# Clase 13.

## Bases y dimensión en $\mathbb{R}^n$

**Definición** Una ***base*** para un subespacio $S$ de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de vectores en $S$ que

1. genera $S$ y
2. es linealmente independiente.

---

Ejemplos.

(1) $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ forman una base para $\mathbb{R}^2$, ya que:

✓ $\text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2.$

✓ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ son linealmente independientes.

(2) $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ forman una

base para $\mathbb{R}^n$, ya que:

✓ $\text{gen}\{e_1, \ldots, e_n\} =$

$$= \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : \ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^n.$$

✓ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ son lineal/ independientes, ya que

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \boxed{\begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ \vdots \\ c_n = 0 \end{matrix}}$$

por lo tanto, la única combinación lineal de $e_1, \ldots, e_n$ que da $\underline{\underline{0}}$ es la combinación linea trivial, lo cual muestra que $e_1, \ldots, e_n$ són lineal/ independientes.

(3) si $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, entonces $\{u, v\}$ forman una base para $\mathbb{R}^2$, ya que:

$$\operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 1 & 3 & y \end{array}\right] \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 1 & 3 & y \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y \\ 2 & 1 & x \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y \\ 0 & -5 & x-2y \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y \\ 0 & -5 & x-2y \end{array}\right] \xrightarrow{\left(-\frac{1}{5}\right)R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y \\ 0 & 1 & -\frac{x}{5}+\frac{2}{5}y \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y \\ 0 & 1 & -\frac{x}{5}+\frac{2}{5}y \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 3R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5}x - \frac{y}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{x}{5}+\frac{2}{5}y \end{array}\right] \end{array}$$

Así, notamos que para todo $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ existen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \longleftarrow \boxed{\begin{array}{l} c_1 = \frac{3}{5}x - \frac{y}{5} \\ c_2 = -\frac{x}{5} + \frac{2}{5}y \end{array}}$$

Así, tenemos que $\mathbb{R}^2 = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right\}.$

✓ $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ son lineal/ independientes

Conclusión:

El análisis anterior muestra que $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ forman una base para $\mathbb{R}^2$.

---

**Ejemplo 3.44** Encuentre una base para $S = \text{gen}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, donde

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

Notemos inicial/ que:

$$S = \text{gen}(u, v, w) =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} : c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ahora, para determinar una base para $\underline{S}$, es necesario encontrar una colección de vectores que generen a $\underline{\underline{S}}$ y que sean lineal/ independientes.

De esta manera, podemos notar que:

(1) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ generan a $\underline{\underline{S}}$, pero no sabemos si son lineal/ independientes.

(2) Una manera de encontrar una base para $\underline{\underline{S}}$ a partir de $\underline{u}, \underline{v}$ y $\underline{w}$ está dado en el siguiente algoritmo.

**Algoritmo.**

Si $u_1, \ldots, u_m$ son vectores columna en $\mathbb{R}^n$ y $S = \text{gen}(u_1, \ldots, u_m)$ entonces para encontrar una base para $\underline{S}$ realizamos los siguientes pasos:

paso(1): trasponer los vectores $u_1, \ldots, u_m$ y formar una matriz con estos vectores.

paso(2): Si $A$ es la matriz obtenida en el paso(1), entonces aplicamos operaciones elementales por renglón para llevar a $\underline{\underline{A}}$ a una matriz escalonada $A'$.

paso(3): Si $A'$ es la matriz obtenida del paso (2) y $v_1, v_2, \ldots, v_k$ son los renglones no nulos de $A'$, entonces

$$\boxed{v_1^T, v_2^T, \ldots, v_k^T \text{ generan a } S}$$

Así, aplicaremos el algoritmo anterior para determinar una base para $\underline{\underline{S}}$.

paso(1): transponer los vectores $u, v$ y $w$ y formar una matriz con estos vectores.

$$u^T = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$v^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$w^T = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Paso(2): Encontrar la forma escalonada de A.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 5/3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 5/3 & -1/3 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 5/3 & -1/3 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{5}R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+5R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

paso (3): Si $A'$ es la matriz obtenida del paso (2) y $v_1, \dots, v_k$ son los renglones no nulos de $A'$, entonces $v_1^T, \dots, v_k^T$ forman una base para $S$.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 5/3 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1/5 \end{bmatrix}$$

$$v_1^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{bmatrix} \text{ y } v_2^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/5 \end{bmatrix}$$

forman una base para $S$.

---

**Ejemplo 3.45** Encuentre una base para el espacio renglón de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución:

para hallar una base para el espacio renglón de $A$, recordemos el siguiente teorema:

Teorema.

Sea $A$ una matriz de tamaño $m \times n$ y supongamos que $A'$ se obtiene de $A$ realizando operaciones elementales por renglón, entonces:

✓ Renglón$(A)$ = Renglón$(A')$.

✓ Si $A'$ es la forma escalonada de $A$ entonces los renglones no nulos de $A'$ forman una base para Renglón $(A)$.

Por lo tanto, para determinar una base para $A$, encontremos la forma escalonada de $A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4-4R_1]{R_2-2R_1,\ R_3+3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & -13 \\ 0 & 5 & 10 & 1 & 19 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & -21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & -13 \\ 0 & 5 & 10 & 1 & 19 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & -21 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left(-\frac{1}{3}\right)R_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & -13 \\ 0 & 5 & 10 & 1 & 19 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & -13 \\ 0 & 5 & 10 & 1 & 19 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 10 & 1 & 19 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 10 & 1 & 19 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4+3R_2]{R_3-5R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left(\frac{-1}{4}\right)R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 - 2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

Esta matriz es escalonada (no es escalonada-reducida)

por lo tanto, tenemos que una base para Renglón(A) son los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

---

Observación (bases para col(A)).

(1) El siguiente es un algoritmo para determinar una base para col(A).

**Algoritmo.**

sea $A = \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{bmatrix}$ una matriz de tamaño $m \times n$ con columnas $C_1, \ldots, C_n$. Entonces para determinar una base para $\mathrm{col}(A)$ procedemos de la siguiente manera:

**paso (1):** Hallar $A^T$ y una forma escalonada $B$ de $A^T$.

**paso (2):** Hallar $B^T$.

**paso (3):** Las columnas no nulas de $B^T$ formarán una base para $\mathrm{col}(A)$.

(2) El siguiente teorema nos ofrece una manera alternativa de estudiar $\mathrm{col}(A)$ usando las formas escalonadas de $A$.

**Teorema.**

Supongamos que $A = \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{bmatrix}$ es una matriz de tamaño $m \times n$ con columnas $C_1, \ldots, C_n$ y sea $A' = [D_1 \cdots D_n]$ una matriz que se obtiene de $A$ aplicando operaciones elementales por renglón. Si $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$ son algunas columnas de $A$, entonces:

✓ $C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}$ son L.I $\Leftrightarrow D_{i_1}, \ldots, D_{i_k}$ son LI.

✓ $C_{i_1}, \dots, C_{i_k}$ son una base para col(A) $\iff$ $D_{i_1}, \dots, D_{i_k}$ son una base para col(A')

En el siguiente ejemplo se explora un poco este teorema y su aplicabilidad.

---

Ejemplo.

Encontrar una base para col(A) con

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Solución:

En el ejemplo anterior, hemos visto que una forma escalonada para A es

$$A' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Entonces $D_1$, $D_2$ y $D_4$ forman una base para $col(A')$. por lo tanto, una base para $col(A)$ es $c_1$, $c_2$ y $c_4$.

$$\begin{aligned} col(A) &= gen\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\} \\ &= gen\{c_1, c_2, c_4\} \end{aligned}$$

---