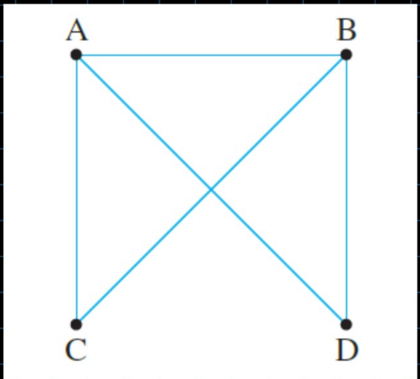
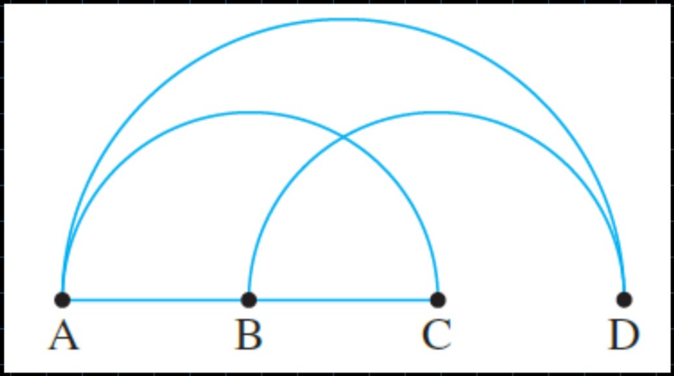
Grafos y digrafos.

Definición (grafo):

Un ***grafo*** consiste de un conjunto finito de puntos (llamados *vértices*) y un conjunto finito de *aristas*, cada una de las cuales conecta dos vértices (no necesariamente distintos). Se dice que dos vértices son *adyacentes* si son los puntos finales de una arista.





Observación (Grafos y matrices).

Es posible registrar la información esencial acerca de un grafo en una matriz y usar álgebra matricial para ayudar a responder ciertas preguntas acerca del grafo. Esto es particularmente útil si los grafos son grandes, pues las computadoras pueden manejar los cálculos muy rápidamente.

$\rightarrow V=\{v_1,\dots,v_n\}$ vértices.

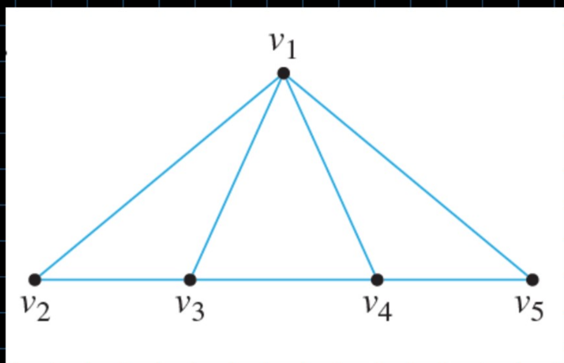
Definición Si G es un grafo con n vértices, entonces su ***matriz de adyacencia*** es la matriz A [o $A(G)$] de $n \times n$ definida por

$$a_{ij} = \boxed{\text{\# de aristas entre el vértice } v_i \text{ y el vértice } v_j.}$$

para todo $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$.

Ejemplo.

Hallar la matriz de adyacencia del siguiente grafo.



$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

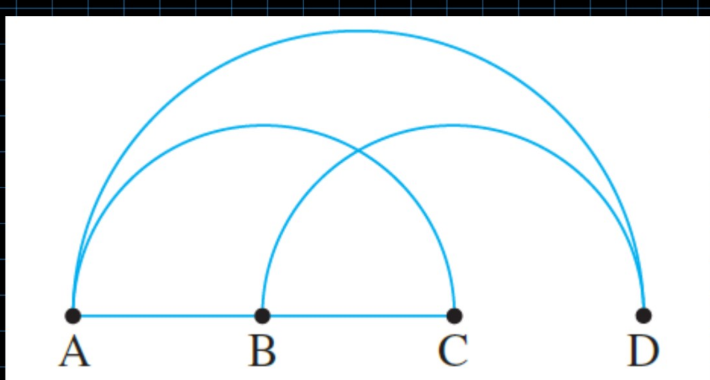
$V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$

vértices

columnas   filas

Ejemplo.

