Clase 21.

Transformaciones lineales inyectivas y Sobreyectivas.

Definición (transformaciones lineales inyectivas y sobreyectivas).

Sea $T: \mathcal{U} \to V$ una transformación lineal, entonces:

(1) Decimos que T es inyectiva, si para todo $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ se satisface que:

$$\boxed{T(u_1) = T(u_2) \longrightarrow u_1 = u_2.}$$

o

$$\boxed{u_1 \neq u_2 \longrightarrow T(u_1) \neq T(u_2)}$$

(2) Decimos que T es sobreyectiva, si

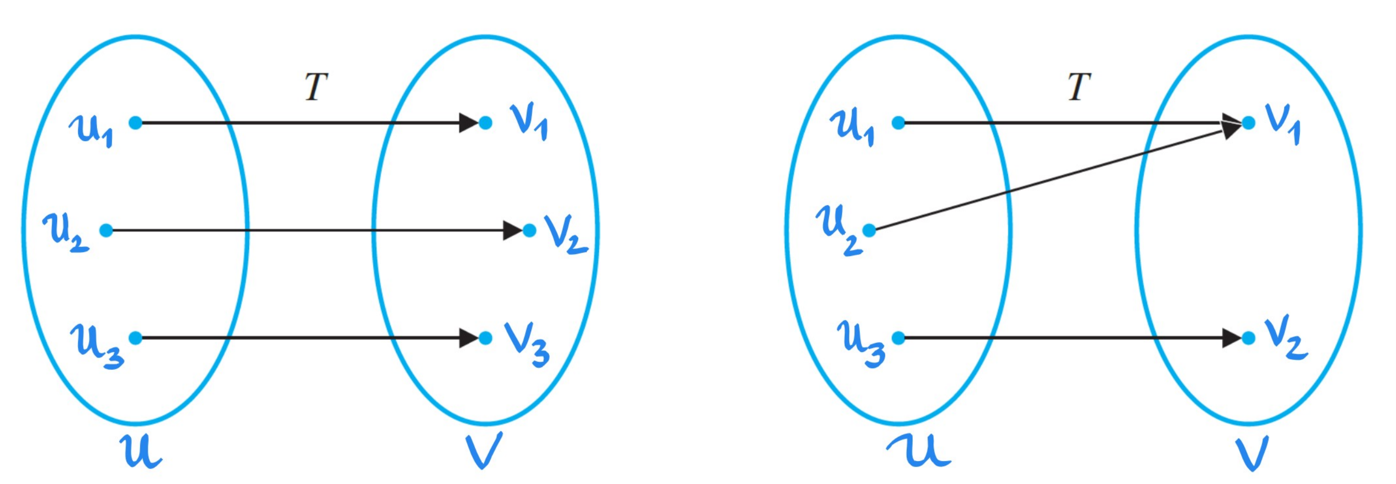
$$\boxed{\text{Rango}(T) = \{ T(u) \in V / u \in \mathcal{U} \} = V}$$

o

$$\boxed{\text{para todo } v \in V, \text{ existe } u \in \mathcal{U} \text{ tal que } T(u) = V}$$

