Clase 1.

Topología en $\mathbb{R}^n$

Definición (Espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$).

Definimos el espacio euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$ como:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

En ocasiones los elementos de $\mathbb{R}^n$ son llamados vectores ó n-tuplas.

Definición (suma de vectores en $\mathbb{R}^n$).

Sean $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vectores
$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

en $\mathbb{R}^n$, entonces definimos la suma entre $\underline{\underline{x}}$ y $\underline{\underline{y}}$ como el vector $x+y$ en $\mathbb{R}^n$ que se describe como:

$$x+y=(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n):=$$
$$:=(x_1+y_1,\, x_2+y_2,\dots,\, x_n+y_n).$$

Definición (multiplicación por escalar en $\mathbb{R}^n$).

Sea $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ y $r\in\mathbb{R}$ entonces definimos la multiplicación por escalar entre r y x como el vector $r\cdot x$ definido como:

$$r\cdot x=r\cdot(x_1,\dots,x_n):=(rx_1,rx_2,\dots,rx_n).$$

Ejemplos (suma y multip. por escalar).

(1) Si $x=(1,2,4)$ y $y=(3,-4,8)$ son vectores en $\mathbb{R}^3$, entonces:

$x+y=(1,2,4)+(3,-4,8)=$

$=(1+3,2+(-4),4+8)=(4,-2,12).$

(2) Si $x=(9,-10,15,\pi)$ es un vector en $\mathbb{R}^4$, entonces:

(a) $2\cdot x=2\cdot(9,-10,15,\pi)=(18,-20,30,2\pi).$

(b) $0\cdot x=0\cdot(9,-10,15,\pi)=(0,0,0,0).$

(c) $-11\cdot x=-11\cdot(9,-10,15,\pi)=$

$=(-99,-110,-165,-11\pi).$

Observación (definiciones previas).

(1) si r es un número real diferente de cero $(r\neq 0)$ y $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ entonces ~~usual~~ el vector $\frac{1}{r}\cdot x$

se escribe como $\frac{x}{r}$.

(2) Dado $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, decimos que x es un vector unitario si $\|x\|=1$.

Definición (producto punto y longitud).

Sean $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ entonces:

(1) Definimos el producto punto entre $\underline{\underline{x}}$ y $\underline{\underline{y}}$ como el número real $x\bullet y$ descrito como:

$$\boxed{\begin{aligned} x\bullet y &= (x_1,\dots,x_n)\bullet(y_1,\dots,y_n) := \\ &= x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \end{aligned}}$$

$x\bullet y$ es llamado el producto punto entre $\underline{\underline{x}}$ y $\underline{\underline{y}}$.

(2) La magnitud (logitud/norma) de $x=(x_1,\dots,x_n)$ es el número real $\|x\|$ descrito como:

$$\boxed{\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{x \bullet x} = \sqrt{(x_1,\dots,x_n)\bullet(x_1,\dots,x_n)} \\ &= \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geq 0.\end{aligned}}$$

Ejemplo (producto punto y longitud).

Sean $x=(2,3,1)$ y $y=(-5,4,3)$ entonces:

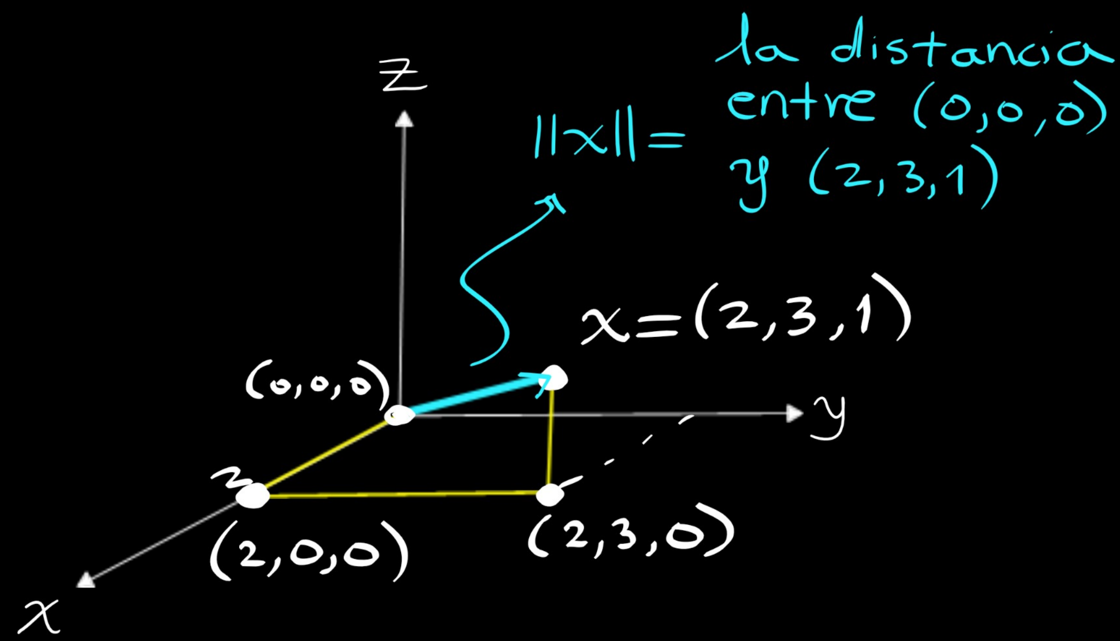
(1) $x\bullet y=(2,3,1)\bullet(-5,4,3)=$