Hallar la matriz de adyacencia del siguiente grafo.



$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

$V = \{A, B, C, D\}$

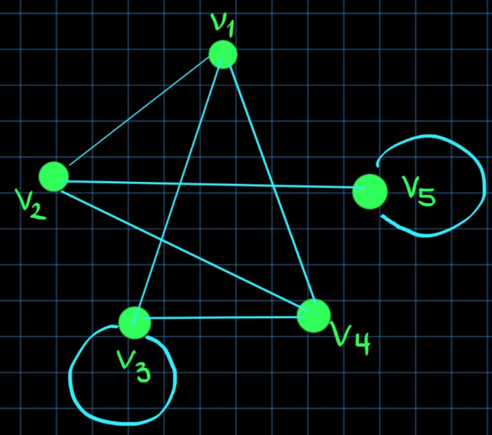
columnas   filas

$A = V_1$, $B = V_2$, $C = V_3$, $D = V_4$

Comentario Observe que la matriz de adyacencia de un grafo necesariamente es una matriz simétrica. (¿Por qué?) Note también que una entrada diagonal a_{ii} de A es cero a menos que haya un bucle en el vértice i.

(1) simetría de la matriz de adyacencia.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \end{bmatrix}$$



Recordar (matriz simétrica):

una matriz $A_{n\times n}$ es simétrica, si $A^T = A$.
(las columnas son "iguales" a las filas).

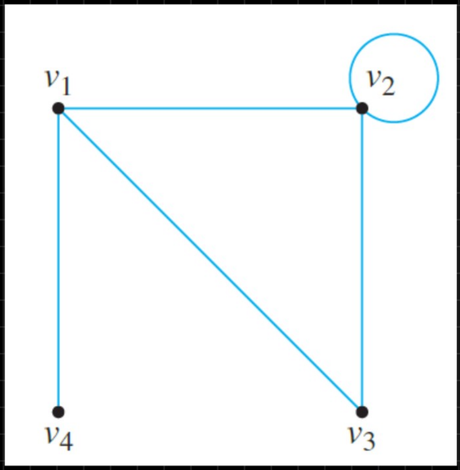
(2) Bucle: Es una arista entre un vértice con él mismo.

Definición (trayectoria).

Una ***trayectoria*** en un grafo es una secuencia de aristas que permiten viajar de un vértice a otro de manera continua. La ***longitud*** de una trayectoria es el número de aristas que contiene, y a una trayectoria con k aristas se le denominará ***k-trayectoria.***

Ejemplo.

Dado el siguiente grafo, hallar las siguientes trayectorias:



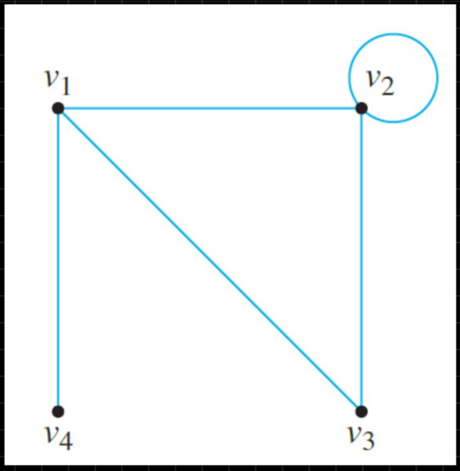
(1) Las 1-trayectorias.

(2) Las 2-trayectorias.

Solución:

(1) Las 1-trayectorias son:

- V_1V_2, V_1V_3, V_1V_4.
- V_2V_1, V_2V_2, V_2V_3.
- V_3V_1, V_3V_2.
- V_4V_1.



