z^2y^2+x^2y=2 \Leftrightarrow z^2y^2+x^2y-2=0,$$
$$y=\frac{-x^2\pm\sqrt{x^4-4z^2(-2)}}{2z^2}=\frac{-x^2\pm\sqrt{x^4+8z^2}}{2z^2}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$y=\begin{cases}\dfrac{-x^2\pm\sqrt{x^4+8z^2}}{2z^2} & \textit{si } z\neq 0\\[2ex] \dfrac{2}{x^2} & \textit{si } z=0.\end{cases}\quad \textit{(¿por qué?)}.$$

Así tenemos que sobre cada punto de S, podemos describir a S localmente como la gráfica de una función $y=h(x,z)$. También cabe resaltar que aplicar el teorema de la función implícita aquí es más complicado (¿por qué?).

Observación: En el teorema de la función implícita (versión 1), estamos tratando de resolver la ecuación:

$$f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)=c,$$

para x_n en término de las varibles $x_1,\ldots,x_{n-1}$. En el caso general, tenemos un sistema de m ecuaciones de la forma:

$$\boxed{\begin{aligned} f^1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)&=c_1,\\ f^2(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)&=c_2,\\ &\vdots\\ f^m(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)&=c_m,\end{aligned}}$$

donde queremos resolver el sistema para $y_1,\ldots,y_m$ en términos de las variables $x_1,\ldots,x_n$. Entonces si tenemos que $f=(f^1,\ldots,f^m)$ y $c=(c_1,\ldots,c_m)$. Entonces podemos escribir este sistema como:

$$\boxed{f(x,y)=c},$$

donde $x=(x_1,\ldots,x_n)$ y $y=(y_1,\ldots,y_m)$.

Ejemplo 4.8.6 *Consideremos el sistema de ecuaciones dado por:*

$$\boxed{\begin{aligned} 3x^2-y-z&=-3,\\ x^2-y+z&=-1.\end{aligned}}$$

Entonces, tenemos que $3x^2=y+z-3=3y-3z-3$*, lo cual implica que* $2y=4z$ *y así* $y=2z$*. De esta manera, tenemos que:*

$$3x^2-y-z=-3 \;\Rightarrow\; 3x^2-2z-z=-3 \;\Rightarrow \boxed{z=x^2+1,\;\; y=2z=2x^2+2}.$$

Lo cual implica que las variables y,z *son funciones de la variable* x*. En este caso tenemos que si* $f(x,y,z)=(3x^2-y-z,x^2-y+z)$ *y* $c=(-3,-1)$*, entonces el sistema* $f(x,y,z)=c$ *se puede resolver para* y,z *en términos de* x*.*

Nota: Cabe resaltar que puede ocurrir el caso en que no podamos despejar las variables por métodos usuales. En esta parte entra el teorema de la función implicita (versión 2), para decir en casos estas variables dependen como función de las demás variables.

Notación: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función con $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ y descrita como:

$$\boxed{(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \mapsto f(x, y) = (f^1(x, y), \ldots, f^m(x, y)).}$$

Entonces la matriz jacobiana de f se describe como:

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} f^1_{x_1}(x,y) & \ldots & f^1_{x_n}(x,y) & f^1_{y_1}(x,y) & \ldots & f^1_{y_m}(x,y) \\ f^2_{x_1}(x,y) & \ldots & f^2_{x_n}(x,y) & f^2_{y_1}(x,y) & \ldots & f^2_{y_m}(x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^m_{x_1}(x,y) & \ldots & f^m_{x_n}(x,y) & f^m_{y_1}(x,y) & \ldots & f^m_{y_m}(x,y) \end{bmatrix}.$$

Denotaremos las matrices $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ como:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{bmatrix} f^1_{x_1}(x,y) & \ldots & f^1_{x_n}(x,y) \\ f^2_{x_1}(x,y) & \ldots & f^2_{x_n}(x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^m_{x_1}(x,y) & \ldots & f^m_{x_n}(x,y) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{bmatrix} f^1_{y_1}(x,y) & \ldots & f^1_{y_m}(x,y) \\ f^2_{y_1}(x,y) & \ldots & f^2_{y_m}(x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^m_{y_1}(x,y) & \ldots & f^m_{y_m}(x,y) \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto $Df(x,y) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \;\; \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right].$

Ejemplo 4.8.7 *Sea $f(x,y,z) = (3x^2 - y - z, x^2 - y + z)$, entonces*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \begin{bmatrix} f^1_x(x,y,z) \\ f^2_x(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x \\ 2x \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial (y,z)}(x,y,z) = \begin{bmatrix} f^1_y(x,y,z) & f^1_z(x,y,z) \\ f^2_y(x,y,z) & f^2_z(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nota: A continuación brindamos la versión 2 del teorema de la función implícita. Es fácil notar adicionalmente que la versión 1 del mismo teorema es consecuencia inmediata de la versión 2, pero intuitivamente es más claro entender la versión 1 y posteriormente la versión 2.

Teorema 4.8.2 ***(Función implícita-versión 2)*** *Supongamos que* $f : A \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *es una función que satisface:*

- A *es abierto.*
- f *es de clase* C^1 *sobre* A.
- $x_0 = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) \in f^{-1}(c) = \{x \in A : f(x) = c\}$ *satisface que:*

$$det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0)\right) \neq 0.$$

Entonces existe una función $g : U \longrightarrow V$, *donde* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *y* $V \subseteq \mathbb{R}^m$ *son conjuntos abiertos con* $(a_1, \ldots, a_n) \in U$, $(b_1, \ldots, b_m) \in V$ *y* g *satisface que:*

(1) $g(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_m)$.

(2) g *es de clase* C^1 *sobre* U.

(3) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_1, \ldots, x_{n-1})) = c$ *para cada* $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in U$.

(4) $Dg(x_1, \ldots, x_n) = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}\big(x_1, \ldots, x_n, g(x_1, \ldots, x_n)\big)\right]^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\big(x_1, \ldots, x_n, g(x_1, \ldots, x_n)\big)$ *para cada* $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in U$.

□

Ejemplo 4.8.8 *Demostrar que cerca del punto* $(x_1, x_2, , y_1, y_2) = (-1, 1, 2, 1)$, *podemos resolver el sistema:*

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 y_2 + x_2 y_1 &= 1, \\ x_1^2 y_1 + x_2 y_2^3 &= 3. \end{aligned}}$$

Para y_1 *y* y_2 *en términos de* x_1 *y* x_2. *Además encontrar* $(y_2)_{x_1}(-1, 1)$.

Solución:

Si $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 y_2 + x_2 y_1, x_1^2 y_1 + x_2 y_2^3)$, *entonces la solución del sistema es el conjunto de nivel* $f^{-1}(1, 3)$. *Así, verificaremos las condiciones del teorema de la función implícita para garantizar la solución del sistema para* y_1 *y* y_2 *en términos de* x_1 *y* x_2.

- $f(-1,1,2,1) = (\,(-1)\cdot(1)+(1)(2), (-1)^2(2)+(1)(1)^2\,) = (1,3)$.

- $det\left(\dfrac{\partial f}{\partial(y_1,y_2)}(x_1,x_2,y_1,y_2)\right) = det\begin{bmatrix} (x_1y_2+x_2y_1)_{y_1} & (x_1y_2+x_2y_1)_{y_2} \\ (x_1^2y_1+x_2y_2^3)_{y_1} & (x_1^2y_1+x_2y_2^3)_{y_2} \end{bmatrix}$

$det\left(\dfrac{\partial f}{\partial(y_1,y_2)}(x_1,x_2,y_1,y_2)\right) = det\begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ x_1^2 & 3x_2y_2^2 \end{bmatrix} = 3x_2^2y_2^2 - x_1^3.$

Luego evaluando en el punto $(x_1,x_2,,y_1,y_2) = (-1,1,2,1)$*, tenemos que:*

$$det\left(\frac{\partial f}{\partial(y_1,y_2)}(-1,1,2,1)\right) = 3(1)^2(1)^2 - (-1)^3 = 4 \neq 0.$$

Por lo tanto, el teorema de la función implícita nos garantiza que el sistema se puede resolver para y_1 *y* y_2 *en términos de* x_1 *y* x_2*.*

Ahora, para encontrar $(y_2)_{x_1}(-1,1)$*, tenemos 2 maneras de hacerlo:*

(1) *Derivamos respecto a* x_1 *las 2 ecuaciones* $x_1y_2 + x_2y_1 = 1$ *y* $x_1^2y_1 + x_2y_2^3 = 3$*, con lo cual obtenemos:*

$$x_1(y_2)_{x_1} + y_2 + x_2(y_1)_{x_1} = 0,$$
$$2x_1y_1 + x_1^2(y_1)_{x_1} + 3x_2y_2^2(y_2)_{x_1} = 0.$$

Luego evaluando en el punto $(x_1,x_2,,y_1,y_2) = (-1,1,2,1)$*, tenemos que:*

$$-1(y_2)_{x_1}(-1,1) + 1 + 1(y_1)_{x_1}(-1,1) = 0,$$
$$2(-1)(2) + (-1)^2(y_1)_{x_1}(-1,1) + 3(1)(1)^2(y_2)_{x_1}(-1,1) = 0.$$

Con lo cual tenemos el sistema:

$$-(y_2)_{x_1}(-1,1) + (y_1)_{x_1}(-1,1) = -1,$$
$$(y_1)_{x_1}(-1,1) + 3(y_2)_{x_1}(-1,1) = 4.$$

Lo cual nos da como solución $\boxed{(y_2)_{x_1}(-1,1) = \dfrac{5}{4}}$.

(2) *Otra manera de hacer esto es usar la conclusión (4) del teorema de la función implícita, la cual dice que si* $(y_1,y_2) = g(x_1,x_2)$*, entonces:*

$$Dg(-1,1) = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1,2,1)\right]^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1,2,1)$$

Donde tenemos que:

$$Dg(-1,1) = \begin{bmatrix} (y_1)_{x_1}(-1,1) & (y_1)_{x_2}(-1,1) \\ (y_2)_{x_1}(-1,1) & (y_2)_{x_2}(-1,1) \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1,2,1) = \begin{bmatrix} f^1_{y_1} & f^1_{y_2} \\ f^2_{y_1} & f^2_{y_2} \end{bmatrix}(-1,1,2,1) = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ x_1^2 & 3x_2 y_2^2 \end{bmatrix}(-1,1,2,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1,2,1)\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1,2,1) = \begin{bmatrix} f^1_{x_1} & f^1_{x_2} \\ f^2_{x_1} & f^2_{x_2} \end{bmatrix}(-1,1,2,1) = \begin{bmatrix} y_2 & y_1 \\ 2x_1 y_1 & y_2^3 \end{bmatrix}(-1,1,2,1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} (y_1)_{x_1}(-1,1) & (y_1)_{x_2}(-1,1) \\ (y_2)_{x_1}(-1,1) & (y_2)_{x_2}(-1,1) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{3}{4}-1 & \frac{3}{2}+\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4}-1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (y_1)_{x_1}(-1,1) & (y_1)_{x_2}(-1,1) \\ (y_2)_{x_1}(-1,1) & (y_2)_{x_2}(-1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Lo cual nos dice en particular que $\boxed{(y_2)_{x_1}(-1,1) = \frac{5}{4}}$.

Ejemplo 4.8.9 *Demostrar que cerca del punto* $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (2,3,\pi,1)$, *podemos resolver el sistema:*

$$\boxed{\begin{aligned} x_2 y_2 - x_1 cos\, y_1 &= 5, \\ x_2 sin\, y_1 + x_1 y_2 &= 2. \end{aligned}}$$

Para y_1 *y* y_2 *en términos de* x_1 *y* x_2. *Además encontrar* $(y_1)_{x_1}(2,3)$ *y* $(y_1)_{x_2}(2,3)$.

Solución:

Si $f(x_1,x_2,y_1,y_2) = (x_2 y_2 - x_1 cos\, y_1, x_2 sin\, y_1 + x_1 y_2)$, *entonces:*

- *La solución del sistema es el conjunto de nivel* $f^{-1}(5,2)$.
- $f(2,3,\pi,1) = (\ 3(1) - (2) cos\pi, 3 sin\pi + 2(1)\ ) = (5,2)$.

- $det\left(\dfrac{\partial f}{\partial(y_1,y_2)}(x_1,x_2,y_1,y_2)\right)=det\begin{bmatrix} x_1 sin y_1 & x_2 \\ x_2 cos y_1 & x_1 \end{bmatrix}=x_1^2 sin y_1 - x_2^2 cos y_1.$

Luego evaluando en el punto $(2,3,\pi,1)$*, tenemos que:*

$$det\left(\frac{\partial f}{\partial(y_1,y_2)}(2,3,\pi,1)\right)=det\left(\begin{bmatrix} 2\cdot sin\pi & 3 \\ 3cos\pi & 2 \end{bmatrix}\right)=det\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\right)=9\neq 0.$$

Así por el teorema de la función implícita podemos garantizar que el sistema se puede resolver para y_1 *y* y_2 *en términos de* x_1 *y* x_2*. Además, tenemos que:*

$$\boxed{\begin{bmatrix} (y_1)_{x_1}(2,3) & (y_1)_{x_2}(2,3) \\ (y_2)_{x_1}(2,3) & (y_2)_{x_1}(2,3) \end{bmatrix}=-\left[\frac{\partial f}{\partial(y_1,y_2)}(2,3,\pi,1)\right]^{-1}\cdot\frac{\partial f}{\partial(x_1,x_2)}(2,3,\pi,1),}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial(y_1,y_2)}(2,3,\pi,1)\right]^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{9}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial(x_1,x_2)}(x_1,x_2,y_1,y_2)=\begin{bmatrix} -cos y_1 & y_2 \\ y_2 & sin y_1 \end{bmatrix}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial(x_1,x_2)}(2,3,\pi,1)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} (y_1)_{x_1}(2,3) & (y_1)_{x_2}(2,3) \\ (y_2)_{x_1}(2,3) & (y_2)_{x_1}(2,3) \end{bmatrix}=-\frac{1}{9}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} (y_1)_{x_1}(2,3) & (y_1)_{x_2}(2,3) \\ (y_2)_{x_1}(2,3) & (y_2)_{x_1}(2,3) \end{bmatrix}=-\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2-3 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{3}{9} & -\frac{3}{9} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} (y_1)_{x_1}(2,3) & (y_1)_{x_2}(2,3) \\ (y_2)_{x_1}(2,3) & (y_2)_{x_1}(2,3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{3}{9} & -\frac{3}{9} \end{bmatrix}.$$

Lo cual implica que $(y_1)_{x_1}(2,3)=\dfrac{1}{9}$ *y* $(y_1)_{x_2}(2,3)=-\dfrac{2}{9}.$

4.9. Teorema de la función inversa

En la rama de la matemática denominada análisis matemático, el teorema de la función inversa proporciona condiciones suficientes para que una función sea invertible localmente al rededor de un punto.

Describimos a continuacón el teorema.

Teorema 4.9.1 ***(Función inversa):*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función y A un conjunto abierto. Entonces si:*

- $f \in C^1(A;\mathbb{R}^n)$.
- *Existe $x_0 \in A$ tal que $Df(x_0)$ es una matriz invertible.*

Entonces existen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos con $x_0 \in U$ y $f(x_0) \in V$ tales que:

(1) *$f : U \longrightarrow V$ es una función invertible (biyectiva), con inversa $f^{-1} : V \longrightarrow U$.*

(2) *$f^{-1} \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$.*

(3) *Para cada $x \in U$, se tiene que $Df^{-1}(f(x)) = [Df(x)]^{-1}$.*

□

Ejemplo 4.9.1 *Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y) = (2ye^{2x}, xe^y)$ y $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (3x - y^2, 2x + y, xy + y^3)$.*

(a) *Demostrar que cerca de $(0,1)$ la función g es invertible y calcular $Dg^{-1}(2,0)$.*

(b) *Encontrar $D(f \circ g^{-1})(2,0)$.*

Solución:

(a) *Para mostrar que g es invertible cerca de $(0,1)$ es suficiente verificar las condiciones del teorema de la función inversa las cuales son:*

- *$f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ya que las componentes son de clase C^1 (De hecho es de clase C^∞).*
- *$Dg(x, y) = \begin{bmatrix} 4ye^{2x} & 2e^{2x} \\ e^y & xe^y \end{bmatrix}$, lo cual implica que $Dg(0,1) = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 \cdot e^{2\cdot 0} & 2e^{2\cdot 0} \\ e^1 & 0 \cdot e^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ e & 0 \end{bmatrix}$*
y esta matriz es invertible ya que $Det[Dg(0,1)] = -2e \neq 0$.

Por tanto, el teorema de la función inversa nos dice que g es invertible localmente al rededor de $(0,1)$, además

$$Dg^{-1}(g(0,1)) = [Dg(0,1)]^{-1}.$$

Entonces

- $g(0,1) = (2(1)e^{2(0)}, 0\cdot e^1) = (2,0).$

- $[Dg(0,1)]^{-1} = \dfrac{1}{-2e}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -e & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{e} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{-2}{e} \end{bmatrix}.$

Lo cual implica que

$$Dg^{-1}(2,0) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{e} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{-2}{e} \end{bmatrix}.$$

(b) *Usando la regla de la cadena, tenemos que*

$$D(f\circ g^{-1})(2,0) = Df(g^{-1}(2,0))\cdot Dg^{-1}(2,0) = Df(0,1)\cdot Dg^{-1}(2,0),$$

donde

- $Df(x,y) = \begin{bmatrix} 3 & -2y \\ 2 & 1 \\ y & x+3y^2 \end{bmatrix}$, *implicando que* $Df(0,1) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$

- $Df(0,1)\cdot Dg^{-1}(2,0) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{e} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{-2}{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \dfrac{7}{e} \\ \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{3}{2} & \dfrac{-5}{e}. \end{bmatrix}$

De esta forma concluimos que:

$$D(f\circ g^{-1})(2,0) = \begin{bmatrix} -1 & \dfrac{7}{e} \\ \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{3}{2} & \dfrac{-5}{e} \end{bmatrix}.$$

Capítulo 5

Máximos y mínimos de funciones de varias variables

Definición 5.0.1 ***(Máximos y mínimos):*** *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función y* x_0 *es un punto interior de* A.

(1) *Decimos que* x_0 *es un máximo local para* f, *si existe* $r > 0$ *tal que:*

$$\boxed{f(x) \leqslant f(x_0)} \text{ para todo } x \in B(x_0; r).$$

(2) *Decimos que* x_0 *es un mínimo local para* f , *si existe* $r > 0$ *tal que:*

$$\boxed{f(x_0) \leqslant f(x)} \text{ para todo } x \in B(x_0; r).$$

(3) *Decimos que* x_0 *es un máximo global para* f, *si:*

$$\boxed{f(x) \leqslant f(x_0)} \text{ para todo } x \in A.$$

(4) *Decimos que* x_0 *es un mínimo global para* f, *si:*

$$\boxed{f(x_0) \leqslant f(x)} \text{ para todo } x \in A.$$

Ejemplo 5.0.1 *Sea* $f(x, y) = x^2 + y^2$, *entonces* $(0,0)$ *es un mínimo absoluto para* f, *ya que:*

$$f(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0 \leqslant x^2 + y^2 = f(x, y) \ \Rightarrow \ \boxed{f(0,0) \leqslant f(x, y)}\,,$$

para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

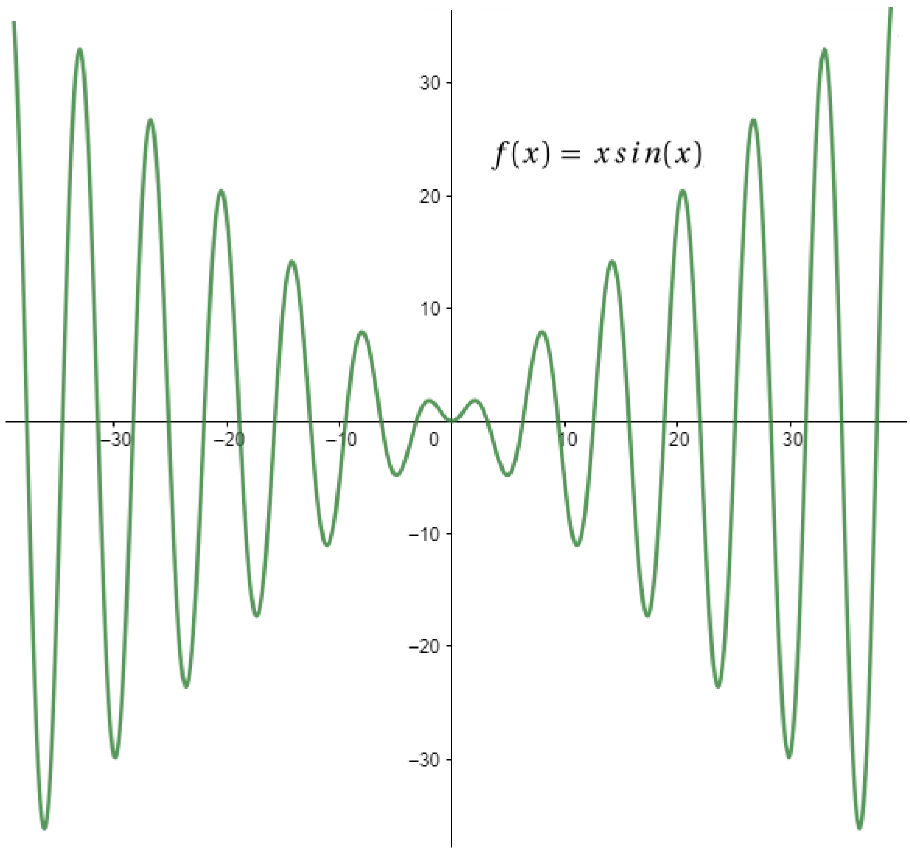
Ejemplo 5.0.2 *Sea* $f(x,y)=-x^4-y^2$, *entonces* $(0,0)$ *es un máximo absoluto para* f, *ya que:*

$$x^4+y^2 \geqslant 0 \;\Rightarrow\; -x^4-y^2 \leqslant 0.$$
$$f(x,y)=-x^4-y^2 \leqslant 0 = -0^4-0^2 = f(0,0) \;\Rightarrow\; \boxed{f(x,y) \leqslant f(0,0)},$$

para cada $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Observación (localidad y globalidad): Cabe resaltar que si una función tiene un máximo (mínimo) absoluto un punto, entonces tiene un máximo (mínimo) local en el mismo punto. Pero si una función tiene un máximo (mínimo) local en un punto, esto no implica que tenga un máximo (mínimo) absoluto en este punto. Para ilustrar esto último, cosideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.0.3 *Sea* $f(x) = x sin(x)$, *entonces* f *tiene un mínimo local en* $x = 0$, *pero* $x = 0$ *no es un mínimo absoluto.*



De hecho sin usar la gráfica de la función, podemos darnos cuenta que:

$$sin(x) \geqslant 0 \text{ para } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x\,sin(x) \geqslant 0 \text{ para } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$
$$sin(x) \leqslant 0 \text{ para } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right] \Rightarrow x\,sin(x) \geqslant 0 \text{ para } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right].$$

Por lo tanto $x\,sin(x) \geqslant 0$ *para* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *y de esta manera tenemos que:*

$$f(x) = x\,sin(x) \geqslant 0 = 0 \cdot sin(0) = f(0) \text{ para } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

lo cual significa que $x = 0$ *es un mínimo local para* f*. Además* $x = 0$ *no es el mínimo absoluto de la función ya que se pueden encontrar valores de* x *donde* f *tiene valores más pequeños* $\left(\text{por ejemplo } x = \frac{3\pi}{2}\right)$.

Nota: Recordemos que en cálculo diferencial, tenemos un teorema que dice:

> Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x_0 \in (a, b)$. Si f tiene un máximo local ó un mínimo local en x_0, entonces
> $$f'(x_0) = 0.$$

Entonces es natural preguntarse ¿cuál sería el resultado análogo para varias variables? El siguiente teorema nos responde esta pregunta.

Teorema 5.0.1 *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función diferenciable en* $x_0 \in A$*. Si* f *tiene un máximo local ó un mínimo local en* x_0*, entonces* $f_{x_1}(x_0) = 0, \ldots, f_{x_n}(x_0) = 0$ $\left(\nabla f(x_0) = 0_n\right)$.

$\square$

Ejemplo 5.0.4 *Sea* $f(x, y) = x^2 + y^2$*, entonces* $f_x(x, y) = 2x$ *y* $f_y(x, y) = 2y$*; lo cual implica que* $f_x(0,0) = 0$ *y* $f_y(0,0) = 0$*. Además en el ejemplo 5.0.1 se probó que* $(0,0)$ *es el mínimo absoluto de* f *y por tanto el teorema anterior nos dice que* $f_x(0,0) = 0$ *y* $f_y(0,0) = 0$*, lo que comprueba el cálculo hecho previamente.*

Observación: Es importante notar que el reciproco del teorema anterior en general es falso. Es decir que es posible encontrar funciones $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables con $f_{x_1}(x_0) = 0, \ldots, f_{x_n}(x_0) = 0$ $\left(\nabla f(x_0) = 0_n\right)$ y x_0 no es un máximo ni mínimo local para f. El siguiente ejemplo muestra esta situación.

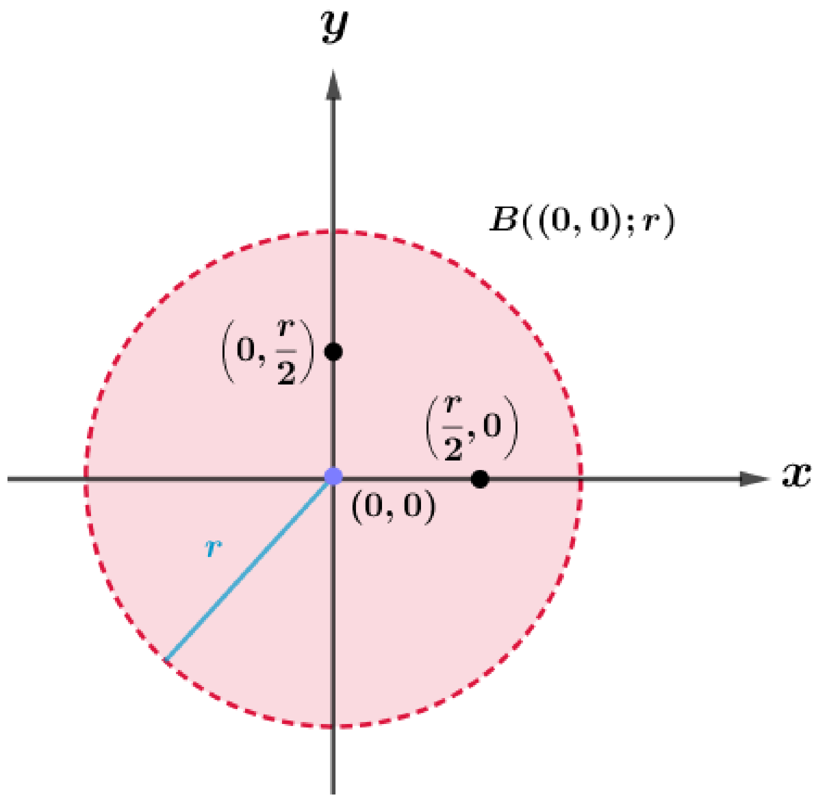
Ejemplo 5.0.5 *Sea $f(x,y)=x^2-y^2$, entonces $f_x(x,y)=2x$ y $f_y(x,y)=-2y$; lo cual implica que $f_x(0,0)=0$ y $f_y(0,0)=0$. Pero $(0,0)$ no es máximo ni mínimo local para f. Para ver esto, notemos que dado un número $r>0$, podemos encontrar puntos (a,b) y (c,d) en $B((0,0);r)$ tales que:*

$f(0,0)<f(a,b)$ *(esto implica que $(0,0)$ no puede ser un máximo local).*
$f(0,0)>f(c,d)$ *(esto implica que $(0,0)$ no puede ser un mínimo local).*

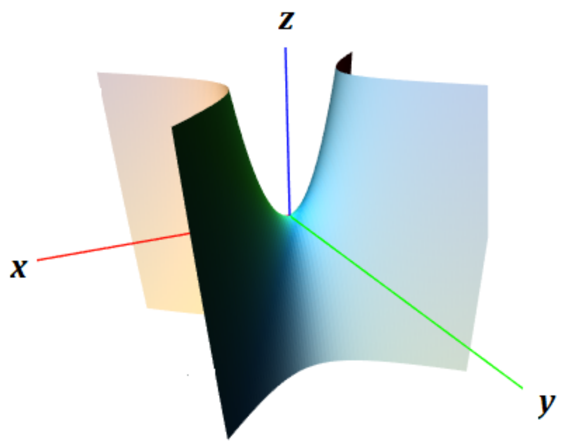
De hecho si tomamos $(a,b)=\left(\frac{r}{2},0\right)$ y $(c,d)=\left(0,\frac{r}{2}\right)$, entonces ambos puntos se encuentran en $B((0,0);r)$ (¿por qué?) y además:

$$f(a,b)=f\left(\frac{r}{2},0\right)=\frac{r^2}{4}>0=0^2-0^2=f(0,0)\ \Rightarrow\ \boxed{f(0,0)<f(a,b)}.$$

$$f(c,d)=f\left(0,\frac{r}{2}\right)=-\frac{r^2}{4}<0=0^2-0^2=f(0,0)\ \Rightarrow\ \boxed{f(0,0)>f(c,d)}.$$



Así $(0,0)$ no es máximo ni mínimo local. Esto también se puede ilustrar en la gráfica de la función $f(x,y)=x^2-y^2$ (¿por qué?).



Gráfica(f)

$f(x,y)=x^2-y^2$

Ejercicio: Sea $f(x,y)=x^3+y^3$, entonces:

(1) Comprobar que $f_x(0,0)=0$ y $f_y(0,0)=0$.

(2) Demostrar que $(0,0)$ no es máximo ni mínimo local para f.

Nota: Es posible tener funciones donde las derivadas parciales en un punto no existen y en este punto puede ser un máximo ó mínimo local. Para ilustrar esto, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.0.6 *Sea $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$, entonces se puede ver fácilmente que es dominio de f es $\mathbb{R}^2$ y las derivadas parciales de f son:*

$$f_x(x,y)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} \quad y \quad f_y(x,y)=\frac{2y}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}.$$

Las cuales están definidas en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. Además es fácil notar que $(0,0)$ es un máximo absoluto para f, ya que para cada $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ se tiene que:

$$f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}\geqslant 0=\sqrt[3]{0^2+0^2}=f(0,0) \;\Rightarrow\; \boxed{f(x,y)\geqslant f(0,0)}.$$

Así tenemos que las derivadas parciales de f en $(0,0)$ no existen y $(0,0)$ es el máximo absoluto de f.

Definición 5.0.2 ***(Punto crítico):*** *Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una función y $x_0\in A$. Decimos que x_0 es un punto crítico de f, si $f_{x_1}(x_0)=0,\ldots,f_{x_n}(x_0)=0$ $\left(\nabla f(x_0)=0_n\right)$ ó alguna derivada parcial de f no existe en x_0.*

Nota: Los puntos críticos se pueden interpretar como aquellos puntos donde la función "podría"tener un extremo relativo (máximo ó mínimo local).

Ejemplo 5.0.7 *Sea* $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$ *la función del ejemplo 5.0.6. Entonces* $(0,0)$ *es el único punto crítico de* f.