$= 2\cdot(-5)+3(4)+1\cdot(3)=$

$= -10+12+3=5.$

(2) $\|x\| = \sqrt{x \bullet x} = \sqrt{(2,3,1) \bullet (2,3,1)}$

$= \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$.



Observación (vector unitario y normalizar).

(1) Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces decimos que x es un vector unitario si su longitud es 1.
Es decir $\|x\| = \sqrt{x \bullet x} = 1$.

(2) Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ no nulo

entonces:

(v) $\|x\| > 0$ $\left(\|x\| = 0 \iff x = (0, \dots, 0) \right)$.

(v) $\dfrac{1}{\|x\|} \cdot x = \dfrac{x}{\|x\|}$ es un vector unitario en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio: $\left\| \dfrac{1}{\|x\|} \cdot x \right\| = 1$.

Teorema (propiedades – suma mult. esc).

Sean $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y $r, s \in \mathbb{R}$, entonces:

(1) $x + y = y + x$ (conmutativa).

$$x+y=(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=$$
$$=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)=$$
$$=(y_1+x_1,\dots,y_n+x_n)=$$
$$=(y_1,\dots,y_n)+(x_1,\dots,x_n)$$
$$=y+x.$$

(2) $x+(y+z)=(x+y)+z.$

(asociativa) ejercicio.

(3) $r\cdot(x+y)=r\cdot x+ry$

Distributiva ejercicio

(4) $(r+s)\cdot x=r\cdot x+s\cdot x.$

distributiva ejercicio

(5) $r\cdot(s\cdot x)=(r\cdot s)\cdot x$.

(6) $x+\theta=x$

$r\cdot\theta=\theta$ $\rightsquigarrow$ $\theta=(0,\dots,0)$ vector nulo de $\mathbb{R}^n$

Teorema (propiedades / producto punto y magnitud).

Sean $x=(x_1,\dots,x_n)$ vectores en $\mathbb{R}^n$

$y=(y_1,\dots,y_n)$

$z=(z_1,\dots,z_n)$

y $r\in\mathbb{R}$, entonces:

(1) $x\bullet y=y\bullet x$.

(2) $x\bullet(y+z)=x\bullet y+x\bullet z$.

(3) $r\cdot(x\bullet y)=(r\cdot x)\bullet y=x\bullet(r\cdot y)$.

(4) $\|r \cdot x\| = |r| \cdot \|x\|$.

(5) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\, x \circ y + \|y\|^2$.

(6) $|x \circ y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

La desigualdad de cauchy-schwarz.

(7) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

La desigualdad triángular.

Demostración:

(1) $x \circ y = (x_1, \ldots, x_n) \circ (y_1, \ldots, y_n) =$

$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$

$y \circ x = (y_1, \ldots, y_n) \circ (x_1, \ldots, x_n)$

$= y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n$

$$x \circ y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n = y \circ x$$

$$\Longrightarrow \boxed{x \circ y = y \circ x}.$$

(2) $x \circ (y+z) =$

$$= (x_1, \ldots, x_n) \circ \big((y_1, \ldots, y_n) + (z_1, \ldots, z_n) \big)$$

$$= (x_1, \ldots, x_n) \circ (y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n)$$

$$= x_1 (y_1 + z_1) + x_2 (y_2 + z_2) + \cdots + x_n (y_n + z_n)$$

$$= x_1 y_1 + x_1 z_1 + x_2 y_2 + x_2 z_2 + \cdots + x_n y_n + x_n z_n$$

$$= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n) +$$

$$x_1 z_1 + x_2 z_2 + \cdots + x_n z_n$$

$$= (x_1, \ldots, x_n) \circ (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n) \circ (z_1, \ldots, z_n)$$

$$= x \circ y + x \circ z.$$

$$\Longrightarrow x \circ (y+z) = x \circ y + x \circ z.$$

(3) $r \cdot (x \circ y) = (r x) \circ y = x \circ (r y)$.