(2) Las 2-trayectorias son:

- $V_1V_2V_1$, $V_1V_3V_1$, $V_1V_4V_1$.
- $V_1V_2V_2$, $V_1V_2V_3$, $V_1V_3V_2$.
- $V_2V_1V_2$, $V_2V_1V_3$, $V_2V_1V_4$, $V_2V_2V_1$, $V_2V_2V_3$, $V_2V_3V_1$, $V_2V_3V_2$.

- $V_3V_1V_2$, $V_3V_1V_3$, $V_3V_1V_4$, $V_3V_2V_1$, $V_3V_2V_2$, $V_3V_2V_3$.
- $V_4V_1V_2$, $V_4V_1V_3$, $V_4V_1V_4$.

Definición (trayectoria cerrada y simple).

Sea G un grafo, entonces:

(1) Una trayectoria cerrada es una trayectoria que empieza y términa en el mismo punto.

(2) Una trayectoria simple es una trayectoria que no pasa por 2 veces por una misma arista.

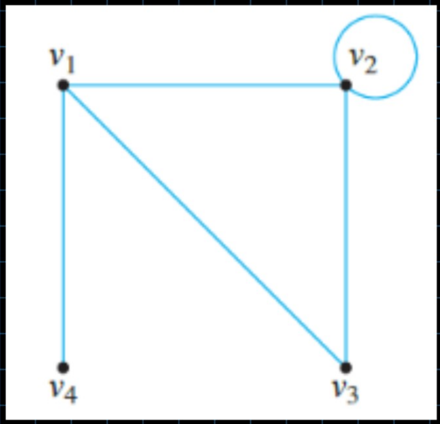
Teorema (Relación entre la matriz de adyacencia y el # de k-trayectorias)

> Si A es la matriz de adyacencia de un grafo G, entonces la entrada (i, j) de A^k es igual al número de k-trayectorias entre los vértices i y j.

■

Ejemplo.

Consideremos el grafo dado en la siguiente figura.

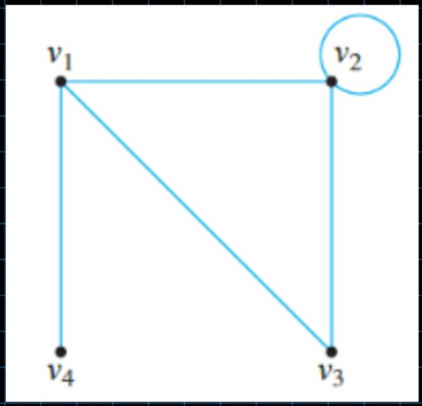


entonces

(1) La matriz de adyacencia del grafo anterior es:

$V = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$
vértices

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{bmatrix}$$



(2) Hallar $A^2 = A \cdot A$ y dar una interpretación de los coeficientes.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

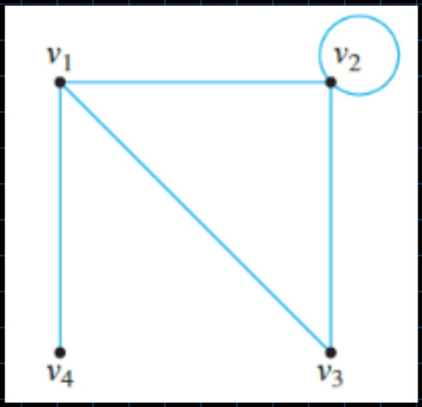
$A^2 = [a_{ij}]$ con $1 \leq i \leq 4$ y $1 \leq j \leq 4$.

