Clase 11.

Subespacios en $\mathbb{R}^n$.

Definición Un ***subespacio*** de $\mathbb{R}^n$ es cualquier colección S de vectores en $\mathbb{R}^n$ tal que:

1. El vector cero $\mathbf{0}$ está en S.
2. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en S, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en S. (S es ***cerrado bajo la suma***.)
3. Si $\mathbf{u}$ está en S y c es un escalar, entonces $c\mathbf{u}$ está en S. (S es ***cerrado bajo la multiplicación por un escalar***.)

Observación (definición anterior).

Las condiciones (2) y (3) en la definición anterior se pueden cambiar por:

> para todo par de números reales c, d y para todo par de vectores u, v en S tenemos que $c \cdot u + d \cdot v$ está en S.

Idea (subespacios).

Los subespacios de $\mathbb{R}^n$ son intuitiva/ conjuntos que "parecen" a $\mathbb{R}^m$ con

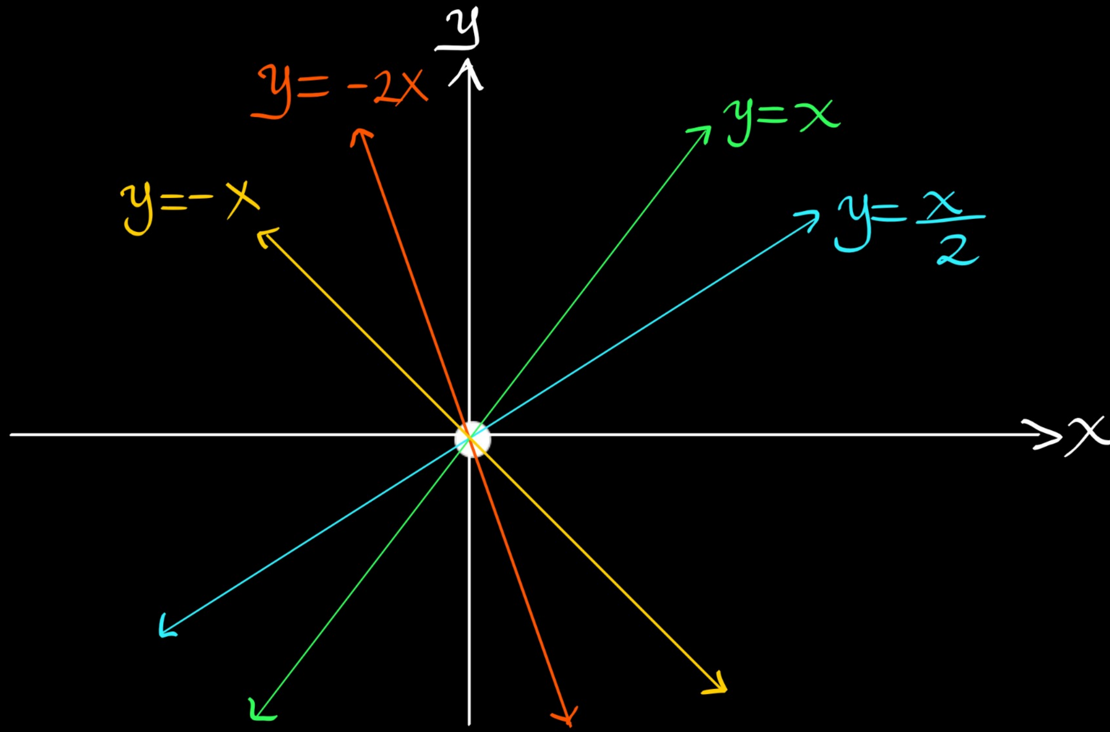
$m \leq n$. A continuación mostramos los subespacios de $\mathbb{R}^n$ para $1 \leq n \leq 3$.

(1) Los subespacios de $\mathbb{R}$ son:

- $\{0\}$ $\longrightarrow$ Es un conjunto de dimensión cero
- $\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ Es un conjunto de dimensión 1.