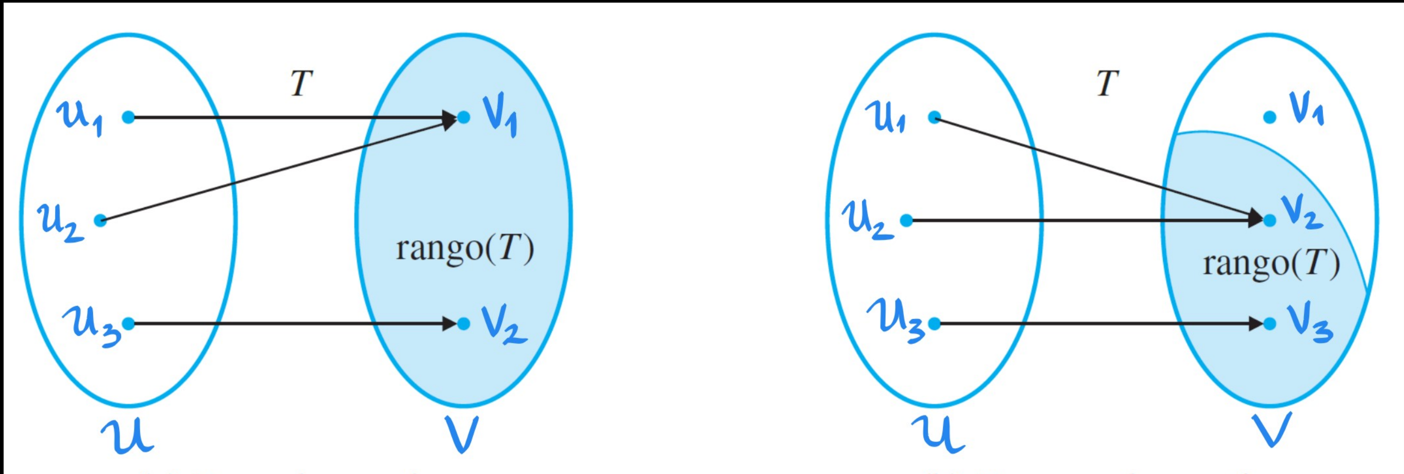
Observación (definición anterior).

(1) transformaciones lineales inyectivas.



(a) T es inyectiva (b) T no es inyectiva

(2) Transformaciones lineales sobreyectivas.



(a) T es sobreyectiva (b) T no es sobreyectiva

Ejemplo 6.69 ¿Cuál de las siguientes transformaciones lineales son inyectivas? ¿y sobreyectivas?

(a) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida mediante $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ x-y \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $D:\mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_2$ definida mediante $D(p(x)) = p'(x)$

(c) $T: M_{22} \to M_{22}$ definida mediante $T(A) = A^T$

Solución:

(a) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ x-y \\ 0 \end{bmatrix}$.

- Inyectividad $\left(T(u_1)=T(u_2) \longrightarrow u_1=u_2 \right)$.

Supongamos que $T\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$, entonces

$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1-y_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2-y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, lo cual implica que $2x_1 = 2x_2$

y $x_1-y_1 = x_2-y_2$. Lo cual implica que $x_1=x_2$ y $y_1=y_2$ y así $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ lo que prueba la inyectividad de T.

- Sobreyectividad $\left(\text{Rango}(T) = \mathbb{R}^3 \right)$.

Recordemos que

$$\text{Rango}(T) = \left\{ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$\text{Rango}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 2x \\ x-y \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} \neq \mathbb{R}^3$$

Entonces T no es sobreyectiva, ya que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ no está en Rango (T).

(b) $D: P_3 \longrightarrow P_2$ dada por $D(p(x)) = p'(x)$.

$$\boxed{D(a+bx+cx^2+dx^3) = b+2cx+3dx^2}$$

✓ Inyectividad ($D(u_1)=D(u_2) \longrightarrow u_1=u_2$).

Supongamos que

$$D(a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3) = D(a_2+b_2x+c_2x^2+d_2x^3)$$
$$b_1+2c_1x+3d_1x^2 = b_2+2c_2x+3d_2x^2$$

$$b_1=b_2 \,,\quad c_1=c_2 \quad y \quad d_1=d_2$$

entonces podemos asegurar que $b_1=b_2$ $2c_1=2c_2$ y $3d_1=3d_2$. Sin embargo no podemos decir nada sobre a_1 y a_2. por este motivo, estamos "tentados" a decir que D no es inyectiva y a continuación mostramos el motivo.

- $D(1)=D(2)=0$ y $1\neq 2$.
- $D(1+x)=D(4+x)=1$ y $1+x\neq 4+x$.

Lo que muestra que D no es inyectiva.

✓ Sobreyectividad ($\text{Rango}(D)=P_2$).