$a_{11} = 3$

$a_{12} = 2$

$a_{13} = 1$

$a_{14} = 0$

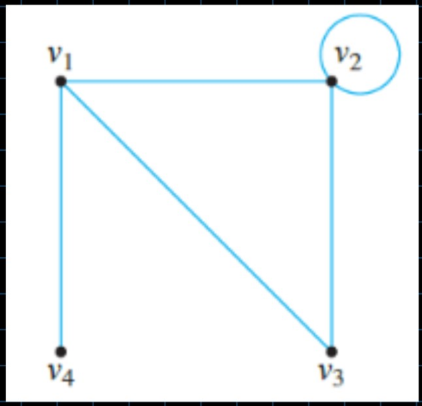


$a_{21} = 2$

$a_{22} = 3$

$a_{23} = 2$

$a_{24} = 1$

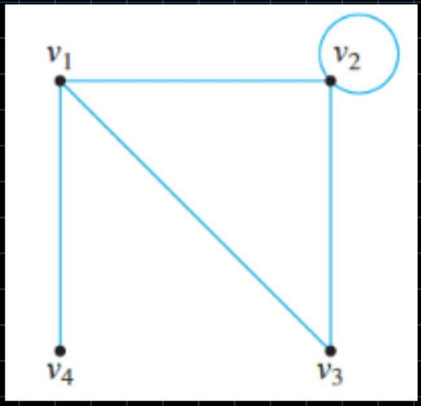


$a_{31} = 1$

$a_{32} = 2$

$a_{33} = 2$

$a_{34} = 1$

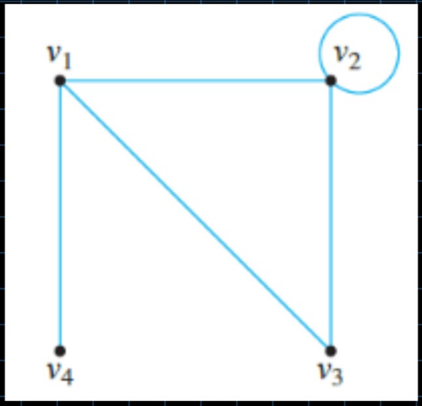


$a_{41} = 0$

$a_{42} = 1$

$a_{43} = 1$

$a_{44} = 1$



(3) Determinar el número de 3- trayectorias entre V_1 y V_2.

para esto es necesario determinar A^3 y mirar el coeficiente $(1,2)$.

coeficiente $(1,2)$

★ $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 5 & 3 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$.

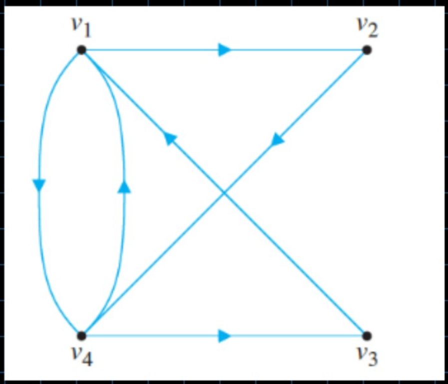
★ si $A^3 = [b_{ij}]$, entonces $\boxed{b_{12} = 6}$ y así el número de 3- trayectorias de V_1 a V_2 es $\underline{\ 6\ }$.

Definición (digrafo):

un grafo con aristas dirigidas se llama digrafo.

Ejemplo.

El siguiente grafo es un ejemplo de un digrafo.



$\rightarrow V=\{v_1,\dots,v_n\}$ vértices

Definición Si G es un digrafo con n vértices, entonces su ***matriz de adyacencia*** es la matriz A [o $A(G)$] de $n \times n$ definida por

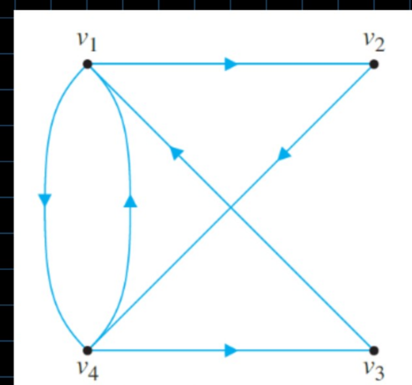
$$\boxed{a_{ij} = \text{\# de aristas dirigidas que van desde el vértice } v_i \text{ al vértice } v_j.}$$

$1 \leq i \leq n$

$1 \leq j \leq n$

Ejemplo.

