Clase 9.

Determinantes.

Definición (determinantes de matrices 2x2).

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, entonces el determinante de A está dado por:

$$\boxed{\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Notación (determinante de matrices).

El determinante de una matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, en ocasiones se denota por $|A|$, de modo que es posible escribir

$$\boxed{|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Definición (determinantes de matrices 1x1).

El determinante de una matriz $A=[a_{11}]$ de tamaño 1x1 es:

$$\boxed{\det(A)=\det[a_{11}]=a_{11} \quad \left(|A|=|a_{11}|=a_{11}\right)}.$$

Definición (determinantes de matrices 3x3).

Sea $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, entonces el determinante de A está dado por:

$$\boxed{\begin{aligned}\det(A) &= \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}\cdot \det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\cdot \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\cdot \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\end{aligned}}$$

ó usando la notación mencionada anterior/

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejemplo (determinante de una matriz 3x3).

Calcule el determinante de:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solución:

$$|A| = 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\left(0 \cdot 3 - 2 \cdot (-1)\right) + 3\left(1 \cdot 3 - 2 \cdot 2\right) + 2\left(1 \cdot (-1) - 0 \cdot 2\right)$$

$$= 5(0+2) + 3(3-4) + 2(-1-0)$$

$$= 10 - 3 - 2 = 5.$$

Observación (determinante de matrices 3x3).

Los siguientes pasos muestran una forma equivalente de encontrar el determinante de una matriz 3x3.

Paso (1): poner la matriz 3x3 y luego volver a escribir las 2 primeras columnas como se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

paso (2): Multiplicar los números en cada linea como se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$

Paso (3): Si A es la matriz 3x3 original entonces el determinante de A se calcula como:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{23})$$
$$- (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}).$$

Ejemplo (aplicación observación anterior).

Hallar el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ usando el método mostrado anteriormente.

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \left[\begin{matrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{matrix} =$$

$$\begin{matrix} - & - & - & + & + & + \end{matrix}$$

$$= (5 \cdot 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot (-1)) - (5 \cdot 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 \cdot 3 + 0)$$

$$= (0 - 12 - 2) - (-10 - 9) = -14 + 19 = 5.$$

Definición (Submatriz de una matriz):

(1) Dada una matriz A, decimos que B es una submatriz de A, si B se obtiene eliminando algunas filas ó columnas de A.

(2) Dada una matriz A, denotamos a A_{ij} por la submatriz de A que se obtiene al eliminar la fila i de A y la columna j de A.

Ejemplo (submatrices).

Sea $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Determinar A_{11} y A_{23}.

Solución:

- $A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.
- $A_{23} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Nota (siguiente definición).

A continuación definimos el determinante de una matriz $n \times n$ de manera recursiva.

Definición (determinantes de matrices $n \times n$).

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$ una matriz

de tamaño $n \times n$, entonces definimos el determinante de A como:

$$\boxed{|A| = a_{11} \cdot |A_{11}| - a_{12} |A_{12}| + a_{13} \cdot |A_{13}| + \cdots + (-1)^{1+n} \cdot a_{1n} \cdot |A_{1n}|}$$

Esta definición es recursiva.

Ejemplo (determinante de una matriz 4×4).

Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, entonces hallar el

determinante de A.

Solución:

Usando la definición anterior, se tiene que:

$$|A| = 0\begin{vmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

donde:

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -9.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -207.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -99$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 45$$

por lo tanto, tenemos que:

$$|A| = 0\cdot(-9) - 2(-207) - 4(-99) - 5(45).$$

$$|A| = 585.$$

Definición (cofactores de una matriz cuadrada):

Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. para $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ definimos el cofactor (i, j) de A como:

$$\boxed{C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})} \, .$$

Nota (siguiente teorema).

El siguiente resultado nos dice como calcular el determinante de una matriz de varias formas diferentes.

Teorema (expanción de Laplace).

(1) Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

entonces

$$|A| = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \cdots + a_{in} C_{in} \, .$$

(2) Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

entonces:

$$\boxed{|A| = a_{1j} \cdot C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \cdots + a_{nj} C_{nj}}$$

Ejemplo (aplicación teorema anterior).