Ejemplo 5.0.8 *Encontrar los puntos críticos de* $f(x,y)=x^2+xy+y^2+2x-2y+5$.

<u>*Solución:*</u>

Las derivadas parciales de f *son* $f_x(x,y)=2x+y+2$ *y* $f_y(x,y)=x+2y-2$. *Así tenemos que los puntos críticos son aquellos puntos* (x,y) *que satisfacen lo siguiente:*

$$2x+y+2=0 \quad (f_x(x,y)=0).$$
$$x+2y-2=0 \quad (f_y(x,y)=0).$$

De la segunda ecuación tenemos que $x=-2y+2$ *y reemplazando esto en la primera ecuación, tenemos que* $2x+y+2=2(-2y+2)+y+2=-3y+6=0$ *lo cual implica que* $y=2$ *y* $x=-2$. *Así el único punto crítico de* f *es* $(x,y)=(-2,2)$.

Nota: Recordemos que en cálculo diferencial, tenemos un <u>teorema</u> que dice:

Supongamos que $f:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función de clase C^2 sobre (a,b) y $c\in(a,b)$ es un punto crítico de f, entonces:
(1) Si $f''(c)>0$, entonces c es un mínimo local para f.
(2) Si $f''(c)<0$, entonces c es un máximo local para f.

De esta manera, es natural preguntarse ¿cuál sería el resultado análogo para varias variables? El siguiente teorema nos responderá esta pregunta, pero antes definimos el concepto de matriz Hessiana.

Definición 5.0.3 ***(Matriz hessiana):*** *Sea* $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ *una función y* $a\in A$. *Definimos la matriz hessiana de* f *en* ***a*** *como la siguiente matriz*

$$Hf(a)=\begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(a) & f_{x_1x_2}(a) & f_{x_1x_3}(a) & \dots & f_{x_1x_n}(a) \\ f_{x_2x_1}(a) & f_{x_2x_2}(a) & f_{x_2x_3}(a) & \dots & f_{x_2x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(a) & f_{x_nx_2}(a) & f_{x_nx_3}(a) & \dots & f_{x_nx_n}(a) \end{bmatrix}.$$

Probando que cada una de las componentes existe.

Notación (siguiente teorema): Dada la matriz hessiana $Hf(a)$ definida previamente, definimos los números $d_1, \ldots, d_n$ como:

$$d_1 = f_{x_1x_1}(a)\,,$$

$$d_2 = det\begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(a) & f_{x_1x_2}(a) \\ f_{x_2x_1}(a) & f_{x_2x_2}(a) \end{bmatrix},$$

$$d_3 = det\begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(a) & f_{x_1x_2}(a) & f_{x_1x_3}(a) \\ f_{x_2x_1}(a) & f_{x_2x_2}(a) & f_{x_2x_3}(a) \\ f_{x_3x_1}(a) & f_{x_3x_2}(a) & f_{x_3x_3}(a) \end{bmatrix},$$

$$\vdots$$

$$d_n = det\begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(a) & f_{x_1x_2}(a) & f_{x_1x_3}(a) & \ldots & f_{x_1x_n}(a) \\ f_{x_2x_1}(a) & f_{x_2x_2}(a) & f_{x_2x_3}(a) & \ldots & f_{x_2x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(a) & f_{x_nx_2}(a) & f_{x_nx_3}(a) & \ldots & f_{x_nx_n}(a) \end{bmatrix} = det(Hf(a)).$$

Estos números jugarán un papel muy importante en el estudio de máximo y mínimos locales para funciones de varias variables.

Teorema 5.0.2 ***(Criterio de la matriz hessiana):*** *Supongamos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función con $f \in C^2(A)$ y $\boldsymbol{a}$ un punto crítico de f $\left(\nabla f(a) = 0_n\right)$. Entonces*

(1) *Si $d_n \neq 0$ y $d_1, \ldots, d_n > 0$, entonces f tiene un mínimo local en $\boldsymbol{a}$.*

(2) *Si $d_n \neq 0$ y $\begin{cases} d_k < 0 & \text{si } k \text{ es impar,} \\ d_k > 0 & \text{si } k \text{ es par,} \end{cases}$ entonces f tiene un máximo local en $\boldsymbol{a}$.*

(3) *Si $d_n \neq 0$ y la secuencia $d_1, \ldots, d_n$ no cumple las condiciones de (1) y (2), entonces $\boldsymbol{a}$ no es un máximo ni mínimo local de f (esto suele llamarse un punto de silla).*

□

Ejemplo 5.0.9 *Usar el criterio de la matriz Hessiana para hallar los extremos locales (máximos y mínimos locales) de la función* $f(x,y)=x^2+xy+y^2+2x-2y+5$.

<u>*Solución:*</u>

Previamente vimos que el único punto crítico de f *es* $(x,y)=(-2,2)$. *Además es fácil ver que las derivadas parciales de orden 2 son* $f_{xx}=2$, $f_{xy}=f_{yx}=1$ *y* $f_{yy}=2$. *Por lo tanto, la matriz hessiana de* f *en* $(-2,2)$ *es:*

$$Hf(-2,2)=\begin{bmatrix} f_{xx}(-2,2) & f_{xy}(-2,2) \\ f_{yx}(-2,2) & f_{yy}(-2,2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Además $d_1=2$ *y* $d_2=det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=3$. *Así, el criterio de la hessiana nos dice que* $(-2,2)$ *es un mínimo local para* f.

Ejemplo 5.0.10 *Usar el criterio de la matriz hessiana para hallar los extremos locales de la función* $f(x,y,z)=x^3+xy^2+x^2+y^2+3z^2$.

<u>*Solución:*</u>

Primero encontremos los puntos críticos de f. *Para esto, necesitamos encontrar las derivadas parciales de* f *las cuales son* $f_x=3x^2+y^2+2x$, $f_y=2xy+2y$ *y* $f_z=6z$. *Así los puntos críticos de* f *son los puntos* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *que satisfacen las ecuaciones:*

$$3x^2+y^2+2x=0 \quad (f_x(x,y,z)=0).$$

$$2xy+2y=0 \quad (f_y(x,y,z)=0).$$

$$6z=0 \quad (f_z(x,y,z)=0).$$

La segunda ecuación nos dice que $2xy+2y=2y(x+1)=0$, *lo cual implica que* $y=0$ *o* $x=-1$. *Si* $y=0$, *entonces la primera ecuación nos dice que* $3x^2+2x=x(3x+2)=0$ *y por tanto* $x=0$ *ó* $x=-\frac{2}{3}$. *Si* $x=-1$, *entonces la primera ecuación nos dice que* $y^2+1=0$ *lo cual es imposible. Así tenemos que los únicos puntos críticos de* f *son* $(0,0,0)$ *y* $\left(-\frac{2}{3},0,0\right)$.

Por lo tanto, tenemos que:

$$Hf=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6x+2 & 2y & 0 \\ 2y & 2x+2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$Hf(0,0,0)=\begin{bmatrix}6(0)+2 & 2(0) & 0\\ 2(0) & 2(0)+2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}.$$

$$Hf\left(-\frac{2}{3},0,0\right)=\begin{bmatrix}6\left(-\frac{2}{3}\right)+2 & 2(0) & 0\\ 2(0) & 2\left(-\frac{2}{3}\right)+2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}.$$

Lo anterior implica que:

· $Hf(0,0,0)$ *tiene* $d_1=2$, $d_2=4$ *y* $d_3=24$. *Lo cual prueba que* $(0,0,0)$ *es un mínimo local.*

· $Hf\left(-\frac{2}{3},0,0\right)$ *tiene* $d_1=-2$, $d_2=-\frac{4}{3}$ *y* $d_3=-8$. *Lo cual prueba que* $\left(-\frac{2}{3},0,0\right)$ *es un punto de silla.*

Nota: Cabe resaltar que el criterio de la hessina no dice nada si $d_n=0$. El siguiente ejercicio muestra que es posible que $d_n=0$ y el punto sea un máximo local ó un mínimo local ó un punto de silla.

Ejercicio:

(1) Sea $f(x,y)=x^4+x^2+y^4$. Verificar que $(0,0)$ es el mínimo absoluto de f y que el criterio de la hessiana no se puede aplicar en este punto $(d_2=0)$.

(2) Sea $g(x,y)=-x^4-x^2-y^4$. Verificar que $(0,0)$ es el máximo absoluto de g y que el criterio de la hessiana no se puede aplicar en este punto $(d_2=0)$.

(3) Sea $h(x,y)=x^4-x^2+y^4$. Verificar que $(0,0)$ es un punto de silla y que el criterio de la hessiana no se puede aplicar en este punto $(d_2=0)$.

5.1. Extremos globales en regiones compactas

Definición 5.1.1 ***(Conjunto acotado):*** *Sea* $A\subseteq\mathbb{R}^n$. *Decimos que* A *es un conjunto acotado, si para algún* $a\in A$ *y algún* $r>0$ *se tiene que* $\boxed{A\subseteq B(a;r)}$.

Nota: Una forma de pensar un conjunto acotado, es pensar en conjuntos que no se extienden “infinitamente”.

Definición 5.1.2 ***(Conjunto compacto):*** *Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que A es un conjunto compacto, si:*

(1) *A es acotado.*

(2) *A es cerrado.*

Nota: Recordemos de cálculo diferencial el teorema de valores extremos:

> Sea $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre $[a,b]$, entonces:
> (1) f tiene un máximo global sobre $[a,b]$.
> (2) f tiene un mínimo global sobre $[a,b]$.

De esta manera, es natural preguntarse ¿cuál sería el resultado análogo para varias variables? El siguiente teorema responde esta pregunta.

Teorema 5.1.1 ***(Valor extremo):*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre A. Si A es un conjunto compacto, entonces:*

(1) *f tiene mínimo global sobre A. Es decir que existe $a \in A$ tal que para todo $x \in A$:*

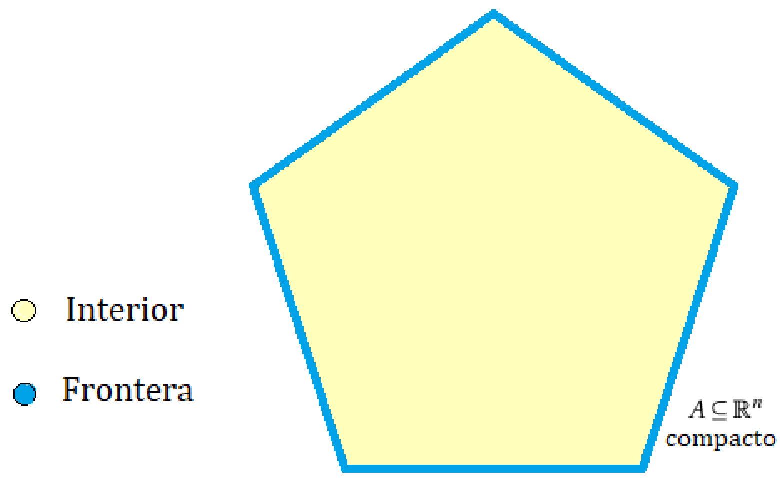
$$\boxed{f(a) \leqslant f(x)}\,.$$

(2) *f tiene máximo global sobre A. Es decir que existe $b \in A$ tal que para todo $x \in A$:*

$$\boxed{f(x) \leqslant f(b)}\,.$$

□

Observación: Es importante notar que el teorema anterior nos garantiza la existencia de un máximo y mínimo global de una función continua f sobre un conjunto compacto A, pero no tiene un método para encontrar dichos puntos. A continuación se dan un conjunto de pasos que nos ayudarán a encontrar los máximos y mínimos globales de una función continua sobre un conjunto compacto $A \subseteq \mathbb{R}^n$.



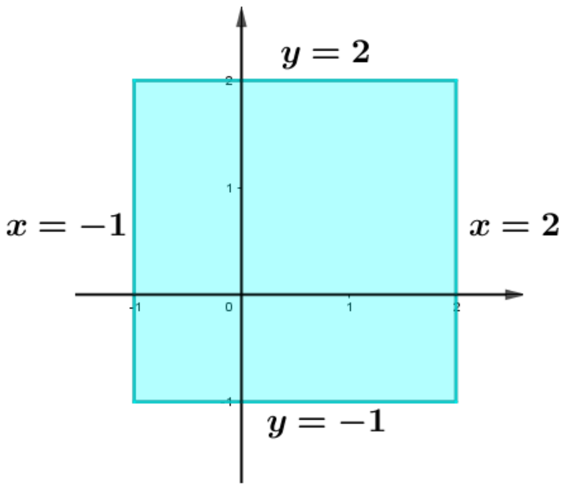
(1) Verificar la continuidad de la función y que la región donde se desea encontrar los extremos globales es compacta.

(2) Encontrar los puntos críticos de la región que son interiores al conjunto.

(3) Encontrar los valores máximos y mínimos en la frontera del conjunto.

(4) Comparar los puntos de los pasos (2) y (3), y así concluir cuales son los extremos globales (máximos y mínimos globales).

Ejemplo 5.1.1 *Sea* $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$. *Hallar los valores máximos y mínimos absolutos de la función* f *sobre el conjunto* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant x \leqslant 2,\ -1 \leqslant y \leqslant 2\}$.



Solución:

(1) Puntos críticos en el interior: *Los puntos críticos de* f *son aquellos puntos* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *Tales que* $\nabla f(x,y)=(f_x,f_y)=(2x-y,-x+2y)=(0,0)$. *De esta forma es suficiente solucionar el sistema*

$$2x-y=0,$$
$$-x+2y=0.$$

El cual se puede ver fácilmente que únicamente tiene la solución $(x,y)=(0,0)$ *(¿por qué?).*

(2) Estudio de máximos y mínimos en la frontera de A***:*** *En este caso, tenemos que la frontera de* A *es* $Fr(A)=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$, *donde*

$$\boxed{\begin{array}{c} A_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=-1,\ -1\leqslant y\leqslant 2\},\\ A_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=2,\ -1\leqslant y\leqslant 2\},\\ A_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=-1,\ -1\leqslant x\leqslant 2\},\\ A_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=2,\ -1\leqslant x\leqslant 2\}.\end{array}}$$

Veamos cuales son los extremos de f *sobre* A_1, A_2, A_3 *y* A_4.

- *Extremos de* f *sobre* A_1*: Sobre* A_1 *la función* f *se describe como*

$$f(-1,y)=(-1)^2-(-1)y+y^2+1 \ \ con\ -1\leqslant y\leqslant 2.$$
$$f(-1,y)=y^2+y+2 \ \ con\ -1\leqslant y\leqslant 2.$$

Por lo tanto, para encontrar los máximos y mínimos de f *sobre* A_1, *basta encontrar los máximos y mínimos de la función* $g(y)=y^2+y+2$ *en el intervalo* $[-1,2]$. *Para esto, encontramos los puntos críticos de* g *y luego los comparamos con los extremos del intervalo (*$y=-1$ *y* $y=2$*). De esta manera, tenemos que* $g'(y)=2y+1=0$, *lo cual implíca que* $y=-\frac{1}{2}$. *Así, tenemos que:*

$$g\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+2=\frac{7}{4},$$
$$g(-1)=(-1)^2+(-1)+2=2,$$
$$g(2)=2^2+2+2=8$$

Así el máximo de f *en* A_1 *lo tiene en el punto* $(x,y)=(-1,2)$ *y el mínimo de* f *en* A_1 *lo tiene en el punto* $(x,y)=(-1,-\frac{1}{2})$.

- *Extremos de f sobre A_2: Sobre A_2 la función f se describe como*

$$f(2,y)=(2)^2-(2)y+y^2+1 \;\; \textit{con} \;\; -1\leqslant y\leqslant 2.$$
$$f(2,y)=y^2-2y+5 \;\; \textit{con} \;\; -1\leqslant y\leqslant 2.$$

Por lo tanto, para encontrar los máximos y mínimos de f sobre A_2, basta encontrar los máximos y mínimos de la función $h(y)=y^2-2y+5$ en el intervalo $[-1,2]$. Para esto, encontramos los puntos críticos de h y luego los comparamos con los extremos del intervalo ($y=-1$ y $y=2$). De esta manera, tenemos que $h'(y)=2y-2=0$, lo cual implica que $y=1$. Así, tenemos que:

$$h(1)=1^2-2(1)+5=4,$$
$$h(-1)=(-1)^2-2(-1)+5=7,$$
$$h(2)=2^2-2(2)+5=5.$$

Así el máximo de f sobre A_2 lo tiene en el punto $(x,y)=(2,-1)$ y el mínimo de f en A_2 lo tiene en el punto $(x,y)=(2,1)$.

- *Extremos de f en A_3: Por simetría (¿cuál simetría?), tenemos que el máximo de f sobre A_3 es $(x,y)=(2,-1)$ y el mínimo de f sobre A_3 es $(x,y)=(-\frac{1}{2},-1)$.*

- *Extremos de f en A_4: Por simetría (¿cuál simetría?), tenemos que el máximo de f sobre A_4 es $(x,y)=(-1,2)$ y el mínimo de f sobre A_4 es $(x,y)=(1,2)$.*

De esta forma, tenemos que los máximos de f sobre la $Fr(A)$ se tienen en los puntos $(-1,2)$ y $(2,-1)$, y los mínimos de f sobre $Fr(A)$ se tienen en los puntos $(-1,-\frac{1}{2})$ y $(-\frac{1}{2},-1)$.

(3) Conclusión: *De lo anterior tenemos que:*

$$\boxed{\begin{array}{c} f(0,0)=1 \;\textit{(punto crítico en el interior)}, \\ f(-1,2)=f(2,-1)=8 \;\textit{(máximos en la frontera)}, \\ f\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{2},-1\right)=\dfrac{7}{4} \;\textit{(mínimos en la frontera)}. \end{array}}$$

Concluyendo que los máximos absolutos sobre A se obtienen en $(-1,2)$ y $(2,-1)$, y el mínimo absoluto sobre A se obtiene en $(0,0)$.

Nota: Existen ocasiones en que la frontera de un conjunto compacto se describe como el conjunto de nivel de una función. En este caso, el siguiente teorema nos dirá como encontrar los máximos y mínimos sobre la frontera. Este teorema es llamado el teorema de multiplicadores de Lagrange.

Teorema 5.1.2 ***(Multiplicadores de Lagrange- versión 1):*** *Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 sobre A, $S = g^{-1}(c) = \{x \in A : g(x) = c\}$ y $x_0 \in S$. Si x_0 es un máximo ó mínimo local de f sobre S y $\nabla g(x_0) \neq 0_n$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$\boxed{\nabla f(x_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0).}$$

□

Observación: El teorema de multiplicadores de Lagrange, nos dice que si una función f tiene máximos ó mínimos sobre un conjunto $S = g^{-1}(c)$, entonces para encontrarlos tenemos que solucionar el sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{array}{c} \nabla f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda \cdot \nabla g(x_1, \ldots, x_n), \\ g(x_1, \ldots, x_n) = c. \end{array}}$$

Para las variables $x_1, \ldots, x_n$.

Ejemplo 5.1.2 *Hallar los máximos y mínimos absolutos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.*

<u>Solución:</u>

Para hallar los máximos y mínimos de f sobre $S = g^{-1}(1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ ($g(x, y) = x^2 + y^2$), es suficiente resolver el sistema de ecuaciones

$$\boxed{\begin{array}{c} \nabla f(x, y) = \lambda \cdot \nabla g(x, y), \\ x^2 + y^2 = 1. \end{array}}$$

Lo cuál equivale a tener

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \lambda g_x(x,y), & 2x &= \lambda(2x), & 2x(1-\lambda) &= 0 & (5.1)\\
f_y(x,y) &= \lambda g_y(x,y), & 4y &= \lambda(2y), & 2y(2-\lambda) &= 0 & (5.2)\\
x^2+y^2 &= 1, & x^2+y^2 &= 1, & x^2+y^2 &= 1 & (5.3)
\end{aligned}
$$

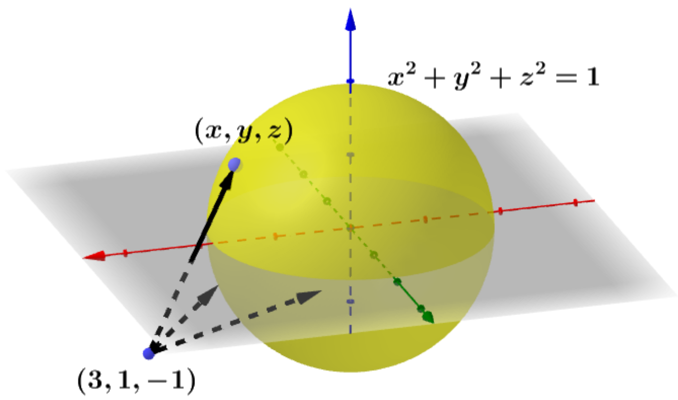
Por lo tanto, la ecuación (5.1) nos dice que $x=0$ *ó* $\lambda=1$. *Si* $x=0$, *entonces de la ecuación (4.3), tenemos que* $y=\pm 1$. *Si* $\lambda=1$, *entonces la ecuación (5.2) nos dice que* $y=0$ *y por la ecuación (5.3) tenemos que* $x=\pm 1$. *De lo anterior tenemos que existen 4 puntos que son solución del sistema, los cuales son* $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ *y* $(-1,0)$. *Luego para saber cuales puntos son máximos ó mínimos, se evaluan los puntos en la función* f *y se comparan.*

$$
\begin{aligned}
f(0,1) = f(0,-1) = 2,\\
f(-1,0) = f(1,0) = 1.
\end{aligned}
$$

Lo anterior nos dice que los máximos absolutos de f *sobre* $x^2+y^2=1$ *se obtienen en los puntos* $(0,1)$ *y* $(0,-1)$, *y los mínimos absolutos de* f *sobre* $x^2+y^2=1$ *se obtienen en los puntos* $(-1,0)$ *y* $(1,0)$.

Ejemplo 5.1.3 *Hallar los puntos de la esfera* $x^2+y^2+z^2=1$ *que están más cerca y más lejanos del punto* $(3,1,-1)$.

Solución:



En este caso, la función a optimizar es la distancia desde un punto (x,y,z) *hasta* $(3,1,-1)$ *con* $x^2+y^2+z^2=1$. *Esta función se describe como:*

$$d(x,y,z)=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z-(-1))^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}.$$

$$d(x,y,z)=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}.$$

Así, los máximos y mínimos de $\boldsymbol{d}$ *sobre* $S=g^{-1}(1)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ $\left(g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2\right)$ *los encontramos resolviendo el sistema:*

$$\boxed{\begin{gathered}\nabla d(x,y,z)=\lambda\cdot\nabla g(x,y,z),\\ x^2+y^2+z^2=1.\end{gathered}}$$

Aunque por aquí se obtiene la solución, el problema se vuelve un poco extenso debido a la expresión de las derivadas parciales de $\boldsymbol{d}$*. Por lo tanto, optimizaremos el cuadrado de la distancia sobre* $S=g^{-1}(1)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$*, y con esto tendremos los máximos y mínimos de la distancia (¿por qué?). Así tomando el cuadrado de la distancia* $f(x,y,z)=(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2$*, el sistema a resolver es*

$$\boxed{\begin{gathered}\nabla f(x,y,z)=\lambda\cdot\nabla g(x,y,z),\\ x^2+y^2+z^2=1.\end{gathered}}$$

Lo cuál equivale a tener

$$f_x=\lambda g_x, \qquad 2(x-3)=\lambda(2x), \qquad 2x(1-\lambda)=6 \tag{5.4}$$

$$f_y=\lambda g_y, \qquad 2(y-1)=\lambda(2y), \qquad 2y(1-\lambda)=2 \tag{5.5}$$

$$f_z=\lambda g_z, \qquad 2(z+1)=\lambda(2z), \qquad 2z(1-\lambda)=-2 \tag{5.6}$$

$$x^2+y^2+z^2=1, \qquad x^2+y^2+z^2=1, \qquad x^2+y^2+z^2=1 \tag{5.7}$$

De lo anterior tenemos que $1-\lambda=\dfrac{6}{2x}=\dfrac{2}{2y}=-\dfrac{2}{2z}$*, implicando que* $y=\dfrac{x}{3}$*,* $z=-\dfrac{x}{3}$*. Luego por la ecuación (4.7) tenemos*

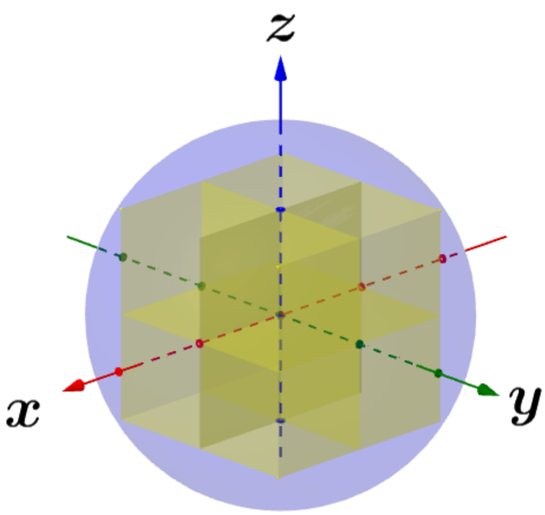
$$x^2+y^2+z^2=1,$$

$$x^2+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(-\frac{x}{3}\right)^2=x^2+\frac{x^2}{9}+\frac{x^2}{9}=\frac{11}{9}x^2=1.$$

Obteniendo que $x=\pm\frac{3}{\sqrt{11}}$*. Por tanto* $\left(\frac{3}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$ *y* $\left(-\frac{3}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$ *son la solución del sistema dado por el teorema de multiplicadores de Lagrange. Por tanto, para saber cuál es el máximo y mínimo, evaluamos dichos puntos en la función* f*, obteniendo que* $\left(\frac{3}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$ *es el punto más cercano y* $\left(-\frac{3}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$ *es el más lejano de* $(3,1,-1)$*.*

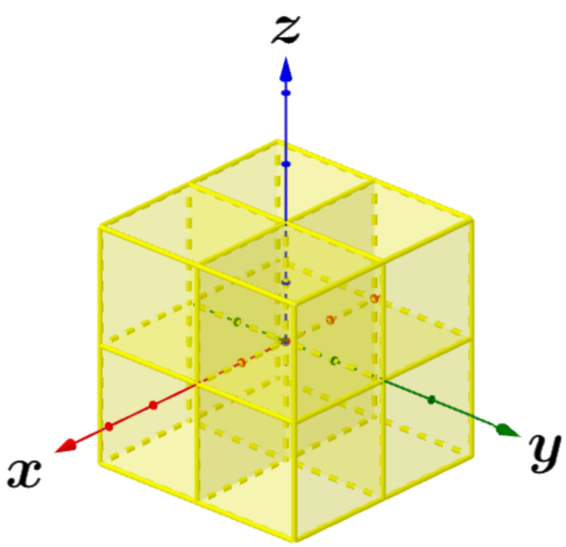
Ejemplo 5.1.4 *Encontrar la caja (paralelepípedo) más grande que puede inscribirse en el elipsoide* $3x^2+2y^2+z^2=6$.

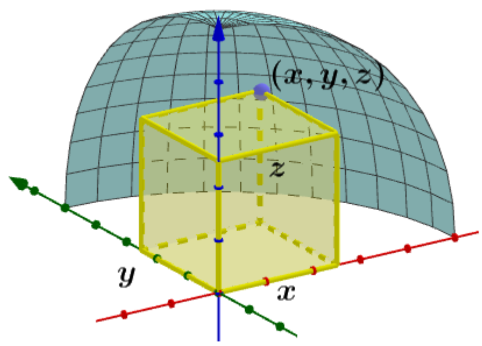
Solución:



Este problema, lo podemos reducir a:

> *Encontrar la caja más grande que podemos inscribir en el interior del elipsoide* $3x^2+2y^2+z^2=6$ *con* $x, y, z \geqslant 0$.





Con un poco de trabajo, podemos notar que:

- *La función a optimizar es* $V(x,y,z)=xyz$ *(el volumen de la caja).*

- *El conjunto en el cual optimizaremos el volumen de la caja es*

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 3x^2+2y^2+z^2=6\}=g^{-1}(6)\ \ \left(g(x,y,z)=3x^2+2y^2+z^2\right)$$

con $x,y,z\geqslant 0$.

Por lo tanto, el teorema de multiplicadores de Lagrange nos dice que para encontrar el volumen máximo debemos solucionar el sistema:

$$\boxed{\begin{gathered}\nabla V(x,y,z)=\lambda\cdot\nabla g(x,y,z),\\ 3x^2+2y^2+z^2=6.\end{gathered}}$$

Lo cuál equivale a tener:

$$\begin{aligned}
V_x&=\lambda g_x, & yz&=\lambda(6x), & xyz&=6x^2\lambda && (5.8)\\
V_y&=\lambda g_y, & xz&=\lambda(4y), & xyz&=4y^2\lambda && (5.9)\\
V_z&=\lambda g_z, & xy&=\lambda(2z), & xyz&=2z^2\lambda && (5.10)\\
3x^2+2y^2+z^2&=6, & 3x^2+2y^2+z^2&=6, & 3x^2+2y^2+z^2&=6 && (5.11)
\end{aligned}$$

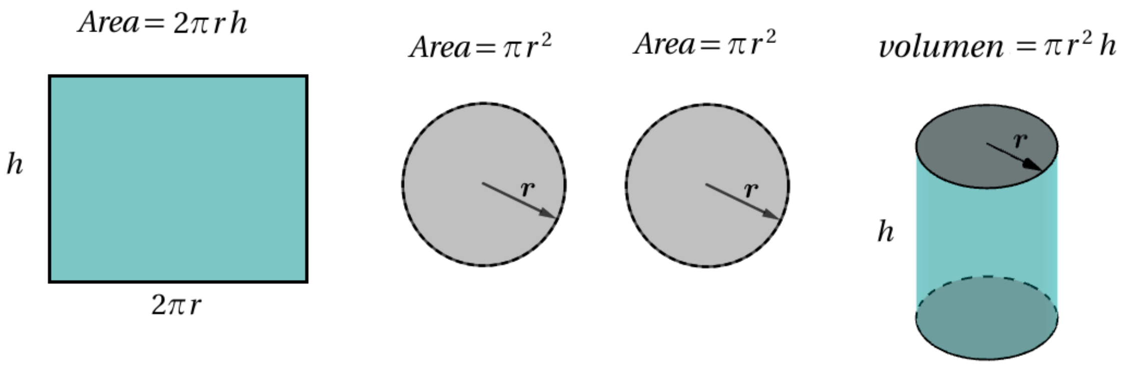
Por tanto, tenemos que $6x^2\lambda=4y^2\lambda=2z^2\lambda$*, lo cual implica que* $\sqrt{6}x=2y=\sqrt{2}z$ *(si* $\lambda=0$*, entonces* $xyz=0$*, pero este es precisamente el volumen de la caja que deseamos máximizar y además aquí usamos el supuesto que* $x,y,z\geqslant 0$*). De esta manera, reemplazando en la ecuación (4.11), tenemos que:*

$$\begin{gathered}
3x^2+2y^2+z^2=6,\\
3x^2+2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}x\right)^2=6,\\
3x^2+3x^2+3x^2=9x^2=6.
\end{gathered}$$

De donde $x=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $y=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=1$ *y* $z=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ *(recordar que* $x,y,z\geqslant 0$*).* *Por lo tanto, el teorema de multiplicadores de Lagrange nos dice que la caja con dimensiones* $x=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $y=1$ *y* $z=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ *es la caja más grande que puede inscribirse en el elipsoide*

$3x^2+2y^2+z^2=6$ *con* $x,y,z\geqslant 0$. *Lo anterior implíca que la caja más grande que puede inscribirse en el elipsoide* $3x^2+2y^2+z^2=6$ *tiene dimesiones* $2x=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$, $2y=2$ *y* $2z=\dfrac{6}{\sqrt{2}}$.