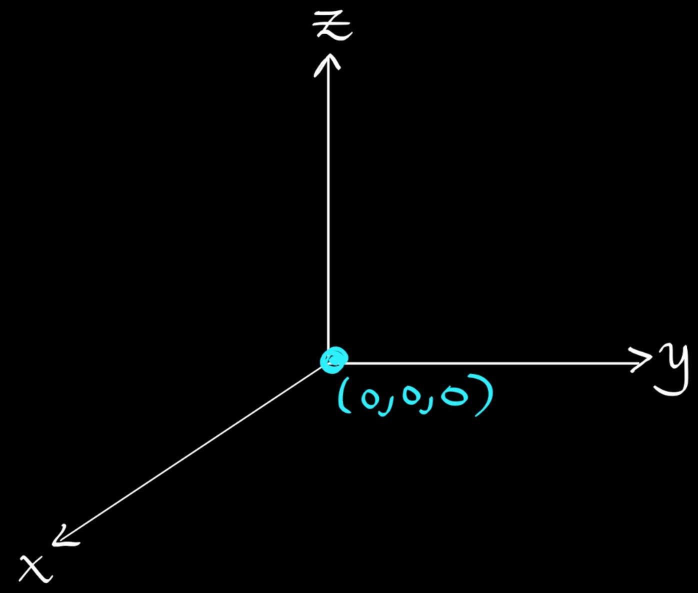
(2) Los subespacios de $\mathbb{R}^2$ son:

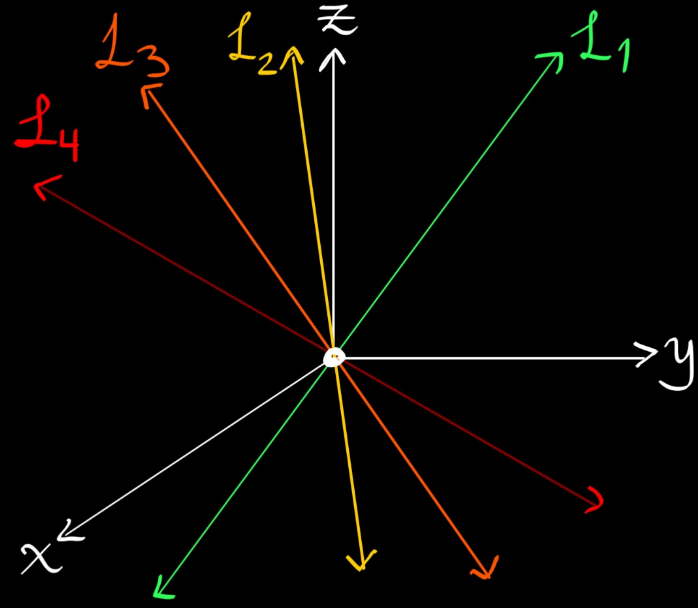
- $\{(0,0)\}$ $\longrightarrow$ conjunto de dimensión cero.
- Las rectas que pasan por $(0,0)$ $\longrightarrow$ conjuntos de dimension 1
- $\mathbb{R}^2$ $\longrightarrow$ conjunto de dimensión 2

