Clase 19.

Transformaciones lineales.

Definición Una ***transformación lineal*** de un espacio vectorial V a un espacio vectorial W es un mapeo $T: V \to W$ tal que, para todo $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V y para todos los escalares c,

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
2. $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$

(1) T manda sumas en sumas.

(2) T saca escalares.

Observación (definición anterior).

Es fácil demostrar que las 2 condiciones de la definición anterior son equivalentes a la siguiente única condición:

para todo $u, v \in V$ y todo $c, d \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$T(cu + dv) = c \cdot T(u) + d \cdot T(v).$$

Ejemplo 6.49 Toda transformación matricial es una transformación lineal. Esto es, si A es una matriz de $m \times n$, entonces la transformación $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por

$$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \text{ para } \mathbf{x} \text{ en } \mathbb{R}^n$$

es una transformación lineal.

Solución:

para verificar que T_A es transformación lineal, notamos que:

✓ $T_A(x+y) = A\cdot(x+y) = A\cdot x + A\cdot y = T_A(x) + T_A(y)$.

✓ $T_A(c\cdot x) = A\cdot(c\cdot x) = c(A\cdot x) = c\cdot T_A(x)$.

Esto prueba que T_A es transformación lineal.

Ejemplo 6.50 Defina $T : M_{nn} \to M_{nn}$ mediante $T(A) = A^T$. Demuestre que T es una transformación lineal.

Solución:

para mostrar que T es una transformación lineal, probaremos las siguientes cosas:

(1) $T(A+B) = T(A) + T(B)$ para todo $A, B \in M_{nn}$.

(2) $T(c\cdot A) = c\cdot T(A)$ para todo $A \in M_{nn}$ y todo $c \in \mathbb{R}$.

prueba (1).

Supongamos que A y B son matrices de tamaño $n \times n$, entonces:

$$T(A+B)=(A+B)^T= A^T+B^T=T(A)+T(B)$$

Lo cual demuestra que $T(A+B)=T(A)+T(B)$.

Prueba (2).

Supongamos que A es una matriz de tamaño $n \times n$ y c es un número real, entonces:

$$T(c \cdot A)=(c \cdot A)^T=c \cdot A^T=c \cdot T(A)$$

lo cual muestra que $T(c \cdot A)=c \cdot T(A)$.

Conclusión: Del análisis anterior, podemos asegurar que $T(A)=A^T$ es una transformación lineal.

Ejemplo 6.51 Sea D el ***operador diferencial*** $D : \mathscr{D} \to \mathscr{F}$ definido por $D(f) = f'$. Demuestre que D es una transformación lineal.

Recordar:

$\mathscr{D} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f$ es diferenciable en $\mathbb{R}\}$.

$\mathbb{F} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f$ es una función$\}$.

Solución:

para mostrar que $D : \mathscr{D} \to \mathbb{F}$ es una transformación lineal es necesario probar las siguientes cosas:

(1) $D(f+g) = D(f) + D(g)$ para todo $f, g \in \mathscr{D}$.

(2) $D(c \cdot f) = c \cdot D(f)$ para toda $f \in \mathscr{D}$ y toda $c \in \mathbb{R}$.

Prueba(1).

Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables en $\mathbb{R}$, entonces:

$$D(f+g) = (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g)$$

$$D(f+g) = D(f) + D(g).$$

Lo cual prueba que D manda sumas en sumas ($D(f+g) = D(f) + D(g)$).

prueba (2).

Supongamos que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}$ y sea c un número real, entonces:

$$D(c \cdot f) = (c \cdot f)' = c \cdot f' = c \cdot D(f)$$

$$D(c \cdot f) = c \cdot D(f)$$

lo cual prueba que D saca escalares ($D(c \cdot f) = c \cdot D(f)$).

Conclusión:

El anterior análisis prueba que D es una transformación lineal.

Ejemplo 6.52	Defina $S: \mathscr{C}[a, b] \to \mathbb{R}$ mediante $S(f) = \int_a^b f(x)dx$. Demuestre que S es una transformación lineal.

$$\mathscr{C}[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \,/\, f \text{ es continua en } [a,b] \}.$$

Solución:

Para mostrar que $\underline{S}$ es una transformación lineal es necesario probar las siguientes cosas:

(1) $S(f+g) = S(f+g)$ para todo $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$.