Ejemplo 5.1.5 *Supongamos que un cilindro circular recto tiene un volumen de* $1000\,cm^3$. *Hallar las dimensiones del cilindro que minimizan el area superficial.*



Solución (1): Usando multiplicadores de Lagrange.

Para esto, es es suficiente resolver el sistema:

$$\boxed{\begin{array}{c}\nabla A(r,h)=\lambda\cdot\nabla g(r,h),\\ \pi r^2h=1000,\end{array}}$$

donde $A(r,h)=2\pi r^2+2\pi rh$ *y* $g(r,h)=\pi r^2h$. *Además este sistema equivale a tener*

$$A_r=\lambda g_r,\qquad 4\pi r+2\pi h=\lambda(2\pi rh),\qquad 2r+h=\lambda(rh). \tag{5.12}$$
$$A_h=\lambda g_h,\qquad 2\pi r=\lambda(\pi r^2),\qquad 2r=\lambda(r^2). \tag{5.13}$$
$$\pi r^2h=1000,\qquad \pi r^2h=1000,\qquad \pi r^2h=1000. \tag{5.14}$$

Luego tomando el cociente entre la ecuación (5.12) y (5.13), tenemos:

$$\frac{2r+h}{2r}=\frac{\lambda(rh)}{\lambda(r^2)}=\frac{h}{r},\ \textit{lo cuál implica que}\ \frac{2r+h}{2r}=\frac{h}{r}.$$

$$2r^2+rh=2rh\ \Rightarrow\ r(2r-h)=0\ \Rightarrow\ 2r-h=0\ \Rightarrow\ h=2r.$$

Luego reemplazando h en la ecuación (5.14), tenemos que

$$\pi r^2 h = 1000 \;\Rightarrow\; \pi r^2(2r) = 1000 \;\Rightarrow\; r^3 = \frac{500}{\pi} \;\Rightarrow\; \boxed{r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}}.$$

De lo anterior, tenemos que las dimensiones del cilindro que hacen que el area superficial sea mínima (¿por qué?) son $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ *y* $h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi\sqrt[3]{\frac{250000}{\pi^2}}}$.

Solución (2): Sin usar multiplicadores de Lagrange.

En este caso, sabemos que el volumen del cilindro es $\pi r^2 h = 1000$ *y nos piden minimizar el area superficial, la cual es* $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$. *Despejando* h *en la ecuación del volumen del cilindro y reemplazandola en la función del area superficial, tendremos que*

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r^2 h = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r},$$

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}.$$

De esta manera, para optimizar la función $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$ *usamos el criterio de la segunda derivada.*[1]

(1) *Encontrar los puntos críticos de* $A(r)$. *En este caso, tenemos que*

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0.$$

Implicando que el único punto crítico necesario es $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ (*¿por qué?*).

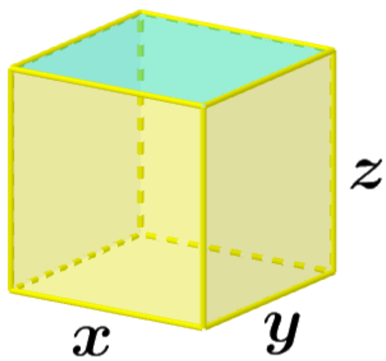
(2) *Como* $A''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$, *entonces es claro* $A\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) > 0$. *Por tanto,* $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ *es un mínimo.*

De lo anterior, tenemos que las dimensiones del cilindro que hacen que el area superficial sea mínima son $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ *y* $h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi\sqrt[3]{\frac{250000}{\pi^2}}}$.

[1] Si $f : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 sobre (a,b) y $c \in (a,b)$ es un punto crítico de f. Por tanto, si $f''(c) > 0$, entonces c es un mínimo local y si $f''(c) < 0$, entonces c es un máximo local.

Ejemplo 5.1.6 *Se va a fabricar una caja rectangular abierta de modo que tenga un volumen fijo de 4 metros^3. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para minimizar la cantidad de material que se utilice para construirla?*

Solución:



- *La función a optimizar es el área superficial de la caja construida, la cual se describe por:*

$$f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz,$$

ya que la caja es abierta.

- *El conjunto en el cual optimizaremos el volumen de la caja es:*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; xyz = 4\} = g^{-1}(4) \quad \big(g(x,y,z) = xyz\big).$$

Entonces por el teorema de multiplicadores de Lagrange es suficiente resolver el sistema:

$$\boxed{\begin{array}{c} \nabla f(x,y,z) = \lambda \cdot \nabla g(x,y,z), \\ xyz = 4. \end{array}}$$

Entonces este sistema equivale a tener

$$\begin{array}{cccr} f_x = \lambda g_x, & y + 2z = \lambda(yz), & xy + 2xz = xyz\lambda & (5.15) \\ f_y = \lambda g_y, & x + 2z = \lambda(xz), & xy + 2yz = xyz\lambda & (5.16) \\ f_z = \lambda g_z, & 2x + 2y = \lambda(xy), & 2xz + 2yz = xyz\lambda & (5.17) \\ xyz = 4, & xyz = 4, & xyz = 4. & (5.18) \end{array}$$

Por lo tanto, igualando las ecuaciones (5.15) y (5.16) tenemos que:

$$xy + 2xz = xy + 2yz,$$
$$2xz = 2yz,$$

lo cual implica que $x = y$ *(aquí usamos el hecho de que* $x, y, z > 0$*). Luego igualando las ecuaciones (5.16) y (5.17) tenemos que*

$$xy + 2yz = 2xz + 2yz,$$
$$xy = 2yz,$$

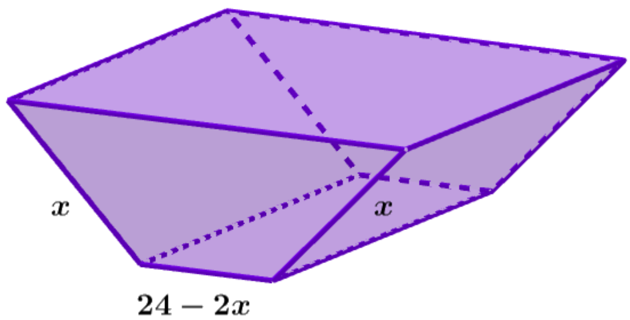
lo cual implica que $x = 2z$. *Así usando la ecuación (5.18) y el hecho que* $x = y = 2z$ *obtenemos:*

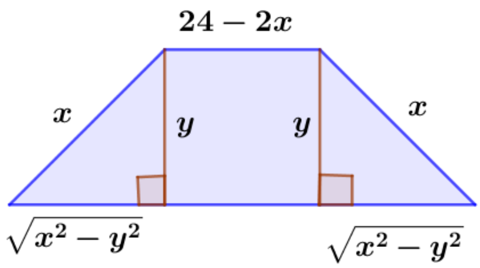
$$xyz = 4,$$
$$x \cdot x \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 4,$$
$$x = 2.$$

De esta forma tenemos que el único punto (x, y, z) *que satisface las condiciones del teorema de multiplicadores de Lagrange con* $x, y, z > 0$ *es* $(x, y, z) = (2, 2, 1)$. *Además se puede probar que en efecto este punto es donde el area superficial de la caja abierta con volumen 4 es mínima y su valor es*

$$f(2,2,1) = (2)(2) + 2(2)(1) + 2(2)(1) = 12.$$

Ejemplo 5.1.7 *Una lámina de hojalata de 24 cm de ancho se dobla para formar la parte longitudinal de un abrevadero cuya sección transversal es un trapecio isósceles. Calcule* x *(longitud del lado inclinado) y* θ *(ángulo de ese lado con la horizontal) de manera que el área de la sección transversal sea máxima y determine dicha área.*





Solución: En este caso la función a optimizar es el area del trapecio mostrado en la figura, la cual se describe como:

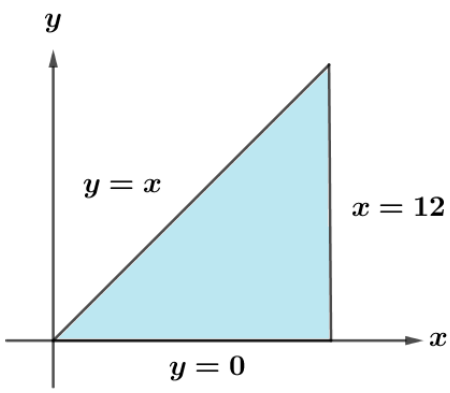
$$f(x,y)=(24-2x)y+y\sqrt{x^2-y^2}.$$

Además cabe resaltar que esta función de area tiene sentido si suponemos que las distancias descritas en la figura anterior son positivas. Es decir $x\geqslant 0,\ 24-2x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$ *y* $x^2-y^2\geqslant 0$. *Esto implica que:*

$$\boxed{\begin{array}{c} 0\leqslant x\leqslant 12, \\ 0\leqslant y\leqslant x. \end{array}}$$

De lo anterior, tenemos que:

- *La función a optimizar es* $f(x,y)=(24-2x)y+y\sqrt{x^2-y^2}$.
- *El conjunto en el que optimizaremos a* f *es* $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant x\leqslant 12\ ,\ 0\leqslant y\leqslant x\}$.



De esta manera para encontrar el máximo y mínimo de f *sobre* S *procedemos de la siguiente manera:*

Paso (1): *Encontrar los puntos críticos de* f *en el interior de* S.

Para esto, es suficiente resolver $\nabla f(x,y)=(f_x(x,y),f_y(x,y))=(0,0)$, *lo cual equivale a tener:*

$$\left(-2y+\frac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}},\ 24-2x+\sqrt{x^2-y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)=(0,0),$$

y esto nos dice que:

$$-2y+\frac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}}=0, \tag{5.19}$$

$$24-2x+\sqrt{x^2-y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}=0. \tag{5.20}$$

Analizando la ecuación (5.19), se tiene que:

$$-2y+\frac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}}=0 \iff y\left(-2+\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)=0 \iff y=0,\ 2\sqrt{x^2-y^2}=x,$$

$$y=0,\ 2\sqrt{x^2-y^2}=x \iff y=0,\ 4(x^2-y^2)=x^2 \iff y=0,\ 3x^2=4y^2,$$

$$y=0,\ 3x^2=4y^2 \iff y=0,\ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

y debido al problema brindado, la única posibilidad es para y *es* $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ (*¿por qué?*).

De esta manera, reemplazando $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ *en la ecuación (5.20), tenemos:*

$$24-2x+\frac{x}{2}-\frac{\frac{3}{4}x^2}{\frac{1}{2}x}=0 \iff 24-2x+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}x=0 \iff 24-3x=0 \iff x=8.$$

De lo anterior tenemos que el único punto crítico de f *en el interior de* S *es:*

$$(x,y)=\left(x,\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)=(8,4\sqrt{3}).$$

Paso (2): *Encontrar los puntos los valores máximos y mínimos de* f *en la frontera de* S.

En este caso la frontera de S *es* $Fr(S)=A_1\cup A_2\cup A_3$, *donde:*

$$\boxed{\begin{aligned} A_1&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=0,\ 0\leqslant x\leqslant 12\},\\ A_2&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=x,\ 0\leqslant x\leqslant 12\},\\ A_3&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x=12,\ 0\leqslant y\leqslant 12\}.\end{aligned}}$$

Ahora analicemos el comportamiento de f *a lo largo de* A_1, A_2 *y* A_3.

- *f sobre A_1: Como en este conjunto $y = 0$, entonces $f(x, 0) = 0$ para todo $(x, 0) \in A_1$.*

- *f sobre A_2: Como en este conjunto $y = x$, entonces*

$$f(x, x) = (24-2x)x + x\sqrt{x^2 - x^2} = 24x - 2x^2$$

con $0 \leqslant x \leqslant 12$. Entonces para hallar los valores máximos y mínimos de f sobre A_2 es suficiente encontrar los máximos y mínimos de la función $g(x) = 24x - 2x^2$ en el intervalo $[0, 12]$. Para esto es suficiente comparar los puntos críticos de g en $(0, 12)$ y luego comparar con los puntos $x = 0$ y $x = 12$. De esta manera $g'(x) = 24 - 4x = 0$ implica que $x = 6$ y así:

$$g(0) = 24(0) - 2 \cdot 0^2 = 0,$$

$$g(12) = 24(12) - 2(12)^2 = 0,$$

$$g(6) = 24(6) - 2 \cdot 6^2 = 72.$$

Lo anterior muestra que el valor máximo de f sobre A_2 se obtiene en el punto $(x, y) = (x, x) = (6, 6)$.

- *f sobre A_3: Como en este conjunto $x = 12$, entonces*

$$f(12, y) = y\sqrt{144 - y^2}$$

con $0 \leqslant y \leqslant 12$. Entonces para hallar los valores máximos y mínimos de f sobre A_3 es suficiente encontrar los máximos y mínimos de la función $h(x) = y\sqrt{144 - y^2}$ en el intervalo $[0, 12]$. Para esto es suficiente comparar los puntos críticos de h en $(0, 12)$ y luego comparar con los puntos $y = 0$ y $y = 12$. De esta manera $h'(y) = \sqrt{144 - y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{144-y^2}} = 0$ implica que $y = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ y así:

$$h(0) = 0,$$

$$h(12) = 0,$$

$$h(6\sqrt{2}) = 72.$$

Lo anterior muestra que el valor máximo de f sobre A_3 se obtiene en el punto $(x, y) = (12, y) = (12, 6\sqrt{2})$.

Paso (3): *Comparar los puntos obtenidos de los pasos (1) y (2) mediante la función f y concluir quienes son los máximos y mínimos.*

$$f(8,4\sqrt{3}) = 48\sqrt{3},$$
$$f(6,6) = 72,$$
$$f(12,6\sqrt{2}) = 72.$$

Lo cual implica que f alcanza su valor máximo en el punto $(8,4\sqrt{3})$ y además el ángulo con la horizontal es:

$$\theta = sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = sin^{-1}\left(\frac{4\sqrt{3}}{8}\right) = sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Nota: En ocasiones es posible tener más de una condición que describa un conjunto sobre el cual queremos optimizar una cierta función. En otras palabras queremos máximizar ó mínimizar una función f sujeta a k condiciones de la forma:

$$\boxed{\begin{aligned} g_1(x_1,\ldots,x_n) &= c_1, \\ g_2(x_1,\ldots,x_n) &= c_2, \\ &\vdots \\ g_k(x_1,\ldots,x_n) &= c_k. \end{aligned}}$$

Para estos casos existe una segunda versión del teorema de multiplicadores de Lagrange, el cual describimos a continuación.

Teorema 5.1.3 ***(Multiplicadores de Lagrange-versión 2):*** *Supongamos que tenemos funciones $f, g_1, \ldots, g_k : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1 sobre A con A abierto y S el conjunto definido por:*

$$S = \{x \in A : g_1(x) = c_1, g_2(x) = c_2, \cdots, g_k(x) = c_k\} = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant k} g_i^{-1}(c_i),$$

para valores fijos $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$. Entonces si $x_0 \in S$ satisface que:

(1) *$\nabla g_1(x_0), \nabla g_2(x_0), \ldots, \nabla g_k(x_0)$ son linealmente independientes.*

(2) *f tiene un máximo ó mínimo local en x_0 sobre el conjunto S.*

Entonces existen $\lambda_1, \ldots \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\boxed{\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g(x_0) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(x_0).}$$

□

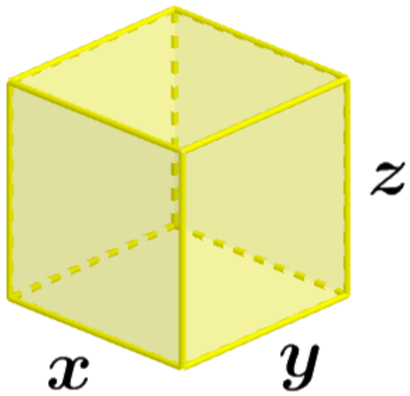
Observación: Lo anterior nos dice que para encontrar los extremos de f (máximos y mínimos) sobre el conjunto $S = \{x \in A : g_1(x) = c_1, g_2(x) = c_2, \cdots, g_k(x) = c_k\}$, debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{gathered} \nabla f(x_1,\ldots,x_n) = \lambda_1 \nabla g(x_1,\ldots,x_n) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(x_1,\ldots,x_n). \\ g_1(x_1,\ldots,x_n) = c_1, \\ \vdots \\ g_k(x_1,\ldots,x_n) = c_k, \end{gathered}}$$

para las variables $x_1,\ldots,x_n$.

Ejemplo 5.1.8 *En una empresa se fabrican recipientes con forma de caja con las siguientes características: La suma de todas sus aristas es de 30 metros y su superficie total es de 36 metros cuadrados. Determinar la capacidad máxima y mínima de estos recipientes en metros cúbicos.*

Solución:



- *La función a optimizar es el volumen, el cual se describe como* $f(x, y, z) = x\,y\,z$.

- *El conjunto en el cual optimizaremos a f es:*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4(x + y + z) = 30,\ 2(xy + xz + yz) = 36\}.^2$$

Entonces para encontrar los valores máximos y mínimos de f sobre S, es suficiente resolver el sistema:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= \lambda_1 \cdot \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \cdot \nabla g_2(x,y,z), \\ 4(x+y+z) = 30 & \ \left(g_1(x,y,z) = 4(x+y+z) \right), \\ 2(xy+xz+yz) = 36 & \ \left(g_2(x,y,z) = 2(xy+xz+yz) \right). \end{aligned}}$$

Ahora es fácil notar que $\nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \cdot \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \cdot \nabla g_2(x,y,z)$ es equivalente a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_x = \lambda_1 (g_1)_x + \lambda_2 (g_2)_x &\iff yz = \lambda_1(4) + \lambda_2(2y+2z) = 4\lambda_1 + 2\lambda_2(y+z), \\ f_y = \lambda_1 (g_1)_y + \lambda_2 (g_2)_y &\iff xz = \lambda_1(4) + \lambda_2(2x+2z) = 4\lambda_1 + 2\lambda_2(x+z), \\ f_z = \lambda_1 (g_1)_z + \lambda_2 (g_2)_z &\iff xy = \lambda_1(4) + \lambda_2(2x+2y) = 4\lambda_1 + 2\lambda_2(x+y). \end{aligned}$$

De lo anterior, tenemos que el sistema anterior se reduce al siguiente sistema:

$$yz = 4\lambda_1 + 2\lambda_2(y+z) \qquad 4\lambda_1 = yz - 2\lambda_2(y+z) \tag{5.21}$$
$$xz = 4\lambda_1 + 2\lambda_2(x+z) \qquad 4\lambda_1 = xz - 2\lambda_2(x+z) \tag{5.22}$$
$$xy = 4\lambda_1 + 2\lambda_2(x+y) \qquad 4\lambda_1 = xy - 2\lambda_2(x+y) \tag{5.23}$$
$$x + y + z = 15/2 \qquad x + y + z = 15/2 \tag{5.24}$$
$$xy + xz + yz = 18 \qquad xy + xz + yz = 18 \tag{5.25}$$

Entonces igualando las ecuaciones (5.19) y (5.20) tenemos que:

$$\begin{aligned} yz - 2\lambda_2(y+z) &= xz - 2\lambda_2(x+z), \\ yz - xz = 2\lambda_2(y+z) - 2\lambda_2(x+z) &= 2\lambda_2(y+z-x-z) = 2\lambda_2(y-x), \\ z(y-x) &= 2\lambda_2(y-x), \\ (y-x)(z-2\lambda_2) &= 0. \end{aligned}$$

[2] Si la caja tiene dimensiones x, y, z como en la figura, entonces la suma de todas las aristas es $4(x+y+z)$ y el area superficial de la caja es $2(xy+xz+yz)$.

Lo cual implica que $y = x$ *o* $z = 2\lambda_2$.

Caso (1): *Si* $y = x$, *entonces*

$$x + y + z = 15/2, \qquad x + x + z = 15/2, \qquad 2x + z = 15/2 \tag{5.26}$$

$$xy + xz + yz = 18, \qquad xx + xz + xz = 18, \qquad x^2 + 2xz = 18 \tag{5.27}$$

Entonces de las ecuaciones (5.24) *y* (5.25) *tenemos que*

$$x^2 + 2xz = 18 \iff x^2 + 2x(15/2 - 2x) = 18 \iff x^2 + 15x - 4x^2 = 18,$$
$$x^2 + 15x - 4x^2 = 18 \iff -3x^2 + 15x = 18 \iff x^2 - 5x + 6 = 0,$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0 \iff (x-3)(x-2) = 0 \iff x = 3 \text{ o } x = 2.$$

De lo anterior tenemos que los siguientes puntos satisfacen el sistema de ecuaciones de multiplicadores de Lagrange:

- $(x, y, z) = (x, x, 15/2 - 2x) = (3, 3, 15/2 - 2(3)) = (3, 3, 3/2)$.
- $(x, y, z) = (x, x, 15/2 - 2x) = (2, 2, 15/2 - 2(2)) = (2, 2, 7/2)$.

Caso (2): *Si* $z = 2\lambda_2$, *entonces igualando las ecuaciones (5.20) y (5.21) tenemos que:*

$$xz - 2\lambda_2(x+z) = xy - 2\lambda_2(x+y) \iff xz - z(x+z) = xy - z(x+y),$$
$$xz - z(x+z) = xy - z(x+y) \iff xz - xz - z^2 = xy - xz - yz,$$
$$xz - xz - z^2 = xy - xz - yz \iff xz - xy = z^2 - yz = z(z-y),$$
$$xz - xy = z^2 - yz = z(z-y) \iff x(z-y) = z(z-y) \iff (x-z)(z-y) = 0.$$

De lo anterior tenemos que $x = z$ *ó* $y = z$. *Entonces por simetría (¿cuál simetría?) podemos ver fácilmente que los puntos que satisfacen el sistema de ecuaciones de multiplicadores de Lagrange son* $(3, 3/2, 3)$, $(2, 7/2, 2)$, $(3/2, 3, 3)$ *y* $(7/2, 2, 2)$. *Además:*

$$f(2, 7/2, 2) = f(2, 2, 7/2) = f(7/2, 2, 2) = 14.$$
$$f(3, 3/2, 3) = f(3, 3, 3/2) = f(3/2, 3, 3) = 27/2.$$

Así concluimos que:

- $(2, 7/2, 2), (2, 2, 7/2)$ *y* $(7/2, 2, 2)$ *son los máximos absolutos de* f.
- $(3, 3/2, 3), (3, 3, 3/2)$ *y* $(3/2, 3, 3)$ *son los mínimos absolutos de* f.

Capítulo 6

Coordenadas curvilíneas

6.1. Definición y ejemplos básicos

Definición 6.1.1 ***(Coordenada curvilínea):*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función inyectiva con $f \in C^1(A;\mathbb{R}^3)$. Entonces decimos que el punto $(u_1, u_2, u_3) \in A$ es la coordenada curvilínea asociada a $f(u_1, u_2, u_3) = (x(u_1, u_2, u_3), y(u_1, u_2, u_3), z(u_1, u_2, u_3))$.*

Ejemplo 6.1.1 ***(Coordenadas cilíndricas):*** *Consideremos la función $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ descrita como:*

$$\boxed{\begin{array}{c} f(r,\theta,z) = (x(r,\theta,z), y(r,\theta,z), z(r,\theta,z)) = (r\,cos\theta, r\,sin\theta, z). \\ \\ x(r,\theta,z) = r\,cos\theta, \quad y(r,\theta,z) = r\,sin\theta, \quad z(r,\theta,z) = z. \\ \\ Dom(f) = A = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}\}. \end{array}}$$

En este caso, tenemos que (r,θ,z) es la coordenada curvilínea asociada a (x,y,z).

Ejemplo 6.1.2 ***(Coordenadas esféricas):*** *Consideremos la función $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ descrita como:*

$$\boxed{\begin{array}{c} f(\rho,\phi,\theta) = (x(\rho,\phi,\theta), y(\rho,\phi,\theta), z(\rho,\phi,\theta)) = (\rho\,cos\theta\,sin\phi, \rho\,sin\theta\,sin\phi, \rho\,cos\phi). \\ \\ x(\rho,\phi,\theta) = \rho\,cos\theta\,sin\phi, \quad y(\rho,\phi,\theta) = \rho\,sin\theta\,sin\phi, \quad z(\rho,\phi,\theta) = \rho\,cos\phi. \\ \\ Dom(f) = A = \{(\rho,\phi,\theta) \in \mathbb{R}^3 : \rho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi\}. \end{array}}$$

En este caso, tenemos que (ρ,ϕ,θ) es la coordenada curvilínea asociada a (x,y,z).

Ejemplo 6.1.3 ***(Coordenadas parabólicas cilíndricas):*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ descrita como:*

$$\boxed{\begin{gathered} f(u,v,z) = (x(u,v,z), y(u,v,z), z(u,v,z)) = \left(\frac{u^2-v^2}{2}, uv, z\right). \\ x(u,v,z) = \frac{u^2-v^2}{2}, \quad y(u,v,z) = uv, \quad z(u,v,z) = z. \\ Dom(f) = A = \{(u,v,z) \in \mathbb{R}^3 : u \in \mathbb{R},\ v \geqslant 0,\ z \in \mathbb{R}\}. \end{gathered}}$$

En este caso, tenemos que (u,v,z) es la coordenada curvilínea asociada a (x,y,z).

Ejemplo 6.1.4 ***(Coordenadas parabólicas):*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ descrita como:*

$$\boxed{\begin{gathered} f(u,v,\theta) = (x(u,v,\theta), y(u,v,\theta), z(u,v,\theta)) = \left(uvcos\theta, uvsin\theta, \frac{u^2-v^2}{2}\right). \\ x(u,v,\theta) = uvcos\theta, \quad y(u,v,\theta) = uvsin\theta, \quad z(u,v,\theta) = \frac{u^2-v^2}{2}. \\ Dom(f) = A = \{(u,v,\theta) \in \mathbb{R}^3 : u \geqslant 0,\ v \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi\}. \end{gathered}}$$

En este caso, tenemos que (u,v,θ) es la coordenada curvilínea asociada a (x,y,z).

Observación: Recordemos que en la definición de coordenada curvilínea, tenemos que

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_1,u_2,u_3) &\mapsto f(u_1,u_2,u_3) = (x,y,z). \end{aligned}$$

Es una función inyectiva y de clase C^1 sobre A. El ser inyectiva nos dice que existe una inversa para f, denotada por f^{-1} la cual se describe como:

$$\begin{aligned} f^{-1} : Rango(f) \subseteq \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\mapsto f^{-1}(x,y,z) = (u_1,u_2,u_3). \end{aligned}$$

Por tanto u_1, u_2, u_3 son funciones que dependen de las variables x, y, z.

6.2. Superficies y curvas inducidas por coordenadas curvilíneas

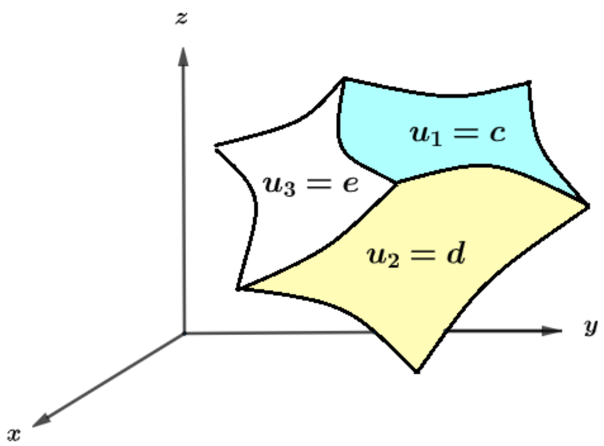
A continuación describiremos algunas superficies y curvas inducidas por las coordenadas curvilíneas vistas previamente.

Definición 6.2.1 ***(Superficies coordenadas y curvas coordenadas)***
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función tal que $f \in C^1(A;\mathbb{R}^3)$, f es inyectiva y está descrita como $(u_1, u_2, u_3) \mapsto f(u_1, u_2, u_3) = (x, y, z)$. Si dados $c, d, e \in \mathbb{R}$, entonces las superficies coordenadas inducidas por f son:

$$\boxed{\begin{array}{l} A_1 = \{(x,y,z) \in Rango(f) \subseteq \mathbb{R}^3 : u_1(x,y,z) = c\} = u_1^{-1}(c), \\[2ex] A_2 = \{(x,y,z) \in Rango(f) \subseteq \mathbb{R}^3 : u_2(x,y,z) = d\} = u_2^{-1}(d), \\[2ex] A_3 = \{(x,y,z) \in Rango(f) \subseteq \mathbb{R}^3 : u_3(x,y,z) = e\} = u_3^{-1}(e), \end{array}}$$

y las curvas coordenadas asociadas a f son:

$$\boxed{\begin{array}{l} A_1 \cap A_2 = \{(x,y,z) \in Ran(f) \subseteq \mathbb{R}^3 : u_1(x,y,z) = c,\ u_2(x,y,z) = d\} = u_1^{-1}(c) \cap u_2^{-1}(d), \\[2ex] A_1 \cap A_3 = \{(x,y,z) \in Ran(f) \subseteq \mathbb{R}^3 : u_1(x,y,z) = c,\ u_3(x,y,z) = e\} = u_1^{-1}(c) \cap u_3^{-1}(e), \\[2ex] A_2 \cap A_3 = \{(x,y,z) \in Ran(f) \subseteq \mathbb{R}^3 : u_2(x,y,z) = d,\ u_3(x,y,z) = e\} = u_2^{-1}(d) \cap u_3^{-1}(e), \end{array}}$$



Ejemplo 6.2.1 ***(Superficies y curvas correspondientes a las coordenadas cilíndricas).***

(1) *Describir las superficies coordenadas respecto a las coordenadas cilíndricas.*

(2) *Describir las curvas coordenadas respecto a las coordenadas cilíndricas.*

Solución:

(1) *Sabemos que las coordenadas cilíndricas se describen como:*

$$\boxed{x = r cos\theta}, \quad \boxed{y = r sin\theta}, \quad \boxed{z = z}.$$

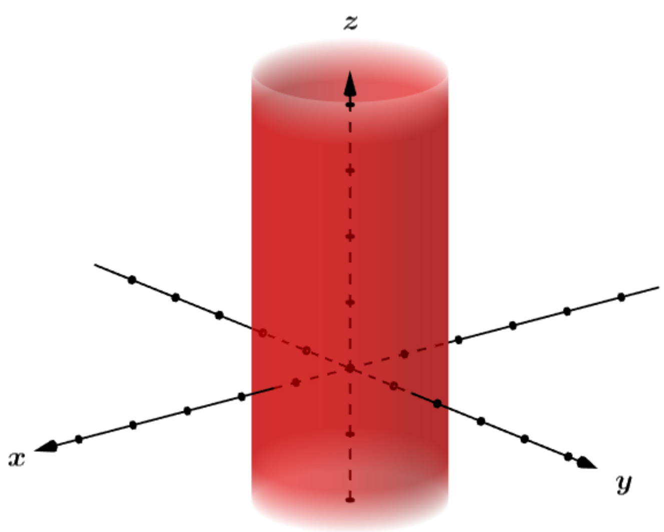
Por lo tanto, tenemos que:

$$x^2 + y^2 = (r cos\theta)^2 + (r sin\theta)^2 = r^2.$$

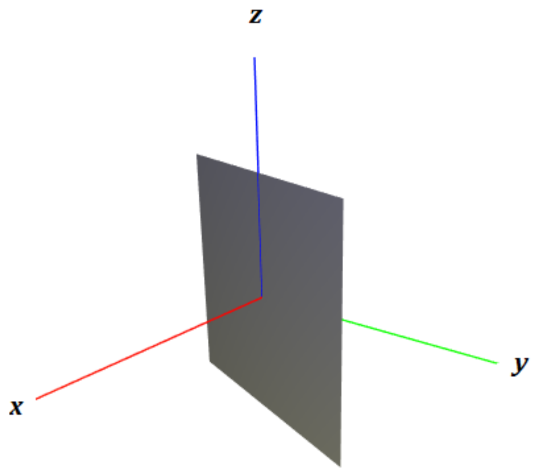
$$\frac{y}{x} = \frac{r sin\theta}{r cos\theta} = tan\theta.$$

Lo anterior implica que $\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$, $\boxed{tan\theta = \frac{y}{x}}$, $\boxed{z = z}$. *Así, tenemos que las superficies coordenadas son:*

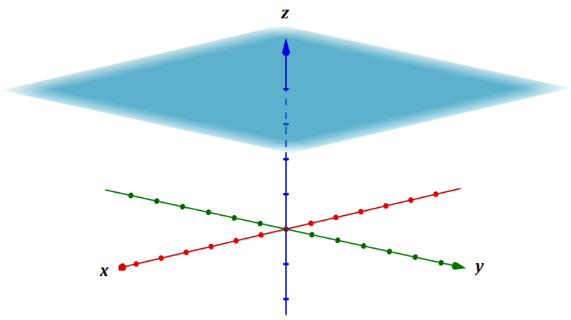
- $A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : r = \sqrt{x^2 + y^2} = c\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = c\}.$



- $A_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = d\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = tan(d) \cdot x\right\}.$

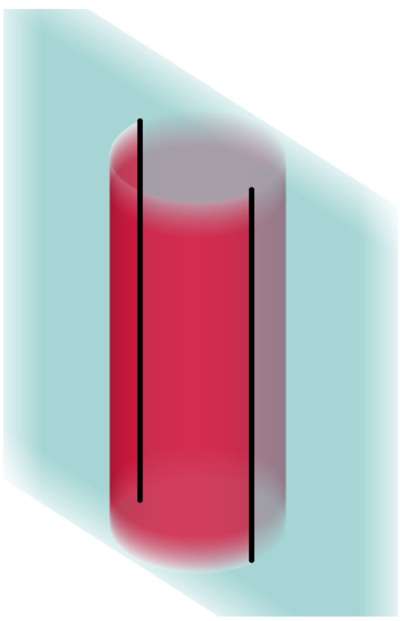


- $A_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = e\}$.

