Clase 16.

Todos conocen las siguientes propiedades de los números reales (pues en ellos descansa la manipulación algebraica que se ha aprendido desde segundaria). Si a, b, c son números reales fijos, entonces:

(1) $a+b=b+a$ → propiedad conmutativa de la suma.

(2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ → propiedad asociativa

(3) $a+0=a$ → propiedad modulativa de la suma

(4) $a+(-a)=0$ → existencia de inversos aditivos.

(5) $ab=ba$ → propiedad conmutativa del producto

(6) $a\cdot(b+c)=ab+ac$ → propiedad distributiva

(7) Si $a\neq 0$, entonces $a\cdot(a^{-1})=1$ → La existencia de inversos multiplicativos

(8) $(ab)c=a(bc)$ → propiedad conmutativa

(9) $1\cdot a=a$ → propiedad modulativa del producto

Además, también hemos visto que los vectores en $\mathbb{R}^n$ y las matrices satisfacen las siguientes propiedades:

#	vectores en $\mathbb{R}^n$	Matrices de tamaño mxn (M_{mn}).
1	$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ propiedad conmutativa	$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ propiedad conmutativa
2	$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ propiedad asociativa	$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$ propiedad asociativa
3	$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ propiedad modulativa de la suma	$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ Propiedad modulativa de la suma.

4	$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ propiedad de exist. de inversos para(+)	$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & & \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ propiedad de exist. de inversos para(+)
5	$c \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix}$	$c \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & \cdots & ca_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$
6	$c \cdot \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right) = c \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ propiedad distributiva	$c \cdot \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \right) = c \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$ propiedad distributiva
7	$(c+d) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$	$(c+d) \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

8	$(c\cdot d)\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} = c\cdot\left(d\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\right)$	$(cd)\cdot\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix} = c\cdot\left(d\cdot\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\right).$
9	$1\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$	$1\cdot\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$

En la siguiente definición, describimos aquellos conjuntos que satisfacen las mismas propiedades vistas anterior/.

Definición Sea V un conjunto sobre el cual se definen dos operaciones, llamadas *suma* y *multiplicación por un escalar*. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en V, la *suma* de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se denota mediante $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, y si c es un escalar, el *múltiplo escalar* de $\mathbf{u}$ por c se denota mediante $c\mathbf{u}$. Si los siguientes axiomas se cumplen para todos $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en V y para todos los escalares c y d, entonces V se llama ***espacio vectorial*** y sus elementos se llaman ***vectores***.

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ está en V. — Cerradura bajo la suma
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ — Conmutatividad
3. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ — Asociatividad
4. Existe un elemento $\mathbf{0}$ en V, llamado ***vector cero***, tal que $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$.
5. Para cada $\mathbf{u}$ en V, existe un elemento $-\mathbf{u}$ en V tal que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$.
6. $c\mathbf{u}$ está en V. — Cerradura bajo multiplicación escalar
7. $c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$ — Distributividad
8. $(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$ — Distributividad
9. $c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u}$
10. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Ejemplo (espacio vectorial).

$\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial, con:

- Suma: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix}$.

- Multiplicación por escalar: $c \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix}$.

Ejemplo (espacio vectorial).

Las matrices de tamaño $m \times n$ con entradas reales es un espacio vectorial, con:

- Suma: $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$.

- Multiplicación por escalar: $c \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & \cdots & ca_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$.

Vamos a denotar a las matrices de tamaño $m \times n$ como M_{mn}.

Ejemplo (espacio vectorial).

Sea $\mathcal{P}_2$ el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes reales. Mostrar que $\mathcal{P}_2$ es un espacio vectorial.

Solución:

Para ver que $\mathcal{P}_2$ es un espacio vectorial, hay que decir bajo que operaciones es espacio vectorial, entonces:

- Suma en $\mathcal{P}_2$.

Si $p(x)=ax^2+bx+c$ y $q(x)=ex^2+fx+g$ son polinomios de grado menor ó igual a 2 con coeficientes reales, entonces $p(x)+q(x)$ es la suma usual de polinomios.

$$p(x)+q(x)=(ax^2+bx+c)+(ex^2+fx+g)=$$
$$=(a+e)x^2+(b+f)x+(c+g)$$

Multiplicación por escalar en $\mathcal{P}_2$.

Si $p(x)=ax^2+bx+c$ es un polinomio de grado menor o igual a dos con coeficientes reales y d es un número real, entonces $d\cdot p(x)$ es la multiplicación estandar.

$$d\cdot p(x)= d\cdot (ax^2+bx+c)=(da)x^2+(db)x+(dc)$$

De esta manera, es sencillo verificar que se cumplen las condiciones de espacio vectorial.