Debido a que

$$\text{Rango}(D)=\left\{D(a+bx+cx^2+dx^3)\,/\,a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$
$$=\left\{b+2cx+3dx^2\,/\,a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}=P_2.$$

ya que si $e+fx+gx^2\in P_2$, entonces $D\left(ex+\frac{f}{2}x^2+\frac{g}{3}x^3\right)=e+fx+gx^2$, lo cual muestra que $\text{Rango}(D)=P_2$ y así D es sobreyectiva.

(c) $T: M_{22}\longrightarrow M_{22}$ definida como $T(A)=A^T$.

$$\boxed{T\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} a & c\\ b & d\end{bmatrix}}$$

✓ Inyectividad ($T(u_1)=T(u_2) \longrightarrow u_1=u_2$).

Supongamos que $T\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$, entonces

$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix}$ lo cual implica que $a_1=a_2$, $c_1=c_2$, $b_1=b_2$, $d_1=d_2$. Así, podemos garantizar que $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$, lo cual significa que T es una transformación lineal inyectiva.

✓ Sobreyectividad ($\text{Rango}(T)= M_{22}$).

Debido a que

$$\text{Rango}(T)=\left\{ T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} \middle/ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in M_{22} \middle/ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} \right\} = M_{22}$$

ya que si $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in M_{22}$, entonces $T\begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ lo que muestra que $\text{Rango}(T)=M_{22}$ y así T es sobreyectiva.

Teorema 6.20 Una transformación lineal $T : V \to W$ es inyectiva si y sólo si $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

$\boxed{T: V \to W \text{ es inyectiva}} \longleftrightarrow \boxed{T(v_1) = T(v_2) \longrightarrow v_1 = v_2}$

$\updownarrow$

$\boxed{\ker(T) = \{v \in V / T(v) = 0_W\} = \{0_V\}.}$

Ejemplo 6.70 Demuestre que la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathscr{P}_1$ definida mediante

$$T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a + (a+b)x$$

es inyectiva y sobreyectiva.

Ejercicio: probar que T es una transf. lineal.

Solución:

Inyectividad $\left(T(u_1) = T(u_2) \longrightarrow u_1 = u_2\right)$.

Supongamos que $T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, entonces

$$\boxed{a + (a+b)x = c + (c+d)x}$$

lo cual implica que $a = c$ y $a+b = c+d$, y así $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$; lo cual muestra T es inyectiva.

otra forma (teorema anterior).

Supongamos que $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$, entonces $a+(a+b)x=0$ lo que implica que $a=0$ y $a+b=0$. por tanto $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, y así $\ker(T)=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ lo que demuestra la inyectividad de T.

- Sobreyectividad ($\text{Rango}(T)=P_1$).

Debido a que

$$\text{Rango}(T)=\left\{T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in P_1 / \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2\right\}$$
$$=\left\{a+(a+b)x \in P_1 / \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2\right\} = P_1$$

ya que si $c+dx \in P_1$, entonces $T\begin{bmatrix} c \\ d-c \end{bmatrix} = c+dx$ lo cual muestra que $\text{Rango}(T)=P_1$ y así T es sobreyectiva

Teorema 6.21 Sea $\dim V = \dim W = n$. Entonces una transformación lineal $T: V \to W$ es inyectiva si y sólo si es sobreyectiva.

Condiciones:

- $T: V \to W$ es transformación lineal.
- $\mathrm{Dim}\, V = \mathrm{Dim}\, W = n$ (finita)

Conclusión: T es inyectiva $\longleftrightarrow$ T es sobreyectiva

$$\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\} \qquad \mathrm{Rango}(T) = W$$

Observación (ejemplo anterior).

Recordemos en el ejemplo anterior que $T: \mathbb{R}^2 \to P_1$ está definida como

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + (a+b)x$$

entonces:

- $\mathrm{Dim}(\mathbb{R}^2) = 2$ (una base para $\mathbb{R}^2$ es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$).
- $\mathrm{Dim}(P_1) = 2$ (una base para P_1 es $\{1, x\}$).

por tanto, el teorema anterior nos dice que:

$$
\begin{tikzcd}
T \text{ es inyectiva} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & T \text{ es sobreyectiva} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\operatorname{Ker}(T)=\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\} & \operatorname{Rango}(T)=\mathcal{P}_1
\end{tikzcd}
$$

Es decir que al probar que $\operatorname{Ker}(T)=\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$ tendremos que $\operatorname{Rango}(T)=\mathcal{P}_1$ y visceversa.