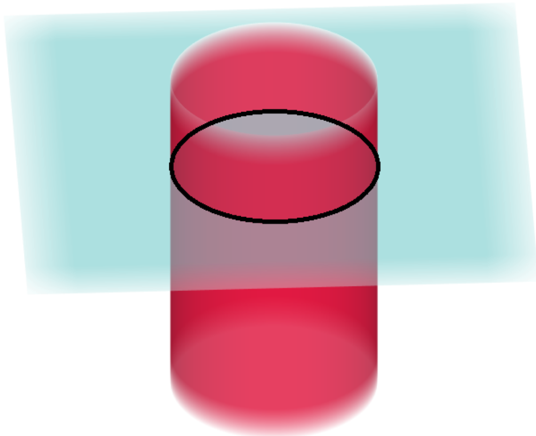


(2) *Las curvas coordenadas se describen como:*

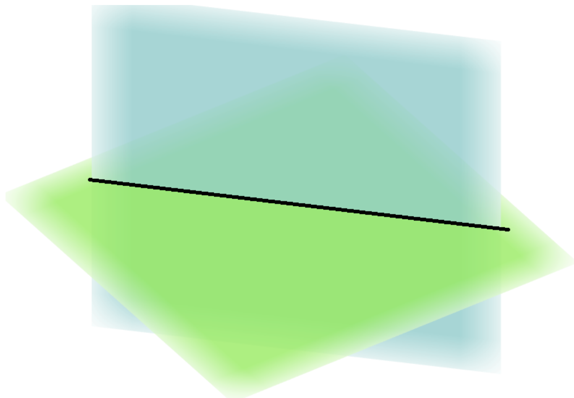
- $A_1 \cap A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = c,\ y = tan(d) \cdot x\}$.



- $A_1 \cap A_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = c, \ z = e\}$.



- $A_2 \cap A_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = tan(d)x, \ z = e\}$.



Ejemplo 6.2.2 ***(Superficies y curvas correspondientes a las coordenadas esféricas).***

(1) *Describir las superficies coordenadas respecto a las coordenadas esféricas.*

(2) *Describir las curvas coordenadas respecto a las coordenadas esféricas.*

Solución:

(1) *Sabemos que las coordenadas esféricas se describen como:*

$$\boxed{x = \rho cos\theta sin\phi}, \quad \boxed{y = \rho sin\theta sin\phi}, \quad \boxed{z = \rho cos\phi}.$$

Veamos como son ρ, ϕ *y* θ *en términos de las variables* x, y, z.

- $x^2+y^2+z^2=(\rho cos\theta sin\phi)^2+(\rho sin\theta sin\phi)^2+(\rho cos\phi)^2=$
$=\rho^2cos^2\theta sin^2\phi+\rho^2sin^2\theta sin^2\phi+\rho^2cos^2\phi=\rho^2sin^2\phi(cos^2\theta+sin^2\theta)+\rho^2cos^2\phi=$
$=\rho^2sin^2\phi+\rho^2cos^2\phi=\rho^2.$

Por tanto tenemos que:

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=\rho^2}.$$

- $\dfrac{x^2+y^2}{z^2}=\dfrac{\rho^2sin^2\phi}{\rho^2cos^2\phi}=tan^2\phi.$

Por tanto, tenemos que:

$$\boxed{\frac{x^2+y^2}{z^2}=tan^2\phi}.$$

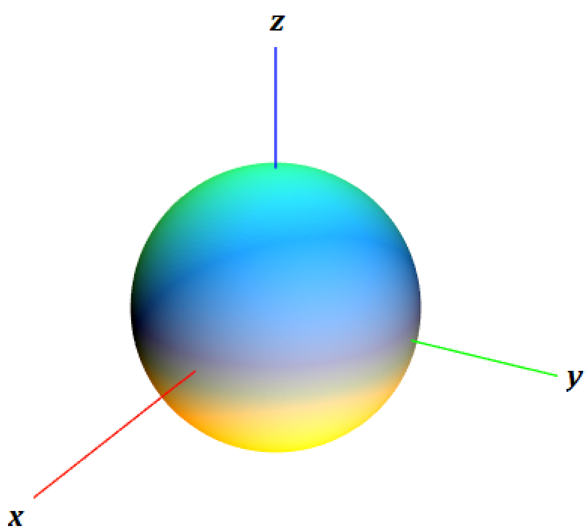
- $\dfrac{y}{x}=\dfrac{\rho sin\theta sin\phi}{\rho cos\theta sin\phi}=\dfrac{sin\theta}{cos\theta}=tan\theta.$

Por tanto, tenemos que:

$$\boxed{\frac{y}{x}=tan\theta}.$$

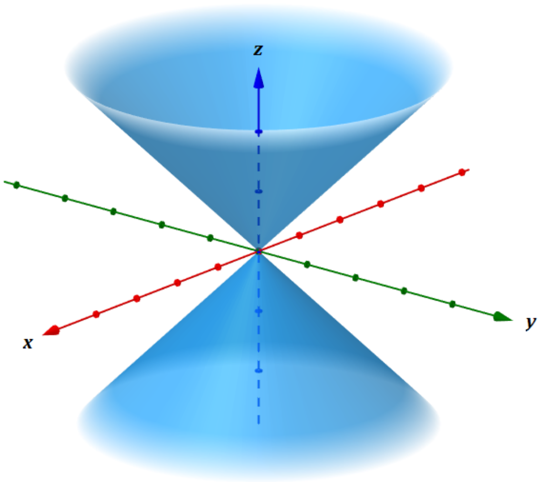
De lo anterior, concluimos que las superficies coordenadas son:

- $A_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=c\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\sqrt{x^2+y^2+z^2}=c\}.$



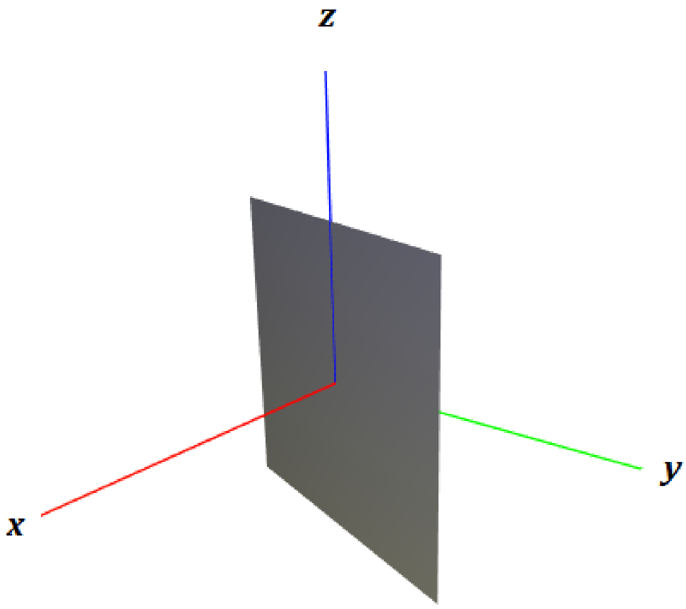
- $A_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \phi = tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{z^2}}\right) = e\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{z^2}} = tan(e)\right\}.$

$A_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = tan^2(e)\, z^2\right\}.$



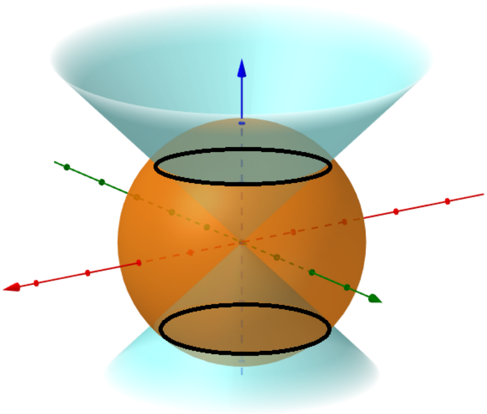
- $A_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \theta = tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) = d\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{y}{x} = tan(d)\right\}.$

$A_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = tan(d)x\right\}.$

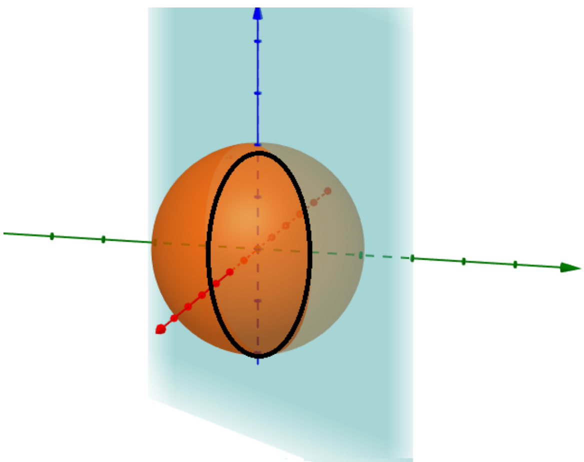


(2) Las curvas coordenadas se describen como:

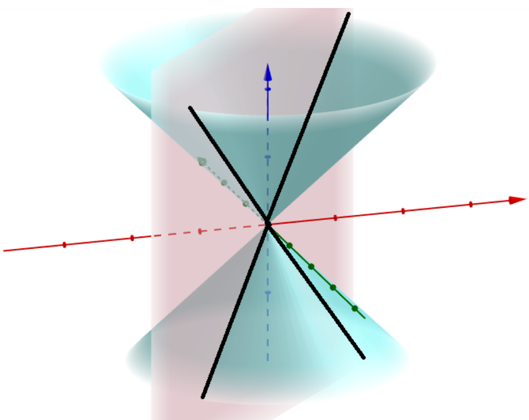
- $A_1 \cap A_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2+z^2} = c,\ x^2+y^2 = tan^2(e)\, z^2\}.$



- $A_1 \cap A_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c,\ y = tan(d)x\}$.



- $A_2 \cap A_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = tan(d)x,\ x^2 + y^2 = tan^2(e)\, z^2\}$.



6.3. Vectores tangentes

Definición 6.3.1 ***(Vectores tangentes):*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función definida como $(u_1, u_2, u_3) \mapsto f(u_1, u_2, u_3) = (x, y, z)$ para cada $(u_1, u_2, u_3) \in A$. Supongamos que f es diferenciable en $(a, b, c) \in A$, entonces:*

- $\boxed{f_{u_1}(a,b,c) = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(a+h,b,c) - f(a,b,c)}{h}}$ *es llamado el vector tangente a la u_1-curva en (a, b, c).*

$$\big(u_2 = b \text{ y } u_3 = c \text{ son constantes}\big).$$

- $\boxed{f_{u_2}(a,b,c) = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(a,b+h,c) - f(a,b,c)}{h}}$ *es llamado el vector tangente a la u_2-curva en (a, b, c).*

$$\big(u_1 = a \text{ y } u_3 = c \text{ son constantes}\big).$$

- $\boxed{f_{u_3}(a,b,c) = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(a,b,c+h) - f(a,b,c)}{h}}$ *es llamado el vector tangente a la u_3-curva en (a, b, c).*

$$\big(u_1 = a \text{ y } u_2 = b \text{ son constantes}\big).$$

Definición 6.3.2 ***(Factores de escala):*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función definida como $(u_1, u_2, u_3) \mapsto f(u_1, u_2, u_3) = (x, y, z)$ para cada $(u_1, u_2, u_3) \in A$. Si f es diferenciable en $(a, b, c) \in A$, entonces se definen los factores de escala de f en (a, b, c) como:*

$$\boxed{\begin{aligned} h_1 &= \left\| f_{u_1}(a,b,c) \right\|, \\ h_2 &= \left\| f_{u_2}(a,b,c) \right\|, \\ h_3 &= \left\| f_{u_3}(a,b,c) \right\|. \end{aligned}}$$

Definición 6.3.3 ***(Vectores tangente unitarios):*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función definida como $(u_1, u_2, u_3) \mapsto f(u_1, u_2, u_3) = (x, y, z)$ para cada $(u_1, u_2, u_3) \in A$. Si los factores de escala de f en $(a, b, c) \in A$ son no nulos, entonces*

- $e_1 = \dfrac{f_{u_1}(a,b,c)}{\left\| f_{u_1}(a,b,c) \right\|}$ *es llamado el vector tangente unitario a la* u_1*-curva en* (a,b,c).

- $e_2 = \dfrac{f_{u_2}(a,b,c)}{\left\| f_{u_2}(a,b,c) \right\|}$ *es llamado el vector tangente unitario a la* u_2*-curva en* (a,b,c).

- $e_3 = \dfrac{f_{u_3}(a,b,c)}{\left\| f_{u_3}(a,b,c) \right\|}$ *es llamado el vector tangente unitario a la* u_3*-curva en* (a,b,c).

Ejemplo 6.3.1 ***(Coordenadas cilíndricas):*** *Consideremos la función* $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida como:*

$$f(r,\theta,z) = (x,y,z) = (r\,cos\theta, r\,sin\theta, z),$$

donde $A = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : r \geqslant 0,\ \ 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ \ z \in \mathbb{R}\}$. *Entonces:*

(1) *Encontrar los factores de escala de* f.

(2) *Encontrar* e_1, e_2 *y* e_3 *(los vectores tangente unitarios).*

(3) *Demostrar que* $e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0.$[1]

Solución:

(1) *Para hallar los factores de escala es necesario primero hallar las derivadas parciales de* f *respecto a las variables* r, θ *y* z *y luego sacar la mágnitud de estas. Es decir:*

- $f_r(r,\theta,z) = ((r\,cos\theta)_r, (r\,sin\theta)_r, (z)_r) = (cos\theta, sin\theta, 0)$. *Por tanto el factor de escala correspondiente* r *es:*

$$\boxed{\begin{gathered} h_1 = \left\| f_r(r,\theta,z) \right\| = \|(cos\theta, sin\theta, 0)\| = 1, \\ h_1 = 1. \end{gathered}}$$

- $f_\theta(r,\theta,z) = ((r\,cos\theta)_\theta, (r\,sin\theta)_\theta, (z)_\theta) = (-r\,sin\theta, r\,cos\theta, 0)$. *Por tanto el factor de escala correspondiente* θ *es:*

$$\boxed{\begin{gathered} h_2 = \left\| f_\theta(r,\theta,z) \right\| = \|(-r\,sin\theta, r\,cos\theta, 0)\| = r, \\ h_2 = r. \end{gathered}}$$

[1]Esto significa que los vectores son ortogonales entre si.

- $f_z(r,\theta,z) = ((r\,cos\theta)_z, (r\,sin\theta)_z, (z)_z) = (0,0,1)$. *Por tanto el factor de escala correspondiente* z *es:*

$$\boxed{\begin{gathered} h_3 = \left\| f_z(r,\theta,z) \right\| = \|(0,0,1)\| = 1\ , \\ h_3 = 1. \end{gathered}}$$

(2) *De la definición, tenemos que los vectores tangente unitarios son:*

$$\boxed{\begin{gathered} e_1 = \frac{(cos\theta, sin\theta, 0)}{1} = (cos\theta, sin\theta, 0), \\ e_1 = (cos\theta, sin\theta, 0). \end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} e_2 = \frac{(-r\,sin\theta, r\,cos\theta, 0)}{r} = (-sin\theta, cos\theta, 0), \\ e_2 = (-sin\theta, cos\theta, 0). \end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} e_3 = \frac{(0,0,1)}{1} = (0,0,1), \\ e_3 = (0,0,1). \end{gathered}}$$

(3) *Para ver esto es suficiente usar la parte (2) y la definición de producto punto.*

$$e_1 \cdot e_2 = (cos\theta, sin\theta, 0) \cdot (-sin\theta, cos\theta, 0) = -cos\theta\ sin\theta + cos\theta sin\theta + 0 = 0.$$

$$e_1 \cdot e_3 = (cos\theta, sin\theta, 0) \cdot (0,0,1) = 0.$$

$$e_2 \cdot e_3 = (-sin\theta, cos\theta, 0) \cdot (0,0,1) = 0.$$

Ejemplo 6.3.2 ***(Coordenadas esféricas):*** *Consideremos la función* $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida como:*

$$f(\rho,\phi,\theta) = (x,y,z) = (\rho\,cos\theta\,sin\phi, \rho\,sin\theta\,sin\phi, \rho\,cos\phi).$$

Donde $A = \{(\rho,\phi,\theta) \in \mathbb{R}^3 : \rho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi\ y\ 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$. *Entonces:*

(1) *Encontrar los factores de escala de f.*

(2) *Encontrar e_1, e_2 y e_3 (los vectores tangente unitarios).*

(3) *Demostrar que* $e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0$.

<u>Solución:</u>

(1) *Para hallar los factores de escala es necesario primero hallar las derivadas parciales de f respecto a las variables ρ, θ y ϕ y luego sacar la mágnitud de estas. Es decir:*

- $f_\rho(\rho,\phi,\theta) = ((\rho cos\theta sin\phi)_\rho, (\rho sin\theta sin\phi)_\rho, (\rho cos\phi)_\rho) = (cos\theta sin\phi, sin\theta sin\phi, cos\phi)$.

Por tanto el factor de escala correspondiente ρ es:

$$\boxed{\begin{gathered} h_1 = \left\| f_\rho(\rho,\phi,\theta) \right\| = \left\| (cos\theta sin\phi, sin\theta sin\phi, cos\phi) \right\| = 1, \\ h_1 = 1. \end{gathered}}$$

- $f_\phi(\rho,\phi,\theta) = ((\rho cos\theta sin\phi)_\phi, (\rho sin\theta sin\phi)_\phi, (\rho cos\phi)_\phi) = (\rho cos\theta cos\phi, \rho sin\theta cos\phi, -\rho sin\phi)$.

Por tanto el factor de escala correspondiente ϕ es:

$$\boxed{\begin{gathered} h_2 = \left\| f_\phi(\rho,\phi,\theta) \right\| = \left\| (\rho cos\theta cos\phi, \rho sin\theta cos\phi, -\rho sin\phi) \right\| = \rho, \\ h_2 = \rho. \end{gathered}}$$

- $f_\theta(\rho,\phi,\theta) = ((\rho cos\theta sin\phi)_\theta, (\rho sin\theta sin\phi)_\theta, (\rho cos\phi)_\theta) = (-\rho sin\theta sin\phi, \rho cos\theta sin\phi, 0)$.

Por tanto el factor de escala correspondiente θ es:

$$\boxed{\begin{gathered} h_3 = \left\| f_\theta(\rho,\phi,\theta) \right\| = \left\| (-\rho sin\theta sin\phi, \rho cos\theta sin\phi, 0) \right\| = \rho sin\phi, \\ h_3 = \rho sin\phi. \end{gathered}}$$

(2) *De la definición, tenemos que los vectores tangente unitarios son:*

$$e_1 = \frac{(cos\theta sin\phi, sin\theta sin\phi, cos\phi)}{1} = (cos\theta sin\phi, sin\theta sin\phi, cos\phi),$$
$$e_1 = (cos\theta sin\phi, sin\theta sin\phi, cos\phi).$$

$$e_2 = \frac{(\rho cos\theta cos\phi, \rho sin\theta cos\phi, -\rho sin\phi)}{\rho} = (cos\theta cos\phi, sin\theta cos\phi, -sin\phi),$$
$$e_2 = (cos\theta cos\phi, sin\theta cos\phi, -sin\phi).$$

$$e_3 = \frac{(-\rho sin\theta sin\phi, \rho cos\theta sin\phi, 0)}{\rho sin\phi} = (-sin\theta, cos\theta, 0),$$
$$e_3 = (-sin\theta, cos\theta, 0).$$

(3) *Para ver esto es suficiente usar la parte (2) y la definición de producto punto.*

$$e_1 \cdot e_2 = (cos\theta sin\phi, sin\theta sin\phi, cos\phi) \cdot (cos\theta cos\phi, sin\theta cos\phi, -sin\phi) =$$
$$cos^2\theta cos\phi sin\phi + sin^2\theta cos\phi sin\phi - cos\phi sin\phi = cos\phi sin\phi - cos\phi sin\phi = 0.$$

$$e_1 \cdot e_3 = (cos\theta sin\phi, sin\theta sin\phi, cos\phi) \cdot (-sin\theta, cos\theta, 0) =$$
$$-cos\theta sin\theta sin\phi + cos\theta sin\theta sin\phi = 0.$$

$$e_2 \cdot e_3 = (cos\theta cos\phi, sin\theta cos\phi, -sin\phi) \cdot (-sin\theta, cos\theta, 0) =$$
$$-cos\theta sin\theta cos\phi + cos\theta sin\theta cos\phi = 0.$$

Ejercicio: Hallar los factores de escala y los vectores tangente unitarios de las coordenadas parabólicas cilíndricas. Verificar además si los vectores tangente unitarios son ortogonales entre si.

Ejercicio: Hallar los factores de escala y los vectores tangente unitarios de las coordenadas parabólicas. Verificar además si los vectores tangente unitarios son ortogonales entre si.

Nota: Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, sabemos que $(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, donde $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ y $\vec{k} = (0,0,1)$.

Ejemplo 6.3.3 *Sea $A = z\vec{i} - 2x\vec{j} + y\vec{k}$ un vector. Entonces:*

(1) Encontrar los vectores tangente unitarios e_1, e_2 y e_3 respecto a las coordenadas cilíndricas.

(2) Describir A en términos de los vectores e_1, e_2 y e_3.

Solución:

(1) Del ejemplo 6.3.1, tenemos que los vectores tangente unitarios correspondientes a las variables r, θ y z son $e_1 = (cos\theta, sin\theta, 0)$, $e_2 = (-sin\theta, cos\theta, 0)$ y $e_3 = (0,0,1)$ respectivamente. Además

$$e_1 = cos\theta\,\vec{i} + sin\theta\,\vec{j}. \tag{6.1}$$

$$e_2 = -sin\theta\,\vec{i} + cos\theta\,\vec{j}. \tag{6.2}$$

$$e_3 = \vec{k}. \tag{6.3}$$

(2) Como $A = z\vec{i} - 2x\vec{j} + y\vec{k}$, entonces es suficiente describir los vectores canónicos $\vec{i}, \vec{j}$ y $\vec{k}$ en términos de e_1, e_2 y e_3. Para encontrar $\vec{i}$, tenemos que

$$e_1 = cos\theta\,\vec{i} + sin\theta\,\vec{j} \quad \longrightarrow \quad -cos\theta\, e_1 = -cos^2\theta\,\vec{i} - cos\theta\, sin\theta\,\vec{j}. \tag{6.4}$$

$$e_2 = -sin\theta\,\vec{i} + cos\theta\,\vec{j} \quad \longrightarrow \quad sin\theta\, e_2 = -sin^2\theta\,\vec{i} + cos\theta\, sin\theta\,\vec{j}. \tag{6.5}$$

$$-cos\theta\, e_1 + sin\theta\, e_2 = -\vec{i}. \tag{6.6}$$

$$\vec{i} = cos\theta\, e_1 - sin\theta\, e_2. \tag{6.7}$$

Para encontrar $\vec{j}$, tenemos que

$$e_1 = cos\theta\,\vec{i} + sin\theta\,\vec{j} \quad \longrightarrow \quad sin\theta\, e_1 = cos\theta\, sin\theta\,\vec{i} + sin^2\theta\,\vec{j}. \tag{6.8}$$

$$e_2 = -sin\theta\,\vec{i} + cos\theta\,\vec{j} \quad \longrightarrow \quad cos\theta\, e_2 = -cos\theta\, sin\theta\,\vec{i} + cos^2\theta\,\vec{j}. \tag{6.9}$$

$$\vec{j} = sin\theta\, e_1 + cos\theta\, e_2. \tag{6.10}$$

De esta manera $\vec{i} = cos\theta\, e_1 - sin\theta\, e_2$, $\vec{j} = sin\theta\, e_1 + cos\theta\, e_2$, $\vec{k} = e_3$ y así:

$$A = z\vec{i} - 2x\vec{j} + y\vec{k} = z(cos\theta e_1 - sin\theta e_2) - 2x(sin\theta e_1 + cos\theta e_2) + ye_3.$$

$$\boxed{A = (zcos\theta - 2xsin\theta)e_1 + (-zsin\theta - 2xcos\theta)e_2 + ye_3}.$$

Ejercicio: Sea $A = z\vec{i} - 2x\vec{j} + y\vec{k}$ un vector. Entonces:

(1) Encontrar los vectores tangente unitarios e_1, e_2 y e_3 respecto a las coordenadas esféricas.

(2) Describir A en términos de los vectores e_1, e_2 y e_3.

Ejemplo 6.3.4 *Encontrar* $\frac{d}{dt}e_1$, $\frac{d}{dt}e_2$ *y* $\frac{d}{dt}e_3$ *donde* e_1, e_2 *y* e_3 *son los vectores tangentes unitarios respecto a las direcciones* r, θ *y* z *respectivamente (coordenadas cilíndricas). Además describirlos en términos de* e_1, e_2 *y* e_3.

Solución:

Recordemos que $e_1 = (cos\theta, sin\theta, 0)$, $e_2 = (-sin\theta, cos\theta, 0)$ *y* $e_3 = (0,0,1)$ *y por tanto aplicando la regla de la cadena, tenemos que:*

$$\frac{d}{dt}e_1 = \left(\frac{d}{dt}cos\theta, \frac{d}{dt}sin\theta, \frac{d}{dt}0\right) = (-sin\theta \cdot \theta_t, cos\theta \cdot \theta_t, 0).$$

$$\frac{d}{dt}e_2 = \left(\frac{d}{dt}(-sin\theta), \frac{d}{dt}cos\theta, \frac{d}{dt}0\right) = (-cos\theta \cdot \theta_t, -sin\theta \cdot \theta_t, 0).$$

$$\frac{d}{dt}e_3 = \left(\frac{d}{dt}0, \frac{d}{dt}0, \frac{d}{dt}1\right) = (0,0,0).$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}e_1 = (-sin\theta \cdot \theta_t)\vec{i} + (cos\theta \cdot \theta_t)\vec{j}.$$

$$\frac{d}{dt}e_2 = (-cos\theta \cdot \theta_t)\vec{i} + (-sin\theta \cdot \theta_t)\vec{j}.$$

$$\frac{d}{dt}e_3 = 0.$$

Además recordando que $\vec{i} = cos\theta e_1 - sin\theta e_2$ *y* $\vec{j} = sin\theta e_1 + cos\theta e_2$ *(ejemplo anterior), entonces:*

$$\frac{d}{dt}e_1 = (-sin\theta\cdot\theta_t)(cos\theta e_1 - sin\theta e_2) + (cos\theta\cdot\theta_t)(sin\theta e_1 + cos\theta e_2).$$

$$\frac{d}{dt}e_1 = (-cos\theta sin\theta\cdot\theta_t + cos\theta sin\theta\cdot\theta_t)e_1 + (sin^2\theta\cdot\theta_t + cos^2\cdot\theta\theta_t)e_2 = \theta_t e_2.$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}e_1 = \theta_t e_2}.$$

$$\frac{d}{dt}e_2 = (-cos\theta\cdot\theta_t)(cos\theta e_1 - sin\theta e_2) + (-sin\theta\cdot\theta_t)(sin\theta e_1 + cos\theta e_2).$$

$$\frac{d}{dt}e_2 = (-cos^2\theta\cdot\theta_t - sin^2\theta\cdot\theta_t)e_1 + (cos\theta sin\theta\cdot\theta_t - cos\theta sin\theta\cdot\theta_t)e_2 = -\theta_t e_1.$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}e_2 = -\theta_t e_1}.$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}e_3 = 0}.$$

Ejercicio: Encontrar $\frac{d}{dt}e_1$, $\frac{d}{dt}e_2$ y $\frac{d}{dt}e_3$ donde e_1, e_2 y e_3 son los vectores tangentes unitarios respecto a las direcciones ρ, ϕ y θ respectivamente (coordenadas esféricas). Además describirlos en términos de e_1, e_2 y e_3.

Ejemplo 6.3.5 *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una función inyectiva con inversa* f^{-1}*, donde:*

(1) f *es una función diferenciable definida como* $(u_1, u_2, u_3) \mapsto f(u_1, u_2, u_3) = (x, y, z)$.

(2) f^{-1} *es una función diferenciable definida como* $(x, y, z) \mapsto f^{-1}(x, y, z) = (u_1, u_2, u_3)$.

(3) $f(r, s, t) = (x_0, y_0, z_0)$.

Demostrar que:

$$\boxed{f_{u_i}(r,s,t)\bullet\nabla u_j(x_0,y_0,z_0) = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ i \neq j. \end{cases}}$$

Solución:

Recordemos inicialmente que:

- $f_{u_i}(r,s,t) = (x_{u_i}(r,s,t), y_{u_i}(r,s,t), z_{u_i}(r,s,t))$.