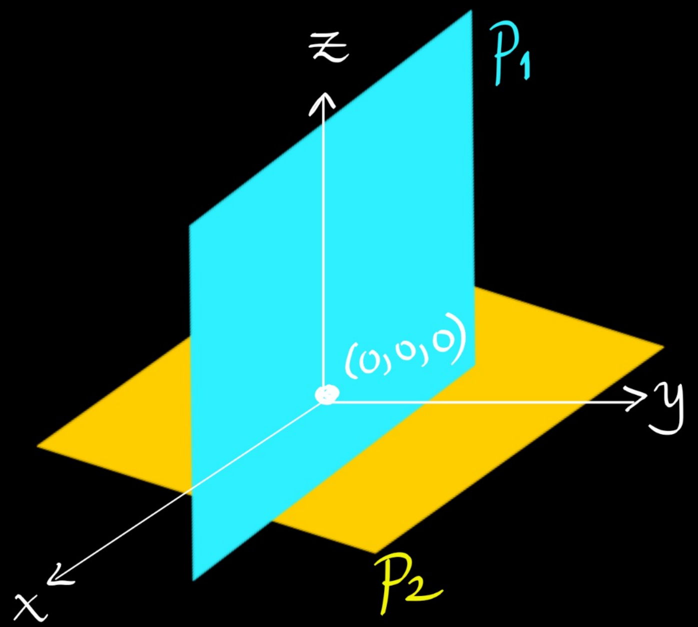


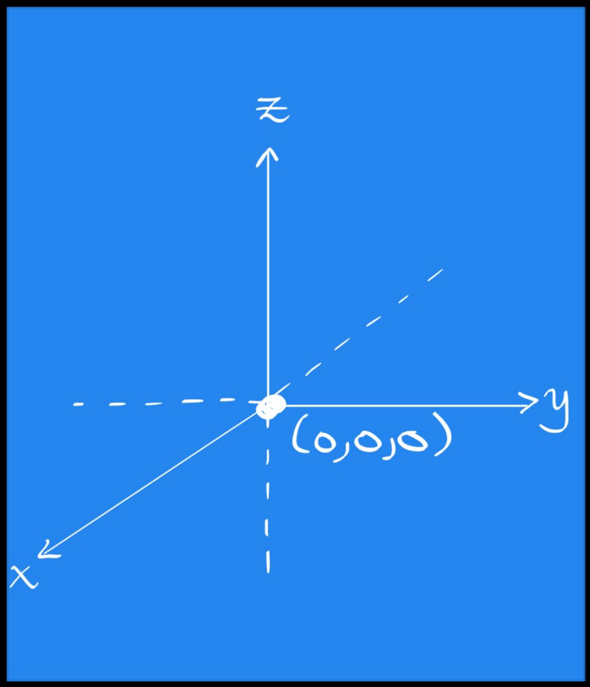
(3) Los subespacios de $\mathbb{R}^3$ son:

- ✓ $\{(0,0,0)\}$ $\longrightarrow$ conjunto de dimensión cero
- ✓ Las rectas que pasan por $(0,0,0)$ $\longrightarrow$ conjuntos de dimensión 1
- ✓ Los planos que pasan por $(0,0,0)$ $\longrightarrow$ conjuntos de dimensión 2
- ✓ $\mathbb{R}^3$ $\longrightarrow$ conjuntos de dimensión 3.









y así sucesiva/ podemos interpretar los subespacios de $\mathbb{R}^n$ para $n>3$, "como" conjuntos que tienen la forma de $\mathbb{R}^m$ con $m\leq n$.

Ejemplo 3.38

Demuestre que el conjunto de todos los vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ que satisfacen las condiciones $x = 3y$ y $z = -2y$ forman un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

Sea S el conjunto de todos los vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ en el espacio $\mathbb{R}^3$ que satisfacen que $x = 3y$ y $z = -2y$. Entonces un vector $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ en S se puede describir como:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y \\ y \\ -2y \end{bmatrix} = y \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \star$$

de donde podemos notar que:

(1) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ está en S.

Para probar esto, notamos que al tomar $y = 0$ en la ecuación $\star$, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo cual muestra que $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ está en S.

(2) S es cerrado bajo la suma.

Para probar esto, es necesario tomar 2 vectores arbitrarios de S y probar que su suma también está en S. Así, al tomar $u = y_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $v = y_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ vectores arbitrarios en S, tenemos que:

$$u + v = y_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y_1 + 3y_2 \\ y_1 + y_2 \\ -2y_1 - 2y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(y_1 + y_2) \\ 1 \cdot (y_1 + y_2) \\ -2 \cdot (y_1 + y_2) \end{bmatrix} = (y_1 + y_2) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Lo cual muestra que $u + v$ está en S, ya que $u + v$ tiene la estructura de un punto de S (ver ecuación ★).