Teorema 6.22 Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal inyectiva. Si $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un conjunto linealmente independiente en V, entonces $T(S) = \{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_k)\}$ es un conjunto linealmente independiente en W.

condiciones:

$T: V \rightarrow W$ es transf. lineal.

T es inyectiva.

$S=\{v_1, \ldots, v_k\}$ es L.I en $\underline{\underline{V}}$.

Conclusión: $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_k)\}$ es L.I en $\underline{\underline{W}}$.

Ejercicio

Corolario 6.23 Sea $\dim V = \dim W = n$. Entonces una transformación lineal inyectiva $T: V \to W$ mapea una base para V a una base para W.

Condiciones:
- $T: V \to W$ es transf. lineal.
- $\mathrm{Dim}\, V = \mathrm{Dim}\, W = n$.
- T es inyectiva.
- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base para V.

Conclusión: $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es una base para W.

Ejemplo 6.71 Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathscr{P}_1$ una transformación lineal del ejemplo 6.70, definida mediante

$$T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a + (a+b)x$$

entonces

(1) $\{e_1, e_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$.

(2) T es una transformación lineal inyectiva (ejemplo anterior).

(3) $\mathrm{Dim}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Dim}(\mathscr{P}_1) = 2$.

Entonces

$$\{T(e_1), T(e_2)\} = \left\{T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\} = \{1+x, x\}$$

es una base para $\mathcal{P}_1$.

Teorema 6.24 Una transformación lineal $T: V \to W$ es invertible si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.

$\boxed{T: V \to W \text{ es invertible}} \longleftrightarrow \boxed{\text{Existe } T^{-1}: W \to V \text{ tal que: } T \circ T^{-1} = I_W,\ T^{-1} \circ T = I_V}$

$\boxed{T \text{ es inyectiva, sobreyectiva y lineal}} \longleftrightarrow \boxed{\operatorname{Ker}(T) = \{0_V\},\ \operatorname{Rango}(T) = W}$

Ejemplo (uso del teorema anterior).

Si $T: \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$ está definida como $T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = a + (a+b)x$, entonces T es invertible.

Definición Una transformación lineal $T: V \rightarrow W$ se llama ***isomorfismo*** si es inyectiva y sobreyectiva. Si V y W son dos espacios vectoriales tales que existe un isomorfismo de V a W, entonces se dice que V es ***isomórfica*** a W y se escribe $V \cong W$.

$$T: V \rightarrow W \text{ es isomorfismo} \longleftrightarrow \begin{array}{l} T \text{ es lineal} \\ T \text{ es inyectiva} \\ T \text{ es sobreyectiva} \end{array}$$

$$T: V \rightarrow W \text{ es isomorfismo} \longleftrightarrow \begin{array}{l} \ker(T) = \{0_V\} \\ \text{Rango}(T) = W \end{array}$$

$$T: V \rightarrow W \text{ es isomorfismo} \longleftrightarrow \begin{array}{l} T \text{ es lineal} \\ T \text{ es invertible} \end{array}$$

Ejemplo 6.72 Demuestre que $\mathcal{P}_{n-1}$ y $\mathbb{R}^n$ son isomórficas.

$$\mathcal{P}_{n-1} - \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} \,/\, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}\}.$$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Big/ \; a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Solución:

Consideremos la función $T: \mathcal{P}_{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por:

$$T(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

para cada $a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$. probaremos que T es un isomorfismo, con lo cual es necesario verificar las siguientes propiedades:

(1) T es una transformación Lineal.

(2) T es inyectiva.

(3) T es sobreyectiva.

Prueba(1)– T es transformación lineal.

Ejercicio

prueba(2)– T es inyectiva $(\ker(T)=\{0\})$.

