Clase 26.

Diagonalización ortogonal.

observación (diagonalización y eingenvalores).

(1) Recordemos que una matriz A de tamaño $n\times n$ es diagonalizable, si $A \sim D$ con D diagonal.

Existe una matriz invertible P de tamaño $n\times n$ tal que $AP = PD$ $(A = PDP^{-1})$.

(2) Vimos algunos resultados previa/ que nos decían cuando una matriz A de tamaño $n\times n$ es diagonalizable.

☑ A es diagonalizable $\longleftrightarrow$
- todos los eingenvalores de A son reales.
- $\sum \mathrm{Dim}(E_\lambda) = n$

☑ Si A tiene n- eingenvalores distintos reales, entonces A es diagonalizable.

(3) No toda matriz cuadrada es diagonalizable.

ver la clase correspondiente.

(4) No toda matriz cuadrada tiene eingenvalores reales.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Det}(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1$$

(polinomio carácteristico)

Las raices del polinomio carácteristico son $\lambda = \pm i$ (Los eingenvalores de A no son reales).

Ejemplo.

Si es posible, diagonalice la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solución.

para empezar, encontremos los eingenvalores de A.

$\boxed{\checkmark}$ $\operatorname{Det}(A - \lambda I) = 0$ (λ son los eingenvalores de A).

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \quad (\text{simplificando})$$

$$(\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda = 2 \quad \text{ó} \quad \lambda = -3$$

por tanto los eingenvalores de A

son $\lambda=2$ y $\lambda=-3$.

por lo tanto, por un resultado previo (tenemos 2 eingenvalores reales para una matriz A de tamaño 2x2) podemos asegurar que A es diagonalizable.

$\boxed{\checkmark}$ $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

para describir esta factorización de A, es necesario encontrar bases para los eigenespacios E_2 y E_{-3}.

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \Big/ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}}_{A-2I} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \Big/ y \in \mathbb{R} \right\} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$E_{-3}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \Big/ \underbrace{\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}}_{A-(-3)I}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{x\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \Big/ x\in\mathbb{R}\right\}=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\}.$$

De donde, podemos asegurar que una base para E_2 es $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$ y

una base para E_{-3} es $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\}$.

De esta manera al tomar P y D como:

$$D=\begin{pmatrix}2&0\\0&-3\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}$$

se tiene que $A=P\cdot D\cdot P^{-1}$.

Observación (ejemplo anterior).

Para empezar, notemos que:

☑ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ son ortogonales.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

☑ $$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

☑ $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ es una base para E_2.

$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ es una base para E_{-3}.

Así, podemos asegurar que A tiene la factorización $A = Q \cdot D \cdot Q^{-1}$

donde:

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad y \quad Q=\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

y además como Q es una matriz ortogonal, entonces $Q^{-1}=Q^{T}$ lo que nos dice particular/ que

$$A=Q\cdot D\cdot Q^{-1}=Q\cdot D\cdot Q^{T}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/5 \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Definición (matrices diagonalizables ortogonal/).

Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n\times n$, entonces decimos que A es diagonalizable ortogonal/, si existe una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D

tal que $A = Q \cdot D \cdot Q^T$.

$$\begin{gathered} A \cdot Q = Q \cdot D \\ Q^T \cdot A \cdot Q = D \\ \vdots \end{gathered}$$

Teorema (Diagonalizable ortogonal/ $\Longrightarrow$ matriz simétrica).

Si A es una matriz de tamaño $n \times n$ que es diagonalizable ortogonal/ entonces A es una matriz simétrica ($A = A^T$).

Prueba.

$$A = Q \cdot D \cdot Q^T.$$

$$A^T = (Q \cdot D \cdot Q^T)^T = (Q^T)^T \cdot D^T \cdot Q^T$$

$$= Q \cdot D \cdot Q^T = A.$$

$\blacksquare$

Teorema $\left(\begin{array}{l} \checkmark A \text{ simétrica} \\ \checkmark \text{coeficientes reales} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \text{Los eingenvalores} \\ \text{de } A \text{ son reales} \end{array} \right).$

Si A es una matriz simétrica de tamaño $n \times n$ con coeficientes reales entonces todos los eingenvalores de A son números reales.

Teorema $\left(\begin{array}{l} \checkmark \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ eingenvalores} \\ \checkmark V_{\lambda_1} \text{ y } V_{\lambda_2} \text{ eingenvectores} \\ \checkmark A \text{ es simétrica} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} V_{\lambda_1} \text{ y } V_{\lambda_2} \\ \text{son ortogonales} \end{array} \right).$

Si A es una matriz de tamaño $n \times n$ simétrica con λ_1, λ_2 eigenvalores distintos con V_{λ_1} y V_{λ_2} eingenvectores correspondientes a λ_1 y λ_2 respectiva/ entonces:

$$\boxed{V_{\lambda_1} \text{ y } V_{\lambda_2} \text{ son ortogonales}} \longleftrightarrow \boxed{V_{\lambda_1} \circ V_{\lambda_2} = 0}.$$

Ejemplo (ilustración teorema anterior).

