Clase 20.

Definición (kernel de una transf. lineal).

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal, entonces definimos el kernel de T como el siguiente conjunto:

$$\boxed{\ker(T) = \{ x \in V / T(x) = 0_W \}}.$$

Teorema (propiedad de ker(T)).

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal, entonces:

(1) $0_V \in \ker(T) \longleftrightarrow T(0_V) = 0_W$.

(2) $\ker(T)$ es un subespacio vectorial de V

- $\ker(T)$ cerrado bajo la suma
- $\ker(T)$ cerrado bajo mult. esc.
- $0_V \in \ker(T)$

Ejemplo (kernel de una trans. lineal).

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ y

$$\boxed{\begin{aligned} T_A: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longrightarrow T_A(x) = A \cdot x \end{aligned}}$$

es la transformacion lineal inducida por la matriz A. Encontrar el $\ker(T)$.

Solución:

Recordemos que:

$$\ker(T_A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \; T_A(x) = 0_m \right\}$$

$$\ker(T_A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \; A \cdot x = 0_m \right\}$$

$$\ker(T_A) = \mathrm{Nul}(A).$$

Ejemplo (kernel de una trans. lineal).

Sea $f: P_3 \to P_2$ la transformación lineal definida por:

$$\mathcal{J}(p(x)) = p'(x)$$

$$\mathcal{J}(a+bx+cx^2+dx^3) = b+2cx+3dx^2$$

Entonces determinar el kernel de $\mathcal{J}$.

Solución:

Supongamos que $a+bx+cx^2+dx^3 \in \mathcal{P}_3$ satisface que:

$$\mathcal{J}(a+bx+cx^2+dx^3) = 0 \quad \left(a+bx+cx^2+dx^3 \in \ker(\mathcal{J})\right).$$

Entonces

$$\mathcal{J}(a+bx+cx^2+dx^3) = b+2cx+3dx^2 = 0$$

Lo cual implica que:

$$\begin{array}{c} b=0 \\ 2c=0 \\ 3d=0 \end{array} \longleftrightarrow b=c=d=0.$$

De esta forma, podemos garantizar

que los elementos de $\ker(f)$ tienen la siguiente estructura:

$$\ker(f)=\left\{a+bx+cx^2+dx^3 \,/\, f(a+bx+cx^2+dx^3)=0\right\}$$

$$\ker(f)=\left\{a+bx+cx^2+dx^3 \,/\, b=c=d=0\right\}$$

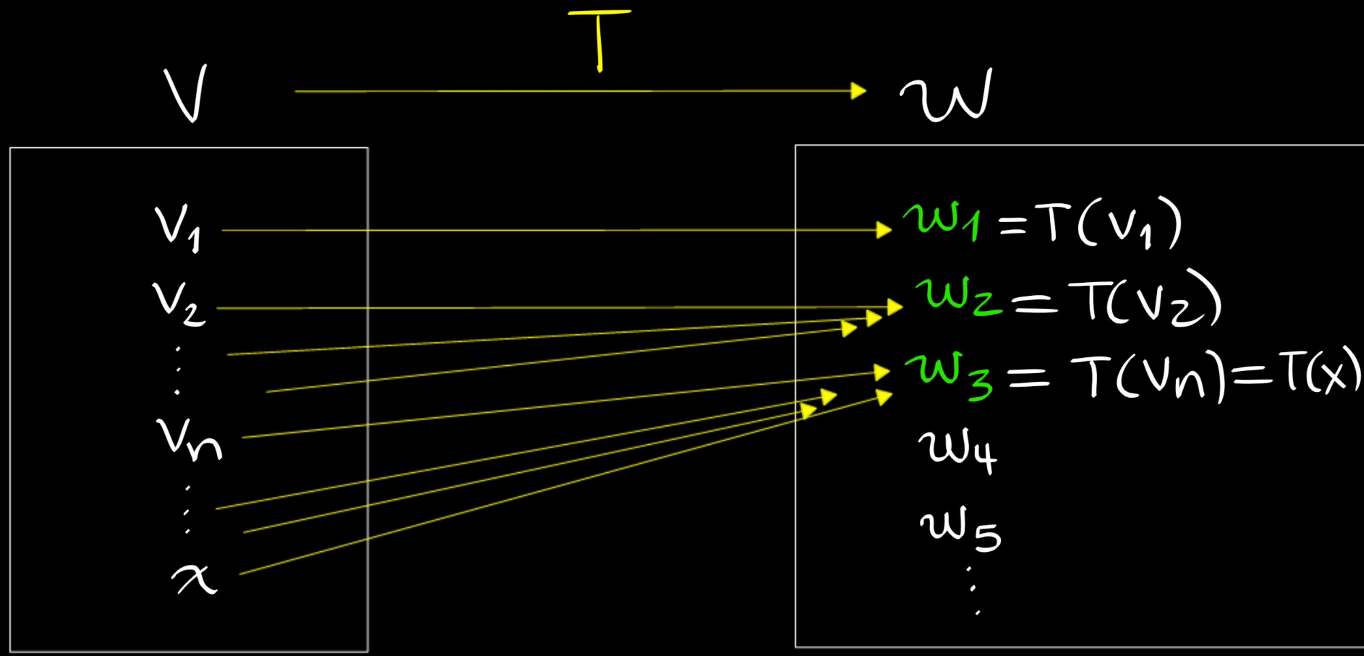
$$\ker(f)=\left\{a\in P_3 \,/\, a\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}.$$