- $\nabla u_j(x_0,y_0,z_0)=(\,(u_j)_x(x_0,y_0,z_0),(u_j)_y(x_0,y_0,z_0),(u_j)_z(x_0,y_0,z_0)\,)$.

Por tanto

$$f_{u_i}(r,s,t)\bullet\nabla u_j(x_0,y_0,z_0)=$$
$$(u_j)_x(x_0,y_0,z_0)x_{u_i}(r,s,t)+(u_j)_y(x_0,y_0,z_0)y_{u_i}(r,s,t)+(u_j)_z(x_0,y_0,z_0)z_{u_i}(r,s,t)$$

Por otro lado, la regla de la cadena nos dice que:

$$(u_j)_{u_i}(r,s,t)=$$
$$(u_j)_x(x_0,y_0,z_0)x_{u_i}(r,s,t)+(u_j)_y(x_0,y_0,z_0)y_{u_i}(r,s,t)+(u_j)_z(x_0,y_0,z_0)z_{u_i}(r,s,t)$$

Lo cual implica que $f_{u_i}(r,s,t)\bullet\nabla u_j(x_0,y_0,z_0)=(u_j)_{u_i}(r,s,t)$ *y además es claro que*

$$(u_j)_{u_i}(r,s,t)=\begin{cases}1 & si\ \ i=j,\\ 0 & si\ \ i\neq j\end{cases}$$

lo cual muestra el resultado.

6.4. diferencial total y diferencial de longitud de arco

Definición 6.4.1 ***(Diferencial total):*** *Sea* $f:A\subseteq\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ *diferenciable definida como* $(u_1,u_2,u_3)\mapsto f(u_1,u_2,u_3)=(x,y,z)$ *para cada* $(u_1,u_2,u_3)\in A$. *Definimos la diferencial total de* f *como:*

$$\boxed{df=f_{u_1}du_1+f_{u_2}du_2+f_{u_3}du_3}\,.$$

Observación: La definición anterior se puede interpretar de forma equivalente como:

$$\boxed{\begin{aligned}df&=(x_{u_1},y_{u_1},z_{u_1})du_1+(x_{u_2},y_{u_2},z_{u_2})du_2+(x_{u_3},y_{u_3},z_{u_3})du_3=\\&=\left(\sum_{i=1}^{3}x_{u_i}du_i,\sum_{i=1}^{3}y_{u_i}du_i,\sum_{i=1}^{3}z_{u_i}du_i\right)=\big(dx,dy,dz\big),\end{aligned}}$$

donde $dx=\sum_{i=1}^{3}x_{u_i}du_i$, $dy=\sum_{i=1}^{3}y_{u_i}du_i$ y $dz=\sum_{i=1}^{3}z_{u_i}du_i$.

Definición 6.4.2 ***(Diferencial de longitud de arco):*** *Sea* $f:A\subseteq\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ *diferenciable definida como* $(u_1,u_2,u_3)\mapsto f(u_1,u_2,u_3)=(x,y,z)$ *para cada* $(u_1,u_2,u_3)\in A$. *Definimos el diferencial de longitud de arco de* f *como:*

$$ds = \|df\|.$$

Observación: La definición anterior se puede interpretar de forma equivalente como:

$$ds = \sqrt{df \cdot df},$$

donde

$$df \cdot df = \left(\sum_{i=1}^{3} x_{u_i} du_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{3} y_{u_i} du_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{3} z_{u_i} du_i\right)^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{3}(x_{u_i}^2 + y_{u_i}^2 + z_{u_i}^2) du_i du_i + 2\sum_{i \neq j}(x_{u_i}x_{u_j} + y_{u_i}y_{u_j} + z_{u_i}z_{u_j}) du_i du_j.$$

$$\boxed{ds = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} h_i^2 du_i du_i + 2\sum_{i \neq j}(x_{u_i}x_{u_j} + y_{u_i}y_{u_j} + z_{u_i}z_{u_j}) du_i du_j}}$$

donde h_1, h_2 y h_3 son los factores de escala de f.

Teorema 6.4.1 *Supongamos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una función diferenciable sobre A definida como $(u_1, u_2, u_3) \mapsto f(u_1, u_2, u_3) = (x, y, z)$ para cada $(u_1, u_2, u_3) \in A$. Si los vectores tangentes unitarios e_1, e_2 y e_3 de f son perpendiculares entre si, entonces:*

$$\boxed{ds = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} h_i^2 du_i du_i}.}$$

Demostración: *Si e_1, e_2 y e_3 de f son perpendiculares entre si, entonces f_{u_1}, f_{u_2} y f_{u_3} son perpendiculares entre si, lo cual significa que*

$$f_{u_1} \cdot f_{u_2} = f_{u_1} \cdot f_{u_3} = f_{u_2} \cdot f_{u_3} = 0,$$

donde

$$f_{u_1} \cdot f_{u_2} = x_{u_1}x_{u_2} + y_{u_1}y_{u_2} + z_{u_1}z_{u_2} = 0,$$
$$f_{u_1} \cdot f_{u_3} = x_{u_1}x_{u_3} + y_{u_1}y_{u_3} + z_{u_1}z_{u_3} = 0,$$
$$f_{u_2} \cdot f_{u_3} = x_{u_2}x_{u_3} + y_{u_2}y_{u_3} + z_{u_2}z_{u_3} = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$ds = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} h_i^2 du_i du_i + 2\sum_{i\neq j}(x_{u_i}x_{u_j} + y_{u_i}y_{u_j} + z_{u_i}z_{u_j})du_i du_j} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} h_i^2 du_i du_i}.$$

□

Ejemplo 6.4.1 *Encontrar el diferencial de longitud de arco ds de las coordenadas esféricas aplicando el teorema anterior.*

Solución:

Recordemos que las coordenadas esféricas se describen como

$$f(\rho,\phi,\theta) = (\rho cos\theta sin\phi, \rho sin\theta sin\phi, \rho cos\phi).$$

Además los factores de escala son

$$h_1 = \|f_\rho\| = 1.$$
$$h_2 = \|f_\phi\| = \rho.$$
$$h_3 = \|f_\theta\| = \rho sin\phi.$$

Como ya vimos previamente que los vectores tangentes unitarios son perpendiculares entre si, entonces

$$ds = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} h_i^2 du_i du_i} = \sqrt{h_1^2 d\rho d\rho + h_2^2 d\phi d\phi + h_3^2 d\theta d\theta},$$
$$ds = \sqrt{d\rho d\rho + \rho^2 sin^2\phi d\theta d\theta + \rho^2 d\phi d\phi}.$$

Ejercicio: Encontrar el diferencial de longitud de arco **ds** de las coordenadas cilíndricas aplicando el teorema anterior.

Ejercicio: Encontrar el diferencial de longitud de arco **ds** de las coordenadas parabólicas cilíndricas aplicando el teorema anterior.

Observación: Recordemos que las curvas coordenadas asociadas a una función f son conjuntos de la forma:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
A_1 \cap A_2 &= \{(x,y,z) \in Ran(f) \subseteq \mathbb{R}^3 : u_1(x,y,z) = c,\ u_2(x,y,z) = d\} = u_1^{-1}(c) \cap u_2^{-1}(d),\\
A_1 \cap A_3 &= \{(x,y,z) \in Ran(f) \subseteq \mathbb{R}^3 : u_1(x,y,z) = c,\ u_3(x,y,z) = e\} = u_1^{-1}(c) \cap u_3^{-1}(e),\\
A_2 \cap A_3 &= \{(x,y,z) \in Ran(f) \subseteq \mathbb{R}^3 : u_2(x,y,z) = d,\ u_3(x,y,z) = e\} = u_2^{-1}(d) \cap u_3^{-1}(e),
\end{aligned}
}
$$

donde $c, d, e \in \mathbb{R}$. Entonces tenemos que los diferenciales de arco en cada una de las 3 curvas se describen como:

- $ds = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} h_i^2 du_i du_i + 2\sum_{i \neq j}(x_{u_i}x_{u_j} + y_{u_i}y_{u_j} + z_{u_i}z_{u_j})du_i du_j} = \sqrt{h_3^2 du_3 du_3} = h_3 du_3$
sobre $A_1 \cap A_2$, ya que $u_1(x,y,z) = c$ y $u_2(x,y,z) = d$, y así $du_1 = du_2 = 0$.

- $ds = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} h_i^2 du_i du_i + 2\sum_{i \neq j}(x_{u_i}x_{u_j} + y_{u_i}y_{u_j} + z_{u_i}z_{u_j})du_i du_j} = \sqrt{h_2^2 du_2 du_2} = h_2 du_2$
sobre $A_1 \cap A_3$, ya que $u_1(x,y,z) = c$ y $u_3(x,y,z) = e$, y así $du_1 = du_3 = 0$.

- $ds = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} h_i^2 du_i du_i + 2\sum_{i \neq j}(x_{u_i}x_{u_j} + y_{u_i}y_{u_j} + z_{u_i}z_{u_j})du_i du_j} = \sqrt{h_1^2 du_1 du_1} = h_1 du_1$
sobre $A_2 \cap A_3$, ya que $u_2(x,y,z) = d$ y $u_3(x,y,z) = e$, y así $du_2 = du_3 = 0$.

Por lo tanto, tenemos que

$$
\boxed{
\begin{aligned}
ds &= h_3 du_3 \text{ en } A_1 \cap A_2,\\
ds &= h_2 du_2 \text{ en } A_1 \cap A_3,\\
ds &= h_1 du_1 \text{ en } A_2 \cap A_3.
\end{aligned}
}
$$

6.5. Diferencial de area y volumen

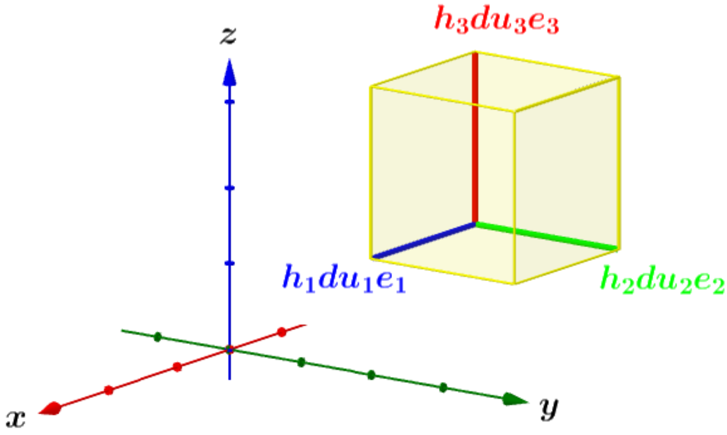
Observación: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función tal que $f \in C^1(A;\mathbb{R}^3)$, f es inyectiva y está descrita como $(u_1, u_2, u_3) \mapsto f(u_1, u_2, u_3) = (x, y, z)$. Recordemos que:

- $df = f_{u_1} du_1 + f_{u_2} du_2 + f_{u_3} du_3$.

Por tanto

$$df = \|f_{u_1}\|\left(\frac{f_{u_1}}{\|f_{u_1}\|}\right)du_1 + \|f_{u_2}\|\left(\frac{f_{u_2}}{\|f_{u_2}\|}\right)du_2 + \|f_{u_3}\|\left(\frac{f_{u_3}}{\|f_{u_3}\|}\right)du_3$$

$$df = h_1\,du_1 e_1 + h_2\,du_2 e_2 + h_3\,du_3 e_3.$$

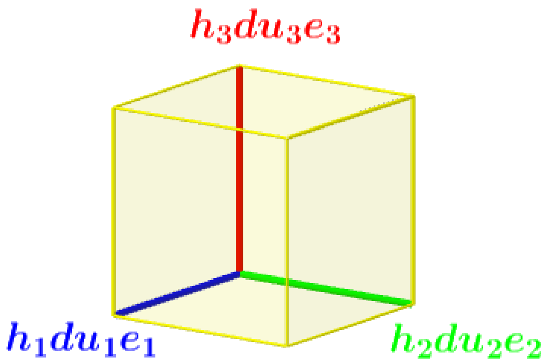


Definición 6.5.1 ***(Diferencial de volumen y diferencial de area)***

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función inyectiva con $f \in C^1(A;\mathbb{R}^3)$ y definida como $(u_1,u_2,u_3) \mapsto f(u_1,u_2,u_3) = (x,y,z)$. Entonces

(1) *Definimos el diferencial de volumen asociado a f como:*

$dV =$ *el volumen del paralelepipedo descrito.*



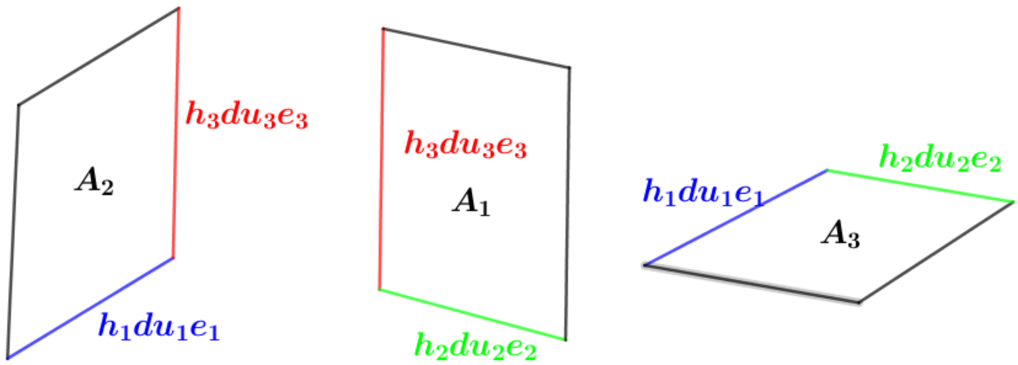
$$dV = \|\,(h_3\,du_3 e_3)\cdot(h_1\,du_1 e_1 \times h_2\,du_2 e_2)\,\| = h_1h_2h_3\,du_1\,du_2\,du_3\,\|e_3\cdot(e_1\times e_2)\|.$$

En el caso en que e_1, e_2 y e_3 son ortogonales $(e_1\cdot e_2 = e_1\cdot e_3 = e_2\cdot e_3 = 0)$, entonces

$$\boxed{dV = h_1h_2h_3\,du_1\,du_2\,du_3}\,.$$

(2) *Definimos los diferenciales de area asociados a f como:*

dA_i = el area del paralelogramo A_i el cual es uno de los lados del paralelepípedo anterior.



$$dA_1 = \|\,(h_2du_2e_2 \times h_3du_3e_3)\,\| = h_2h_3du_2du_3\,\|e_2 \times e_3\|,$$
$$dA_2 = \|\,(h_1du_1e_1 \times h_3du_3e_3)\,\| = h_1h_3du_1du_3\,\|e_1 \times e_3\|,$$
$$dA_3 = \|\,(h_1du_1e_1 \times h_2du_2e_2)\,\| = h_1h_2du_1du_2\,\|e_1 \times e_2\|.$$

En el caso en que e_1, e_2 y e_3 son ortogonales $(e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0)$, entonces

$$\boxed{dA_1 = h_2h_3du_2du_3}\,,\ \boxed{dA_2 = h_1h_3du_1du_3}\,,\ \boxed{dA_3 = h_1h_2du_1du_2}\,.$$

Ejemplo 6.5.1 *Encontrar el diferencial de volumen dV de las coordenadas cilíndricas.*

Solución:

Recordemos que las coordenadas cilíndricas se describen por medio de la función

$$f(r,\theta,z) = (r cos\theta, r sin\theta, z),$$

y los vectores tangentes unitarios para las coordenadas cilíndricas son ortogonales, lo cual implica que

$$dV = h_1h_2h_3du_1du_2du_3 = 1 \cdot r \cdot 1 dr d\theta dz = r dr d\theta dz.$$
$$\boxed{dV = r dr d\theta dz}\,.$$

Donde los factores de escala son

$$h_1 = \|f_r\| = \|(cos\theta, sin\theta, 0)\| = 1,$$

$$h_2 = \|f_\theta\| = \|(-r sin\theta, r cos\theta, 0)\| = r,$$

$$h_3 = \|f_z\| = \|(0,0,1)\| = 1.$$

Ejemplo 6.5.2 *Encontrar el diferencial de volumen dV de las coordenadas esféricas.*

<u>Solución:</u>

Recordemos que las coordenadas cilíndricas se describen por medio de la función

$$f(\rho,\phi,\theta)=(\rho cos\theta sin\phi,\rho sin\theta sin\phi,\rho cos\phi),$$

y los vectores tangentes unitarios para las coordenadas cilíndricas son ortogonales, lo cual implica que

$$dV=h_1h_2h_3du_1du_2du_3=1\cdot\rho\cdot\rho sin\phi d\rho d\theta d\phi=\rho^2 sin\phi d\rho d\theta d\phi.$$
$$\boxed{dV=\rho^2 sin\phi d\rho d\theta d\phi}\,.$$

Donde los factores de escala son

$$h_1=||f_\rho||=||(cos\theta sin\phi,sin\theta sin\phi,cos\phi)||=1,$$
$$h_2=||f_\phi||=||(\rho cos\theta cos\phi,\rho sin\theta cos\phi,-\rho sin\phi)||=\rho,$$
$$h_3=||f_\theta||=||(-\rho sin\theta sin\phi,\rho cos\theta sin\phi,0)||=\rho sin\phi.$$

Ejercicio: Encontrar el diferencial de volumen dV de las coordenadas parabólicas cilíndricas.

Ejercicio: Encontrar el diferencial de volumen dV de las coordenadas parabólicas.

Teorema 6.5.1 *Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ una función tal que $f\in C^1(A;\mathbb{R}^3)$, f es inyectiva y está descrita como $(u_1,u_2,u_3)\mapsto f(u_1,u_2,u_3)=(x,y,z)$. Si los vectores tangentes unitarios son perpendiculares entre si, entonces:*

$$\left|det\begin{bmatrix}x_{u_1} & x_{u_2} & x_{u_3}\\ y_{u_1} & y_{u_2} & y_{u_3}\\ z_{u_1} & z_{u_2} & z_{u_3}\end{bmatrix}\right|=h_1h_2h_3.$$

Demostración: *Por propiedades de determinantes y geometría vectorial tenemos que:*

$$det\begin{bmatrix}x_{u_1} & x_{u_2} & x_{u_3}\\ y_{u_1} & y_{u_2} & y_{u_3}\\ z_{u_1} & z_{u_2} & z_{u_3}\end{bmatrix}=det\begin{bmatrix}x_{u_1} & y_{u_1} & z_{u_1}\\ x_{u_2} & y_{u_2} & z_{u_2}\\ x_{u_3} & y_{u_3} & z_{u_3}\end{bmatrix}=A\cdot(B\times C),$$

donde $A=(x_{u_1},y_{u_1},z_{u_1})=f_{u_1}$, $B=(x_{u_2},y_{u_2},z_{u_2})=f_{u_2}$ *y* $C=(x_{u_3},y_{u_3},z_{u_3})=f_{u_3}$. *Además recordemos que* $f_{u_1}=h_1e_1$, $f_{u_2}=h_2e_2$ *y* $f_{u_3}=h_3e_3$ *lo cual implica que*

$$A\cdot(B\times C)=f_{u_1}\cdot(f_{u_2}\times f_{u_3})=h_1e_1\cdot(h_2e_2\times h_3e_3)=h_1h_2h_3(e_1\cdot(e_2\times e_3)).$$

Además con un poco de trabajo se puede probar que $e_1\cdot(e_2\times e_3)=\pm 1$, *obteniendo que*

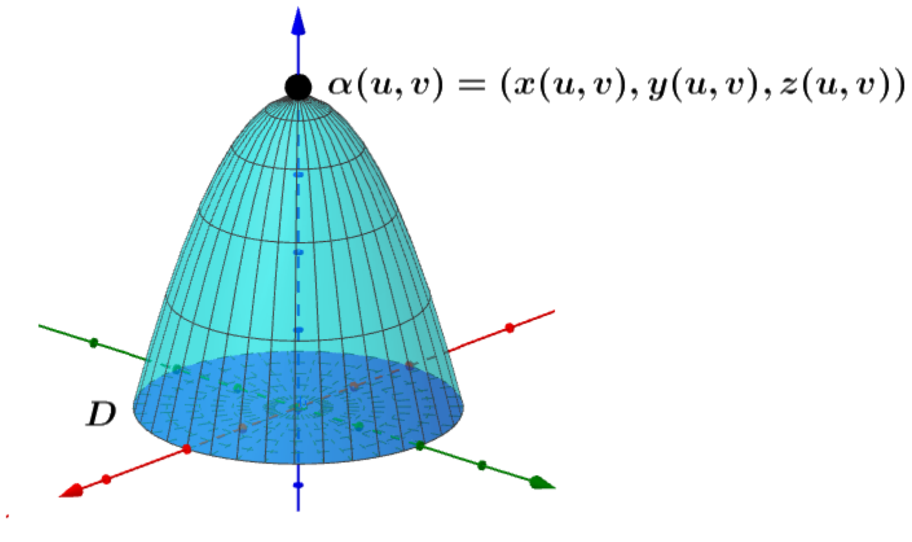
$$det\begin{bmatrix} x_{u_1} & x_{u_2} & x_{u_3}\\ y_{u_1} & y_{u_2} & y_{u_3}\\ z_{u_1} & z_{u_2} & z_{u_3}\end{bmatrix}=A\cdot(B\times C)=\pm h_1h_2h_3 \ \ y \ así \ \left| det\begin{bmatrix} x_{u_1} & x_{u_2} & x_{u_3}\\ y_{u_1} & y_{u_2} & y_{u_3}\\ z_{u_1} & z_{u_2} & z_{u_3}\end{bmatrix}\right| = h_1h_2h_3.$$

□

6.6. Diferencial de superficie

Definición 6.6.1 ***(Diferencial de superficie):*** *Sea* $\alpha: D\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ *una función diferenciable definida como* $(u,v)\mapsto\alpha(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ *y sea* $S\subseteq\mathbb{R}^3$ *la superficie descrita por el rango de* α, *es decir:*

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\alpha(u,v)=(x,y,z) \ \ para\ algún\,(u,v)\in D\}.$$



Entonces definimos el diferencial de superficie dS *inducido por* α *como:*

$$\boxed{dS=\|\alpha_u\times\alpha_v\|du\,dv.}$$

6.7. Gradiente, divergencia y rotacional en coordenadas curvilíneas

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\Phi : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ funciones de clase C^1 sobre A descritas en términos de las variables u_1, u_2 y u_3. Recordemos que ∇ es un operador definido como

$$\nabla = \frac{d}{dx}\vec{i} + \frac{d}{dy}\vec{j} + \frac{d}{dz}\vec{k},$$

entonces describiremos en esta sección expresiones para:

$$\nabla f,\ \nabla \cdot \Phi \text{ y } \nabla \times \Phi \text{ en términos de } e_1, e_2, e_3 \text{ y } u_1, u_2, u_3.$$

Teorema 6.7.1 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función tal que $f \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$, f es inyectiva y está descrita como $(u_1, u_2, u_3) \mapsto f(u_1, u_2, u_3) = (x, y, z)$. Si los vectores tangentes unitarios son perpendiculares entre si, entonces:*

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{i} &= \left(\frac{x_{u_1}}{h_1}\right)e_1 + \left(\frac{x_{u_2}}{h_2}\right)e_2 + \left(\frac{x_{u_3}}{h_3}\right)e_3,\\
\vec{j} &= \left(\frac{y_{u_1}}{h_1}\right)e_1 + \left(\frac{y_{u_2}}{h_2}\right)e_2 + \left(\frac{y_{u_3}}{h_3}\right)e_3,\\
\vec{k} &= \left(\frac{z_{u_1}}{h_1}\right)e_1 + \left(\frac{z_{u_2}}{h_2}\right)e_2 + \left(\frac{z_{u_3}}{h_3}\right)e_3.
\end{aligned}}$$

Demostración: *Veamos que $\vec{i} = \left(\frac{x_{u_1}}{h_1}\right)e_1 + \left(\frac{x_{u_2}}{h_2}\right)e_2 + \left(\frac{x_{u_3}}{h_3}\right)e_3$, los demás son similares. Supongamos que $\vec{i} = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, entonces:*

$$\vec{i} \cdot e_1 = (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) \cdot e_1 = a_1 \Rightarrow \frac{1}{h_1}(1,0,0) \cdot (x_{u_1}, y_{u_1}, z_{u_1}) = \frac{x_{u_1}}{h_1} = a_1.$$

$$\vec{i} \cdot e_2 = (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) \cdot e_2 = a_2 \Rightarrow \frac{1}{h_2}(1,0,0) \cdot (x_{u_2}, y_{u_2}, z_{u_2}) = \frac{x_{u_2}}{h_2} = a_2.$$

$$\vec{i} \cdot e_3 = (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) \cdot e_3 = a_3 \Rightarrow \frac{1}{h_3}(1,0,0) \cdot (x_{u_3}, y_{u_3}, z_{u_3}) = \frac{x_{u_3}}{h_3} = a_3.$$

Lo cual prueba que $\vec{i} = \left(\frac{x_{u_1}}{h_1}\right)e_1 + \left(\frac{x_{u_2}}{h_2}\right)e_2 + \left(\frac{x_{u_3}}{h_3}\right)e_3$.

□

Nota: El siguiente teorema nos dice como escribir el gradiente de una función en coordenadas curvilíneas.

Teorema 6.7.2 *Supongamos que e_1, e_2 y e_3 son perpendiculares entre si y sea $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 descrita como $(u_1, u_2, u_3) \mapsto \Phi(u_1, u_2, u_3)$. Entonces*

$$\boxed{\nabla\Phi = \frac{\Phi_{u_1}}{h_1} e_1 + \frac{\Phi_{u_2}}{h_2} e_2 + \frac{\Phi_{u_3}}{h_3} e_3}.$$

Demostración: *Recordemos inicialmente que la definición de $\nabla\Phi$ es:*

$$\nabla\Phi = \left(\frac{d}{dx}\vec{i} + \frac{d}{dy}\vec{j} + \frac{d}{dz}\vec{k}\right)\Phi = \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\vec{i} + \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)\vec{j} + \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)\vec{k},$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi}{dx} &= \Phi_{u_1}(u_1)_x + \Phi_{u_2}(u_2)_x + \Phi_{u_3}(u_3)_x \quad , \quad \vec{i} = \left(\frac{x_{u_1}}{h_1}\right)e_1 + \left(\frac{x_{u_2}}{h_2}\right)e_2 + \left(\frac{x_{u_3}}{h_3}\right)e_3. \\
\frac{d\Phi}{dy} &= \Phi_{u_1}(u_1)_y + \Phi_{u_2}(u_2)_y + \Phi_{u_3}(u_3)_y \quad , \quad \vec{j} = \left(\frac{y_{u_1}}{h_1}\right)e_1 + \left(\frac{y_{u_2}}{h_2}\right)e_2 + \left(\frac{y_{u_3}}{h_3}\right)e_3. \\
\frac{d\Phi}{dz} &= \Phi_{u_1}(u_1)_z + \Phi_{u_2}(u_2)_z + \Phi_{u_3}(u_3)_z \quad , \quad \vec{k} = \left(\frac{z_{u_1}}{h_1}\right)e_1 + \left(\frac{z_{u_2}}{h_2}\right)e_2 + \left(\frac{z_{u_3}}{h_3}\right)e_3.
\end{aligned}$$

De esta forma, simplificando un poco y aplicando el ejemplo 6.3.5, tenemos que

$$\nabla\Phi = \sum_{i=1}^{3}[\Phi_{u_1}(f_{u_i} \bullet \nabla u_1) + \Phi_{u_2}(f_{u_i} \bullet \nabla u_2) + \Phi_{u_3}(f_{u_i} \bullet \nabla u_3)]\,\frac{e_i}{h_i} = \frac{\Phi_{u_1}}{h_1} e_1 + \frac{\Phi_{u_2}}{h_2} e_2 + \frac{\Phi_{u_3}}{h_3} e_3,$$

lo anterior muestra que

$$\boxed{\nabla\Phi = \frac{\Phi_{u_1}}{h_1} e_1 + \frac{\Phi_{u_2}}{h_2} e_2 + \frac{\Phi_{u_3}}{h_3} e_3}.$$

□

Observación: En ocasiones escribimos el operador ∇ en coordenadas curvilíneas como

$$\boxed{\nabla = \frac{d}{du_1}\,\frac{e_1}{h_1} + \frac{d}{du_2}\,\frac{e_2}{h_2} + \frac{d}{du_3}\,\frac{e_3}{h_3}}\,.$$

Lo cual tiene sentido por el teorema 6.7.2.

Nota: Las siguientes propiedades serán necesarias para describir $\nabla \cdot \Phi$ y $\nabla \times \Phi$ en términos de e_1, e_2, e_3 y u_1, u_2, u_3.

Teorema 6.7.3 *Si $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ son funciones de clase C^2, entonces:*

(1) $\nabla \bullet (gF) = (\nabla g) \bullet F + g\,(\nabla \bullet F)$.

(2) $\nabla \bullet (\nabla f \times \nabla g) = 0$.

(3) $\nabla \times (gF) = (\nabla g) \times F + g(\nabla \times F)$.

(4) $\nabla \times (\nabla f) = (0,0,0) = 0_3$.

□

Ejercicio: Demostrar las propiedades anteriores.

Ejemplo 6.7.1 *Si e_1, e_2 y e_3 son perpendiculares entre si, encontrar ∇u_1, ∇u_2 y ∇u_3 en términos de e_1, e_2, e_3 y u_1, u_2, u_3.*

Solución:

Por la teorema 6.7.2, tenemos que

$$\nabla u_1 = \frac{(u_1)_{u_1}}{h_1} e_1 + \frac{(u_1)_{u_2}}{h_2} e_2 + \frac{(u_1)_{u_3}}{h_3} e_3 = \frac{e_1}{h_1} \Rightarrow \boxed{\nabla u_1 = \frac{e_1}{h_1}}\,.$$

$$\nabla u_2 = \frac{(u_2)_{u_1}}{h_1} e_1 + \frac{(u_2)_{u_2}}{h_2} e_2 + \frac{(u_2)_{u_3}}{h_3} e_3 = \frac{e_2}{h_2} \Rightarrow \boxed{\nabla u_2 = \frac{e_2}{h_2}}\,.$$

$$\nabla u_3 = \frac{(u_3)_{u_1}}{h_1} e_1 + \frac{(u_3)_{u_2}}{h_2} e_2 + \frac{(u_3)_{u_3}}{h_3} e_3 = \frac{e_3}{h_3} \Rightarrow \boxed{\nabla u_3 = \frac{e_3}{h_3}}\,.$$

Ejemplo 6.7.2 *Si e_1, e_2 y e_3 son perpendiculares entre si con $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$ y $e_3 \times e_1 = e_2$, entonces*

(1) $e_1 = h_2 h_3\,(\nabla u_2 \times \nabla u_3)$.

(2) $e_2 = -h_1 h_3\,(\nabla u_1 \times \nabla u_3)$.

(3) $e_3 = h_1 h_2\,(\nabla u_1 \times \nabla u_2)$.

