Clase 8.

Conjuntos generadores e independencia lineal.

Ejemplo 2.18

(a) ¿El vector $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ es una combinación lineal de los vectores $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}$?

(b) ¿$\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$ es una combinación lineal de los vectores $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}$?

Solución:

(a) Recordemos que una combinación lineal de los vectores $v_1, \dots, v_m$ es un vector de la forma:

$$\boxed{c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m} \quad \text{donde } c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$$

por lo tanto, para saber si $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}$ es necesario encontrar números c y d tales que:

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}$$

De donde, la igualdad anterior nos ofrece el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} c - d &= 1 \\ d &= 2 \\ 3c - 3d &= 3 \end{aligned}} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

de donde, tenemos que:

✓ $d = 2$, entonces $\boxed{\begin{aligned} &c - d = 1 \\ &c = 1 + d = 1 + 2 = 3 \end{aligned}}$

$$\boxed{\begin{aligned} &3c - 3d = 3 \\ &c = 1 + d = 1 + 2 = 3 \end{aligned}}$$

✓ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$

Lo anterior muestra que $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

(b) para verificar si $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, es necesario

saber que existen números c y d tales que:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \boxed{\begin{aligned} c - d &= 2 \\ d &= 3 \\ 3c - 3d &= 4 \end{aligned}}$$

lo cual nos dice que:

✓ $d = 3$, entonces $\boxed{\begin{aligned} &c - d = 2 \\ &c = 2 + d = 2 + 3 = 5 \end{aligned}}$

$$\boxed{\begin{aligned} &3c - 3d = 4 \\ &c = \frac{4+3d}{3} = \frac{4+3\cdot 3}{3} = \frac{13}{3} \end{aligned}}$$

lo cual nos dice que $c = 5 = \frac{13}{3}$ y esto es imposible. Esto significa que el sistema de ecuaciones no tiene solución y $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ no es combinación lineal de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Nota (siguiente teorema).

El siguiente teorema nos dice en que casos un vector es combinación lineal de otros vectores.

Teorema (propiedad de sistemas consistentes).

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\boxed{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \end{array}.$$

si $C_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, C_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$,

entonces:

$$\boxed{\text{El sistema de ecuaciones es consistente}} \longleftrightarrow \boxed{b \text{ es combinación lineal de los vectores } C_1, C_2, \ldots, C_n}$$

Definición (generador de un conjunto de vectores).

Dados $v_1, \dots, v_m$ vectores en $\mathbb{R}^n$, definimos el conjunto generado por $v_1, \dots, v_m$ en $\mathbb{R}^n$ como el conjunto $\text{gen}(v_1, \dots, v_m)$ descrito por:

$$\boxed{\text{gen}(v_1, \dots, v_m) = \left\{ c_1 v_1 + \dots + c_m v_m \in \mathbb{R}^n \,/\, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R} \right\}}$$

Es decir que $\text{gen}(v_1, \dots, v_m)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de $v_1, \dots, v_m$.

Nota (definición anterior).

Si un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ satisface que

$S = \text{gen}(v_1, \ldots, v_m)$ para algunos vectores $v_1, \ldots, v_m$ en $\mathbb{R}^n$, entonces decimos que S es generado por $v_1, \ldots, v_m$.

Ejemplo (generador de un conjunto de vectores).

Demostrar que $\text{gen}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$.

Solución:

Sea $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, entonces necesitamos probar que:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \longleftrightarrow$$

Existen números c y d tales que:

$$c\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$c\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c & d & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ -1 & 3 & b \end{array}\right] \end{array}$$

para ver que el sistema es consistente utilizamos el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\begin{array}{cc} c & d \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ -1 & 3 & b \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & a/2 \\ -1 & 3 & b \end{array}\right] \xrightarrow{R_2+R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & a/2 \\ 0 & 7/2 & \frac{a}{2}+b \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & a/2 \\ 0 & 7/2 & \frac{a}{2}+b \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{2}{7}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & \frac{a+2b}{7} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & \frac{a+2b}{7} \end{array}\right] \xrightarrow{R_1-\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3a-b}{7} \\ 0 & 1 & \frac{a+2b}{7} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{ccc} c & d & \# \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3a-b}{7} \\ 0 & 1 & \frac{a+2b}{7} \end{array}\right] \longleftrightarrow \begin{array}{l} c = \frac{3a-b}{7} \\ d = \frac{a+2b}{7} \end{array}$$

Del anterior análisis, concluimos que

$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$, ya que:

$$\boxed{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{3a-b}{7} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{a+2b}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}.$$

en particular $\operatorname{gen}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \mathbb{R}^2$.

Observación (vectores canónicos en $\mathbb{R}^n$).

Sean $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\dots$, $e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ vectores

en $\mathbb{R}^n$, entonces:

$$\boxed{\operatorname{gen}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \mathbb{R}^n}$$

ya que una combinación lineal arbitraria de $e_1, \dots, e_n$ tiene la forma:

$$\boxed{x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.}$$

Ejemplo (generador de un conjunto de vectores).