Conclusión: $\ker(f)=\mathbb{R}$.

Definición (rango de una transf. lineal).

Sea $T: V\to W$ una transformación lineal, entonces definimos el rango de T (imagen de T) como el siguiente conjunto:

$$\boxed{\text{Rango}(T)=\left\{T(x)\in W \,/\, x\in V\right\}}$$



$$\text{Rango}(T) = \{w_1, w_2, w_3\}.$$

Teorema (propiedades de Rango(T)).

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal, entonces:

(1) $0_W \in \text{Rango}(T)$ $\left(T(0_V) = 0_W \right)$.

(2) Rango(T) es un subespacio de W.

- Rango(T) es cerrado bajo la suma.
- Rango (T) es cerrado bajo mult. esc.
- $0_W \in \text{Rango}(T)$

Ejemplo (Rango de una trans. lineal).

Sea A una matriz de tamaño $m\times n$ y

$$\boxed{\begin{aligned} T_A:\ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longrightarrow T_A(x)=A\cdot x \end{aligned}}$$

la transformación lineal inducida por la matriz A. Entonces determinar el rango de T_A.

Solución:

Para empezar, recordemos que:

$$\text{Rango}(T_A)=\left\{T_A(x)\in\mathbb{R}^m \,/\, x\in\mathbb{R}^n\right\}.$$

$$\text{Rango}(T_A)=\left\{A\cdot x\in\mathbb{R}^m \,/\, x\in\mathbb{R}^n\right\}.$$

De donde al tomar $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

y $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ tenemos que:

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \end{bmatrix}.$$

$$A \cdot x = x_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

De esta manera, el análisis anterior muestra que:

$$\text{Rango}(T_A) = \left\{ A \cdot x \in \mathbb{R}^m \,/\, x \in \mathbb{R}^n \right\} =$$

$$= \left\{ x_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \Bigg/ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$= \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}\right\} = \text{col}(A).$$

conclusión:

$$\text{Rango}(T_A) = \text{col}(A) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}\right\}.$$

el generado de las columnas de la matriz A.

Ejemplo (rango de una trans. lineal).

Sea $f: P_3 \to P_2$ la transformación lineal definida como:

$$f(p(x)) = p'(x)$$

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = b + 2cx + 3dx^2$$

Entonces hallar el rango de f.

Solución:

Empecemos recordando que:

$$\text{Rango}(f) = \left\{ f(a+bx+cx^2+dx^3) \,/\, a+bx+cx^2+dx^3 \in P_3 \right\}$$

$$\text{Rango}(f) = \left\{ f(a+bx+cx^2+dx^3) \,/\, a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Rango}(f) = \left\{ b+2cx+3dx^2 \,/\, a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Afirmación: $\text{Rango}(f) = P_2$.

Supongamos que $e+fx+hx^2$ es un polinomio de grado menor ó igual a 2 arbitrario, entonces al tomar $b=e$, $c=f/2$ y $d=h/3$ tendremos que:

$$b+2cx+3\cdot dx^2 = e+2\cdot(f/2)x+3\cdot(h/3)x^2$$

$$= e+fx+hx^2$$

lo cual prueba que $P_2 = \text{Rango}(f)$.

Ejemplo (ker(T) y Rango(T)).