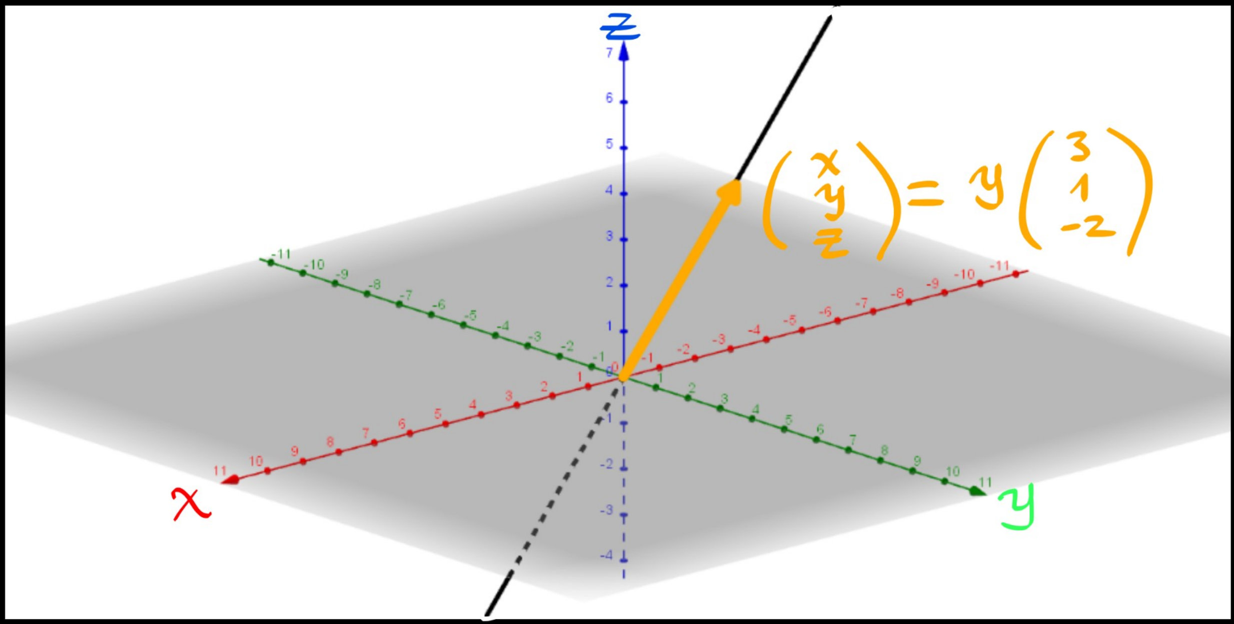
(3) S es cerrado bajo la multiplicación por escalar.

Para probar esto, es necesario tomar un vector arbitrario u de S y un número real arbitrario c, con el objetivo de demostrar que $c \cdot u$ está en S. Así, al tomar $u = y \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ un vector arbitrario en S y c un número real arbitrario, tenemos que:

$$c \cdot u = c \cdot \left(y \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) = c \left(\begin{bmatrix} 3y \\ y \\ -2y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3cy \\ cy \\ -2cy \end{bmatrix} = cy \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Lo cual prueba que $c \cdot u$ está en S.

Del análisis anterior, podemos concluir que S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.



Ejemplo (conjunto que no es subespacio).

Determine si el conjunto de todos los vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ que satisfacen las ecuaciones

$x = 3y+1$ y $z = -2y$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

Sea S el conjunto de vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ en el espacio que satisface las ecuaciones

$x=3y+1$ y $z=-2y$. Entonces si $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ está en S, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y+1 \\ y \\ -2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y \\ y \\ -2y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De esta manera, tenemos que:

(1) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ no está en S.

Si $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ estuviera en S, entonces existiría un número real y tal que:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y+1 \\ y \\ -2y \end{bmatrix}$$

de donde:

- $0 = 3y+1 \longrightarrow y = -1/3$.
- $0 = y \longrightarrow y = 0$.
- $0 = -2y \longrightarrow y = 0$.

Lo anterior implica que $0=-1/3$, lo cual es imposible. Esto prueba que $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ no está en S.

(2) S no es cerrado bajo la suma.

Si tomamos u y v en S con:

$$u = 1\cdot\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad v=(-1)\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

entonces

$$u+v = 1\cdot\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\ (-1)\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$$

Ahora, afirmamos que $u+v$ no está en S ya que de lo contrario, existiría un número real y tal que:

$$u+v=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}=y\cdot\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Lo cual implica que:

✓ $2=3y+1 \longrightarrow y=1/3$.

✓ $0=y \longrightarrow y=0$

✓ $0=-2y \longrightarrow y=0$

y así $0=1/3$, lo cual es imposible y por este motivo S no es cerrado bajo la suma de vectores.