Encuentre el conjunto generado por los vectores $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix}$.

Solución:

Para empezar recordemos que:

$$\boxed{\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix}\Big/\ c,d\in\mathbb{R}\right\}}$$

de donde tenemos que:

- $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{ccc} c & d & \# \\ \end{array}\left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & x\\0 & 1 & y\\3 & 3 & z\end{array}\right].$

- Aplicaremos el método de Gauss-Jordan para escalar la matriz aumentada descrita anterior/.

$$\begin{array}{ccc} c & d & \# \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & 3 & z \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-3R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 6 & z-3x \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 6 & z-3x \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-6R_2]{R_1+R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-3x-6y \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{ccc} c & d & \# \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-3x-6y \end{array}\right] \longleftrightarrow \begin{array}{l} c = x+y \\ d = y \\ 0 = z-3x-6y \end{array}$$

Conclusión:

$$\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix} \middle/ c, d \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle/ z-3x-6y=0\right\}$$ y este

conjunto es un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen.

Observación (combinaciones lineales).

Sean $v_1, \dots, v_m$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y 0_n es el vector nulo, entonces:

(1) 0_n es combinación lineal de $v_1, \dots, v_m$ ya que al tomar $(c_1, \dots, c_m) = (0, \dots, 0)$, tenemos que:

$$\boxed{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_m = 0_n.}$$

Esta combinación lineal es llamada la combinación trivial nula de $v_1, \dots, v_m$.

(2) Es interesante saber si existen combinaciones lineales no triviales de los vectores $v_1, \dots, v_m$ que den como resultado el vector nulo 0_n. Es decir que quisieramos saber si existe $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$ tal que $0_n = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_m$.
En el caso en que sea esto posible, llamaremos estas combinaciones lineales como combinaciones lineales no triviales.

Por lo tanto, debido a esta observación tenemos la siguiente definición.

Definición (dependencia e independencia) Lineal.

Sean $v_1, \ldots, v_m$ vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces:

(1) Decimos que $v_1, \ldots, v_m$ son lineal/ independientes en $\mathbb{R}^n$, si la única combinación lineal de $v_1, \ldots, v_m$ que da como resultado el vector nulo $\mathbb{O}_n$ es la combinación lineal trivial.

$$\boxed{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m = \mathbb{O}_n \longrightarrow (c_1, \ldots, c_m) = (0, \ldots, 0).}$$

(2) Decimos que $v_1, \ldots, v_m$ son lineal/ dependientes en $\mathbb{R}^n$, si $v_1, \ldots, v_m$ no son lineal/ independientes en $\mathbb{R}^n$.

Es decir que existen combinaciones lineales no triviales de $v_1, \ldots, v_m$ que dan como resultado el vector nulo $\mathbb{O}_n$.

Existe $(c_1, \dots, c_m) \neq (0, \dots, 0)$ tal que

$$0_n = c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m$$

---

teorema (equivalencia de conjuntos L.D).

Sean $v_1, \dots, v_m$ vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces:

$v_1, \dots, v_m$ son lineal/dependientes $\longleftrightarrow$ Existe $v_i \in \{v_1, \dots, v_m\}$ tal que v_i se puede escribir como combinación lineal de $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m$

Corolario (depencia lineal de 2 vectores).

Si v_1 y v_2 son 2 vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces:

v_1 y v_2 son Lineal/ dependientes $\longleftrightarrow$ $v_1 = c \cdot v_2$ ó $v_2 = c \cdot v_1$.

Ejemplo (aplicaciones de los resultados previo).

(1) Sean $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^3$, entonces

$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$ son lineal/ dependientes ya que:

$$\boxed{\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix} = 2\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}}.$$

(2) Si $u=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ y $V=\begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix}$ son vectores

en $\mathbb{R}^2$, entonces u y V son lineal/ independientes, ya que:

$$u = c\cdot V = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = c\cdot\begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3c\\8c\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix}1=3c\\2=8c\end{matrix}$$

$$\boxed{c = \frac{1}{3} = \frac{2}{8}}$$

Esto no es posible

$$\boxed{u \neq cV \quad y \quad V \neq cu} \longrightarrow \boxed{\text{u y V son lineal/ independientes}}$$

Ejemplo(L.D y L.I).

Determine si los siguientes conjuntos de Vectores son L.D ó L.I.

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución:

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ son lineal/ independientes.

(b) $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ son lineal/ dependientes,

ya que:

$$\boxed{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}}.$$

(c) $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ son L.D, si existen

números $(c_1, c_2, c_3) \neq (0,0,0)$ tales que:

$$c_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2} R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 + R_1]{R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{array}$$

por lo tanto:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow (c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$$

y así $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ son lineal/ independientes en $\mathbb{R}^3$.