Ejercicio //

(4) $\|r x\| = |r| \cdot \|x\|$.

ejercicio

$$\|r x\| = \sqrt{(r x) \circ (r x)} = \sqrt{r \cdot r\,(x \circ x)}$$

$$= \sqrt{r^2 (x \circ x)} = \sqrt{r^2} \cdot \sqrt{x \circ x} =$$

$$= |r| \cdot \|x\|.$$

$$\Longrightarrow \|r x\| = |r| \cdot \|x\|.$$

(5) $\|x+y\|^2 = \left(\sqrt{(x+y)\circ(x+y)}\right)^2 =$

$$= (x+y) \circ (x+y) =$$

$$= (x+y) \circ x + (x+y) \circ y$$

$$= x\circ(x+y) + y\circ(x+y)$$

$$= x\circ x + x\circ y + y\circ x + y\circ y$$

$$= x\circ x + 2(x\circ y) + y\circ y$$

$$= \|x\|^2 + 2(x\circ y) + \|y\|^2$$

$$\Longrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x\circ y) + \|y\|^2.$$

(6) La prueba de la desigualdad $|x\circ y| \leq \|x\|\cdot\|y\|$ la haremos por casos:

(r) caso (1): si $x = \Theta = (0,\dots,0)$ ó $y = \Theta = (0,\dots,0)$.

(r) caso (2): $x \neq \Theta = (0,\dots,0)$ y $y \neq \Theta = (0,\dots,0)$.

prueba(caso(1)).

- si $x=\theta=(0,\dots,0)$, entonces:

$$x \circ y = (0,\dots,0)\circ(y_1,\dots,y_n)=0.$$

$$|x\circ y| = |0| = 0.$$

$$\|x\|\cdot\|y\| = \|\theta\|\cdot\|y\| = 0.$$

$$\Longrightarrow |x\circ y| = \|x\|\cdot\|y\| = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{|x\circ y| \leq \|x\|\cdot\|y\|}$$

se cumple la desigualdad.

- si $y=\theta=(0,\dots,0)$, entonces haciendo computos similares a los anteriores obtenemos que $|x\circ y| \leq \|x\|\cdot\|y\|$.

Prueba (caso(2)).

Supongamos que $x \neq 0 = (0, \dots, 0)$
$y \neq 0 = (0, \dots, 0)$

Son vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces

queremos probar que:

$$|x \circ y| \leq \|x\| \cdot \|y\| \iff \frac{|x \circ y|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq \frac{\|x\| \cdot \|y\|}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

$$\iff \frac{|x \circ y|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1 \iff \left| \frac{x \circ y}{\|x\| \cdot \|y\|} \right| \leq 1$$

$$\iff \boxed{\pm \frac{x \circ y}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1.}$$

$$0 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|^2 \pm 2\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \circ \left(\frac{y}{\|y\|}\right) + \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\|^2$$

$$= 1^2 \pm 2\left(\frac{x \circ y}{\|x\| \cdot \|y\|}\right) + 1^2$$

$$= 2 \pm 2\left(\frac{x \circ y}{\|x\| \cdot \|y\|}\right)$$

$$\Longrightarrow 0 \leq 2 \pm 2\left(\frac{x \circ y}{\|x\| \cdot \|y\|}\right)$$

$$\mp 2\left(\frac{x \circ y}{\|x\| \cdot \|y\|}\right) \leq 2$$

$$\boxed{\mp \left(\frac{x \circ y}{\|x\| \cdot \|y\|}\right) \leq 1}$$

Esto es cierto y es lo que necesitabamos probar

$$|x \circ y| \leq \|x\| \cdot \|y\| \iff \pm \frac{x \circ y}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

$$\iff 0 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|} \right\|^2.$$

El análisis anterior demuestra que en efecto para $x \neq \theta$ y $y \neq \theta$ se tiene que:

$$\boxed{|x \circ y| \leq \|x\| \cdot \|y\|}$$

Lo cual prueba el segundo caso planteado anterior/.

(7) veamos que la desigualdad triángular es cierta.

$$\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$$

$$\Updownarrow$$

$$\|x+y\|^2 \leq (\|x\|+\|y\|)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\|x\|^2+2(x\circ y)+\|y\|^2 \leq \|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x\circ y \leq \|x\|\cdot\|y\|}$$

Esto siempre es cierto, ya que $x\circ y \leq |x\circ y| \leq \|x\|\cdot\|y\|$.

El anterior argumento prueba que $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ que es precisa la desigualdad triángular. $\square$