Dada la matriz A descrita por:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Hallar $|A|$ usando el tercer renglón.

(b) Hallar $|A|$ usando la segunda columna.

Solución:

(a) $A=\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = 2\cdot C_{31} + (-1)C_{32} + 3\,C_{33}$

donde

$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot \left(-3\cdot 2 - 2\cdot 0\right) = -6.$

$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot \left(5\cdot 2 - 2\cdot 1\right) = -8.$

$C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot \left(5\cdot 0 - (-3)\cdot 1\right) = 3$

por lo tanto, se tiene que:

$|A| = 2\cdot C_{31} + (-1)\cdot C_{32} + 3\cdot C_{33} = 2\cdot(-6) - 1\cdot(-8) + 3\cdot 3 = 5.$

(b) $A=\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = -3\,C_{12} + 0\cdot C_{22} + (-1)C_{32}.$

donde

$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot \left(1\cdot 3 - 2\cdot 2\right) = 1.$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (5 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = 11$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (5 \cdot 2 - 2 \cdot 1) = -8$$

por lo tanto, se tiene que:

$$|A| = -3 \cdot C_{12} + 0 \cdot C_{22} + (-1)C_{32} = -3 \cdot 1 + 0 \cdot 11 + (-1)(-8)$$

$$|A| = 5.$$

Ejemplo (aplicación del teorema anterior).

Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución:

Notemos inicial/ que para determinar el determinante de A, es mucho más sencillo trabajar con la tercera columna (¿por qué?). y así, se tiene que:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & \boxed{0} & 1 \\ 5 & 4 & \boxed{2} & 0 \\ 1 & -1 & \boxed{0} & 3 \\ -2 & 1 & \boxed{0} & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot C_{13} + 2 \cdot C_{23} + 0 \cdot C_{33} + 0 \cdot C_{43} = 2C_{23}$$

donde

- $C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}.$

- $C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot \left(-2\tilde{C}_{31} + 1\tilde{C}_{32}\right)$

$= -1 \cdot (11) = -11$

- $C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}.$

- $C_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}.$

De esta manera, tenemos que:

$$\begin{cases} |A| = 2 \cdot C_{23} = 2(-11) = -22 \\ |A| = -22. \end{cases}$$

Ejemplo (aplicación teorema anterior).

Calcular el determinante de la matriz

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solución:

Notemos inicial/ que para determinar el determinante de A, es mucho más sencillo trabajar con la primera columna (¿por qué?). y así se tiene que:

$$|A|=\begin{vmatrix} \boxed{2} & -3 & 1 & 0 & 4 \\ \boxed{0} & 3 & 2 & 5 & 7 \\ \boxed{0} & 0 & 1 & 6 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 5 & 2 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot C_{11}+0\cdot C_{21}+0\cdot C_{31}+0\cdot C_{41}$$

$$=2C_{11}$$

$$C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{3} & 2 & 5 & 7 \\ \boxed{0} & 1 & 6 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & 5 & 2 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot \widetilde{C_{11}}$$

$$= 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} \boxed{1} & 6 & 0 \\ \boxed{0} & 5 & 2 \\ \boxed{0} & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot\left(1\cdot\widetilde{C}_{11}\right) = 3\cdot\widetilde{C}_{11}$$

$$= 3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot\left(5\cdot(-1) - 2\cdot 0\right) = -15.$$

por tanto $|A| = 2C_{11} = 2(-15) = -30.$

Observación (ejemplo anterior).

Del ejemplo anterior notamos que:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 1\cdot 5\cdot(-1) = -30.$$

pero esto no solo se cumple para esta matriz, esto se cumple para todas las matrices triangulares, donde:

- ✓ una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ es triangular superior, si:

$$\boxed{a_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad i > j}.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

✓ una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ es triangular inferior, si:

$$\boxed{a_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad i < j}.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{22} & a_{23} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

y el siguiente es el resultado que estamos mencionando.

Teorema (determinante de matrices triangulares).

