Clase 6.

Teorema (el teorema del rank).

Supongamos que el siguiente sistema de ecuaciones es consistente.

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, entonces tenemos que:

$$\begin{pmatrix} \text{\# variables libres} \\ \text{del sistema} \end{pmatrix} + \text{Rank}(A) = \begin{pmatrix} \text{\# de variables} \\ \text{del sistema} \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} \text{\# variables libres} \\ \text{del sistema} \end{pmatrix} = n - \text{Rank}(A).$$

Ejemplo (aplicación teorema anterior).

Consideremos el sistema de ecuaciones dado por:

$$
\begin{aligned}
3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= -5. \\
3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 9 \\
3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 &= 15
\end{aligned}
$$

Entonces es fácil notar que:

(1) La matriz aumentada del sistema de ecuaciones es:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \# \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc|c}
0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\
3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\
3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15
\end{array}\right].
\end{array}
$$

(2) El siguiente es el proceso para reducir la matriz aumentada a una matriz escalonada por renglones.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \# \end{array} \\
\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\
3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\
3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15
\end{array}\right]
\end{array}
\longrightarrow
\left[\begin{array}{ccccc|c}
3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\
3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\
0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5
\end{array}\right]
$$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2} R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 3R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

(3) Solucionar el sistema de ecuaciones usando la matriz escalonada encontrada en (2).

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \boxed{\begin{aligned} 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 &= 15 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= -3 \\ x_5 &= 4 \end{aligned}}$$

donde,

- $x_5 = 4.$

- $x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = -3 \longrightarrow x_2 = 2x_3 - 2x_4 - x_5 - 3$

$$x_2 = 2x_3 - 2x_4 - 4 - 3$$
$$x_2 = 2x_3 - 2x_4 - 7$$

- $3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 15$

- $x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 5$
- $x_1 = 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 + 5$
- $x_1 = 3(2x_3 - 2x_4 - 7) - 4x_3 + 3x_4 - 2(4) + 5$
- $x_1 = -24 + 2x_3 - 3x_4.$

Del anterior análisis, tenemos que la solución del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 + 2x_3 - 3 \cdot x_4 \\ -7 + 2x_3 - 2 \cdot x_4 \\ 0 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\ 0 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 \\ 4 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \cdot x_3 \\ 2 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_3 \\ 0 \cdot x_3 \\ 0 \cdot x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \cdot x_4 \\ -2 \cdot x_4 \\ 0 \cdot x_4 \\ 1 \cdot x_4 \\ 0 \cdot x_4 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad (\bigstar)$$

En este caso $(\bigstar)$ es la solución del sistema de ecuaciones, donde x_3 y x_4 son las variables libres del sistema de ecuaciones lineales.

(4) El rank de la matriz A de coeficientes del sistema

$$\begin{aligned} 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 &= 15 \end{aligned}$$

es Rank(A) = 3, ya que:

$$\underbrace{A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 \end{bmatrix}}_{\text{Es la matriz de coeficientes del sist. de ecuaciones}} \xrightarrow{\text{una forma escalonada}} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{matriz escalonada}}$$

(5) El teorema del rank se satisface, ya que:

- ✓ # variables libres = 2 (las variables libres son x_3 y x_4).
- ✓ # variables = 5 (las variables son x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).
- ✓ Rank(A) = 3.

$$\boxed{\#\,\text{variables libres} + \text{Rank}(A) = 2 + 3 = 5}$$

Observación (teorema anterior).

Es muy importante en el teorema anterior saber que el sistema tiene solución para poder usarlo. El siguiente ejemplo nos muestra del por qué debemos tener cuidado.

Ejemplo (precaución - uso del teorema del rank).

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ 2x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}}$$

(1) Verificar si el sistema tiene solución.

(2) Mostrar que el teorema anterior no se satisface.

Solución:

(1) para solucionar el sistema de ecuaciones, notemos que:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ 2x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

De donde, al reducir la matriz aumentada del sistema de ecuaciones, tenemos que:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \# \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \# \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_2 - x_3 &= -2 \\ \boxed{0 = 5} & \end{aligned}$$

Esto es imposible (contradicción)

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones original no tiene solución (ya que lo contrario $0=5$).

(2) Como el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución, entonces no podemos hablar de las variables básicas, ni las variables libres del sistema de ecuaciones. Sin embargo, podemos decir que:

✓ # variables del sistema de ecuaciones $= 3$ (Las variables son x_1, x_2 y x_3).

✓ Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ (es la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones), entonces Rank$(A)=2$, ya que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{operaciones elementales con renglones}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(✓) (# variables del sistema) $-$ Rank$(A) = 3-2=1$.

Pero es claro que # variables libres $\neq 1$, ya que nisiquiera hay var. libres.

Método de eliminación de Gauss-Jordan.

El método de eliminación de Gauss-Jordan es una breve modificación del método de eliminación de Gauss. Este método se enfoca en la idea de que la sustitución de abajo hacia arriba sea más sencilla.

Antes de ver este método, es necesario entender cuál es la modificación que haremos al método de eliminación de Gauss. En la siguiente definición se muestra cual es la modificación a usar.

Definición Una matriz está en ***forma escalonada reducida por renglones*** si satisface las siguientes propiedades:

1. Está en forma escalonada por renglones.
2. El elemento pivote en cada renglón distinto de cero es 1 (llamado ***1 pivote***).
3. Cada columna que contiene un 1 pivote tiene ceros en todos los otros lugares.

Ejemplo (definición anterior).

(1) Las siguientes matrices están en forma escalonada reducida por renglones.

✓ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- $$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- $$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- $$I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Las siguientes matrices no están en forma escalonada reducida por renglones.

- $$H=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- $$J=\begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eliminación de Gauss-Jordan

1. Escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales.
2. Use operaciones elementales con renglones para reducir la matriz aumentada a la forma escalonada reducida por renglones.
3. Si el sistema resultante es consistente, resuelva para las variables pivote en términos de cualquier variable libre restante.

Ejemplo 2.11 Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} w - x - y + 2z &= 1 \\ 2w - 2x - y + 3z &= 3 \\ -w + x - y &= -3 \end{aligned}$$

Solución:

para resolver es sistema de ecuaciones, veamos los siguientes pasos:

paso(1): Encontrar la matriz aumentada del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} w - x - y + 2z &= 1 \\ 2w - 2x - y + 3z &= 3 \\ -w + x - y &= -3 \end{aligned} \longleftrightarrow \begin{array}{ccccc} w & x & y & z & \# \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} w & x & y & z & \# \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Paso(2): Usar operaciones elementales por renglones para reducir la matriz aumentada del paso (1) a una matriz escalonada reducida por renglones.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} w & x & y & z & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3+2R_2]{R_1+R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Paso(3): solucionar el sistema de ecuaciones usando la matriz escalonada reducida del paso (2).

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} w & x & y & z & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{r} w-x+z=2 \\ y-z=1 \end{array}$$

- $w = x - z + 2.$
- $y = 1 + z.$

por lo tanto, la solución del sistema es:

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z + 2 \\ x \\ z + 1 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Esta última es la solución del sistema de ecuaciones lineales original, donde x y z son las variables libres del sistema de ecuaciones.