(3) S no es cerrado bajo multiplicación por escalar.

Al tomar el vector u en S como:

$$u=0\cdot\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Se tiene que el vector $2\cdot u$ no está en S, ya que de lo contrario existiria un número real y tal que:

$$2\cdot u=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}=y\cdot\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}2=3y+1\\0=y\\0=-2y\end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}y=\frac{1}{3}=0\\\text{lo cual}\\\text{no es}\\\text{posible}\end{array}}$$

por tanto S no es cerrado por multiplicación por escalar.

En particular S no es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 3.40 Determine si el conjunto de todos los vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, donde $y = x^2$, es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Solución:

Sea S el conjunto de puntos $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ tales que $y=x^2$, entonces:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} \quad ★$$

de donde podemos notar que:

(1) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ está en S.

Al tomar $x=0$ en la ecuación ★, tenemos que

$$\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y así $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ está en S.

(2) S no es cerrado bajo la suma.

Sean u y v los vectores en S dados por:

$$u=\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v=\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ (-1)^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\quad x=1 \quad) \qquad (\quad x=-1 \quad)$$

entonces

$$u+v=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

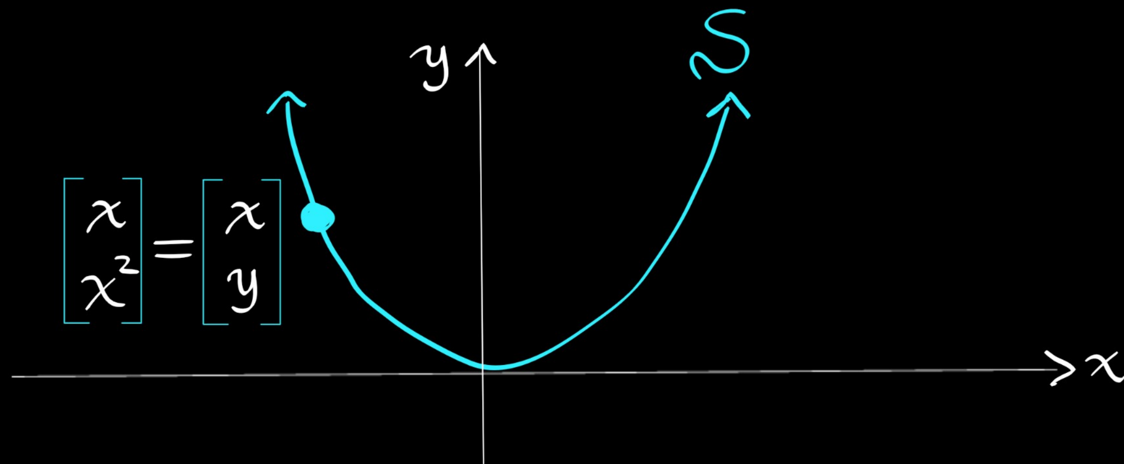
Afirmamos que $u+v$ no está en S, ya que de lo contrario, tendriamos que existe un número real x tal que:

$$u+v=\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}$$

lo cual implicaría que $u+v=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}$ y así $x=0$ y $x^2=2$, lo cual es imposible ($x=0=\sqrt{2}$). por esto, podemos decir que S no es cerrado bajo la suma.

(3) S no es cerrado bajo multiplicación por escalar.

La verificación de esta afirmación se deja como ejercicio.



Lo anterior muestra que S no es subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Definición (generado de un conjunto de vectores).

Sean $u_1, \dots, u_m$ una colección finita de vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces definimos el conjunto generado por $u_1, \dots, u_m$ como:

$$\operatorname{gen}(u_1, \dots, u_m) =$$
$$= \{c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_m \cdot u_m \in \mathbb{R}^n / c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}\}$$

Es decir que $\operatorname{gen}(u_1, \dots, u_m)$ es el conjunto que contiene todas las combinaciones lineales de $u_1, \dots, u_m$.

Teorema ($\text{gen}(u_1, \ldots, u_m)$ es un subespacio en $\mathbb{R}^n$).