(2) $S(c \cdot f) = c \cdot S(f)$ para todo $f \in \mathcal{C}[a,b]$ y todo $c \in \mathbb{R}$.

Prueba(1).

Supongamos que $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ y $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, entonces:

$$S(f+g) = \int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$S(f+g) = S(f) + S(g)$$

lo cual muestra que S manda sumas en sumas $\left(S(f+g) = S(f) + S(g) \right)$.

Prueba(2).

Supongamos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua $(f\in\mathcal{C}[a,b])$ y $c\in\mathbb{R}$, entonces:

$$S(c\cdot f)=\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

$$S(c\cdot f)=c\cdot S(f)$$

lo cual prueba que S saca escalares $\left(S(c\cdot f)=c\cdot S(f)\right)$.

Conclusión:

Del análisis anterior, podemos asegurar que $S(f)=\int_a^b f(x)\,dx$ es una transformación lineal.

Ejemplo (transformaciones NO lineales).

Sea $T: M_{22} \to \mathbb{R}$ la transformación definida como:

$$\boxed{\begin{array}{l} T(A) = \mathrm{Det}(A) \\ T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc \end{array}}$$

para cada $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22}$. Verificar si T es una transformación lineal.

Solución:

Empecemos notando que:

$\checkmark_1$ $$T\left(r \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{bmatrix} = r^2 ad - r^2 cd$$

$$= r^2(ad - bc) = r^2 \cdot T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

$✓_2$ $T\left(2\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)=2^2\cdot(2\cdot1-1\cdot1)=4.$

$✓_3$ $2T\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=2\cdot(2\cdot1-1\cdot1)=2.$

Así, de las expresiones $✓_2$ y $✓_3$ concluimos que

$$T\left(2\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\neq 2T\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

y esto muestra que T no es transformación lineal.

Ejercicio: Verificar que T no manda sumas en sumas. Es decir que existen $A, B \in M_{22}$ tales que:

$$\boxed{T(A+B)\neq T(A)+T(B)}.$$

Teorema (Propiedades de transformaciones lineales).

(1) Sean V y W espacios vectoriales entonces si definimos la transformación:

$$\boxed{\begin{aligned} T_0 : V &\longrightarrow W \\ x &\longrightarrow T_0(x) = 0_W \end{aligned}}$$

es una transformación lineal.

(2) Sean $T, S : V \to W$ transformaciones lineales, entonces la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} T+S : V &\longrightarrow W \\ x &\longrightarrow (T+S)(x) = T(x) + S(x) \end{aligned}$$

es una transformación lineal.

(3) Si $T: V \to W$ es una transformación lineal, entonces la siguiente transformación

$$
\begin{aligned}
c \cdot T : V &\longrightarrow W \\
x &\longrightarrow (c \cdot T)(x) = c \cdot T(x)
\end{aligned}
$$

es una transformación lineal.

(4) Si $T: V \to W$ es una transformación lineal, entonces:

- $T(0_V) = 0_W$ recordando que 0_V es el vector neutro de V y 0_W es el vector neutro de W.

- $T(-x) = -T(x)$ para todo $x \in V$.

(5) Si $T: V \to W$ es una transformación que satisface que $T(0_V) \neq 0_W$ entonces T no es transformación lineal.

Ejemplo (transf. lineales).

Supongamos que $T: \mathbb{R}^2 \to P_2$ es una transformación lineal tal que:

- $T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 2-3x+x^2.$

- $T\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = 1-x^2.$

Encontrar $T\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ y $T\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$.

Solución:

Para comenzar notemos que:

(1) $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ son una base para $\mathbb{R}^2$

$\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right.$ y $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ son L.I y generan $\left.\mathbb{R}^2\right)$.

