Clase 14

Transformaciones lineales.

Definición (transformación de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$).

Una transformación T de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ es una regla que asigna a cada $x \in \mathbb{R}^n$ un único elemento $T(x)$ en $\mathbb{R}^m$.

- El dominio de T es $\mathbb{R}^n$.
- El codominio de T es $\mathbb{R}^m$.
- La imagen de T es el conjunto dado por

$$\text{Imagen}(T) = \{ T(x) \in \mathbb{R}^m : x \in \mathbb{R}^n \}.$$

- En ocasiones escribimos $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ para decir que T es una transformación de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$.

Ejemplo (definición anterior).

(1) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Entonces f transforma cada número real x en x^2.

(2) Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida como:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x-y \\ 3x+4y \end{bmatrix}$$

para cada $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Entonces T transforma a cada $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ en $\begin{bmatrix} x \\ 2x-y \\ 3x+4y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Definición (transformación lineal).

Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación. Decimos que T es una transformación lineal, si:

(1) $T(x+y) = T(x) + T(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(2) $T(cx) = cT(x)$ para todo $\begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \\ c \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Ejemplo 3.55

Considere una vez más la transformación $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x - y \\ 3x + 4y \end{bmatrix}$$

Compruebe que T es una transformación lineal.

Solución:

Para comprobar que T es una transformación lineal, es necesario verificar que:

(1) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right)=T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+T\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$ para todo $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\in \mathbb{R}^2$.

(2) $T\left(c\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=cT\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ para todo $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\in \mathbb{R}^2$ y $c\in \mathbb{R}$.

Desarrollo (1).

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ 2x-y \\ 3x+4y \end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right)=T\begin{bmatrix} x+z \\ y+w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+z \\ 2(x+z)-(y+w) \\ 3(x+z)+4(y+w) \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} x+z \\ 2x+2z-y-w \\ 3x+3z+4y+4w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ 2x-y \\ 3x+4y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} z \\ 2z-w \\ 3z+4w \end{bmatrix}=T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+T\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}.$$

Desarrollo (2).

$$T\left(c\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=T\begin{bmatrix} cx \\ cy \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} cx \\ 2(cx)-(cy) \\ 3(cx)+4(cy) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} cx \\ c(2x-y) \\ c(3x+4y) \end{bmatrix}=c\cdot\begin{bmatrix} x \\ 2x-y \\ 3x+4y \end{bmatrix}$$

$$T\left(c\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=c\begin{bmatrix} x \\ 2x-y \\ 3x+4y \end{bmatrix}=c\cdot T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

De lo anterior se tiene que T es transf. lineal.

Observación (definición transformación lineal).

Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación, entonces:

$\boxed{T \text{ es transformación Lineal}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} T(cu+dv) = cT(u)+dT(v) \\ \text{para todo } u, v \in \mathbb{R}^n \\ \text{y todo } c, d \in \mathbb{R}. \end{array}}$

Nota (siguiente teorema).

El siguiente teorema nos dice que dada una matriz A de tamaño $m \times n$, se tiene que la transformación que induce esta matriz es una transformación lineal.

Teorema (transformación lineal inducida por una matriz).

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ una matriz de tamaño $m \times n$, entonces la transformación $T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

definida como:

$$T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longrightarrow T_A(x) = A \cdot x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$T_A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

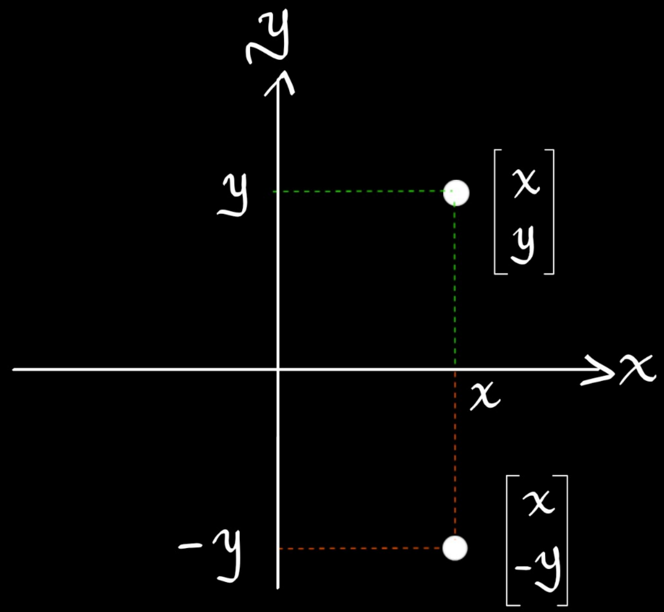
es una transformación lineal.

Ejemplo (transformación lineal).

Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación que envia cada punto a su reflexión en el eje x.
Hallar la descripción algebraica de F y demostrar que F es una transformación lineal.