Solución: Por el ejemplo 6.7.1, tenemos que:

(1) $h_2 h_3\,(\nabla u_2 \times \nabla u_3) = h_2 h_3 \left(\dfrac{e_2}{h_2} \times \dfrac{e_3}{h_3} \right) = e_2 \times e_3 = e_1.$

(2) $-h_1 h_3\,(\nabla u_1 \times \nabla u_3) = h_1 h_3 \left(\dfrac{e_1}{h_1} \times \dfrac{e_3}{h_3} \right) = -(e_1 \times e_3) = e_2.$

(3) $h_1 h_2\,(\nabla u_1 \times \nabla u_2) = h_1 h_2 \left(\dfrac{e_1}{h_1} \times \dfrac{e_2}{h_2} \right) = e_1 \times e_2 = e_3.$

Ejemplo 6.7.3 *Si e_1, e_2 y e_3 son perpendiculares entre si con $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$ y $e_3 \times e_1 = e_2$ y $A_1, A_2, A_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones de las variables u_1, u_2 y u_3 de clase C^1, entonces:*

(1) $\nabla \bullet (A_1 e_1) = \dfrac{1}{h_1 h_2 h_3}\, \dfrac{d}{d u_1}(A_1 h_2 h_3).$

(2) $\nabla \bullet (A_2 e_2) = \dfrac{1}{h_1 h_2 h_3}\, \dfrac{d}{d u_2}(A_2 h_1 h_3).$

(3) $\nabla \bullet (A_3 e_3) = \dfrac{1}{h_1 h_1 h_2}\, \dfrac{d}{d u_3}(A_3 h_1 h_2).$

Solución: Usando el ejemplo 6.7.2 y el teorema 6.7.3, tenemos que:

(1) *Usando el ejemplo anterior y la propiedades dadas anteriormente, tenemos que:*

$$\nabla \bullet (A_1 e_1) = \nabla \bullet (A_1\ h_2 h_3\,(\nabla u_2 \times \nabla u_3)\,)$$

$$\nabla \bullet (A_1 e_1) = \nabla (A_1\ h_2 h_3) \bullet (\nabla u_2 \times \nabla u_3) + (A_1\ h_2 h_3)\, \nabla \bullet (\nabla u_2 \times \nabla u_3)$$

$$\nabla \bullet (A_1 e_1) = \nabla (A_1\ h_2 h_3) \bullet (\nabla u_2 \times \nabla u_3) + (A_1\ h_2 h_3)\, 0 = \nabla (A_1\ h_2 h_3) \bullet (\nabla u_2 \times \nabla u_3)$$

$$\nabla \bullet (A_1 e_1) = \left[\frac{(A_1\ h_2 h_3)_{u_1}}{h_1} e_1 + \frac{(A_1\ h_2 h_3)_{u_2}}{h_2} e_2 + \frac{(A_1\ h_2 h_3)_{u_3}}{h_3} e_3 \right] \frac{e_1}{h_2 h_3}$$

$$\nabla \bullet (A_1 e_1) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\, \frac{d}{d u_1}(A_1 h_2 h_3).$$

De forma similar tenemos (2) y (3).

Teorema 6.7.4 *Si e_1, e_2 y e_3 son perpendiculares entre si con $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$ y $e_3 \times e_1 = e_2$ y $A_1, A_2, A_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones de las variables u_1, u_2 y u_3 de clase C^1, entonces:*

$$\boxed{\nabla \bullet (A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{d(A_1 h_2 h_3)}{d u_1} + \frac{d(A_2 h_1 h_3)}{d u_2} + \frac{d(A_3 h_1 h_2)}{d u_3}\right].}$$

Demostración: *Notemos inicialmente que:*

$$\nabla \bullet (A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3) = \nabla \bullet (A_1 e_1) + \nabla \bullet (A_2 e_2) + \nabla \bullet (A_3 e_3),$$

y del ejemplo 6.7.3 tenemos que:

$$\begin{gathered}\nabla \bullet (A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3) = \\ \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{d}{d u_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{d}{d u_2}(A_2 h_1 h_3) + \frac{1}{h_1 h_1 h_2}\frac{d}{d u_3}(A_3 h_1 h_2) = \\ \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{d(A_1 h_2 h_3)}{d u_1} + \frac{d(A_2 h_1 h_3)}{d u_2} + \frac{d(A_3 h_1 h_2)}{d u_3}\right].\end{gathered}$$

□

Ejemplo 6.7.4 *Si e_1, e_2 y e_3 son perpendiculares entre si con $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$ y $e_3 \times e_1 = e_2$ y $A_1, A_2, A_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones de las variables u_1, u_2 y u_3 de clase C^1, entonces:*

(1) $\nabla \times (A_1 e_1) = \dfrac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(h_2 e_2 \dfrac{d(A_1 h_1)}{d u_3} - h_3 e_3 \dfrac{d(A_1 h_1)}{d u_2}\right).$

(2) $\nabla \times (A_2 e_2) = \dfrac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(h_3 e_3 \dfrac{d(A_2 h_2)}{d u_1} - h_1 e_1 \dfrac{d(A_2 h_2)}{d u_3}\right).$

(3) $\nabla \times (A_3 e_3) = \dfrac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(h_1 e_1 \dfrac{d(A_3 h_3)}{d u_2} - h_2 e_2 \dfrac{d(A_3 h_3)}{d u_1}\right).$

Solución:

(1) *Del ejemplo 6.7.1 y los teoremas 6.7.2, 6.7.3 tenemos que:*

$$\nabla\times(A_1e_1)=\nabla\times(A_1\ h_1\nabla u_1)=\nabla(A_1h_1)\times\nabla u_1+(A_1h_1)\nabla\times(\nabla u_1)=$$

$$\nabla\times(A_1e_1)=\nabla\times(A_1\ h_1\nabla u_1)=\nabla(A_1h_1)\times\nabla u_1+(A_1h_1)0_3=\nabla\times(A_1\ h_1\nabla u_1)=\nabla(A_1h_1)\times\nabla u_1$$

$$\nabla\times(A_1e_1)=\nabla(A_1h_1)\times\nabla u_1=\left(\frac{(A_1h_1)_{u_1}}{h_1}e_1+\frac{(A_1h_1)_{u_2}}{h_2}e_2+\frac{(A_1h_1)_{u_3}}{h_3}e_3\right)\times\frac{e_1}{h_1}$$

$$\nabla\times(A_1e_1)=\frac{(A_1h_1)_{u_2}}{h_1h_2}e_2\times e_1+\frac{(A_1h_1)_{u_3}}{h_1h_3}e_3\times e_1=\frac{(A_1h_1)_{u_2}}{h_1h_2}(-e_3)+\frac{(A_1h_1)_{u_3}}{h_1h_3}(e_2)$$

$$\nabla\times(A_1e_1)=\frac{(A_1h_1)_{u_3}}{h_1h_3}e_2-\frac{(A_1h_1)_{u_2}}{h_1h_2}e_3$$

$$\boxed{\nabla\times(A_1e_1)=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left(h_2e_2\frac{d(A_1h_1)}{du_3}-h_3e_3\frac{d(A_1h_1)}{du_2}\right).}$$

De forma similar tenemos (2) y (3).

Teorema 6.7.5 *Si e_1,e_2 y e_3 son perpendiculares entre si con $e_1\times e_2=e_3$, $e_2\times e_3=e_1$ y $e_3\times e_1=e_2$ y $A_1,A_2,A_3:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ son funciones de las variables u_1,u_2 y u_3 de clase C^1, entonces:*

$$\boxed{\nabla\times(A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3)=\frac{1}{h_1h_2h_3}det\begin{bmatrix}h_1e_1 & h_2e_2 & h_3e_3\\ \dfrac{d}{du_1} & \dfrac{d}{du_2} & \dfrac{d}{du_3}\\ A_1h_1 & A_2h_2 & A_3h_3\end{bmatrix}.}$$

Demostración: *Notemos inicialmente que*

- $\nabla\times(A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3)=\nabla\times(A_1e_1)+\nabla\times(A_2e_2)+\nabla\times(A_3e_3).$

Además del ejemplo 6.7.4, tenemos que:

- $\nabla\times(A_1e_1)=\dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left(h_2e_2\dfrac{d(A_1h_1)}{du_3}-h_3e_3\dfrac{d(A_1h_1)}{du_2}\right),$

- $\nabla\times(A_2e_2)=\dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left(h_3e_3\dfrac{d(A_2h_2)}{du_1}-h_1e_1\dfrac{d(A_2h_2)}{du_3}\right),$

- $\nabla \times (A_3 e_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(h_1 e_1 \frac{d(A_3 h_3)}{d u_2} - h_2 e_2 \frac{d(A_3 h_3)}{d u_1}\right).$

Lo cual implica que :

$$\nabla \times (A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3) =$$

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(h_1 e_1 \frac{d(A_1 h_1)}{d u_3} - h_3 e_3 \frac{d(A_1 h_1)}{d u_2} + h_3 e_3 \frac{d(A_2 h_2)}{d u_1} - h_1 e_1 \frac{d(A_2 h_2)}{d u_3} + h_1 e_1 \frac{d(A_3 h_3)}{d u_2} - h_2 e_2 \frac{d(A_3 h_3)}{d u_1}\right)$$

$$= \frac{\left[h_1 e_1 \left(\frac{d(A_3 h_3)}{d u_2} - \frac{d(A_2 h_2)}{d u_3}\right) - h_2 e_2 \left(\frac{d(A_3 h_3)}{d u_1} - \frac{d(A_1 h_1)}{d u_3}\right) + h_3 e_3 \left(\frac{d(A_2 h_2)}{d u_1} - \frac{d(A_1 h_1)}{d u_2}\right)\right]}{h_1 h_2 h_3}$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} det \begin{bmatrix} h_1 e_1 & h_2 e_2 & h_3 e_3 \\ \frac{d}{d u_1} & \frac{d}{d u_2} & \frac{d}{d u_3} \\ A_1 h_1 & A_2 h_2 & A_3 h_3 \end{bmatrix}.$$

Así concluimos que

$$\nabla \times (A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} det \begin{bmatrix} h_1 e_1 & h_2 e_2 & h_3 e_3 \\ \frac{d}{d u_1} & \frac{d}{d u_2} & \frac{d}{d u_3} \\ A_1 h_1 & A_2 h_2 & A_3 h_3 \end{bmatrix}.$$

□

Ejemplo 6.7.5 *Sea* $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *funciones de clase* C^1 *que dependen de las variables* r, θ *y* z *(coordenadas cilíndricas). Verificar que*

(1) $\nabla \Phi = \Phi_r e_1 + \frac{\Phi_\theta}{r} e_2 + \Phi_z e_3.$

(2) $\nabla \bullet A = \nabla \bullet (A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3) = \frac{1}{r}\left[\frac{d(A_1 r)}{d r} + \frac{d(A_2)}{d\theta} + \frac{d(A_3 r)}{d z}\right].$

(3) $\nabla \times A = \nabla \times (A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3) = \frac{1}{r} det \begin{bmatrix} e_1 & r e_2 & e_3 \\ \frac{d}{d r} & \frac{d}{d\theta} & \frac{d}{d z} \\ A_1 & A_2 r & A_3 \end{bmatrix}.$

Recordando que las coordenadas cilíndricas se describen por medio de la función

$$f(r,\theta,z)=(rcos\theta, rsin\theta, z).$$

<u>Solución:</u> Recordemos que $h_1=\|f_r\|=1$, $h_2=\|f_\theta\|=r$ y $h_3=\|f_z\|=1$. Por tanto

(1) $\nabla\Phi=\dfrac{\Phi_r}{h_1}e_1+\dfrac{\Phi_\theta}{h_2}e_2+\dfrac{\Phi_z}{h_3}e_3=\dfrac{\Phi_r}{1}e_1+\dfrac{\Phi_\theta}{r}e_2+\dfrac{\Phi_z}{1}e_3=\Phi_r e_1+\dfrac{\Phi_\theta}{r}e_2+\Phi_z e_3.$

$$\nabla\Phi=\Phi_r e_1+\frac{\Phi_\theta}{r}e_2+\Phi_z e_3.$$

(2) $\nabla\bullet(A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3)=\dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{d(A_1h_2h_3)}{dr}+\dfrac{d(A_2h_1h_3)}{d\theta}+\dfrac{d(A_3h_1h_2)}{dz}\right]=$

$$=\frac{1}{1\cdot r\cdot 1}\left[\frac{d(A_1\cdot r\cdot 1)}{dr}+\frac{d(A_2\cdot 1\cdot 1)}{d\theta}+\frac{d(A_3\cdot 1\cdot r)}{dz}\right]=\frac{1}{r}\left[\frac{d(A_1r)}{dr}+\frac{d(A_2)}{d\theta}+\frac{d(A_3r)}{dz}\right].$$

$$\nabla\bullet(A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3)=\frac{1}{r}\left[\frac{d(A_1r)}{dr}+\frac{d(A_2)}{d\theta}+\frac{d(A_3r)}{dz}\right].$$

(3) $\nabla\times A=\nabla\times(A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3)=\dfrac{1}{h_1h_2h_3}det\begin{bmatrix} h_1e_1 & h_2e_2 & h_3e_3\\ \dfrac{d}{du_1} & \dfrac{d}{du_2} & \dfrac{d}{du_3}\\ A_1h_1 & A_2h_2 & A_3h_3\end{bmatrix}$

$$\nabla\times A=\frac{1}{1\cdot r\cdot 1}det\begin{bmatrix} e_1 & re_2 & e_3\\ \dfrac{d}{dr} & \dfrac{d}{d\theta} & \dfrac{d}{dz}\\ A_1 & A_2r & A_3\end{bmatrix}.$$

$$\nabla\times A=\frac{1}{r}det\begin{bmatrix} e_1 & re_2 & e_3\\ \dfrac{d}{dr} & \dfrac{d}{d\theta} & \dfrac{d}{dz}\\ A_1 & A_2r & A_3\end{bmatrix}.$$

Ejemplo 6.7.6 *Sea $\Phi:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$, $A:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ funciones de clase C^1 que dependen de las variables ρ, ϕ y θ (coordenadas esféricas). Verificar que:*

(1) $\nabla\Phi=\Phi_\rho e_1+\dfrac{\Phi_\phi}{\rho}e_2+\dfrac{\Phi_\theta}{\rho sin\phi}e_3.$

(2) $\nabla\bullet A=\nabla\bullet(A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3)=\dfrac{1}{\rho^2 sin\phi}\left[\dfrac{d(A_1\rho^2 sin\phi)}{d\rho}+\dfrac{d(A_2\rho sin\phi)}{d\phi}+\dfrac{d(A_3\rho)}{d\theta}\right].$

(3) $\nabla\times A=\nabla\times(A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3)=\dfrac{1}{\rho^2 sin\phi}det\begin{bmatrix} e_1 & \rho e_2 & \rho sin\phi e_3\\ \dfrac{d}{d\rho} & \dfrac{d}{d\phi} & \dfrac{d}{d\theta}\\ A_1 & A_2\rho & A_3\rho sin\phi\end{bmatrix}.$

Recordando que las coordenadas cilíndricas se describen por medio de la función

$$f(\rho,\phi,\theta)=(\rho cos\theta sin\phi, \rho sin\theta sin\phi, \rho cos\phi).$$

<u>*Solución:*</u> *Recordemos que* $h_1=\|f_\rho\|=1$, $h_2=\|f_\phi\|=\rho$ *y* $h_3=\|f_\theta\|=\rho sin\phi$. *Por tanto*

(1) $\nabla\Phi=\dfrac{\Phi_\rho}{h_1}e_1+\dfrac{\Phi_\phi}{h_2}e_2+\dfrac{\Phi_\theta}{h_3}e_3=\dfrac{\Phi_\rho}{1}e_1+\dfrac{\Phi_\phi}{\rho}e_2+\dfrac{\Phi_\theta}{\rho sin\phi}e_3=\Phi_\rho e_1+\dfrac{\Phi_\phi}{\rho}e_2+\dfrac{\Phi_\theta}{\rho sin\phi}e_3.$

$$\nabla\Phi=\Phi_\rho e_1+\frac{\Phi_\phi}{\rho}e_2+\frac{\Phi_\theta}{\rho sin\phi}e_3.$$

(2) $\nabla\bullet(A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3)=\dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{d(A_1h_2h_3)}{d\rho}+\dfrac{d(A_2h_1h_3)}{d\phi}+\dfrac{d(A_3h_1h_2)}{d\theta}\right]=$

$$=\frac{1}{1\cdot\rho\cdot\rho sin\phi}\left[\frac{d(A_1\cdot\rho sin\phi\cdot\rho)}{d\rho}+\frac{d(A_2\cdot 1\cdot\rho sin\phi)}{d\phi}+\frac{d(A_3\cdot 1\cdot\rho)}{d\theta}\right]=$$
$$\frac{1}{\rho^2 sin\phi}\left[\frac{d(A_1\rho^2 sin\phi)}{d\rho}+\frac{d(A_2\rho sin\phi)}{d\phi}+\frac{d(A_3\rho)}{d\theta}\right].$$

$$\nabla\bullet(A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3)=\frac{1}{\rho^2 sin\phi}\left[\frac{d(A_1\rho^2 sin\phi)}{d\rho}+\frac{d(A_2\rho sin\phi)}{d\phi}+\frac{d(A_3\rho)}{d\theta}\right].$$

(3) $\nabla\times A=\nabla\times(A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3)=\dfrac{1}{h_1h_2h_3}det\begin{bmatrix}h_1e_1 & h_2e_2 & h_3e_3\\ \dfrac{d}{du_1} & \dfrac{d}{du_2} & \dfrac{d}{du_3}\\ A_1h_1 & A_2h_2 & A_3h_3\end{bmatrix}.$

$$\nabla\times A=\nabla\times(A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3)=\frac{1}{1\cdot\rho\cdot\rho sin\phi}det\begin{bmatrix}1e_1 & \rho e_2 & \rho sin\phi e_3\\ \dfrac{d}{d\rho} & \dfrac{d}{d\phi} & \dfrac{d}{d\theta}\\ A_1\cdot 1 & A_2\cdot\rho & A_3\cdot\rho sin\phi\end{bmatrix}.$$

$$\nabla\times A=\nabla\times(A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3)=\frac{1}{\rho^2 sin\phi}det\begin{bmatrix}e_1 & \rho e_2 & \rho sin\phi e_3\\ \dfrac{d}{d\rho} & \dfrac{d}{d\phi} & \dfrac{d}{d\theta}\\ A_1 & A_2\rho & A_3\rho sin\phi\end{bmatrix}.$$

Ejercicio: Sea $\Phi:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$, $A:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ funciones de clase C^1 que dependen de las coordenadas parabólicas cilíndricas. Hallar $\nabla\Phi$, $\nabla\bullet A$ y $\nabla\times A$ coordenadas parabólicas cilíndricas.

Ejercicio: Sea $\Phi:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$, $A:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ funciones de clase C^1 que dependen de las coordenadas parabólicas. Hallar $\nabla\Phi$, $\nabla\bullet A$ y $\nabla\times A$ coordenadas parabólicas.

Capítulo 7

Ecuaciones diferenciales de orden uno

7.1. Ecuaciones diferenciales separables

Definición 7.1.1 ***(E.d separable):*** *Una ecuación diferencial de orden uno de la forma*

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)}$$

se dice que es separable o que tiene variables separables.

Ejemplo 7.1.1

(1) *La ecuación diferencial* $\dfrac{dy}{dx} = y^2 x e^{3x+4y}$ *es una ecuación diferencial separable, ya que se puede reescribir como*

$$\frac{dy}{dx} = \left(xe^{4y}\right)\left(y^2 e^{4y}\right).$$

(2) *La ecuación diferencial* $\dfrac{dy}{dx} = y + sin(x)$ *no es una ecuación diferencial separable, ya que* $x + sin(x)$ *no se puede expresar como el producto de una función que depende de* x *por una función que depende de* y.

Método de solución de una e.d separable: Dada la ecuación diferencial separable

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

tenemos que al separar las variables x e y tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \iff \frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx \text{ con } h(y) \neq 0.$$

Lo anterior implica que una familia de soluciones de la ecuación diferencial se representa como:

$$\boxed{\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx}.$$

Ejemplo 7.1.2 *Hallar la solución de la ecuación diferencial* $(1+x)dy - ydx = 0$.

Solución:

$$(1+x)dy - ydx = 0 \Leftrightarrow (1+x)dy = ydx \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = \frac{1}{1+x}dx.$$

Luego integrando tenemos que:

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{1+x}dx \Leftrightarrow ln|y| = ln|1+x| + C \Leftrightarrow e^{ln|y|} = e^{ln|1+x|+C}$$
$$e^{ln|y|} = e^{ln|1+x|+C} \Leftrightarrow |y| = e^C e^{ln|1+x|} \Leftrightarrow y = \pm e^C(1+x).$$

Por lo tanto la solución es $y = C(1+x)$. *Cabe destacar que esta solución nos brinda una familia de soluciones para la ecuación diferencial.*

Ejemplo 7.1.3 *Hallar la solución de la ecuación diferencial* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$, *con* $y(4) = -3$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow ydy = -xdx.$$

Luego integrando, tenemos que

$$\int ydy = \int -xdx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2C.$$

Por lo tanto una familia de soluciones para la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ *es:*

$$x^2 + y^2 = C.$$

Ahora usando la condición inicial $y(4) = -3$, *tenemos que*

$$4^2 + (-3)^2 = C,$$

así $C = 25$ *y la solución del pvi es* $x^2 + y^2 = 25$.

Ejemplo 7.1.4 *Hallar la solución de la ecuación diferencial* $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4 \iff \frac{1}{y^2-4}dy = dx$$

Luego integrando, tenemos que

$$\int \frac{1}{y^2-4}dy = \int dx \iff \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y-2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y+2}\right)dy = x + C$$

$$\int \frac{1}{y^2-4}dy = \int dx \iff \frac{1}{4}ln|y-2| - \frac{1}{4}ln|y+2| = x + C \iff ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = 4x + C.$$

$$ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = 4x + C \iff \left|\frac{y-2}{y+2}\right| = e^{4x+C} \iff \frac{y-2}{y+2} = \pm e^{4x+C} = \pm e^{C}e^{4x}$$

$$\frac{y-2}{y+2} = \pm e^{4x+C} = \pm e^{C}e^{4x} \iff y-2 = Ce^{4x}(y+2) = Ce^{4x}y + 2Ce^{4x}$$

$$y-2 = Ce^{4x}(y+2) = Ce^{4x}y + 2Ce^{4x} \iff y - Ce^{4x}y = 2Ce^{4x} + 2$$

Por lo tanto una familia de soluciones para la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4$ *es*

$$y = 2\left(\frac{1+Ce^{4x}}{1-Ce^{4x}}\right).$$

Cabe destacar que $y = -2$ *es solución de la ecuación diferencial, pero no se encuentra en esta familia de soluciones.*

7.2. Ecuaciones lineales de orden 1

Definición 7.2.1 ***(Ecuación diferencial lineal de orden uno):*** *Una ecuación diferencial de orden uno se dice lineal, si ella se puede escribir de la forma*

$$\boxed{a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)}.$$

Nota: Al dividir ambos lados de la ecuación diferencial $a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$ entre $a_1(x)$ obtenemos la ecuación diferencial

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)},$$

con $P(x)=a_0(x)/a_1(x)$ y $f(x)=g(x)/a_1(x)$. Esta escritura de la ecuación diferencial la llamaremos la forma estándar.

Método de solución de una ecuación diferencial lineal: Para solucionar la ecuación diferencial lineal

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x),$$

es suficiente solucionar su forma estándar

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$$

donde $P(x)=a_0(x)/a_1(x)$ y $f(x)=g(x)/a_1(x)$. Para este veamos las siguientes observaciones:

(1) Si y depende de x, entonces $\dfrac{d}{dx}(\mu(x)\cdot y)=\mu(x)\cdot\dfrac{dy}{dx}+\left(\dfrac{d}{dx}\mu(x)\right)\cdot y.$

(2) Si multiplicamos en ambos lados de la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$ por $\mu(x)$, tenemos que:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx}+\mu(x)P(x)y=\mu(x)f(x).$$

(3) Si $\mu(x)P(x)=\dfrac{d}{dx}\mu(x)$, entonces tenemos que

$$\mu(x)\frac{dy}{dx}+\mu(x)P(x)y=\mu(x)f(x) \iff \frac{d}{dx}(\mu(x)\cdot y)=\mu(x)f(x)$$
$$\iff d(\mu(x)\cdot y)=\mu(x)f(x)dx.$$

Luego integrando, tenemos que

$$\mu(x)\cdot y=\int d(\mu(x)\cdot y)=\int \mu(x)f(x)dx.$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial es

$$\boxed{y=\frac{\displaystyle\int \mu(x)f(x)dx}{\mu(x)}}.$$

(4) Para encontrar la función $\mu(x)$ la cual satisface que $\mu(x)P(x) = \dfrac{d}{dx}\mu(x)$,tenemos que:

$$\mu(x)P(x) = \frac{d}{dx}\mu(x) \iff \mu(x)P(x)dx = d\mu(x) \iff \frac{1}{\mu(x)}d\mu(x) = P(x)dx.$$

Luego integrando tenemos que

$$\int \frac{1}{\mu(x)}d\mu(x) = \int P(x)dx \iff ln|\mu(x)| = \int P(x)dx$$

$$\iff \mu(x) = e^{\int P(x)dx}.$$

Por lo tanto $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$.

(5) De la parte (3) y (4) tenemos que la solución de la ecuación $a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$ es

$$y = \frac{\displaystyle\int \mu(x)f(x)dx}{\mu(x)} = \frac{\displaystyle\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx}{e^{\int P(x)dx}} = \frac{\displaystyle\int e^{\int \frac{a_0(x)}{a_1(x)}dx}\cdot\frac{g(x)}{a_1(x)}dx}{e^{\int \frac{a_0(x)}{a_1(x)}dx}}.$$

Ejemplo 7.2.1 *Hallar la solución de la ecuación diferencial lineal* $\dfrac{dy}{dx} - 3y = 6$.

<u>*Solución:*</u>

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 6 \iff \frac{d}{dx}\big(\mu(x)\cdot y\big) = 6\mu(x),$$

donde $\mu(x) = e^{\int -3dx} = e^{-3x}$. *Por lo tanto, tenemos que*

$$\frac{d}{dx}\big(\mu(x)\cdot y\big) = 6\mu(x) \iff \frac{d}{dx}\big(e^{-3x}\cdot y\big) = 6e^{-3x} \iff d(e^{-3x}\cdot y) = 6e^{-3x}dx.$$

Luego integrando, tenemos que

$$\int d(e^{-3x}\cdot y) = \int 6e^{-3x}dx \iff e^{-3x}\cdot y = \frac{6e^{-3x}}{-3} + C$$

$$\iff e^{-3x}\cdot y = -2e^{-3x} + C \iff y = -2 + Ce^{3x}.$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial es

$$y = -2 + Ce^{3x}.$$

Ejemplo 7.2.2 *Hallar la solución de la ecuación diferencial* $x\dfrac{dy}{dx}-4y=x^6e^x$

Solución:

La forma estandar de la ecuación diferencial es

$$\frac{dy}{dx}-\left(\frac{4}{x}\right)y=x^5e^x.$$

De esta forma tenemos que si $\mu(x)=e^{\int -\frac{4}{x}dx}=e^{lnx^{-4}}=x^{-4}$, *entonces*

$$\frac{dy}{dx}-\left(\frac{4}{x}\right)y=x^5e^x \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(\mu(x)\cdot y)=\mu(x)\cdot x^5e^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(x^{-4}\cdot y)=x^{-4}\cdot x^5e^x \Leftrightarrow d(x^{-4}\cdot y)=xe^xdx.$$

Luego integrando, tenemos que

$$\int d(x^{-4}\cdot y)=\int xe^xdx \Leftrightarrow x^{-4}\cdot y=xe^x-e^x+C \Leftrightarrow y=x^5e^x-x^4e^x+Cx^4.$$

Por lo tanto $y=x^5e^x-x^4e^x+Cx^4$ *es una familia de soluciones para la ecuación diferencial.*

7.3. Teorema de existencia y unidad de soluciones de una ecuación diferencial de primer orden

Al considerar un problema de valor inicial de la forma

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\[2ex] y(x_0)=y_0\end{array}}$$

donde f es una función que depende de las variables x e y, surgen dos importantes preguntas:

- ¿Existe una solución para el problema?
- Si existe la solución ¿es única?

Antes de dar una posible solución "satisfactoria.[a] estas preguntas, presentamos un ejemplo de un problema de valor inicial con dos soluciones.

Ejemplo 7.3.1 *Dado el problema de valor inicial* $\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$ *con* $y(0) = 0$ *entonces:*

(1) *Usando el método de variables separables, encontrar una solución del problema de valor inicial.*

(2) *Verificar que* $y = 0$ *es también solución del problema de valor inicial.*

Solución:

(1) *Primero solucionamos la ecuación diferencial. Para esto, tenemos que:*

$$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}} \iff y^{-\frac{1}{2}}dy = xdx.$$

Luego integrando, tenemos que:

$$\int y^{-\frac{1}{2}}dy = \int xdx \iff 2y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + C.$$

Por lo tanto una familia de soluciones para la ecuación diferencial es

$$y = \frac{x^4}{16} + \frac{Cx^2}{4} + \frac{C^2}{4}.$$

Además como $y(0) = 0$*, entonces tenemos que* $C = 0$*, y así una solución para el problema de valor inicial es*

$$\boxed{y = \frac{x^4}{16}}.$$

(2) *Si* $y = 0$*, entonces es claro que* $\frac{dy}{dx} = \frac{d(0)}{dx} = 0$ y $xy^{\frac{1}{2}} = x(0)^{\frac{1}{2}} = 0$*. Así es claro que* $y = 0$ *es solución del problema de valor inicial.*

Nota: El siguiente teorema nos dice bajo que condiciones podemos garantizar que existe una solución única para el problema de valor inicial

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{array}}$$

donde f es una función que depende de las variables x e y.

Teorema 7.3.1 ***(Existencia y unicidad):*** *Supongamos que* $f:(a,b)\times(c,d)\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ *es una función con* $(x_0,y_0)\in(a,b)\times(c,d)$*. Entonces si tenemos que:*

(1) $f(x,y)$ *es una función continua sobre* $(a,b)\times(c,d)$*.*

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *es una función continua sobre* $(a,b)\times(c,d)$*.*

Entonces existe un intervalo $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\subseteq(a,b)$ *y una única función* $y(x)$ *definida sobre este intervalo que es solución del problema de valor inicial*

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\[2ex] y(x_0)=y_0\end{array}}$$

□

Ejemplo 7.3.2 *En el ejemplo 7.3.1, tenemos que hay dos soluciones para el problema de valor inicial* $\dfrac{dy}{dx}=xy^{\frac{1}{2}}$ *con* $y(0)=0$*. Veamos que esto no contradice el teorema anterior. En este caso, tenemos que*

$$\boxed{f(x,y)=xy^{\frac{1}{2}}}.$$

Así, tenemos que

- f *es continua en* $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[0,+\infty]\}$*.*
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x}{y^{\frac{1}{2}}}$ *es continua en* $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in(0,+\infty]\}$*.*

Entonces $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *no es continua en* $(0,0)$ *y esto es necesario en el teorema.*

Ejemplo 7.3.3 *Dado el problema de valor inicial*

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2\\[2ex] y(1)=3\end{array}}$$

verificar que existe un intervalo $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ *y una única función* $\phi(x)$ *que es solución del problema de valor inicial en este intervalo.*

Solución:

En este caso $f(x,y) = x^2 + y^2$, *lo cual implica que* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$. *Así tenemos que* f *y* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *son continuas en* $\mathbb{R}^2$. *Por tanto, el teorema de existencia y unicidad nos dice que existe un intervalo* $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ *y una única función* $\phi(x)$ *que es solución del problema de valor inicial en este intervalo.*

7.4. Ecuaciones diferenciales autónomas de primer orden

Definición 7.4.1 ***(Ecuaciones diferenciales autónomas de primer orden):*** *Una ecuación diferencial de primer orden se dice autónoma, si ella se puede escribir de la forma*

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(y)}\,.$$

Definición 7.4.2 ***(Puntos críticos de una ecuación diferencial autónoma):*** *Dada una ecuación diferencial autónoma*

$$\frac{dy}{dx} = f(y),$$

decimos que un número real c *es un punto crítico de esta ecuación diferencial, si* $f(c) = 0$.