Supongamos que $u_1, \ldots, u_m$ son vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces $\text{gen}(u_1, \ldots, u_m)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

$\blacksquare$

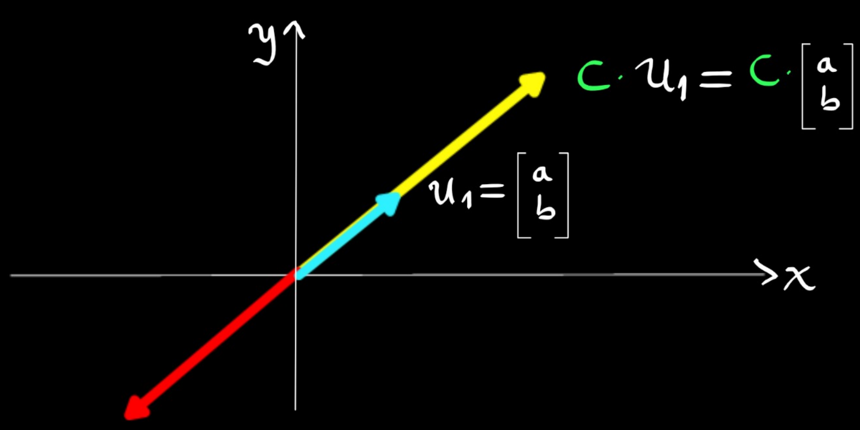
Observación (descripción geométrica de $\text{gen}(u_1, \ldots, u_m)$ en $\mathbb{R}^n$).

A continuación mostramos la descripción geométrica de el generado de un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$.

(1) Si $u_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ es un vector no nulo en $\mathbb{R}^2$,

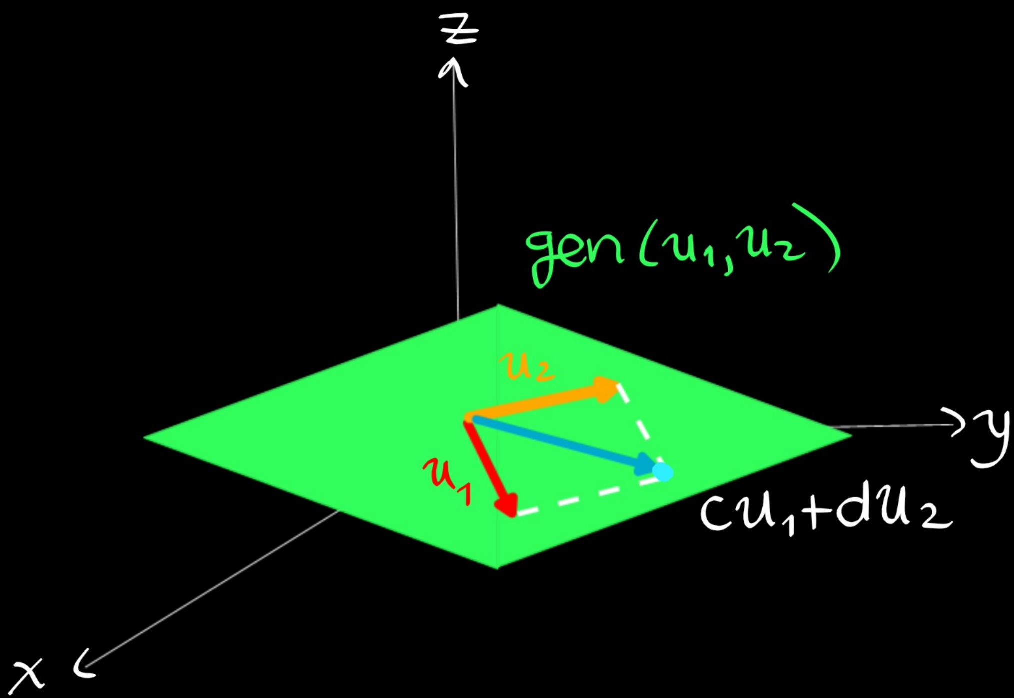
entonces:

$$\boxed{\text{gen}(u_1) = \left\{ c \cdot u_1 \in \mathbb{R}^2 / c \in \mathbb{R} \right\}.}$$



(2) Si $u_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ y $u_2 = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$ no paralelos, entonces:

$$\boxed{\text{gen}(u_1, u_2) = \left\{ c_1 u_1 + c_2 u_2 \in \mathbb{R}^3 \,/\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}}$$



En general, podemos pensar a $\text{gen}(u_1, \dots, u_m)$ en $\mathbb{R}^n$ como un conjunto de "dimensión" menor ó igual a m en $\mathbb{R}^n$.