Solución:

Para empezar, veamos inicial/ como describir algebraica/ a F.



$$\boxed{F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}}$$

Ahora que sabemos como se describe F, comprobemos que F es una transformación Lineal.

✓ $$F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right) = F\begin{bmatrix} x+z \\ y+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ -(y+w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ -y-w \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ -w \end{bmatrix} = F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}.$$

✓ $$F\left(c\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = F\begin{bmatrix} cx \\ cy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx \\ -cy \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = c \cdot F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

De esta forma, (1) y (2) muestran que F es una transformación Lineal.

Otra manera de probar que F es una transformación lineal es notar que F se puede escribir como:

$$F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -y \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

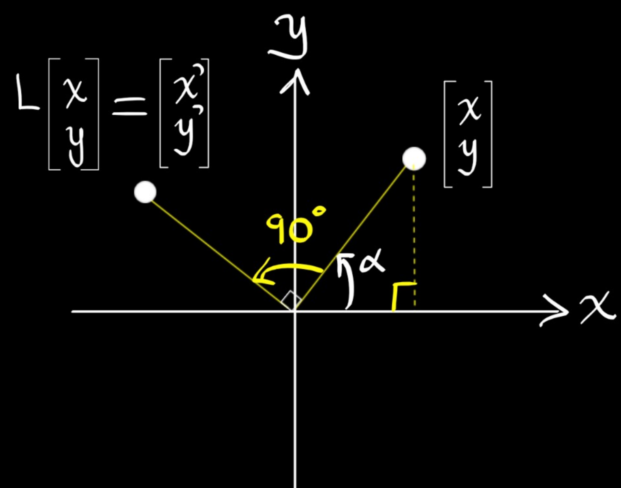
Lo que muestra que $F = T_A$ con $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & - \end{bmatrix}$ y el teorema anterior nos dice que $F = T_A$ debe ser una transformación lineal.

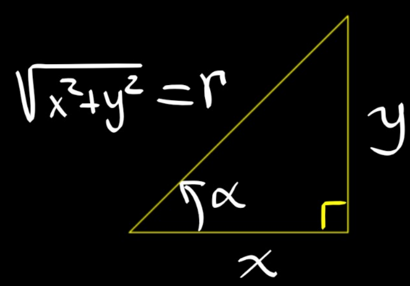
Ejemplo (transformaciones lineales).

Sea $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación que rota $90°$ en sentido contrario de las manecillas del reloj alrededor del origen los puntos del plano $\mathbb{R}^2$. Hallar la descripción algebraica de L y demostrar que L es una transformación lineal.

Solución:

Sea $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ un punto arbitrario del plano y $L\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, entonces geométrica/ tenemos la siguiente descripción:





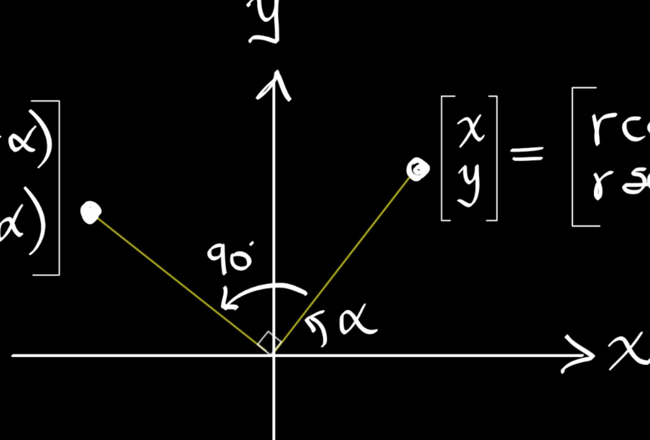
$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

por lo tanto, tenemos que

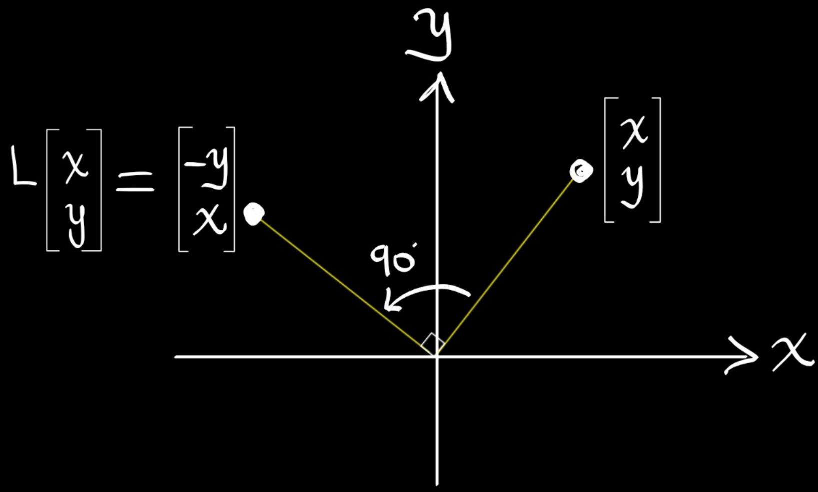
$$L\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(90+\alpha) \\ r\operatorname{sen}(90+\alpha) \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix}$$