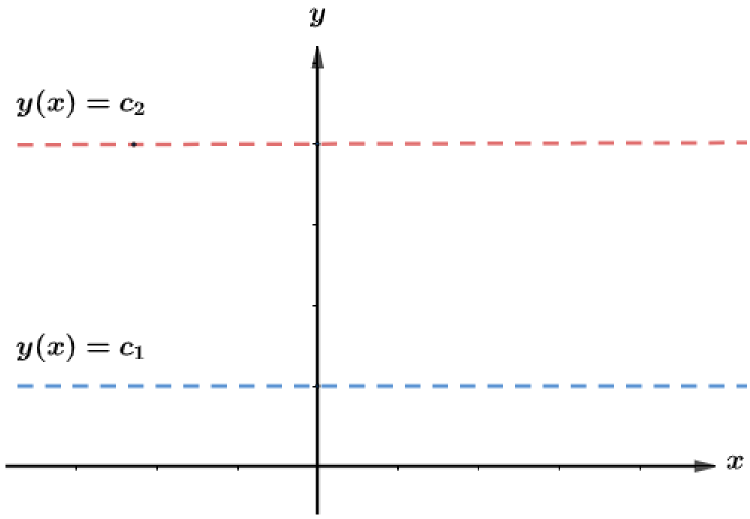
Observación: Es claro que si c es un punto crítico de la ecuación diferencial autónoma

$$\frac{dy}{dx} = f(y),$$

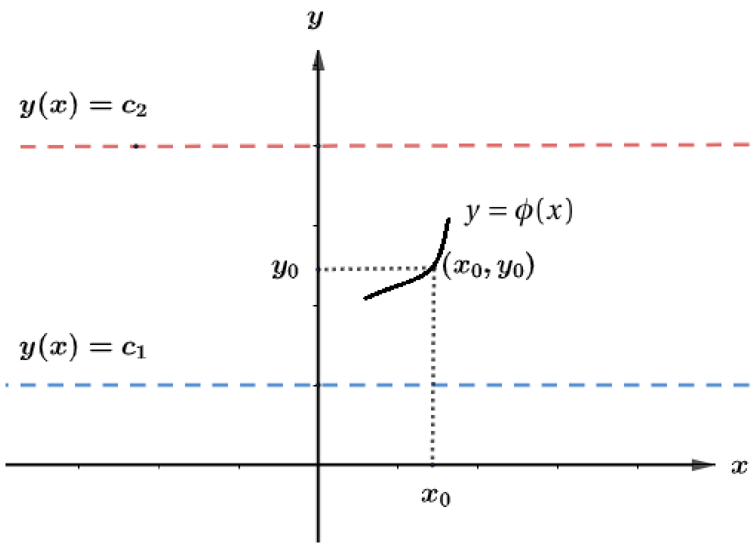
entonces $y = c$ es una solución para la ecuación diferencial. Esta solución en ocasiones es llamada solución de equilibrio.

Observación: Consideremos la ecuación diferencial autónoma $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$, donde f y $\dfrac{df}{dy}$ son funciones continuas en algún intervalo $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$. Si c_1, c_2 son dos puntos críticos de la ecuación diferencial con $a < c_1 < c_2 < b$ y no hay más puntos críticos entre c_1 y c_2, entonces:

(1) Dos soluciones de equilibrio son $y = c_1$ y $y = c_2$.

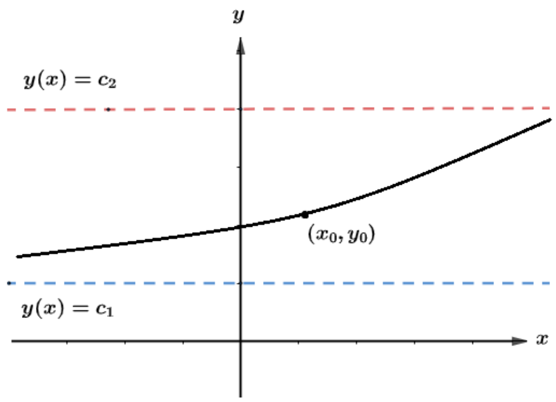


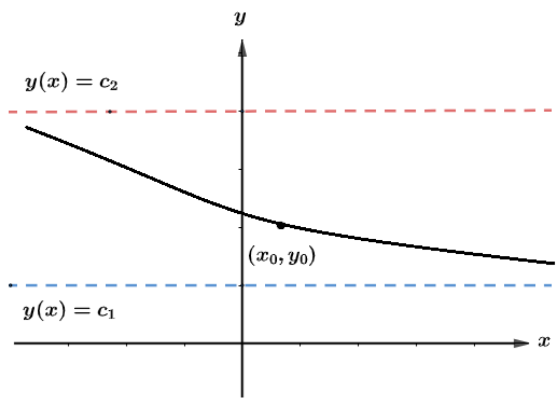
(2) Si y_0 satisface que $c_1 < y_0 < c_2$ y además existe una solución $y = \phi(x)$ de la ecuación diferencial tal que $\phi(x_0) = y_0$, entonces la gráfica de la función ϕ pasa por el punto (x_0, y_0).



(3) Por el teorema de existencia y unicidad, no es posible que la gráfica de ϕ pase por las gráficas de las rectas $y = c_1$ y $y = c_2$.

(4) La solución ϕ es estrictamente creciente ó estrictamente decreciente. Esto es consecuencia del teorema del valor medio.



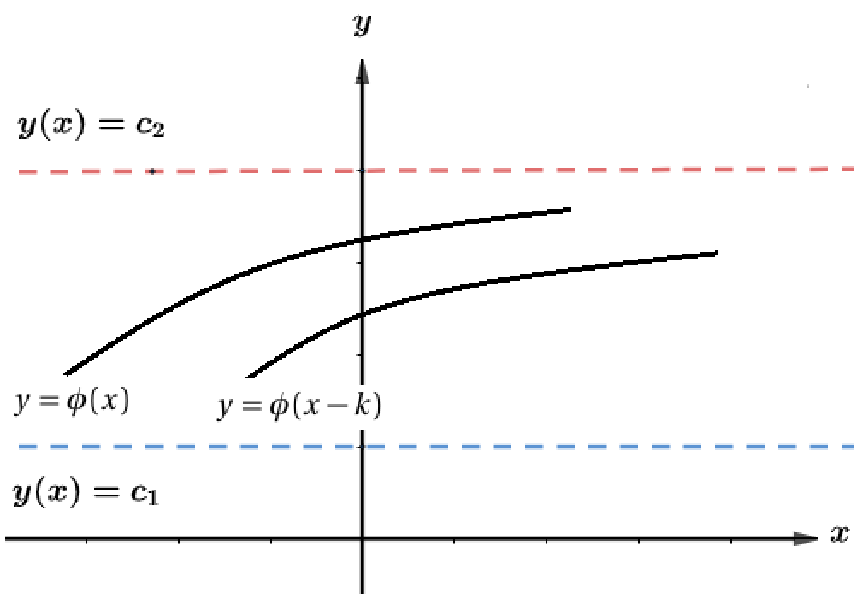


Además

- Si ϕ es creciente, entonces $\lim\limits_{t\mapsto -\infty} \phi(x) = c_1$ y $\lim\limits_{t\mapsto\infty} \phi(x) = c_2$.
- Si ϕ es decreciente, entonces $\lim\limits_{t\mapsto -\infty} \phi(x) = c_2$ y $\lim\limits_{t\mapsto\infty} \phi(x) = c_1$.

Esto último es consecuencia del teorema de existencia y unicidad.

(5) Si $y = \phi(x)$ es solución de la ecuación diferencial, entonces para toda constante k se tiene que $y = \phi(x-k)$ es tambien solución de la ecuación diferencial.



Además por el teorema de existencia y unicidad, tenemos que todas las soluciones de la ecuación diferencial en esta franja son de la forma $y = \phi(x-k)$ para algún número real k.

Ejemplo 7.4.1 *Dada la ecuación diferencial autónoma* $\dfrac{dy}{dx} = y(1-y)$*, encontrar:*

(1) *Las soluciones de equilibrio (los puntos críticos).*

(2) *Verificar como es la gráfica de las soluciones en cada tramo.*

Solución:

(1) *En este caso, tenemos que* $f(y) = y(1-y)$*, y por tanto tenemos que los puntos críticos son* $y = 0$ *e* $y = 1$*.*

(2) *Veamos el comportamiento de los signos de* $f(y) = y(1-y)$*, ya que esto nos dice como es el signo de la derivada.*

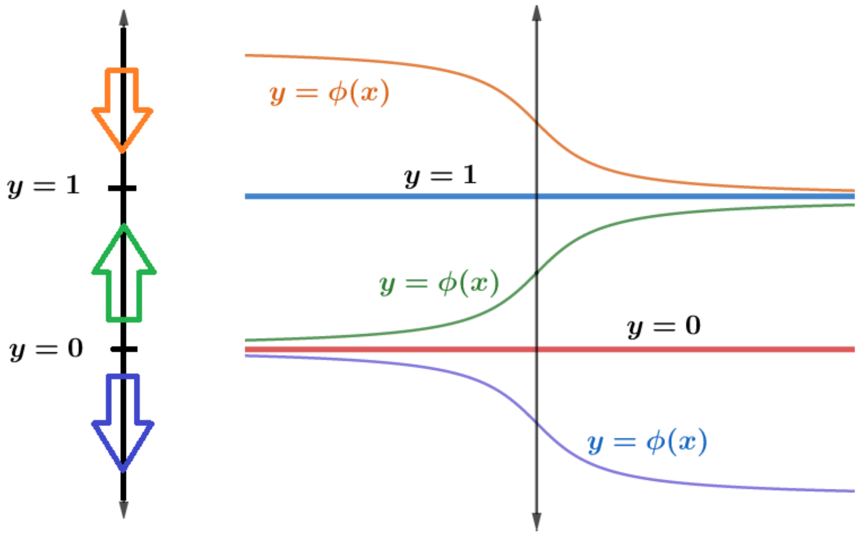
- $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = f(y) > 0 \iff y(1-y) > 0 \iff y \in (0,1)}$.

Por tanto si $y = \phi(x)$ *es una solución con* $0 < y < 1$*, entonces* $y = \phi(x)$ *es creciente*[1].

- $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = f(y) < 0 \iff y(1-y) < 0 \iff y \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)}$.

Por tanto si $y = \phi(x)$ *es una solución con* $y \in (-\infty,0)$*, entonces* $y = \phi(x)$ *es decreciente. De forma similar, si* $y = \phi(x)$ *es una solución con* $y \in (1,+\infty)$*, entonces* $y = \phi(x)$ *es decreciente.*

De lo anterior tenemos que las gráficas de las soluciones en cada tramo se pueden describir como:



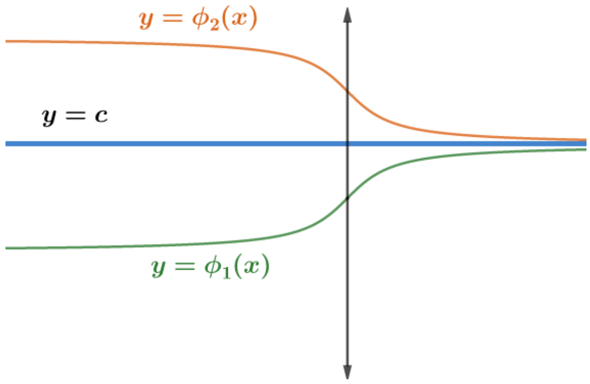
[1] Recordar que si la derivada de una función es positiva en un intervalo, esto implica que la función es creciente en este intervalo. De forma análoga si la derivada es negativa, entonces la función es decreciente.

La recta de la izquierda es llamada el diagrama de fase de la ecuación diferencial autónoma.

Definición 7.4.3 ***(Atractores y repulsores):*** *Supongamos que* $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$ *es una ecuación diferencial autónoma con* f *y* $\dfrac{df}{dy}$ *continuas en algún intervalo* $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. *Si* $y = c$ *es un punto crítico de la ecuación diferencial con* $a < c < b$, *entonces:*

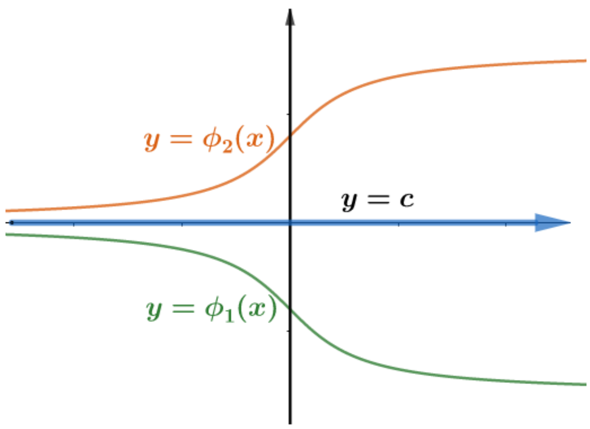
(1) *Decimos que c es atractor, si dadas dos soluciones* ϕ_1 *y* ϕ_2 *de la ecuación diferencial con* $\phi_1 < \phi_2$ *se tiene que*

- $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \phi_2(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \phi_1(x) = c$.
- ϕ_1 *es creciente y* ϕ_2 *es decreciente.*



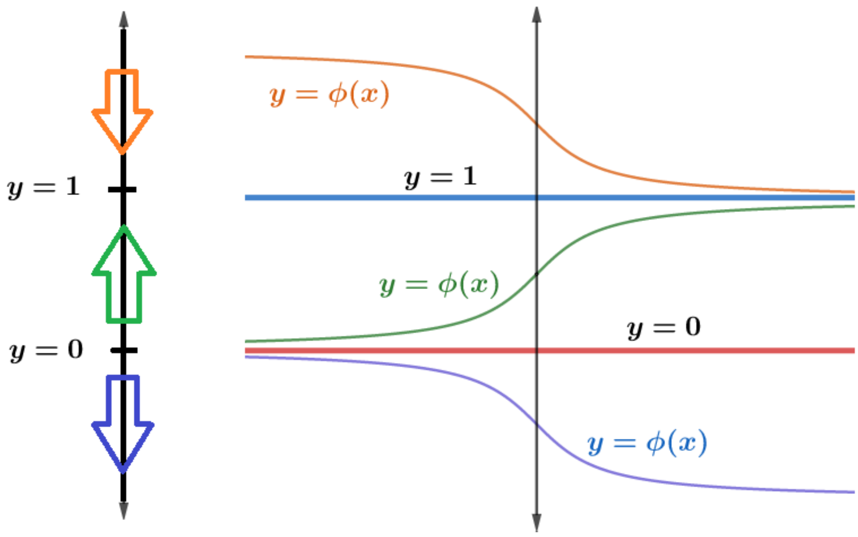
(2) *Decimos que c es repulsor, si dadas dos soluciones* ϕ_1 *y* ϕ_2 *de la ecuación diferencial con* $\phi_1 < \phi_2$ *se tiene que*

- $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \phi_2(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \phi_1(x) = c$.
- ϕ_1 *es decreciente y* ϕ_2 *es creciente.*



Observación: Del diagrama de fase es más sencillo de detectar cuando un punto crítico de una ecuación diferencial autónoma es atractor ó repulsor. Para esto consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.4.2 *Recordemos que la gráfica de soluciones de la ecuación* $\dfrac{dy}{dx} = y(1-y)$ *es*



Por tanto, $y=1$ *es atractor y* $y=0$ *es repulsor.*

Ejemplo 7.4.3 *Dada la ecuación diferencial autónoma* $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - y^3$*, encontrar:*

(1) Las soluciones de equilibrio (los puntos críticos).

(2) Verificar como es la gráfica de las soluciones en cada tramo.

(3) Verificar cuales puntos críticos son atractores ó repulsores.

Solución:

(1) En este caso, tenemos que $f(y) = y^2 - y^3 = y^2(1-y)$*, y por tanto tenemos que los puntos críticos son* $y=0$ *e* $y=1$.

(2) Veamos el comportamiento de los signos de $f(y) = y^2 - y^3$*, ya que esto nos dice como es el signo de la derivada.*

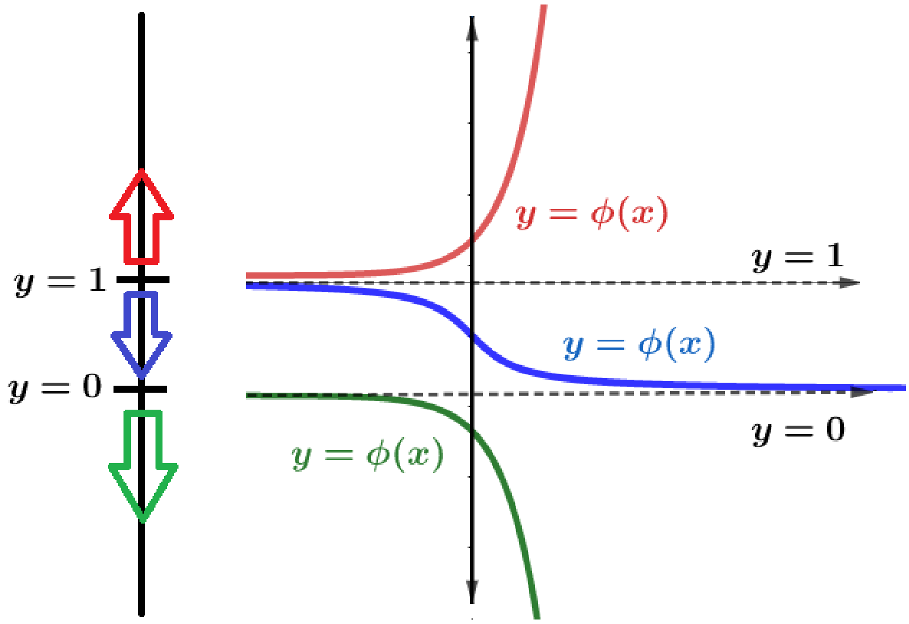
- $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = f(y) > 0 \iff y^2(1-y) > 0 \iff y \in (1, +\infty)}$.

Por tanto si $y = \phi(x)$ es una solución con $1 < y$, entonces $y = \phi(x)$ es creciente.

- $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = f(y) < 0 \iff y^2(1-y) < 0 \iff y \in (-\infty, 1)}$.

Por tanto si $y = \phi(x)$ es una solución con $y \in (-\infty, 0)$, entonces $y = \phi(x)$ es decreciente. De forma similar, si $y = \phi(x)$ es una solución con $y \in (0, 1)$, entonces $y = \phi(x)$ es decreciente.

De lo anterior tenemos que las gráficas de las soluciones en cada tramo se pueden describir como:

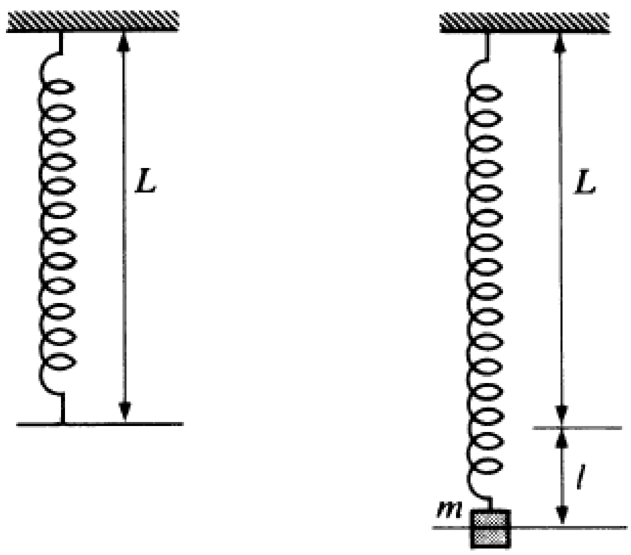


(3) *Del diagrama de fase anterior, tenemos que $y = 1$ es repulsor y $y = 0$ no es ni atractor ni repulsor (se dice semiestable).*

Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes

7.5. E.d. de las vibraciones de una masa resorte

Un resorte helicoidal está suspendido verticalmente de un punto fijo del techo, viga u otro objeto similar. Una masa está unida a su extremo inferior y puede encontrarse en reposo en una posición de equilibrio.



Entonces podemos hacer lo siguiente:

(1) Poner el sistema en movimiento (desplazando la masa hacia arriba ó abajo una cierta distancia) y a continuación, soltándola con cierta velocidad inicial en el tiempo $t = 0$.

(2) Forzar la masa a que abandone su posición de equilibrio mediante una velocidad inicial $v_0 \neq 0$ en el tiempo $t = 0$.

Ya sea por (1) ó (2), nuestro problema será determinar el movimiento resultante de la masa en el resorte.

Nota: Para obtener la ecuación diferencial que representa este problema, necesitaremos dos leyes de la física las cuales son la segunda ley de Newton y la ley de Hooke las cuales a grosso modo dicen lo siguiente:

- Segunda ley de Newton: La fuerza neta ó fuerza resultante que actua sobre un cuerpo es igual a la masa del cuerpo multiplicada por la aceleración del cuerpo

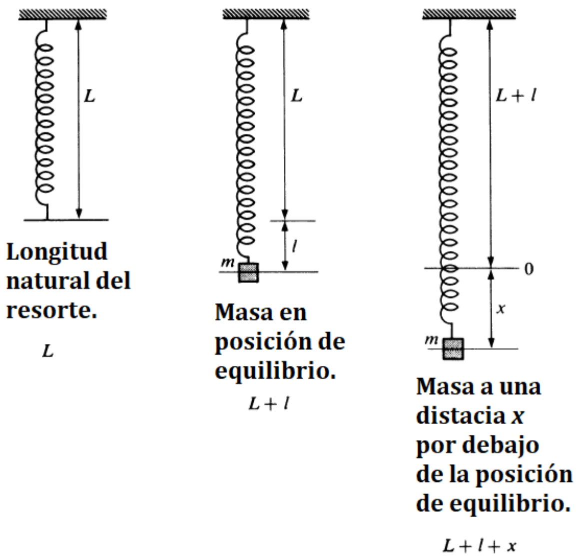
$$\boxed{F = ma_c}\,.$$

- Ley de Hooke: La magnitud de la fuerza necesaria para producir un cierto alargamiento de un resorte es directamente proporcional al alargamiento[2]

$$\boxed{|F| = ks}\,,$$

donde $|F|$ es la magnitud de la fuerza, s es el alargamiento del resorte y k es la constante de proporcionalidad que llamaremos *constante del resorte.*

Observación (Fuerzas que actuan sobre la masa): Vamos a describir ahora las fuerzas que actuan sobre la masa[3]



[2]Siempre que el alargamiento no sea demasiado grande

[3]Escogemos el eje x a lo largo de la linea del resorte, con el origen O en la posición de equilibrio y el sentido positivo hacia abajo $\downarrow$

(1) *La fuerza de gravedad* $(F_1 = mg)$*:* Recordemos que la fuerza de la gravedad está dada por mg. Además el signo es positivo por que apunta hacia abajo.

(2) *La fuerza restitución del resorte* $(F_2 = -kx - mg)$*:* Por la ley de Hooke, tenemos que

- Si la masa está en posición de equilibrio

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Fuerza} = -kl, \quad \text{Fuerza} = -mg\\ mg = kl\end{array}}$$

- Si la masa la estiramos x unidades desde su posición de equilibrio, tenemos que

$$\boxed{\text{Fuerza} = -k(l+x) = -kl - kx = -mg - kx}$$

De lo anterior, tenemos que la fuerza de restitución del resorte es $F_2 = -kx - mg$.

(3) *La fuerza resistiva del medio ó fuerza de amortiguamiento* $\left(F_3 = -a\dfrac{dx}{dt}\right)$*:* Aunque la magnitud de la fuerza de amortiguamiento no se conoce con exactitud, se sabe que a pequeñas velocidades es

$$F_3 = -a\frac{dx}{dt},$$

donde $a > 0$ se llama *constante de amortiguamiento.*

(4) *Cualquier fuerza externa distinta que actúe sobre la masa* $(F_4 = F(t))$*:* Representaremos la resultante de todas las fuerzas externas en el instante t como $F_4 = F(t)$.

De esta manera por la segunda ley de Newton, tenemos que:

$$\text{Fuerza} = ma_c = m\,\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \text{Fuerza} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

$$mg - kx - mg - a\frac{dx}{dt} + F(t) = m\,\frac{d^2x}{dt^2},$$

Así *la ecuación diferencial del movimiento de la masa en el resorte* es:

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = F(t)}\,.$$

Definición 7.5.1 ***(Tipos de movimiento de la masa en el resorte):***

(1) *Si $F(t) = 0$, entonces el movimiento de la masa en el resorte lo llamaremos libre.*

(2) *Si $F(t) \neq 0$, entonces el movimiento de la masa en el resorte lo llamaremos forzado.*

(3) *Si $a \neq 0$ llamaremos el movimiento amortiguado.*

(4) *Si $a = 0$ llamaremos el movimiento no amortiguado.*

7.6. Movimiento libre no amortiguado

Consideraremos el caso del movimiento libre no amortiguado ($a=0,\ F(t)=0$), donde la ecuación diferencial es:

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0}\,.$$

El siguiente teorema muestra algunas características de esta ecuación diferencial.

Teorema 7.6.1

(1) *La solución de la ecuación diferencial* $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx=0$ *está dada por*

$$x=c_1sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\;t\right)+c_2cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\;t\right),$$

donde c_1 *y* c_2 *son constantes.*

(2) *La solución del problema de valor inicial*

$$\boxed{\begin{array}{c} m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx=0\\ x(0)=x_0\\ x'(0)=v_0 \end{array}}$$

es $x(t)=c\ cos\big(\lambda t-\phi\big)$ *, donde* $\lambda=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$*,* $c=\sqrt{\left(x_0^2+\dfrac{v_0}{\lambda}\right)^2}$ *y* ϕ *está determinada por las ecuaciones*

$$cos\phi=\frac{x_0}{c}\ \ y\ \ sin\phi=\frac{v_0/\lambda}{c}.$$

□

Nota: De la parte (2) del teorema anterior, tenemos que el movimiento libre amortiguado de la masa es *un movimiento armónico simple*.

La constante c se llama *amplitud del movimiento* y dá el desplazamiento máximo de la masa a partir de su posición de equilibrio.

El número ϕ es llamado la constante de fase (ó ángulo de fase).

Observación (periodo): Recordemos que la solución del p.v.i dedo en el teorema 7.6.1 es

$$\boxed{x(t) = c\ cos\left(\lambda t - \phi\right)}.$$

Entonces por la periodicidad de la función coseno, tenemos que

$$x(t) = c \iff cos\left(\lambda t - \phi\right) = 1 \iff \lambda t - \phi = 2n\pi \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, el desplazamiento máximo lo obtenemos en los tiempos[4]

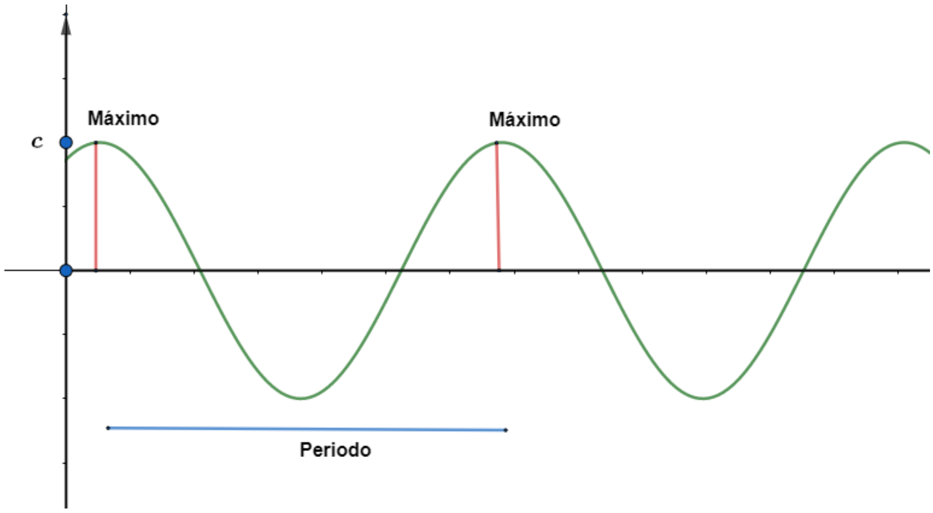
$$t = \frac{2n\pi + \phi}{\lambda} \text{ con } n \in \mathbb{Z}.$$

Ahora la diferencia entre dos máximos sucesivos se llama <u>*periodo*</u>

$$\textbf{Periodo } = \frac{2n\pi + \phi}{\lambda} - \frac{2(n-1)\pi + \phi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$\boxed{\textbf{Periodo} = \frac{2\pi}{\lambda}}.$$

La gráfica de este movimiento es la dada a continuación:



Ejemplo 7.6.1 *Una masa con 8 libras de peso se coloca en el extremo inferior de un resorte helicoidal que está suspendido en el techo. La masa se encuentra en reposo en su posición de equilibrio, por esta razón está estirado 6 pulgadas. Después, se empuja 3 pulgadas hacia abajo de su posición de equilibrio y se suelta en* $t = 0$ *con una velocidad inicial de 1* pie/s, *dirigida hacia abajo despreciando la resistencia del medio y suponiendo que ninguna fuerza externa está presente. Determine la amplitud, periodo y frecuencia del movimiento resultante.*

[4]Aquí tenemos que tener en cuenta que $t \geqslant 0$.