Subespacios asociados con matrices.

Definición Sea A una matriz de $m \times n$.

1. El ***espacio renglón*** de A es el subespacio renglón(A) de $\mathbb{R}^n$ generado por los renglones de A.
2. El ***espacio columna*** de A es el subespacio col(A) de $\mathbb{R}^m$ generado por las columnas de A.

Es decir, si A es la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n},$$

entonces:

- Los renglones de A son:

$$R_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix},$$
$$R_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix},$$
$$\vdots$$
$$R_m = \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

- Las columnas de A son:

$$C_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \cdots \quad C_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

- Espacio renglón = renglón(A) = gen$(R_1, R_2, \dots, R_m)$.

- Espacio Columna = col(A) = gen$(C_1, C_2, \dots, C_n)$.

Ejemplo 3.41 Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

(a) Determine si $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ está en el espacio columna de A.

(b) Determine si $\mathbf{w} = [4 \quad 5]$ está en el espacio renglón de A.

(c) Describa renglón(A) y col(A).

Solución:

(a) Notemos inicial/ que:

si existen c_1, c_2 tales que:

- $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ está en col(A) $\longleftrightarrow$ $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

- $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{cc} c_1 & c_2 & \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right]$

Para ver que el sistema anterior es consistente (tiene solución), veamos la forma escalonada de la matriz aumentada.

$$\begin{array}{cc} c_1 & c_2 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 3R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{l} c_1 - c_2 = 1 \quad (c_1 = 3). \\ c_2 = 2 \end{array}$$

De esta manera, tenemos que $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ está en col(A) ya que:

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(b) Notemos inicial/ que:

$w = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix}$ está en Renglón(A)

$$\Updownarrow$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} = w$$

$$c_1\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5\end{bmatrix}=w$$

$$\Updownarrow$$

$$c_1\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right] \end{array}$$

este sistema es consistente.

Para ver si el sistema anterior es soluble, reduciremos la matriz aumentada a una matriz escalonada.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{R_2+R_1} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\bigstar$$

Así, el sistema dado por $(\bigstar)$ es consistente.

y la solución es la misma que la solución de nuestro sistema original. por lo tanto, $w = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix}$ está en Renglón(A).

Nota: Existe una manera alternativa de probar que $w = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix}$ está en Renglón(A) la cual es dada en el siguiente teorema:

Teorema.

Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y w son vectores renglón en $\mathbb{R}^m$ entonces w está en $\text{gen}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sí y sólo si al tomar la matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} A \\ \hdashline w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \\ \hdashline w \end{bmatrix}$$

y usando operaciones elementales por renglón sin intercambiar renglones, podemos llevar la matriz $\begin{bmatrix} A \\ \hdashline w \end{bmatrix}$ a la forma $\begin{bmatrix} A' \\ \hdashline 0 \end{bmatrix}$.

Solución alternativa (b):

por el teorema anterior, tenemos que

$$\left[\begin{array}{c} A \\ \hdashline w \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \\ \hdashline 4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4-4R_1} \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \\ \hdashline 0 & 9 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \\ \hdashline 0 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4-9R_2} \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right].$$

Así, el teorema anterior nos dice que $w = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \in \text{Renglón}(A)$.

(c)

para describir Renglón(A), usaremos el siguiente resultado:

Teorema.

Sea A una matriz de tamaño $m\times n$ y A' es una matriz que se obtiene de A realizando operaciones elementales por renglones, entonces $\text{Renglón}(A) = \text{Renglón}(A')$.

De esta manera, para determinar a Renglón(A), encontraremos la forma escalonada reducida A' de A y luego determinaremos a Renglón(A').