(1) Si $p(x)=ax^2+bx+c$ y $q(x)=dx^2+ex+f$ están en $\mathcal{P}_2$, entonces es claro que $p(x)+q(x)$ está en $\mathcal{P}_2$ ya que:

$$p(x)+q(x)= (a+d)x^2+(b+e)x+(c+f)$$

que es un polinomio de grado menor o igual a dos con coeficientes reales. Es decir que $p(x)+q(x)$ está en $\mathcal{P}_2$.

(2) Si $p(x)=ax^2+bx+c$ y $q(x)=dx^2+ex+f$ están en $\mathcal{P}_2$, entonces:

$$\boxed{\begin{aligned} p(x)+q(x)&=(a+d)x^2+(b+e)x+(c+f)\\ q(x)+p(x)&=(d+a)x^2+(e+b)x+(f+c)\end{aligned}}$$

lo cual implica que $p(x)+q(x)=q(x)+p(x)$.

(3) Si $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ están en $\mathcal{P}_2$, es sencillo verificar que:

$$\boxed{p(x)+(q(x)+r(x))=(p(x)+q(x))+r(x)}$$

ejercicio

(4) Si $p(x)=ax^2+bx+c$ está en $\mathcal{P}_2$, entonces:

$$p(x)+\mathbf{0}=(ax^2+bx+c)+0=ax^2+bx+c=p(x).$$

lo cual muestra que $p(x)+\mathbf{0}=p(x)$.

(5) Si $p(x)=ax^2+bx+c$ es un elemento en $\mathcal{P}_2$, entonces es claro que $p(x)+(-p(x))=\mathbf{0}$.

(6) Si $p(x)=ax^2+bx+c$ es un elemento en $\mathcal{P}_2$ y d es un número real, entonces

es claro que $\alpha \cdot p(x)$ está en $\mathcal{P}_2$, ya que

$$\alpha \cdot p(x) = \alpha \cdot (ax^2+bx+c) = (\alpha a)x^2+(\alpha b)x+(\alpha c)$$

que es un polinomio de grado menor o igual a dos. Es decir que $\alpha \cdot p(x)$ está en $\mathcal{P}_2$.

Ejercicio: verificar que los axiomas (7), (8) y (9) de espacio vectorial se cumplen en el ejemplo anterior.

De esta manera, el anterior análisis muestra que $\mathcal{P}_2$ es un espacio vectorial bajo la suma y multiplicación por escalar definida anterior/.

Ejemplo (espacio vectorial).

Sea $\mathcal{F} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es una función} \}$, entonces definimos la suma y la multiplicación por escalar en $\mathcal{F}$ como:

- Suma en $\mathcal{F}$: Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones, entonces:

$$\begin{aligned} f+g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x) \end{aligned}$$

✓ Multiplicación por escalar en $\mathcal{F}$: si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función y c es un número real, entonces:

$$\begin{aligned} c\cdot f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (c\cdot f)(x) = c\cdot f(x). \end{aligned}$$

Entonces, si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son elementos en $\mathcal{F}$ (es decir que son funciones) y c, d son números reales fijos, tenemos que:

(1) $f+g$ es una función.

(2) $f+g = g+f$.

para ver esto, notemos que para cada $x\in\mathbb{R}$ se tiene que:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$$

Lo cual prueba que $f+g = g+f$.

(3) $f+(g+h)=(f+g)+h.$

para ver esto, notemos que para cada $x\in\mathbb{R}$ se tiene que:

$$(f+(g+h))(x)=f(x)+(g+h)(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$$
$$=(f(x)+g(x))+h(x)=((f+g)+h)(x)$$

Lo cual prueba que $f+(g+h)=(f+g)+h.$

(4) $f+\mathbb{O}=f$, donde
$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{O}:\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\mapsto \mathbb{O}(x)=0\end{aligned}}$$

para ver esto, notemos que para cada $x\in\mathbb{R}$ se tiene que:

$$(f+\mathbb{O})(x)=f(x)+\mathbb{O}(x)=f(x)+0=f(x)$$

lo que prueba que $f+\mathbb{O}=f.$

(5) $f+(-f)=\mathbb{O}$ donde
$$\boxed{\begin{aligned}-f:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto -f(x)\end{aligned}}$$

para ver esto, notemos que para cada $x\in\mathbb{R}$ se tiene que:

$$(f+(-f))(x) = f(x) + (-f(x)) = 0 = \mathbb{O}(x)$$

lo cual muestra que $f+(-f) = \mathbb{O}$.