(2) Si $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, entonces existen

escalares c, d tales que:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c & d & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & b \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c & d & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & b \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{R_2-R_1} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c & d & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & b-a \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c & d & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & b-a \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{R_1-2R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c & d & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3a-2b \\ 0 & 1 & b-a \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c & d & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3a-2b \\ 0 & 1 & b-a \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} c = 3a-2b \\ d = b-a \end{array}$$

y así, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (3a-2b)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (b-a)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = T\left((3a-2b)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (b-a)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (3a-2b)\,T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (b-a)\cdot T\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= (3a-2b)\cdot(2-3x+x^2) + (b-a)\cdot(1-x^2)$$

$$= (6a-4b+b-a) + (-9a+6b)x + (3a-2b+a-b)x^2$$

$$= (5a-3b) + (-9a+6b)x + (4a-3b)x^2.$$

$$\boxed{T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (5a-3b) + (-9a+6b)x + (4a-3b)x^2}$$

✓ $T\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} =$

$= (5(-1)-3(2)) + (-9\cdot(-1)+6(2))x + (4\cdot(-1)-3(2))x^2$

$= -11 + 21x - 10x^2.$

Conclusión:

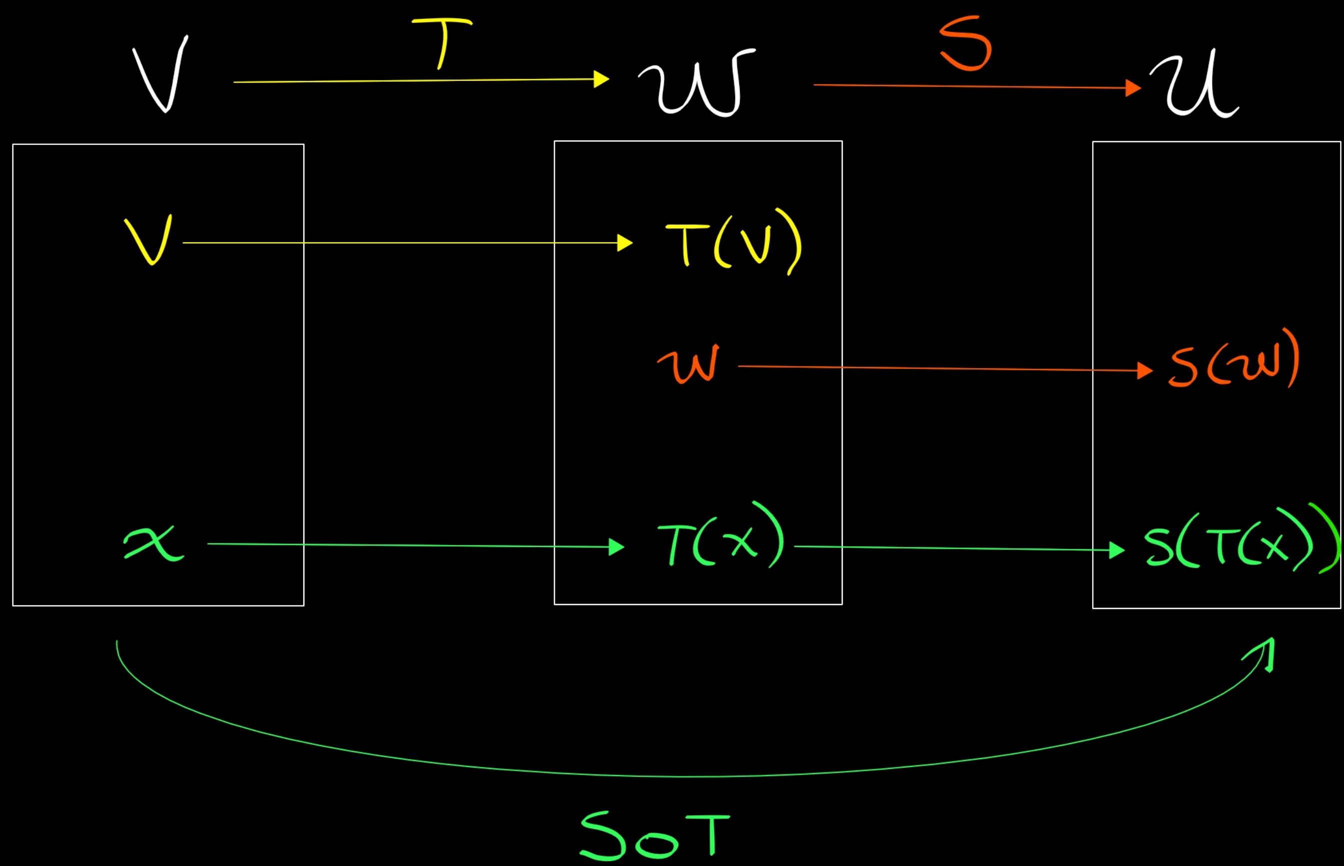
(1) $T\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = (5a-3b) + (-9a+6b)x + (4a-3b)x^2$

(2) $T\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = -11 + 21x - 10x^2$

Definición (composición entre transformaciones).

