Clase 25

El proceso de ortogonalidad de Gram-schmidt

El proceso de ortogonalidad de Gram-schmidt es un algoritmo que consiste de tomar una base $\{v_1, \ldots, v_m\}$ para un subespacio W de $\mathbb{R}^n$ y encontrar a partir de ella una base ortogonal $\{u_1, \ldots, u_m\}$ de la siguiente manera:

- $u_1 = v_1$.

- $u_2 = v_2 - \dfrac{(u_1 \cdot v_2)}{u_1 \cdot u_1} \cdot u_1$.

- $u_3 = v_3 - \dfrac{(u_1 \cdot v_3)}{u_1 \cdot u_1} \cdot u_1 - \dfrac{(u_2 \cdot v_3)}{u_2 \cdot u_2} \cdot u_2$

$\vdots$

✓ $$u_m = v_m - \frac{(u_1 \circ v_m)}{u_1 \circ u_1} u_1 - \cdots - \frac{(u_{m-1} \circ v_m)}{u_{m-1} \circ u_{m-1}} u_{m-1}$$

y este proceso es llamado el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Además, podemos asegurar que:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{gen}(v_1) &= \text{gen}(u_1) \\ \text{gen}(v_1, v_2) &= \text{gen}(u_1, u_2) \\ &\vdots \\ \text{gen}(v_1, \ldots, v_m) &= \text{gen}(u_1, \ldots, u_m) = W \end{aligned}}$$

Ejemplo.

Usando el proceso de Gram-Schidt para construir una base ortogonal para el subespacio W de $\mathbb{R}^4$ donde

$$W = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solución.

para empezar, veamos como encontrar una base para W (tener en cuenta que los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ no necesaria/ son L.I, hay que verificarlo).

paso(1). Aplicar operaciones elementales a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-4R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{3R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

paso(2): Describir una base para W usando el paso (1).

El análisis anterior nos dice que los vectores $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ son una

base para W (es posible encontrar

más bases del escalonamiento anterior).

$$\begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

Ahora al saber que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para W, podemos aplicar el proceso de Gram-schmidt para encontrar una base ortogonal para W.

- $U_1 = V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $U_2 = V_2 - \dfrac{(U_1 \cdot V_2)}{U_1 \cdot U_1} \cdot U_1$.

- $U_1 \cdot V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 1 + 0 + 1 = 2$.

- $U_1 \cdot U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$.

- $u_2 = V_2 - \dfrac{(u_1 \circ V_2)}{u_1 \circ u_1} \cdot u_1 =$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

- $u_3 = V_3 - \dfrac{(u_2 \circ V_3)}{(u_2 \circ u_2)} \cdot u_2 - \dfrac{(u_1 \circ V_3)}{(u_1 \circ u_1)} u_1.$

- $u_2 \circ V_3 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 + 3 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{15}{2}$

- $u_2 \circ u_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{20}{4}.$

- $u_1 \circ V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 - 2 - 1 + 2 = 1.$

- $u_1 \circ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$

$$u_3 = v_3 - \frac{(u_2 \bullet v_3)}{(u_2 \bullet u_2)} \cdot u_2 - \frac{(u_1 \bullet v_3)}{(u_1 \bullet u_1)} u_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{15/2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9/4 \\ -9/4 \\ -3/4 \\ -3/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/4 \\ 0 \\ 2/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusión.

Una base ortogonal para

$$W = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

es $\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Corolario (Gram-schmidt).

Si $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base para un subespacio W de $\mathbb{R}^n$, entonces al tomar los vectores $\{u_1, \ldots, u_m\}$ la base ortogonal obtenida del proceso de Gram-schmidt, entonces Los vectores $\{w_1, \ldots, w_m\}$ definidos como:

$$\boxed{\begin{aligned} w_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} \\ w_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} \\ &\vdots \\ w_m &= \frac{u_m}{\|u_m\|} \end{aligned}}$$

$\{w_1, \ldots, w_m\}$ se obtienen de los vectores $\{u_1, \ldots, u_m\}$ dividiendolos por su longitud

Entonces $\{w_1, \ldots, w_m\}$ es una base ortonormal para W.

$\blacksquare$

Ejemplo.

Usando el proceso de Gram-Schidt para construir una base ortonormal para el subespacio W de $\mathbb{R}^4$ donde

$$W = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solución.

Por la solución del ejemplo anterior, tenemos que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

forman una base ortogonal para W.

Ahora al tomar los vectores $\{w_1, w_2, w_3\}$ como:

$$w_1 = \frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}.$$

$$w_2 = \frac{\begin{pmatrix}3/2\\3/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}3/2\\3/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}3/2\\3/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\sqrt{5}\\3/2\sqrt{5}\\1/2\sqrt{5}\\1/2\sqrt{5}\end{pmatrix}.$$

$$w_3 = \frac{\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/2\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/2\\1\end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}}\cdot\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/2\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\0\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}.$$

tenemos que una base ortonormal para W es:

$$\{w_1, w_2, w_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2\sqrt{5} \\ 3/2\sqrt{5} \\ 1/2\sqrt{5} \\ 1/2\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 0 \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}.$$

Ejemplo.

Encontrar una base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ que contenga al vector $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Solución.

Vamos a tomar los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ y}$$

afirmamos que $\{v_1, v_2, v_3\}$ son L.I. para esto, es suficiente notar que

$\text{Det}[v_1 \; v_2 \; v_3] \neq 0$ ya que:

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

Así $\{v_1, v_2, v_3\}$ forman una base para $\mathbb{R}^3$. Construyamos ahora una base $\{u_1, u_2, u_3\}$ ortogonal para $\mathbb{R}^3$ que contenga al vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- $u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- $u_2 = v_2 - \dfrac{(u_1 \cdot v_2)}{(u_1 \cdot u_1)} u_1$.

- $u_1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.$

- $u_1 \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 + 4 + 9 = 14.$

- $u_2 = v_2 - \frac{(u_1 \cdot v_2)}{(u_1 \cdot u_1)} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/7 \\ -2/7 \\ -3/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 \\ 5/7 \\ -3/7 \end{pmatrix}.$$

$u_3 = v_3 - \frac{(u_2 \cdot v_3)}{(u_2 \cdot u_2)} u_2 - \frac{(u_1 \cdot v_3)}{(u_1 \cdot u_1)} u_1.$

- $u_2 \cdot v_3 = \begin{pmatrix} -1/7 \\ 5/7 \\ -3/7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{7}.$

- $u_2 \cdot u_2 = \begin{pmatrix} -1/7 \\ 5/7 \\ -3/7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/7 \\ 5/7 \\ -3/7 \end{pmatrix} = \frac{35}{49} = \frac{5}{7}.$

- $u_1 \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.$

- $u_1 \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1+4+9 = 14.$

De donde

$$u_3 = v_3 - \frac{(u_2 \bullet v_3)}{(u_2 \bullet u_2)} u_2 - \frac{(u_1 \bullet v_3)}{(u_1 \bullet u_1)} u_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(-3/7)}{(5/7)} \cdot \begin{pmatrix} -1/7 \\ 5/7 \\ -3/7 \end{pmatrix} - \frac{(3)}{(14)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} -1/7 \\ 5/7 \\ -3/7 \end{pmatrix} - \frac{3}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3/35 - 3/14 \\ 3/7 - 3/7 \\ 1 - 9/35 - 9/14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/10 \\ 0 \\ 1/10 \end{pmatrix}.$$

Conclusión.

una base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ es

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/7 \\ 5/7 \\ -3/7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/10 \\ 0 \\ 1/10 \end{pmatrix} \right\}.$$