(6) $c \cdot f$ es una función.

Ejercicio: verificar que los axiomas (7), (8) y (9) de espacio vectorial se cumplen en el ejemplo anterior.

Ejemplo (un conjunto que no es espacio vectorial).

Demostrar que el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ no forman un espacio vectorial bajo las operaciones usuales.

Solución:

Para verificar que $\mathbb{Z}$ no es un espacio vectorial bajo la suma y la multiplicación usual en $\mathbb{Z}$, notamos que:

- Si $c = \pi$ y $u = 1 \in \mathbb{Z}$.
- $c \cdot u = \pi \cdot 1 = \pi \notin \mathbb{Z}$.

por lo tanto $\mathbb{Z}$ no son un espacio vectorial bajo las operaciones usuales.

Ejemplo 6.6 Sea $V = \mathbb{R}^2$ con la definición usual de suma, pero la siguiente definición de multiplicación por un escalar:

$$c\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\bigstar)$$

Verificar que $\mathbb{R}^2$ no es un espacio vectorial bajo la suma usual de vectores y la multiplicación por escalar definida en $(\bigstar)$.

Solución:

Es fácil notar que el axioma (10) falla ya que $1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

por tanto $\mathbb{R}^2$ bajo estas operaciones no es espacio vectorial.

Ejemplo 6.7 Sea $\mathbb{C}^2$ el conjunto de todos los pares ordenados de números complejos. Defina la suma y la multiplicación escalar como en $\mathbb{R}^2$, excepto que aquí los escalares son números complejos. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 + i \\ 2 - 3i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 + 2i \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 3i \\ 6 - 3i \end{bmatrix}$$

y

$$(1 - i)\begin{bmatrix} 1 + i \\ 2 - 3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - i)(1 + i) \\ (1 - i)(2 - 3i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 - 5i \end{bmatrix}$$

Al usar las propiedades de los números complejos, es directo comprobar que se sostienen los diez axiomas. Por tanto, $\mathbb{C}^2$ es un espacio vectorial complejo.

Ejercicio

$\boxed{\text{En general, } \mathbb{C}^n \text{ es un espacio vectorial complejo para todo } n \geq 1.}$

Nota (siguiente teorema).

Todo espacio vectorial tiene una propiedades básicas. Algunas de ellas se enuncian en el siguiente teorema.

Teorema 6.1 Sea V un espacio vectorial, $\mathbf{u}$ un vector en V y c un escalar.

a. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
b. $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$
c. $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$
d. Si $c\mathbf{u} = \mathbf{0}$, entonces $c = 0$ o $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Demostración (ejercicio).

Subespacios

Ya vio que, en $\mathbb{R}^n$, es posible que un espacio vectorial se asiente dentro de otro, lo que da lugar a la noción de subespacio. Por ejemplo, un plano que pasa por el origen es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Ahora se extiende este concepto a espacios vectoriales en general.

Definición Un subconjunto W de un espacio vectorial V se llama ***subespacio*** de V si W es en sí mismo un espacio vectorial con los mismos escalares, suma y multiplicación por un escalar que V.

Nota (siguiente teorema).

El siguiente teorema nos dice como garantizar que un conjunto W es un subespacio de un espacio vectorial V.

Teorema 6.2 Sea V un espacio vectorial y sea W un subconjunto no vacío de V. Entonces W es un subespacio de V si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

a. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en W, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en W.
b. Si $\mathbf{u}$ está en W y c es un escalar, entonces $c\mathbf{u}$ está en W.

$c \cdot u + d \cdot v \in W$ → W es subespacio de V.
$0_V \in W$

↪ para todo $c, d \in \mathbb{R}$ y $u, v \in W$.

Comentario Dado que el Teorema 6.2 generaliza la noción de subespacio a partir del contexto de $\mathbb{R}^n$ a espacios vectoriales en general, todos los subespacios de $\mathbb{R}^n$ que se encontraron en el capítulo 3 son subespacios de $\mathbb{R}^n$ en el contexto actual. En particular, las rectas y planos que pasan por el origen son subespacios de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 6.9 Ya se demostró que el conjunto $\mathscr{P}_n$ de todos los polinomios con grado n a lo más es un espacio vectorial. Por tanto, $\mathscr{P}_n$ es un subespacio del espacio vectorial $\mathscr{P}$ de *todos* los polinomios.

$$P_n = \left\{ a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \,/\, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

es el conjunto de todos los polinomios de grado menor ó igual a $\underline{\underline{n}}$.