$$x' = r\cos(90+\alpha) = r\cdot\left(\cos(90)\cdot\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(90)\cdot\operatorname{sen}(\alpha)\right) = -r\operatorname{sen}(\alpha) = -y.$$

$$y' = r\operatorname{sen}(90+\alpha) = r\cdot\left(\operatorname{sen}(90)\cdot\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(90)\right) = r\cos(\alpha) = x.$$



por lo tanto, del análisis anterior tenemos que:

$$\boxed{L\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \text{ es la rotación de } 90^\circ \text{ en sentido contrario de las manecillas del reloj del vector } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.}$$

Veamos ahora que L es una transformación Lineal. para esto, notamos que:

$$L\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-y\\0\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

Lo cual muestra que $L=T_A$ con $A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ y así el teorema anterior nos dice que $L=T_A$ es una transformación lineal.

Ejercicio: Demostrar que $L\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$ para cada $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ es una transformación lineal usando la definición.

Notación (transformaciones lineales asociadas a una matriz).

sea A una matriz de tamaño $m\times n$, entonces la transformación lineal $T_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ definida por:

$$\boxed{T_A(x) = A \cdot x} \longrightarrow \left(A_{m\times n} \cdot x_{n\times 1}\right)_{m\times 1}$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se le da el nombre de la transformación lineal asociada a la matriz A.

Además, las transformaciones lineales descritas de esta forma se les da el nombre de transformaciones matriciales.

Teorema $\Big($ toda transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación matricial $\Big)$.

Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, entonces $T = T_A$, donde A es la matriz dada por:

$$A = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & \cdots & T(e_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

$$T_A(e_1) = A \cdot e_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = T(e_1).$$

$$T_A(e_2) = A \cdot e_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} = T(e_2).$$

$$\vdots$$

$$T_A(e_n) = A \cdot e_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = T(e_n).$$

Ejercicio Demostrar que si $T, S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son transformaciones lineales tales que:

$$T(e_1) = S(e_1),\ T(e_2) = S(e_2), \ldots, T(e_n) = S(e_n)$$

entonces $T = S$

por lo tanto, como

$$\boxed{T(e_1)=T_A(e_1),\ \dots,\ T(e_n)=T_A(e_n)}$$

entonces concluimos que $T=T_A$. $\blacksquare$

Ejemplo (rotación de θ-grados).

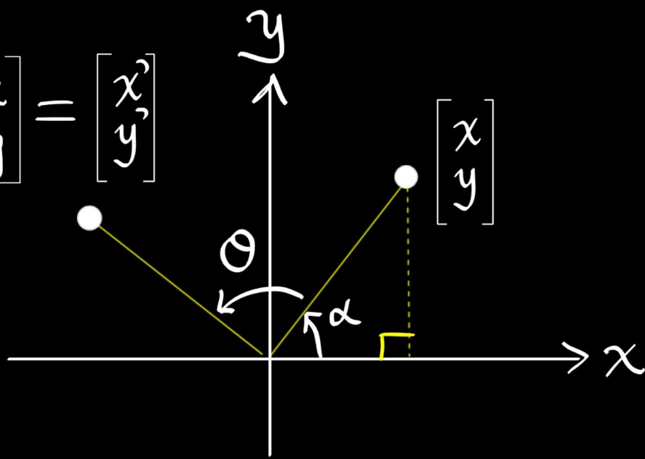
Demostrar que la rotación de θ-grados alrededor del origen de $\mathbb{R}^2$, define una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y encontrar la matriz estandar.

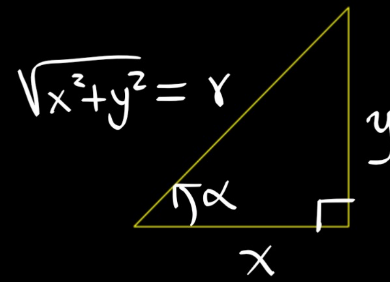
Solución:

Sean $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ un punto arbitrario del plano y

$R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ la rotación de $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ un ángulo de θ grados en sentido contrario de las manecillas del reloj como se muestra en la siguiente figura.