Solución:

Este es claramente un ejemplo de movimiento libre no amortiguado, donde

- $mg = m(32) = 8$ *lo cual implíca que* $m = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$ [5]

- *Puesto que la masa tiene un peso de 8 libras y esta se estira* 6 *pulg* $= \frac{1}{2}$*pie, entonces la ley de Hooke nos dice que* $8 = k \cdot \frac{1}{2}$*, lo cual implica que* $k = 16.$

- $x(0) = 3$ *pulg*$= \frac{1}{4}$*pie.*

- $x'(0) = 1\ \frac{pie}{s}.$

De lo anterior tenemos el siguiente p.v.i

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0 \\ x(0) = \frac{1}{4} \\ x'(0) = 1 \end{gathered}}$$

Además este p.v.i tiene solución $x(t) = c\ cos\left(\lambda t - \phi\right)$*, donde*

$$\lambda = \sqrt{\frac{16}{1/4}} = 8,$$

$$c = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{8},$$

$$sin\phi = \frac{1/8}{\frac{\sqrt{5}}{8}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad y \quad cos\phi = \frac{1/4}{\frac{\sqrt{5}}{8}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \phi = 0{,}46.$$

Más precisamente, la solución del p.v.i es $\boxed{x(t) = c\ cos\left(\lambda t - \phi\right) = \frac{\sqrt{5}}{8}\ cos(8t - 0{,}46)}$ *y por tanto*

$$\boxed{Amplitud = c = \frac{\sqrt{5}}{8}} \quad \boxed{Periodo = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}} \quad \boxed{Frecuencia = \frac{1}{periodo} = \frac{4}{\pi}}.$$

[5] Recordar que $g = \frac{9{,}8\text{ m}}{s^2}$ ó $g = \frac{32\text{ pies}}{s^2}$

Observación (ejemplo anterior): Si sustituimos la tercera oración el ejemplo anterior por "La masa se empuja 4 pulgadas $\left(\frac{1}{3}\text{ pie}\right)$ hacia arriba de su posición de equilibrio y se suelta en $t=0$, con una velocidad inicial de 2 $\frac{pies}{s}$ dirigida hacia arriba." entonces nuestro nuevo problema de valor inicial es

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2}+16x=0 \\ x(0)=-\frac{1}{3} \\ x'(0)=-2 \end{array}}$$

7.7. Movimiento libre amortiguado

Vamos a considerar el efecto de la resistencia del medio sobre la masa que está en el resorte y que ninguna fuerza externa actúa sobre sobre la masa en el resorte. Este es el caso de lo que llamamos el movimiento libre amortiguado, el cual se describe por la ecuación

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+kx=0}\,.$$

Observación: La ecuación diferencial anterior es una ecuación diferencial homogenea con coeficientes constantes, por tanto podemos aplicar el ***método de coeficientes constantes*** para solucionar esta ecuación diferencial. Así la ecuación auxiliar es:

$$\boxed{mr^2+ar+k=0}\,,$$

la cual tiene como solución

$$r=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4mk}}{2m}=-\frac{a}{2m}\pm\frac{\sqrt{a^2-4mk}}{2m}=-\frac{a}{2m}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}$$

$$r=-\frac{a}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}$$

$$\boxed{r=-b\pm\sqrt{b^2-\lambda^2}}$$

donde $b=\dfrac{a}{2m}$ y $\lambda=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Se presentan tres casos distintos, dependiento de la naturaleza de estas raices, que dependen del signo de $b^2-\lambda^2$, los cuales son los siguientes:

Caso I-Sistema sobreamortiguado $\left(b^2-\lambda^2>0\right)$**:** En este caso las raices de r son dos números reales distintos, dados por:

$$r_1=-b+\sqrt{b^2-\lambda^2} \quad \text{y} \quad r_2=-b-\sqrt{b^2-\lambda^2}.$$

Además la solución de la ecuación diferencial es

$$\boxed{x(t)=Ce^{r_1t}+De^{r_2}t=e^{-bt}(Ce^{\sqrt{b^2-\lambda^2}\,t}+De^{-\sqrt{b^2-\lambda^2}\,t})}\,.$$

En este caso el amortiguamiento es tan grande que no se presentan oscilaciones.

Caso II-Sistema amortiguado $\left(b^2-\lambda^2<0\right)$**:** En este caso las raices de r son dos números complejos distintos, dados por:

$$r_1=-b+\sqrt{\lambda^2-b^2}\,i \quad \text{y} \quad r_2=-b-\sqrt{\lambda^2-b^2}\,i$$

La solución de la ecuación diferencial es

$$x(t)=e^{-bt}\left(Ccos(\sqrt{\lambda^2-b^2}\,t)+Dsin(\sqrt{\lambda^2-b^2}\,t)\right)$$

Además esta solución la podemos reescribir como

$$\boxed{x(t)=ce^{-bt}cos\left(\sqrt{\lambda^2-b^2}t-\phi\right)}\,,$$

donde $c=\sqrt{C^2+D^2}$ y ϕ es determinado por las ecuaciones

$$cos\phi=\frac{C}{\sqrt{C^2+D^2}} \quad \text{y} \quad sin\phi=\frac{D}{\sqrt{C^2+D^2}}.$$

Nota: El factor ce^{-bt} es llamado el ***factor de amortiguamiento***. Naturalmente, el movimiento ya no es periódico pero el intervalo de tiempo entre dos desplazamientos máximos lo seguiremos llamando ***periodo*** y se puede probar con facilidad que

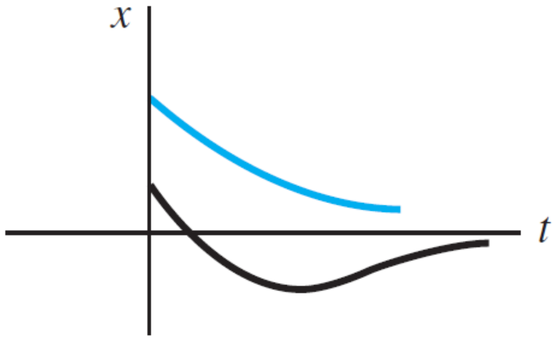
$$\textbf{\textit{Periodo}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2-b^2}}.$$

Caso III-Sistema crítico $\left(b^2-\lambda^2=0\right)$**:** En este caso la única raíz de r es $r=-b$ y así la solución de la ecuación diferencial es

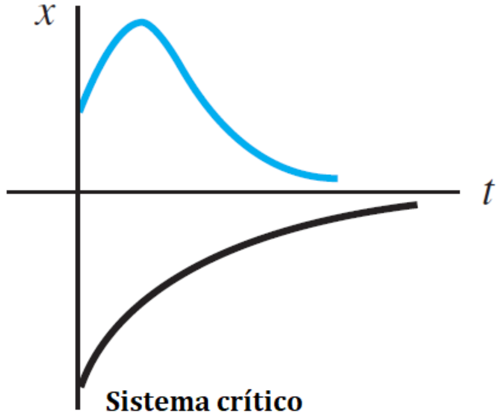
$$\boxed{x(t)=e^{-bt}(C+Dt)}\,.$$

En este caso no se presentan oscilaciones, pero si $b^2-\lambda^2$ cambiara un poco, el sistema podría presentar oscilaciones.

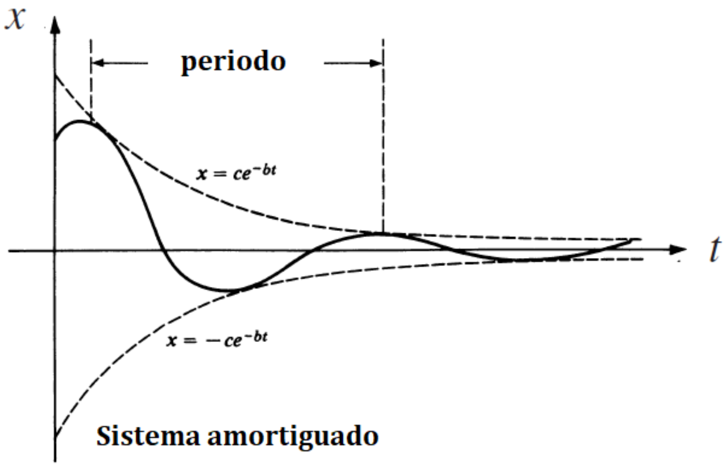
En los tres casos podemos notar adicionalmente que $\lim\limits_{t\mapsto+\infty} x(t)=0$.



Sistema sobreamortiguado



Sistema crítico



Sistema amortiguado

Ejemplo 7.7.1 ***(Sistema amortiguado):*** *Una masa que pesa 32 libras está unida al extremo inferior de un resorte que está suspendido del techo. La masa se encuentra en reposo en su posición de equilibrio y el resorte está estirado 2 pies. Después, la masa se desplaza 6 pulgadas abajo de su posición de equilibrio y se suelta en* $t=0$. *Ninguna fuerza externa actúa; sin embargo la resistencia del medio en libras es numéricamente igual a* $4\dfrac{dx}{dt}$, *donde* $\dfrac{dx}{dt}$ *es la velocidad instantánea en pies por segundo. Determine la ecuación del movimiento resultante, el factor de amortiguamiento y el periodo de la masa en el resorte.*

Solución:

Para resolver este problema notemos las siguientes cosas:

- $mg = m(32) = 32$ *lo cual implíca que* $m = \dfrac{32}{32} = 1$.

- *Dado que la masa tiene un peso de 32 libras y esta se estira 2pies, entonces* la ley de Hooke *nos dice que* $32 = k \cdot 2$, *lo cual implica que* $k = 16$.

- $x(0) = 6$ *pulg*$= \frac{1}{2}$*pie.*

- $x'(0) = 0 \ \frac{pie}{s}$.

De lo anterior tenemos el siguiente p.v.i

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 16x = 0, \\ x(0) = \frac{1}{2}, \\ x'(0) = 0. \end{array}}$$

Entonces la ecuación auxiliar es $r^2 + 4r + 16 = 0$ *y de esta manera*

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(16)}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{3}i.$$

Así, la solución de la ecuación diferencial es $x(t) = e^{-2t}\left(C cos(2\sqrt{3}t) + D sin(2\sqrt{3}t)\right)$. *Además, usando las condiciones iniciales tenemos que*

$$x(0) = \frac{1}{2} = C \quad y \quad x'(0) = 0 = -2C + 2\sqrt{3}D = -1 + 2\sqrt{3}D$$

De lo anterior tenemos que la ecuación del movimiento resultante (solución del p.v.i) es:

$$x(t) = e^{-2t}\left(\frac{1}{2}cos(2\sqrt{3}t) + \frac{\sqrt{3}}{6}sin(2\sqrt{3}t)\right).$$

Ahora para hallar el factor de amortiguamiento y el periodo del resorte, recordemos que

$$x(t) = ce^{-2t}cos(2\sqrt{3}t - \phi),$$

donde $c = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ *y* ϕ *se determina por las ecuaciones*

$$cos\phi = \frac{1/2}{\sqrt{3}/3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad y \quad sin\phi = \frac{\sqrt{3}/6}{\sqrt{3}/3} = \frac{1}{2}.$$

De esta manera $\phi = \frac{\pi}{6}$ *y así la ecuación del movimiento la podemos escribir como:*

$$\boxed{x(t)=\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-2t}cos\left(2\sqrt{3}t-\frac{\pi}{6}\right)},$$

donde el factor de amortiguamiento es $\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-2t}$ *y el periodo es* $\frac{2\pi}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Ejemplo 7.7.2 ***(Sistema crítico):*** *Una masa que pesa 32 libras está unida al extremo inferior de un resorte que está suspendido del techo. La masa se encuentra en reposo en su posición de equilibrio y el resorte está estirado 2 pies. Después, la masa se desplaza 6 pulgadas abajo de su posición de equilibrio y se suelta en* $t=0$. *Ninguna fuerza externa actúa; sin embargo la resistencia del medio en libras es numéricamente igual a* $8\frac{dx}{dt}$, *donde* $\frac{dx}{dt}$ *es la velocidad instantánea en pies por segundo. Determine la ecuación del movimiento resultante.*

Solución:

Para resolver este problema notemos las siguientes cosas:

- $mg=m(32)=32$ *lo cual implíca que* $m=\frac{32}{32}=1$.
- *Dado que la masa tiene un peso de 32 libras y esta se estira* 2*pies, entonces la ley de Hooke nos dice que* $32=k\cdot 2$, *lo cual implica que* $k=16$.
- $x(0)=6$ *pulg*$=\frac{1}{2}$*pie.*
- $x'(0)=0\ \frac{pie}{s}$.

De lo anterior tenemos el siguiente p.v.i

$$\boxed{\begin{array}{c}\frac{d^2x}{dt^2}+8\frac{dx}{dt}+16x=0,\\ x(0)=\frac{1}{2},\\ x'(0)=0.\end{array}}$$

Entonces la ecuación auxiliar es $r^2+8r+16=(r+4)^2=0$ *y de esta manera* $r=-4$ *es la única solución. Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial es*

$$x(t)=e^{-4t}(C+Dt).$$

Además, usando las condiciones iniciales tenemos que

$$x(0)=\frac{1}{2}=C \quad y \quad x'(0)=-4C+D=-2+D=0.$$

De lo anterior tenemos que la ecuación del movimiento resultante (solución del p.v.i) es:

$$\boxed{x(t)=e^{-4t}\left(\frac{1}{2}+2t\right)}$$

Ejemplo 7.7.3 ***(Sistema sobreamortiguado):*** *Una masa que pesa 32 libras se une a un resorte de 5 pies de largo. En equilibrio el resorte mide $\frac{31}{3}$ pies. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto 2 pies arriba de la posición de equilibrio, encontrar la ecuación del movimiento resultante, si se sabe además que el medio circundante ofrece una resistencia numérica igual a cinco veces la velocidad instantánea.*

Solución:

Para resolver este problema notemos las siguientes cosas:

- $mg=m(32)=32$ *lo cual implíca que* $m=\dfrac{32}{32}=1.$
- *Dado que la masa tiene un peso de 32 libras y esta se estira* $\left(\dfrac{31}{3}-5\right)$ *pies* $=\dfrac{16}{3}$ *pies, entonces la ley de Hooke nos dice que* $32=k\cdot\left(\dfrac{16}{3}\right)$, *lo cual implica que* $k=6$.
- $x(0)=-2$ *pulg*$=\dfrac{1}{2}$*pie.*
- $x'(0)=0\ \dfrac{pie}{s}.$

De lo anterior tenemos el siguiente p.v.i

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+6x=0,\\ x(0)=-2,\\ x'(0)=0.\end{gathered}}$$

Entonces la ecuación auxiliar es $r^2+5r+6=(r+3)(r+2)=0$ *y de esta forma* $r=-2$ *ó* $r=-3$. *Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial es*

$$x(t) = Ce^{-2t} + De^{-3t}.$$

Además, usando las condiciones iniciales tenemos que

$$x(0) = -2 = C + D \quad y \quad x'(0) = -2C - 3D = 0.$$

De lo anterior tenemos que $C = -6$ y $D = 4$, lo cual implica que la ecuación del movimiento resultante (solución del p.v.i) es:

$$\boxed{x(t) = -6e^{-2t} + 4e^{-3t}}.$$

7.8. Movimiento forzado

Vamos a estudiar un caso especial importante de *movimiento forzado*; es decir no solo consideraremos el efecto de la masa en el resorte, sino también el efecto de esta de una fuerza externa de carácter periódico definida como $F(t) = F_1 cos(\omega t)$ para todo $t \geqslant 0$, donde F_1 y ω son constantes. Entonces la ecuación diferencial básica es de la forma

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = F_1 cos(\omega t)}.$$

Nota: El siguiente teorema nos dice como es la solución de esta ecuación diferencial en un caso particular.

Teorema 7.8.1 *Dada la ecuación diferencial $m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = F_1 cos(\omega t)$, entonces tenemos lo siguiente:*

(1) *La ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea correspondiente es $mr^2 + ar + k = 0$, la cual tiene como solución $r = -\frac{a}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$.*

(2) *Si $b = \frac{a}{2m}$, $\lambda^2 = \frac{k}{m}$ y $b < \lambda$, entonces la solución de $m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = 0$ es*

$$\boxed{\begin{gathered} x(t) = e^{-bt}\left(C_1 cos(\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,t) + C_2 sin(\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,t)\right) \\ x(t) = ce^{-bt} cos(\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,t - \phi), \end{gathered}}$$

donde $c = \sqrt{(C_1)^2 + (C_2)^2}$ y ϕ es determinado por

$$cos\phi = \frac{C_1}{\sqrt{(C_1)^2+(C_2)^2}} = \frac{C_1}{c} \ \ y \ \ sin\phi = \frac{C_2}{\sqrt{(C_1)^2+(C_2)^2}} = \frac{C_2}{c}.$$

(3) *Si $b < \lambda$, entonces una solución particular para* $m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = F_1 cos(\omega t)$ *es*

$$\boxed{x_p = \frac{F_1/m}{\sqrt{(\lambda^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}} cos(\omega t - \theta)},$$

donde θ es determinado por

$$cos\theta = \frac{\lambda^2-\omega^2}{\sqrt{(\lambda^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}} \ \ y \ \ sin\theta = \frac{2bw}{\sqrt{(\lambda^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}}.$$

(4) *Si $b < \lambda$, entonces la solución general para* $m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = F_1 cos(\omega t)$ *es*

$$\boxed{\begin{gathered} x(t) = \text{"Solución general homogenea"} + \text{"Solución particular"} \\ x(t) = e^{-bt}\left(C_1 cos(\sqrt{\lambda^2-b^2}\,t) + C_2 sin(\sqrt{\lambda^2-b^2}\,t)\right) + \frac{F_1/m}{\sqrt{(\lambda^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}} cos(\omega t - \theta) \\ x(t) = c e^{-bt} cos(\sqrt{\lambda^2-b^2}\,t - \phi) + \frac{F_1/m}{\sqrt{(\lambda^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}} cos(\omega t - \theta), \end{gathered}}$$

□

Nota: Del teorema anterior, tenemos que:

- "*La solución general homogenea*" $= c e^{-bt} cos(\sqrt{\lambda^2-b^2}\,t - \phi)$ es llamada el término transitorio.
- "*La solución particular*" $= \frac{F_1/m}{\sqrt{(\lambda^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}} cos(\omega t - \theta)$ es llamada el estado permanente.

Corolario 7.8.2 *Consideremos la ecuación diferencial $mx'' + kx = F_1 cos(\omega t)$. Entonces si $\lambda \neq \omega$, la solución general de esta ecuación diferencial es:*

$$\boxed{\begin{gathered} x(t) = \text{"Solución general homogenea"} + \text{"Solución particular"} \\ x(t) = [\ C_1 cos(\lambda t) + C_2 sin(\lambda t)\ ] + \frac{F_1/m}{\lambda^2-\omega^2} cos(\omega t), \\ x(t) = c\, cos(\lambda t - \phi) + \frac{F_1/m}{\lambda^2-\omega^2} cos(\omega t), \end{gathered}}$$

donde ϕ se determina por las ecuaciones

$$cos\phi = \frac{C_1}{\sqrt{(C_1)^2+(C_2)^2}} = \frac{C_1}{c} \ \ y \ \ sin\phi = \frac{C_2}{\sqrt{(C_1)^2+(C_2)^2}} = \frac{C_2}{c}.$$

□

Ejemplo 7.8.1 *Una masa está unida al extremo inferior de un resorte que está suspendido en el techo y tiene un peso de 16 libras y la constante del resorte es 10 lb/pie. Al empezar en $t = 0$ se aplica al sistema una fuerza externa dada por $F(t) = 5cos(2t)$. Determine el movimiento resultante si la fuerza de amortiguamiento en libras es numéricamente igual a $2\frac{dx}{dt}$.*

Solución:

Para resolver este problema notemos las siguientes cosas:

- $mg = m(32) = 16$ *lo cual implica que* $m = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.
- *La constante del resorte es* $k = 10$.
- $F(t) = 5cos(2t)$ *y* $a\frac{dx}{dt} = 2\frac{dx}{dt}$.
- $x(0) = 0$ *y* $x'(0) = 0$.

Entonces el p.v.i que determina el movimiento de la masa en el resorte es

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 5cos(2t), \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 0. \end{array}}$$

Para resolver este p.v.i realizaremos el siguiente conjunto de pasos:

Paso (1): *Hallar la solución de la e.d homogenea* $\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0$.

Para esto notamos que la ecuación caracteristica correspondiente es $\frac{1}{2}r^2 + 2r + 10 = 0$, *la cual tiene como solución:*

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(10)}}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{1} = -2 \pm 4i$$

$$r = -2 \pm 4i.$$

Así, la solución de la ecuación diferencial homogenea es

$$x(t) = e^{-2t}\left(C_1 cos(4t) + C_2 sin(4t)\right).$$

Paso (2): *Hallar una solución particular para la ecuación diferencial.*

Esto lo podemos hacer usando coeficientes indeterminados ó variación de parámetros, pero el teorema anterior nos dice que la solución particular es de la forma

$$x_p = \frac{F_1/m}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} cos(\omega t - \theta)$$

$$x_p = \frac{F_1/m}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + 4\left(\frac{a}{2m}\right)^2 \omega^2}} cos(\omega t - \theta)$$

donde

$$F_1 = 5,\ m = \frac{1}{2},\ a = 2\ y\ \omega = 2,$$

por tanto

$$x_p = \frac{\frac{5}{1/2}}{\sqrt{\left(\frac{10}{1/2} - 2^2\right)^2 + 4\left(\frac{2}{2(1/2)}\right)^2 2^2}} cos(2t - \theta) = \frac{10}{8\sqrt{5}} cos(2t - \theta)$$

$$x_p = \frac{\sqrt{5}}{4} cos(2t - \theta),$$

donde θ *es determinado por las ecuaciones*

$$cos\theta = \frac{\lambda^2 - \omega^2}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} = \frac{16}{8\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$sin\theta = \frac{2bw}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} = \frac{8}{8\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

De esta forma tenemos que:

- $\theta = 0,46$.

- *La solución particular es* $\boxed{x_p = \dfrac{\sqrt{5}}{4} cos(2t - 0,46)}$.

Paso (3): *Hallar una solución general de la ecuación diferencial.*

$$\boxed{\begin{array}{c} x(t) = \text{“Solución general homogenea”} + \text{“Solución particular”} \\ x(t) = e^{-2t}\left(C_1 cos(4t) + C_2 sin(4t)\right) + \dfrac{\sqrt{5}}{4} cos(2t - 0,46). \end{array}}$$

Para terminar falta determinar el valor de las constantes C_1 y C_2. Esto lo haremos usando los valores de las condiciones iniciales

$$x(0) = C_1 + \frac{\sqrt{5}}{4} cos(-0,46) = C_1 + \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = C_1 + \frac{1}{2},$$

$$x'(0) = -2C_1 + 4C_2 - \frac{2\sqrt{5}}{4} sin(-0,46) = -2C_1 + 4C_2 + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -2C_1 + 4C_2 + \frac{1}{2} = 0.$$

Obteniendo de esta manera que $C_1 = -\dfrac{1}{2}$ y $C_2 = -\dfrac{3}{8}$, lo cual implica que la ecuación que determina el movimiento de la masa en el resorte es:

$$\boxed{x(t) = e^{-2t}\left(-\frac{1}{2} cos(4t) - \frac{3}{8} sin(4t)\right) + \frac{\sqrt{5}}{4} cos(2t - 0,46)}.$$

7.9. Fenomeno de resonancia

Recordemos del teorema 7.8.1 que la solución general de la ecuación diferencial[6]

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = F_1 cos(\omega t)}$$

es $x(t) = ce^{-bt} cos(\sqrt{\lambda^2 - b^2}\, t - \phi) + \dfrac{F_1/m}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} cos(\omega t - \theta)$, donde

- $ce^{-bt} cos(\sqrt{\lambda^2 - b^2}\, t - \phi)$ es llamado el *término transitorio.*

[6]Aquí suponemos además que $b < \lambda$ donde $b = \dfrac{a}{2m}$ y $\lambda = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

- $\dfrac{F_1/m}{\sqrt{(\lambda^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}}cos(\omega t-\theta)$ es llamado el *estado permanente.*

En esta parte, vamos a considerar *la amplitud* del *estado permanente*, la cual es:

$$\boxed{f(\omega)=\frac{F_1/m}{\sqrt{(\lambda^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}}}\ .$$

Cabe resaltar que si $a>0$, entonces $f(\omega)$ está definida y es diferenciable en $(0,+\infty)$.

Nota: El siguiente teorema nos dice algunas propiedades adicionales de $f(\omega)$.

Teorema 7.9.1 *Supongamos que $a>0$, entonces:*

(1) $\lim\limits_{\omega\mapsto+\infty} f(\omega)=0$ *y* $f(0)=\dfrac{F_1/m}{\lambda^2}=\dfrac{F_1}{k}$.

(2) $f'(\omega)=0 \iff \omega=0$ *o* $\omega^2=\lambda^2-2b^2$.

(3) *Si* $\lambda^2-2b^2<0$, *entonces* $f(\omega)$ *es una función decreciente en* $(0,+\infty)$.

(4) *Si* $\lambda^2-2b^2>0$, *entonces* $f(\omega)$ *tiene un máximo relativo en* $\omega_0=\sqrt{\lambda^2-2b^2}$ *con* $f(\omega_0)=\dfrac{F_1/m}{2b\sqrt{\lambda^2-2b^2}}$.

□

Definición 7.9.1 ***(Resonancia):***[7]

(1) *Consideremos la ecuación diferencial* $mx''+ax'+kx=F_1cos(\omega t)$ *con* $\lambda^2-2b^2>0$. *Si* $F(t)=F_1cos(\omega t)$ *satisface que* $\omega=\omega_0=\sqrt{\lambda^2-2b^2}$, *entonces diremos que* $F(t)$ *está en resonancia con el sistema. Además el valor* $\omega_0/2\pi$ *es llamado la frecuencia de resonancia del sistema.*

(2) *Consideremos la ecuación diferencial* $mx''+kx=F_1cos(\omega t)$. *Si* $F(t)=F_1cos(\omega t)$ *satisface que* $\omega=\lambda=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, *entonces diremos que* $F(t)$ *está en resonancia no amortiguada.*

Nota: El siguiente teorema nos muestra como es la solución de la ecuación diferencial de la parte (2) en la definición anterior. Esta solución nos dirá por qué se denomina "resonancia no amortiguada".

[7]Aquí suponemos que $m,a,k>0$.

Teorema 7.9.2 *Dada la ecuación diferencial* $mx'' + kx = F_1 cos(\omega t)$ *con* $m, k, F_1 > 0$ *y* $F(t) = F_1 cos(\omega t)$ *satisface que* $\omega = \lambda = \sqrt{\frac{k}{m}}$*, entonces la solución general de la ecuación diferencial es:*

$$\boxed{\begin{gathered} x(t) = \text{“Solución general homogenea”} + \text{“Solución particular”} \\ x(t) = [\ C_1 cos(\lambda t) + C_2 sin(\lambda t)\ ] + \frac{F_1}{2m\lambda} t sin(\lambda t), \\ x(t) = c cos(\lambda t - \phi) + \frac{F_1}{2m\lambda} t sin(\lambda t). \end{gathered}}$$

donde ϕ *es determinado por las ecuaciones*

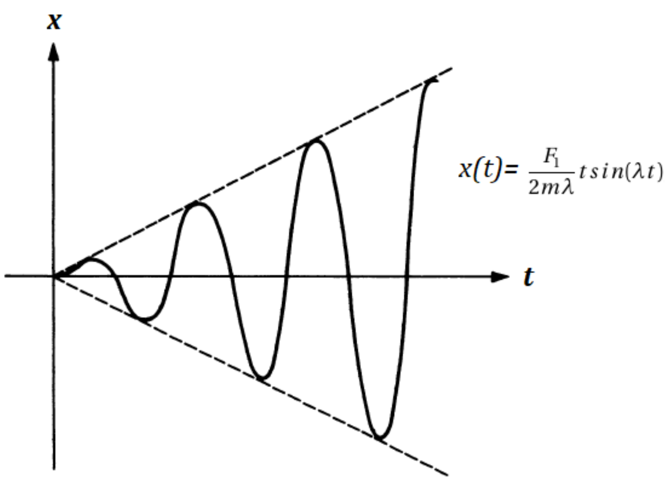
$$cos\phi = \frac{C_1}{\sqrt{(C_1)^2 + (C_2)^2}} = \frac{C_1}{c} \ \ y \ \ sin\phi = \frac{C_2}{\sqrt{(C_1)^2 + (C_2)^2}} = \frac{C_2}{c}.$$

$\square$

Observación (teorema anterior): A medida que t aumenta, término que domina el movimiento en la solución general de la ecuación diferencial

$$x(t) = c cos(\lambda t - \phi) + \frac{F_1}{2m\lambda} t sin(\lambda t),$$

es $\frac{F_1}{2m\lambda} t sin(\lambda t)$, ya que $c cos(\lambda t - \phi)$ es una función acotada y cuando $t \mapsto +\infty$ las oscilaciones llegarán a ser infinitas como se muestra a continuación:



Sin embargo, en esta parte interviene el sentido común y nos convence de que antes de que pueda presentarse este fenómeno de excitación, el sistema fallará y entonces la ecuación que describe a $x(t)$ no funcionará.

Ejemplo 7.9.1 *Un peso de 64 libras está unido al extremo inferior de un resorte que está suspendido en el techo. La constante del resorte es 18* lb/pie. *El peso se encuentra en reposo en su posición de equilibrio; después se desplaza 6 pulgadas hacia abajo de esta posición de equilibrio y se suelta en* $t=0$. *En este instante se aplica al sistema una fuerza externa expresada matemáticamente por* $F(t)=3cos(\omega t)$.

(1) *Suponiendo que la fuerza de amortiguamiento en libras es numéricamente igual a* $4\frac{dx}{dt}$, *donde* $\frac{dx}{dt}$ *es la velocidad instantanea en pies por segundo, determinar la frecuencia de resonancia del movimiento resultante.*

(2) *Suponiendo que no existe amortiguamiento, determine el valor de* ω, *que da lugar a una resonancia no amortiguada y encontrar la ecuación de movimiento resultante.*

Solución: *Las hipótesis iniciales nos dicen que:*

- $mg=m(32)=64$ *lo cual implica que* $m=\frac{64}{32}=2$.
- *La constante del resorte es* $k=18$.
- $x(0)=6$ *pulgadas* $=\frac{1}{2}$ *pie y* $x'(0)=0$.
- $F(t)=3cos(\omega t)$.

(1) *En esta parte nos dicen que* $a\frac{dx}{dt}=4\frac{dx}{dt}$, *lo cual implica que la ecuación que determina el movimiento es:*

$$2\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+18x=3cos(\omega t).$$

Entonces $\lambda^2-2b^2=\frac{k}{m}-2\frac{a^2}{4m^2}=\frac{k}{m}-\frac{a^2}{2m^2}=\frac{18}{2}-\frac{4^2}{2(2)^2}=9-2=7>0$, *lo cual implica que:*

$$\boxed{\text{La frecuencia de resonancia del sistema } =\frac{\sqrt{\lambda^2-2b^2}}{2\pi}=\frac{\sqrt{7}}{2\pi}}.$$

(2) *En esta parte nos dicen que* $a\frac{dx}{dt}=0\frac{dx}{dt}$, *lo cual implica que la ecuación que determina el movimiento es:*

$$2\frac{d^2x}{dt^2}+18x=3cos(\omega t).$$

Entonces si $\omega=\lambda=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{18}{2}}=3,$ *da lugar a una resonancia no amortiguada. Ahora para hallar la ecuación del movimiento resultante, necesitamos solucionar el siguiente problema de valor inicial:*

$$\boxed{\begin{array}{c} 2\dfrac{d^2x}{dt^2}+18x=3cos(3t), \\ x(0)=\dfrac{1}{2}, \\ x'(0)=0, \end{array}}$$

el cual tiene como solución[8]

$$x(t)=[\ C_1cos(\lambda t)+C_2sin(\lambda t)\ ]+\frac{F_1}{2m\lambda}t\,sin(\lambda t),$$

$$x(t)=[\ C_1cos(3t)+C_2sin(3t)\ ]+\frac{3}{2(2)(3)}t\,sin(3t),$$

$$x(t)=[\ C_1cos(3t)+C_2sin(3t)\ ]+\frac{1}{4}t\,sin(3t),$$

donde las constantes C_1 *y* C_2 *son determinadas por las ecuaciones*

$$x(0)=\frac{1}{2}=C_1,$$

$$x'(0)=0=3C_2,$$

implicando que la ecuación del movimiento es

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{2}cos(3t)+\frac{1}{4}t\,sin(3t)}\ .$$

[8]Recordar el teorema 7.9.2.

Bibliografía