Supongamos que

$$T(a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \longrightarrow a_0=0,\ a_1=0,\ \ldots,\ a_{n-1}=0$$

y así $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} = 0 + 0 \cdot x + \cdots + 0 \cdot x^{n-1} = 0$
lo que muestra que T es inyectiva.

prueba (3): T es sobreyectiva.

Debido a que $\mathrm{Dim}(P_{n-1}) = \mathrm{Dim}(\mathbb{R}^n) = n$, y T es inyectiva, entonces por teorema anterior tenemos que T es sobreyectiva.

Ejemplo 6.73	Demuestre que M_{mn} y $\mathbb{R}^{mn}$ son isomórficos.

Ejercicio

Ayuda: si $T: M_{mn} \longrightarrow \mathbb{R}^{m \cdot n}$ está definida como:

$$T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

entonces

(1) Demostrar que T es una transformación lineal.

(2) Mostrar que T es inyectiva $\left(\ker(T) = \{ 0_{m\times n} \} \right)$.

(3) Mostrar que T es sobreyectiva $\left(\text{Rango}(T) = \mathbb{R}^{m \cdot n} \right)$. usar aquí el corolario 6.23.

Teorema 6.25.

Supongamos que V y W son espacios vectoriales de dimensión finita, entonces

$$\boxed{V \cong W \longleftrightarrow \text{Dim}(V) = \text{Dim}(W)}$$

✓ $V \cong W$ significa que existe una transformación lineal $T: V \to W$ tal que $\ker(T) = \{0_V\}$ y $\text{Rango}(T) = W$.

✓ $\text{Dim}(V) = \text{Dim}(W)$ significa que el número de elementos de una base para V es el mismo número de elementos para una base de W.

Ejemplo 6.74 Demuestre que $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{P}_n$ no son isomórficos.

Solución:

Como $\operatorname{Dim}(\mathbb{R}^n) = n$ y $\operatorname{Dim}(P_n) = n+1$, entonces por el teorema anterior tenemos que $\mathbb{R}^n \not\cong P_n$.

Sin embargo $\mathbb{R}^n \cong P_{n-1}$ $\left(\operatorname{Dim}(\mathbb{R}^n) = \operatorname{Dim}(P_{n-1}) = n \right)$.

Ejemplo 6.75 Sea W el espacio vectorial de todas las matrices simétricas de 2×2. Demuestre que W es isomórfico a $\mathbb{R}^3$.

Solución:

Por definición, tenemos que W se describe de la siguiente manera:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{22} \Big/ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}.$$

Ahora, es fácil notar que si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $b=c$ y por este motivo se tiene que W se escribe como:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in M_{22} \,/\, a, b, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ahora, definimos la transformación $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow W$ como:

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

para cada $\begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. A continuación demostraremos que T es un isomorfismo.

1. T está bien definida.

Es fácil notar que $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica.

2 T es una transformación lineal.

(✓) $T\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ b_1+b_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ d_2 \end{pmatrix}\right).$

Lo cual muestra que T manda sumas en sumas.

(✓) $T\left(c\begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} ca \\ cb \\ cd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca & cb \\ cb & cd \end{pmatrix} =$

$= c\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = c \cdot T\begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix}.$

Lo cual implica que T saca escalares.

Así, el argumento anterior prueba que T es una transformación lineal.

(3) T es inyectiva ($\ker(T)=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$).

Supongamos que $T\begin{pmatrix}a\\b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, entonces $T\begin{pmatrix}a\\b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, lo cual implica que $\begin{pmatrix}a\\b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ y esto significa que $\ker(T)=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ y así T es Inyectiva.

(4) T es un isomorfismo.

Debido a que hemos probado que T es una transformación lineal inyectiva con $\mathrm{Dim}(\mathbb{R}^3)=\mathrm{Dim}(W)=3$, entonces por un teorema anterior, concluimos que T es un isomorfismo y así $\mathbb{R}^3$ y W son espacios vectoriales isomorfos.