$$R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$





$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

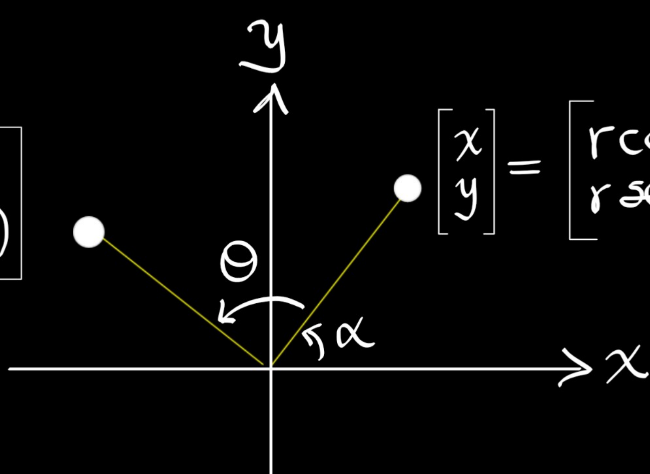
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r}$$

$$x = r\cos(\alpha)$$

$$y = r\operatorname{sen}(\alpha)$$

y además, tenemos que:

$$R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\operatorname{sen}(\alpha+\theta) \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix}$$

✓ $x' = r\cos(\alpha+\theta) = r\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta) =$
$= r\cos\alpha\cos\theta - r\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta.$

✓ $y' = r\operatorname{sen}(\alpha+\theta) = r\cdot(\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cdot\cos\alpha)$
$= r\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\theta + r\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta = y\cos\theta + x\operatorname{sen}\theta.$

por lo tanto

$$R_\theta\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\cos\theta-y\,\mathrm{sen}\,\theta\\y\cos\theta+x\,\mathrm{sen}\,\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\cos\theta\\x\,\mathrm{sen}\,\theta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-y\,\mathrm{sen}\,\theta\\y\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$=x\begin{bmatrix}\cos\theta\\\mathrm{sen}\,\theta\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-\mathrm{sen}\,\theta\\\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta\\\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

Conclusión: si $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta\\\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$, entonces:

(1) T_A es una transformación lineal.

(2) $R_\theta=T_A$ y por lo tanto R_θ es una transformación lineal.

Ejercicio Demostrar que:

$$R_\theta\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\cos\theta-y\,\mathrm{sen}\,\theta\\y\cos\theta+x\,\mathrm{sen}\,\theta\end{bmatrix}$$

es una transformación lineal usando la definición.

Ejemplo (aplicación ejemplo previo).

Hallar la rotación del vector $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

60° en sentido contrario de las manecillas del reloj alrededor del origen.

Solución:

Debido al análisis del ejemplo anterior, tenemos que:

$$R_{60}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(60) & -\operatorname{sen}(60) \\ \operatorname{sen}(60) & \cos(60) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

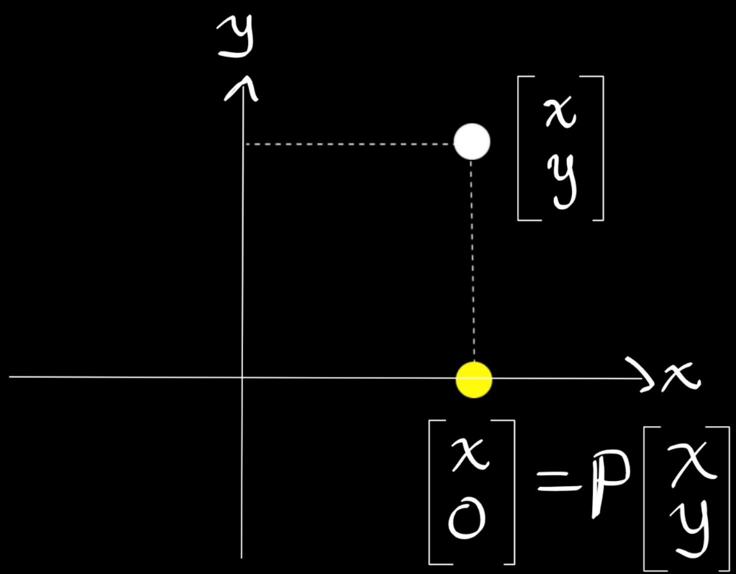
$$R_{60}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3} - 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2\sqrt{3}-1}{2} \end{bmatrix}.$$

Así, la rotación pedida es $\begin{bmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2\sqrt{3}-1}{2} \end{bmatrix}$.

Ejemplo 3.59 (a) Demuestre que la transformación $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que proyecta un punto sobre el eje x es una transformación lineal y encuentre su matriz estándar.
(b) De manera más general, si ℓ es una recta que pasa por el origen en $\mathbb{R}^2$, demuestre que la transformación $P_\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que proyecta un punto sobre ℓ es una transformación lineal y encuentre su matriz estándar.

Solución:

(a) Veamos inicial/ como describir a P algebraica/.



$$P\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = $$
$$= x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

De lo anterior, se tiene que $\underline{P}$ es una transf. lineal ya que $P = T_A$ con $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Ejercicio.