(1) si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ es una matriz

triangular superior, entonces:

$$\boxed{|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}}.$$

(2) si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{22} & a_{23} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ es una matriz

triangular inferior, entonces:

$$\boxed{|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}}.$$

Ejemplo (aplicación del teorema previo).

Hallar los determinantes de las siguientes matrices:

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & \pi & e & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$

(2) $B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow |B| = 8 \cdot 2 \cdot 6 = 96.$

(3) Si $D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ es una matriz diagonal, entonces $|D| = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}.$

(4) Si I_n es la matriz identidad de tamaño $n \times n$, entonces $|I_n| = 1$

(5) Si $\mathbb{O}_n$ es la matriz nula, entonces $|\mathbb{O}_n| = 0.$

Teorema 4.3 Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada.

a. Si A tiene un renglón (columna) cero, entonces $\det A = 0$.

b. Si B se obtiene al intercambiar dos renglones (columnas) de A, entonces $\det B = -\det A$.

c. Si A tiene dos renglones (columnas) idénticos, entonces $\det A = 0$.

d. Si B se obtiene al multiplicar un renglón (columna) de A por k, entonces $\det B = k \det A$.

e. Si A, B y C son idénticas, excepto que el i-ésimo renglón (columna) de C es la suma de los i-ésimos renglones (columnas) de A y B, entonces $\det C = \det A + \det B$.

f. Si B se obtiene al sumar un múltiplo de un renglón (columna) de A a otro renglón (columna), entonces $\det B = \det A$.

Ejemplos (literal ⓐ teorema anterior).

Hallar los determinantes de las siguientes matrices:

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \pi \\ e & 5 & 7 & -1 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \\ -2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = 0.$

(2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ e & \pi & 0 & -1 & 4 \\ 8 & 7 & 0 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow |B| = 0.$

Ejemplos (literal ⓑ teorema anterior).

(1) Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, entonces

$|A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

$|B| = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 2$

$\longrightarrow |B| = -|A|.$

(2) Sea $A=\begin{bmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix}2\\5\\b\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}3\\a\\1\end{matrix}} \end{bmatrix}$ donde $\underline{\underline{a}}$ y $\underline{\underline{b}}$

son números reales que satisfacen que $|A|=1$, entonces si:

$$B=\begin{bmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix}3\\a\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}2\\5\\b\end{matrix}} \end{bmatrix}$$

tenemos que $|B|=-|A|=-(-1)=1$, ya que B se obtiene de A cambiando la columna 2 y 3 de A.

(3) Sean $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$,

entonces podemos notar que:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} = B$$

por lo tanto, tenemos que $|A| = |B|$.

Ejemplos (literal ⓒ teorema anterior).

(1) si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = 0.$

(2) si $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ e & \pi & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 8 \\ e & \pi & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow |B| = 0.$

(3) si $C = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} \longrightarrow |C| = ab - ab = 0.$

$D = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} \longrightarrow |D| = ab - ab = 0.$

Ejemplos (literal ⓓ teorema anterior).

(1) si $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, entonces

$$|A| = 1\cdot 2 - 3\cdot 1 = -1$$
$$|B| = 4 - 6 = -2$$
$$\longrightarrow \quad |B| = 2\cdot |A|$$
$$-2 = 2\cdot(-1)$$

(2) si $A = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{10} & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{5} & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$,

entonces:

$$|A| = 1\cdot 4\cdot 8 = 32$$
$$|B| = 1\cdot 2\cdot 8 = 16$$
$$\longrightarrow \quad |A| = 2|B|$$
$$32 = 2(16)$$

(3) supongamos que $A_n = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2^n & 2^n\cdot 3 & 2^n\cdot 5 \\ e & f & g \end{bmatrix}$

y además $|A_0| = 10$.

Hallar $|A_n|$ para $n \geq 1$.