Hallar la matriz de adyacencia del siguiente digrafo.



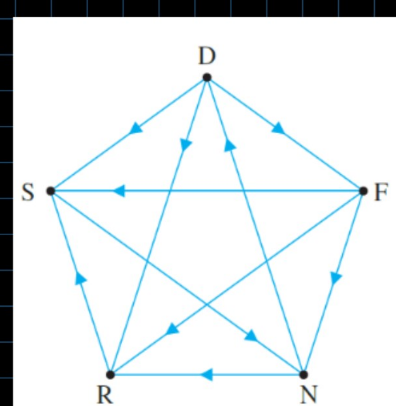
Solución:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ vértices.

Ejemplo 3.69 Cinco tenistas (Djokovic, Federer, Nadal, Roddick y Safin) compiten en un torneo con el sistema *round-robin* en el que cada jugador compite con todos los demás una vez. El digrafo en la figura resume los resultados. Una arista dirigida del vértice i al vértice j significa que el jugador i venció al jugador j.

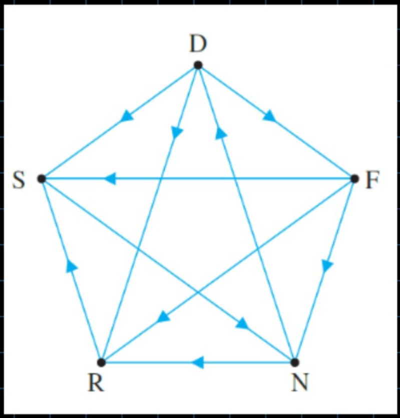
- $V_1 = D =$ Djokovic.
- $V_2 = F =$ Federer.
- $V_3 = N =$ Nadal.
- $V_4 = R =$ Roddick.
- $V_5 = S =$ Safin.



Entonces:

(1) si A es la matriz de adyacencia del digrafo ilustrado anterior, entonces:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{bmatrix}$$



$D = V_1$

$F = V_2$

$N = V_3$

$R = V_4$

$S = V_5$

(2)

Suponga que se quiere clasificar a los cinco jugadores con base en los resultados de sus partidos. Una forma de hacer esto puede ser contar el número de triunfos de cada jugador. Observe que el número de triunfos de cada jugador es justo la suma de las entradas en el renglón correspondiente; de manera equivalente, el vector que contiene todas las sumas de renglón está dado por el producto $A\mathbf{j}$, donde

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En este caso se tiene

$$A\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que produce la siguiente clasificación:

Primero: Djokovic, Federer (empatados)
Segundo: Nadal
Tercero: Roddick, Safin (empatados)

¿Los jugadores empatados en esta clasificación son igualmente fuertes? Djokovic puede argumentar que, puesto que venció a Federer, él merece el primer lugar. Roddick usaría el mismo tipo de argumento para romper el empate con Safin. Sin embargo, Safin podría argumentar que él tiene dos victorias "indirectas" porque venció a Nadal, quien venció a otros *dos*; más aún, él puede puntualizar que Roddick sólo tiene *una* victoria indirecta (sobre Safin, quien venció a Nadal).

Dado que en un grupo de empates puede no haber un jugador que venciera a todos los demás en el grupo, la notación de victorias indirectas parece más útil. Más aún, una victoria indirecta corresponde a una 2-trayectoria en el digrafo, de modo que puede usar el cuadrado de la matriz de adyacencia. Para calcular tanto los triunfos como las victorias indirectas para cada jugador, se necesitan las sumas de renglón de la matriz $A + A^2$, que están dadas por

$$(A + A^2)\mathbf{j} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, los jugadores se clasificarían en el siguiente orden: Djokovic, Federer, Nadal, Safin, Roddick. Por desgracia, este planteamiento no garantiza romper todos los empates.