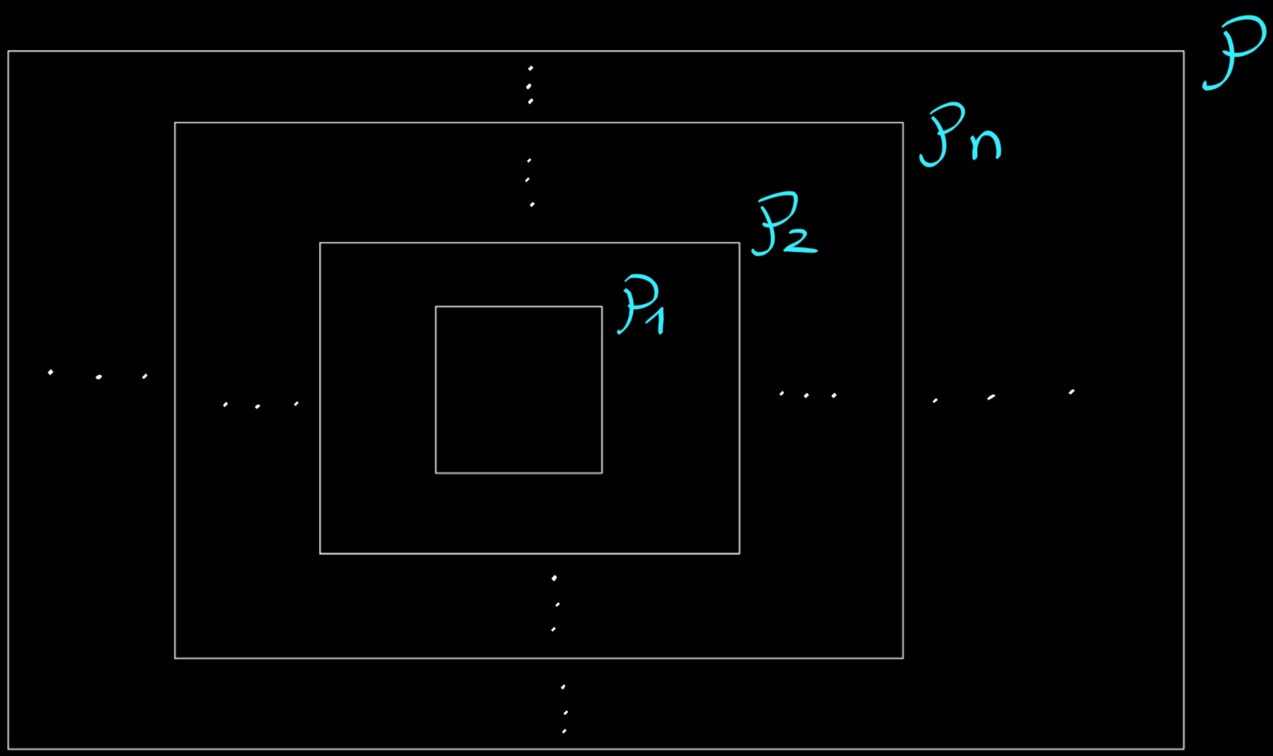
✓ P_n es un espacio vectorial.

- $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{P}_3 \subseteq \mathcal{P}_4 \subseteq \mathcal{P}_5 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{P}$

donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de todos los polinomios.

- $\mathcal{P}$ es un espacio vectorial (ejercicio).

- $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \ldots, \mathcal{P}_n, \ldots$ son subespacios de $\mathcal{P}$.



Ejemplo 6.10 Sea W en conjunto de matrices simétricas de $n \times n$. Demuestre que W es un subespacio de M_{nn}.

Solución:

para empezar, notemos que W es:

$$\boxed{W = \{ A \in M_{nn} / A = A^T \}.}$$

Veamos ahora que:

(1) W es cerrado bajo la suma.

(2) W es cerrado bajo la multiplicación por escalar.

(3) $0_{n\times n} \in W$.

Prueba (1).

Si $A, B \in W$, entonces $A = A^T$ y $B = B^T$, de donde:

$$(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$$

de donde $A+B \in W$ y esto prueba que W es cerrado bajo la suma.

prueba (2).

Si $A \in W$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $A = A^T$ y además:

$$(c \cdot A)^T = c \cdot A^T = c \cdot A$$

de donde $c \cdot A \in W$ y esto prueba que W es cerrado bajo la multiplicación por escalar.

prueba (3).

Es claro que $(0_{n\times n})^T = 0_{n\times n}$, lo que significa que $0_{n\times n} \in W$.

Conclusión:

El conjunto $W = \{A \in M_{nn} / A = A^T\}$

es un subespacio de M_{nn}.