Sea $S : P_1 \to \mathbb{R}$ es la transformación lineal definida como:

$$S(p(x)) = \int_0^1 p(x)\,dx$$

$$S(a+bx) = \int_0^1 a+bx\,dx = a\cdot x + \frac{b}{2}x^2 \Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \left(a\cdot 1 + \frac{b}{2}\cdot 1^2\right) - \left(a\cdot 0 + \frac{b}{2}\cdot 0^2\right) = a + \frac{b}{2}$$

Entonces

(1) Determinar ker(S).

(2) Determinar Rango(s).

Solución:

(1) Empecemos recordando:

$$\ker(S) = \left\{ a + bx \,/\, S(a+bx) = 0 \right\}$$

$$\ker(S) = \left\{ a + bx \,/\, a + \frac{b}{2} = 0 \right\}$$

$$\ker(S) = \left\{ a + bx \,/\, a = -\frac{b}{2} \right\}$$

$$\ker(S) = \left\{ -\frac{b}{2} + bx \,/\, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\ker(S) = \left\{ b\left(-\frac{1}{2} + x\right) \,/\, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\boxed{\ker(S) = \operatorname{gen}\left(-\frac{1}{2} + x\right).}$$

(2) para empezar, recordamos que:

$$\operatorname{Rango}(S) = \left\{ S(a+bx) \in \mathbb{R} \,/\, a + bx \in P_1 \right\}$$

$$\text{Rango}(S) = \left\{ a + \frac{b}{2} \in \mathbb{R} \,/\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

se puede ver facil/ que $\text{Rango}(S) = \mathbb{R}$.

Ejercicio

Sea $R: M_{22} \longrightarrow P_3$ la transformación lineal definida como:

$$R\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + cx^2.$$

Determinar $\ker(R)$ y $\text{Rango}(R)$.

Definición (rank y nulidad).

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal, entonces:

(1) Definimos el rank de T como

$$\text{Rank}(T) := \text{Dim}(\text{Rango}(T)) = \text{"El número de elementos de una base para Rango}(T)\text{"}$$

(2) Definimos la nulidad de T como:

$$\text{Nulidad}(T) = \text{Dim}(\text{Ker}(T)) = \text{"El número de elementos de una base para Ker}(T)\text{"}$$

Ejemplo (Rank(T) y Nulidad(T)).

Sea $\mathcal{J} : P_3 \to P_2$ la transformación lineal definida como:

$$\mathcal{J}(p(x)) = p'(x)$$

$$\mathcal{J}(a + bx + cx^2 + dx^3) = b + 2cx + 3dx^2$$

Entonces:

(1) Determinar Nulidad($\mathcal{J}$).

(2) Determinar Rank($\mathcal{J}$).

Solución:

(1) Recordemos que previa/ probamos que $\ker(f)$ se describe como:

$$\boxed{\ker(f)=\{a\cdot 1 \;/\; a\in\mathbb{R}\}=\text{gen}\{1\}=\mathbb{R}}$$

y así $\{1\}$ es una base para $\ker(f)$ (ya que 1 genera a $\ker(f)=\mathbb{R}$ y $1\neq 0$).

Lo que muestra que

$$\boxed{\text{Nulidad}(f)=\text{Dim}(\ker(f))=1.}$$

(2) Recordemos que previa/ vimos que $\text{Rango}(f)$ se describe como:

$$\boxed{\text{Rango}(f)=P_2}.$$

Lo cual muestra que:

$$\text{Rank}(\mathcal{J}) = \text{Dim}(\text{Rango}(\mathcal{J})) = \text{Dim}(P_2) = 3.$$

$$\boxed{\text{Rank}(\mathcal{J}) = 3}.$$

Teorema (relación entre Rank(T) y Nulidad(T)).

Sea $T: V \to W$ es una transformación lineal tal que $\text{Dim}(V)$ es finita, entonces:

$$\boxed{\text{Rank}(T) + \text{Nulidad}(T) = \text{Dim}(V)}$$

Observación (teorema anterior).

	Dim(V)	Rank	Nulidad
$\mathcal{J}: P_3 \to P_2$ $p(x) \to p'(x)$	$\text{Dim}(P_3) = 4$	3	1
$S: P_1 \to \mathbb{R}$ $p(x) \to \int_0^1 p(x)\,dx$	$\text{Dim}(P_1) = 2$	1	1