Solución:

- $A_1 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot 5 \\ e & f & g \end{bmatrix} \longrightarrow |A_1| = 2\,|A_0| = 2\cdot 10$

- $A_2 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ \boxed{2^2 \quad 2^2\cdot 3 \quad 2^2\cdot 5} \\ e & f & g \end{bmatrix} \longrightarrow |A_2| = 2|A_1| = 2\cdot 2\cdot 10$

$|A_2| = 2^2\cdot 10.$

- $A_n = \begin{bmatrix} a & b & c \\ \boxed{2^n \quad 2^n\cdot 3 \quad 2^n\cdot 5} \\ e & f & g \end{bmatrix} \longrightarrow |A_n| = 2|A_{n-1}| = \cdots$

$= 2^n|A_0| = 2^n\cdot 10.$

Ejemplos (literal ⓔ teorema anterior).

(1) Sean $A = \begin{bmatrix} a & b \\ \boxed{c \quad d} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ \boxed{e \quad f} \end{bmatrix}$ y

$C = \begin{bmatrix} a & b \\ \boxed{c+e \quad d+f} \end{bmatrix}$, entonces:

$|A| = ad - bc$

$|B| = af - be \longrightarrow |C| = |A| + |B|.$

$|C| = (ad + af) - (bc + be)$

$= (ad - bc) + (af - be)$

(2) Sean $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}$ y

$C=\begin{bmatrix} a & b+e \\ c & d+f \end{bmatrix}$, entonces:

$$|A| = ad-bc$$
$$|B| = af+ec$$
$$|C| = (ad+af)-(cb+ce)$$
$$= (ad-bc)+(af-ec)$$
$$\longrightarrow |C| = |A|+|B|$$

(3) Si $A=\begin{bmatrix} 4 & a & 3 \\ 5 & b & 1 \\ 2 & c & 3 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 4 & e & 3 \\ 5 & f & 1 \\ 2 & g & 3 \end{bmatrix}$ satisfacen que $|A|=5$ y $|B|=3$; y además $C=\begin{bmatrix} 4 & a+e & 3 \\ 5 & b+f & 1 \\ 2 & c+g & 3 \end{bmatrix}$, entonces determinar el valor de $|C|$.

Solución:

$|C| = |A| + |B|$ ya que la segunda columna de C es la suma de las segundas columnas de A y B, y además el resto de las columnas son iguales.

$$|C| = 5 + 3 = 8.$$

Ejemplos (literal (f) teorema anterior).

(1) Sean $A = \begin{bmatrix} \boxed{a \quad b} \\ c \quad d \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} \boxed{a + rc \quad b + rd} \\ c \quad d \end{bmatrix}$,

entonces:

$|A| = ad - bc$

$|B| = (ad + rcd) - (bc + rcd) \longrightarrow |B| = ad - bc$

$|A| = ad - bc$

$|A| = |B|$.

(2) Sean $A = \begin{bmatrix} a & \boxed{c} \\ b & \boxed{d} \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} a & \boxed{c + ra} \\ b & \boxed{d + rb} \end{bmatrix}$,

entonces:

$$|A| = ad - bc$$
$$|B| = (ad + rab) - (bc + rab) \longrightarrow |A| = |b|.$$
$$|B| = ad - bc$$

(3) sea $A = \begin{bmatrix} \boxed{2 \quad 3 \quad -1} \\ 0 \quad 5 \quad 3 \\ -4 \quad -6 \quad 2 \end{bmatrix}$, entonces:

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

Lo cual implica que $|A| = 0$.

Ejemplo.

Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$. Hallar $|A|$.

Solución:

$$\begin{vmatrix} \boxed{0 \quad 2 \quad -4 \quad 5} \\ \boxed{3 \quad 0 \quad -3 \quad 6} \\ 2 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \\ 5 \quad -1 \quad -3 \quad 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boxed{3 \quad 0 \quad -3 \quad 6} \\ \boxed{0 \quad 2 \quad -4 \quad 5} \\ 2 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \\ 5 \quad -1 \quad -3 \quad 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad -1 \quad 2} \\ 0 \quad 2 \quad -4 \quad 5 \\ 2 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \\ 5 \quad -1 \quad -3 \quad 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} = -(-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 15 & -33 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 15 \cdot (-13) = 585.$$