Sean $T: V \to W$ y $S: W \to U$ transformaciones, entonces definimos la transformación $S \circ T: V \to U$ como:

$$\boxed{\begin{aligned} S\circ T : V &\longrightarrow U \\ x &\longrightarrow (S\circ T)(x) := S(T(x)) \end{aligned}}$$



$$(S \circ T)(x) = S(T(x))$$

Teorema (composición de transf. lineales es trans. lineal).

Sean $T: V \to W$ y $S: W \to U$ transformaciones lineales, entonces $S \circ T: V \to U$ es también una transformación lineal.

Ejemplo (composición).

Sean $T: \mathbb{R}^2 \to P_1$ y $S: P_1 \to P_2$ transformaciones lineales definidas como:

- $T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a+(a+b)x.$

- $S(c+dx) = x(c+dx).$

Encontrar $(S \circ T)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$

Solución:

Aplicando la definición de la compuesta, tenemos que:

$$(S \circ T)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = S\left(T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = S\Big(a+(a+b)x\Big)$$

$$= x\big(a+(a+b)x\big) = ax+(a+b)x^2.$$

Conclusión: $(S \circ T)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = ax+(a+b)x^2.$

Ejemplo (transformación identidad).

Sea V un espacio vectorial, entonces definimos la transformación $I_V : V \to V$ definida como:

$$I_V(x) = x$$

para cada $x \in V$. Es sencillo verificar que I_V es una transformación lineal, la cual es llamada la transformación identidad sobre V.

Definición (transformación lineal invertible).

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal, entonces decimos que T es invertible, si existe una transformación lineal $S: W \to V$ tal que:

$$\boxed{S \circ T = I_V} \quad y \quad \boxed{T \circ S = I_W}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] & W \arrow[r, "S"] & V \\ x \arrow[rr, bend right, "S \circ T"'] & & x \end{tikzcd}$$

$$(S \circ T)(x) = I_V(x)$$

$$S(T(x)) = x$$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "S"] & V \arrow[r, "T"] & W \\ x \arrow[rr, bend right, "T \circ S"'] & & x \end{tikzcd}$$

$$(T \circ S)(x) = I_W(x)$$

$$T(S(x)) = x$$

Notación (inversa de una transf. lineal).

Si $T: V \to W$ es una transformación lineal invertible con $S: V \to W$ otra transformación lineal que satisface que:

$$(S \circ T)(x) = x \quad y \quad (T \circ S)(x) = x$$

entonces escribimos $S = T^{-1}$.

Ejemplo (transformaciones invertibles).

Supongamos que $T: \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ y $S: \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ son transformaciones lineales definidas como:

- $T(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} b \\ a \\ c \end{bmatrix}$.
- $S\begin{bmatrix} e \\ f \\ g \end{bmatrix} = f + ex + gx^2$.

Verificar si $S=T^{-1}$.

Solución:

Para verificar si $S=T^{-1}$, es necesario:

(1) $S\circ T = I_{P_2}$ $\left((S\circ T)(a+bx+cx^2) = a+bx+cx^2 \right)$.

(2) $T\circ S = I_{\mathbb{R}^3}$ $\left((T\circ S)\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} \right)$.

prueba(1).

$$(S\circ T)(a+bx+cx^2) = S(T(a+bx+cx^2)) =$$

$$= S\begin{pmatrix} b\\ a\\ c\end{pmatrix} = a+bx+cx^2.$$

prueba(2).

$$(T\circ S)\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = T\left(S\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}\right) = T(b+ax+cx^2)$$

$$= \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}.$$

Lo anterior muestra que $S=T^{-1}$.