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-3R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, Renglón(A) = Renglón(A') y además:

$$\boxed{\text{Renglón}(A') = \text{gen}\{(1,0),(0,1)\} = \mathbb{R}^2}$$

$$\text{col}(A) = \text{col}\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\right\} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right\} =$$

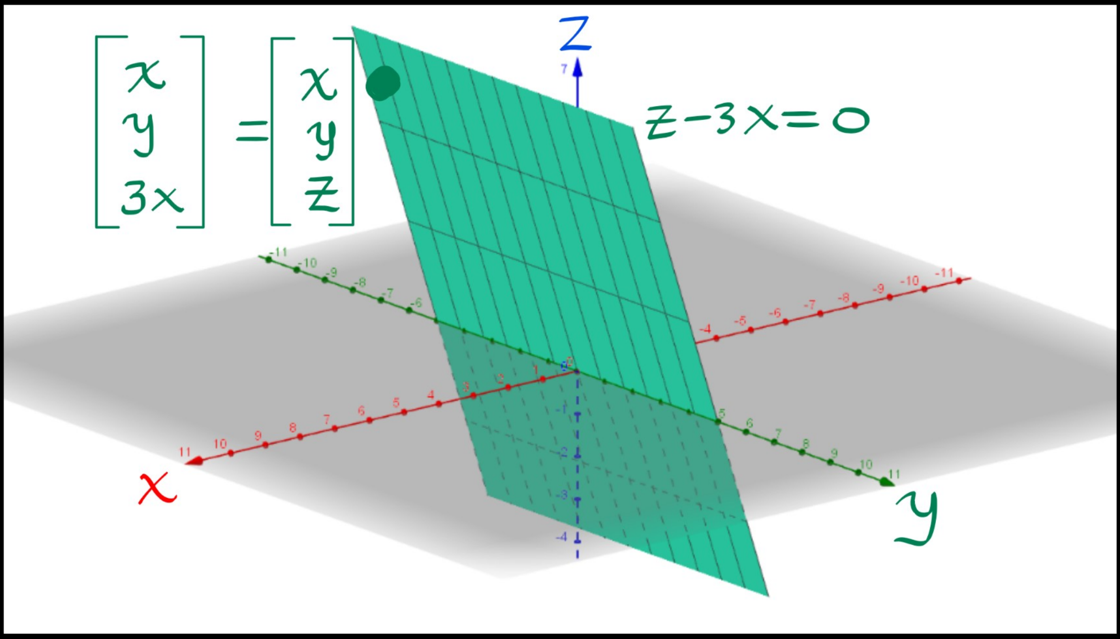
$$= \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & -3 & z \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{R_3-3R_1} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-3x \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{R_1+R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-3x \end{array}\right] \end{array}$$

Para que este sistema sea consistente, es necesario que $z-3x=0$. De esta manera,

$$\mathrm{col}(A)=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix} : c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\mathrm{col}(A)=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 : z-3x=0\right\}=\mathrm{gen}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$



Teorema 3.21 Sea A una matriz de $m \times n$ y sea N el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Entonces N es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

$$A\cdot x=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\mathbb{O}.$$

Definición Sea A una matriz de $m \times n$. El ***espacio nulo*** de A es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ que consiste de las soluciones del sistema lineal homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Se denota mediante $\text{nul}(A)$.

$$\text{Nul}(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n / A \cdot x = 0 \}$$ ---> El espacio nulo de la matriz A.

Ejemplo.

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$, entonces determinar Nul(A).

Solución:

Recordemos inicial/ que:

$$\text{Nul}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} x & y & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-3R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ lo cual

muestra que $x=0$ y $y=0$, mostrando que:

$$\boxed{\mathrm{Nul}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.}$$

Ejemplo.

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, entonces hallar $\mathrm{Nul}(A)$.

Solución:

Recordemos inicial/ que:

$$\mathrm{Nul}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x - 3/2\, z = 0 \\ y + 1/2\, z = 0 \end{array}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} z \\ y = -\frac{1}{2} z \\ z = z \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} z \\ y = -\frac{1}{2} z \\ z = z \end{array}} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2\, z \\ -1/2\, z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Así, concluimos que:

$$\mathrm{Nul}(A)=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix}1&1&-1\\1&5&1\\1&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$$\mathrm{Nul}(A)=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=z\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}\right\}=\mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}3/2\\-1/2\\1\end{bmatrix}\right\}$$