Ejemplo 2.11 Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} w - x - y + 2z &= 1 \\ 2w - 2x - y + 3z &= 3 \\ -w + x - y &= -3 \end{aligned}$$

Solución:

paso(1): Describir la matriz aumentada del sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} w - x - y + 2z &= 1 \\ 2w - 2x - y + 3z &= 3 \\ -w + x - y &= -3 \end{aligned} \longleftrightarrow \begin{array}{ccccc} w & x & y & z & \# \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

paso(2): Usar operaciones elementales por reglones para reducir la matriz aumentada del paso (1) a una matriz escalonada.

$$\begin{array}{ccccc} w & x & y & z & \# \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 + R_1]{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 + 2R_2} \begin{array}{ccccc} w & x & y & z & \# \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Paso(3): Con la matriz escalonada obtenida en el paso (2), encontrar el nuevo sistema de ecuaciones que ella describi y resolverlo.

$$\begin{array}{ccccc} w & x & y & z & \# \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longleftrightarrow \begin{array}{r} 1\cdot w - 1\cdot x - 1\cdot y + 2\cdot z = 1 \\ 1\cdot y - 1\cdot z = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\cdot w - 1\cdot x - 1\cdot y + 2\cdot z = 1 \\ 1\cdot y - 1\cdot z = 1 \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{r} w - x - y + 2z = 1 \\ y - z = 1 \end{array}$$

✓ $y - z = 1 \longrightarrow \boxed{y = 1 + z.}$

✓ $w - x - y + 2z = 1 \longrightarrow w = 1 + x + y - 2z$

$$w = 1 + x + y - 2z = 1 + x + (1 + z) - 2z$$

$$\boxed{w = 2 + x - z.}$$

Del anterior análisis, podemos afirmar que la solución del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + x - z \\ x \\ 1 + z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

★

Conclusión:

La solución del sistema de ecuaciones es

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde x y z pueden tomar cualquier valor numérico. De hecho en este caso, es fácil notar que hay infinitas soluciones.

Definición (rank de una matriz).

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Si A se reduce a una matriz escalonada por renglones A', entonces definimos el rank de A como:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{rank}(A) &= \#\text{ de renglones no nulos de } A' \\ \text{rank}(A) &= \#\text{ de pivotes de } A' \end{aligned}}$$

Ejemplo (rank de una matriz).

(1) Si $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $\operatorname{rank}(A)=2$.

(2) Si $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, entonces:

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto $\operatorname{rank}(B)=2$.

(3) Si $C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, entonces $\operatorname{rank}(C)=0$.

(4) Si $D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix}$, entonces:

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-6R_1]{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 5 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

entonces $\operatorname{rank}(D)=3$.

(5) Si $E=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, entonces $\operatorname{rank}(E)=1$.

Definición (variables básicas y variables libres de un sistema de ecuaciones consistente).

Supongamos que tenemos el sistema de ecuaciones lineales consistente:

$$\boxed{\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}} \longleftrightarrow A\cdot x = b \longleftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right]$$

sistema de ecuaciones

ecuación matricial

matriz aumentada del s.e.L.

Si $\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right]$ se reduce a la matriz escalonada por renglones $\left[\begin{array}{c|c} A' & b' \end{array}\right]$ y $R_1, R_2, \ldots, R_m$ son los renglones de la matriz A', entonces:

(1) Si $R_i=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \end{bmatrix}$ es un renglón no nulo y c_{ij} es el primer elemento de

izquierda de derecha no nulo (pivote de la matriz A'), entonces x_j es llamada una variable básica para la solución del sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \cdots & x_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$R_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{ij} & c_{i(j+1)} & \cdots & c_{in} \end{bmatrix}$$

(2) Las variables que no sean básicas son llamadas variables libres.

Ejemplo (variables básicas y libres).

① Dado el sistema de ecuaciones

$$\boxed{\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 4x + 6y &= 10 \end{aligned}}$$

entonces

(i) La matriz aumentada del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{array}{ccc} x & y & \# \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 10 \end{array}\right].$$

(✓) Al escalonar la matriz aumentada tenemos que

$$\begin{array}{ccc} x & y & \# \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow 2x+3y=5.$$

De lo anterior tenemos que

(✓) El sistema de ecuaciones es consistente.

(✓) La variable básica en el sistema de ecuaciones es x.

(✓) La variable libre del sistema de ecuaciones es y.

② Dado el sistema de ecuaciones

$$\boxed{\begin{aligned} 2x+3y&=5 \\ 4x+6y&=3 \end{aligned}}$$

entonces

(✓) La matriz aumentada del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{array}{ccc} x & y & \# \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 3 \end{array}\right].$$

(✓) Al escalonar la matriz aumentada tenemos que

$$\begin{array}{ccc} x & y & \# \\ \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} x & y & \# \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{ccc} x & y & \# \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{cases} 2 \cdot x + 3 \cdot y = 5 \\ \qquad\quad 0 = -7 \end{cases}.$$

De lo anterior tenemos que

(✓) El sistema de ecuaciones es inconsistente.

(✓) El sistema no tiene variables básicas ni variables libres.

③ Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

(v) La matriz aumentada del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \# \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right].$$

(v) Al escalonar la matriz aumentada obtenemos la matriz:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \# \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longleftrightarrow \begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(✓) El sistema de ecuaciones es consistente.

(✓) Las variables básicas del sistema de ecuaciones son x_1, x_2 y x_3.

(v) El sistema de ecuaciones no tiene variebles libres.

4 Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} w-x-y+2z&=1\\ 2w-2x-y+3z&=3\\ -w+x-y&=-3 \end{aligned}$$

(✓) La matriz aumentada del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} w & x & y & z & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \end{array}.$$

(✓) Al escalonar la matriz aumentada obtenemos la matriz:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} w & x & y & z & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} w-x-y+2z&=1\\ y-z&=1 \end{aligned}\right\}.$$

(✓) El sistema de ecuaciones es consistente.

(✓) Las variables básicas del sistema de ecuaciones son w y y.

(V) Las variables libres del sistema de ecuaciones son x y z.