Verifique que se cumple el teorema anterior para la matriz A dada por

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución.

para comenzar, notamos que A es una matriz simétrica.

$$A^T=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=A.$$

Encontremos ahora los eingenvalores de la matriz A.

$$\operatorname{Det}(A-\lambda I)=0 \quad (\lambda \text{ eingenvalores})$$

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Big\downarrow \text{(ejercicio)}$$

$$-\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda+4 = 0$$

$$\Big\downarrow \text{(ejercicio)}$$

$$-(\lambda-4)(\lambda-1)^2 = 0$$

Así, los eingenvalores de A son $\lambda = 4$ y $\lambda = 1$.

Ahora, encontremos los eingenespacios E_4 y E_1.

$\boxed{\checkmark}$ $$E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \operatorname{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ejercicio)

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ejercicio)

Así, encontramos que una base para E_4 es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y una base para E_1 es $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. De esta manera,

para verificar que todo eingenvector de A relativo $\lambda = 4$ es ortogonal a todo eingenvector de A relativo a $\lambda = 1$ es suficiente probar que:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(-1+0+1 = 0) \qquad (-1+1+0 = 0)$$

pero estos computos son sencillos de verificar y por tanto concluimos lo pedido

todo eingenvector de A relativo a $\lambda = 4$ es ortogonal a todo eingenvector de A relativo a $\lambda = 1$

¡En efecto se cumple el teorema previo!

Teorema (El teorema espectral).

sea A una matriz de tamaño $n \times n$ con coeficientes reales, entonces:

A es una matriz Simétrica $\longleftrightarrow$ A es una matriz diagonalizable ortogonal

$(A = A^T)$ $\qquad$ $A = Q \cdot D \cdot Q^T$

Q - ortogonal

D - diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{pmatrix}$$

Q (columnas) $\quad$ D (diagonal) $\quad$ Q^T (renglones)

$$\boxed{A = \lambda_1 q_1 q_1^T + \lambda_2 q_2 \cdot q_2^T + \cdots + \lambda_n q_n \cdot q_n^T}$$

Esta escritura para A, se le denomina la descomposición espectral para A.

Ejemplo.

Encontrar la descomposición espectral de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución.

Es claro que A es simétrica y además que:

- ☑ Los eingenvalores de A son $\lambda=4$ y $\lambda=1$.

- ☑ $E_4=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ es una base para E_4.

- ☑ $E_1=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

$\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ es una base para E_1.

- ☑ $\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$.

$\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$ es una base ortonormal para E_4.

✓ Encontrar una base ortogonal para E_1 usando la base $\left\{ \overset{v_1}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$ y el proceso de Gram-Schmidt.

✓ $u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

✓ $u_2 = v_2 - \dfrac{(u_1 \circ v_2)}{(u_1 \circ u_1)} u_1$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$u_1 \circ v_2 =$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= 1 + 0 + 0 = 1$

$u_1 \circ u_1 =$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= 1 + 0 + 1 = 2$

Así, los vectores $\{u_1, u_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\}$ forman una base ortogonal para

E_1. Además los vectores $\{w_1, w_2\}$ descritos como

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{\begin{pmatrix}-1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix}\right\|} = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix}-1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

son una base ortonormal para E_1.

Conclusión.

$$A = Q \cdot D \cdot Q^T$$

Q ortogonal

D diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dashrightarrow \text{matriz diagonal}$$

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} q_1 & q_2 & q_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \end{array} \dashrightarrow \text{matriz ortogonal}$$

$$\boxed{A = 4 \cdot q_1 \cdot q_1^T + 1 \cdot q_2 \cdot q_2^T + 1 \cdot q_3 \cdot q_3^T}$$

Descomposición espectral de A

$$q_1 \cdot q_1^T = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}_{3\times 1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$q_2 \cdot q_2^T = \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{3\times 1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{1\times 3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$q_3 \cdot q_3^T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$A = 4 \cdot q_1 \cdot q_1^T + 1 \cdot q_2 \cdot q_2^T + 1 \cdot q_3 \cdot q_3^T$$

$$A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

La descomposición espectral de A.

Ejemplo.

Encontrar una matriz A de tamaño 2x2 con eingenvalores $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -2$ con correspondientes eingenvectores $V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $V_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Solución.

Para empezar, notemos que:

☑ $V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $V_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ son ortogonales.

$$V_1 \odot V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = -12 + 12 = 0.$$

$\boxed{\checkmark}$ $\|V_1\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5.$

$\|V_2\| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{25} = 5.$

$\boxed{\checkmark}$ $q_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

$q_2 = \frac{V_2}{\|V_2\|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$

q_1 y q_2 son ortogonales.

Si Definimos $Q = (q_1 \;\; q_2) = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

es sencillo notar que Q es una matriz ortogonal (Las columnas son ortogonales y tienen longitud 1) y $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

entonces:

$$A = Q \cdot D \cdot Q^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \end{pmatrix}$$

$$A = 3 q_1 q_1^T + (-2) \cdot q_2 \cdot q_2^T \quad \begin{pmatrix} \text{Descom.} \\ \text{espectral} \end{pmatrix}$$

$$A = 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & \frac{-12}{25} \\ \frac{-12}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{27}{25} & \frac{36}{25} \\ \frac{36}{25} & \frac{48}{25} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-32}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{-18}{25} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} \frac{-5}{25} & \frac{60}{25} \\ \frac{60}{25} & \frac{30}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{12}{5} \\ \frac{12}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}.}$$

Respuesta.

$$\checkmark\ q_1 \cdot q_1^T = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark\ q_2 \cdot q_2^T = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & \frac{-12}{25} \\ \frac{-12}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix}$$