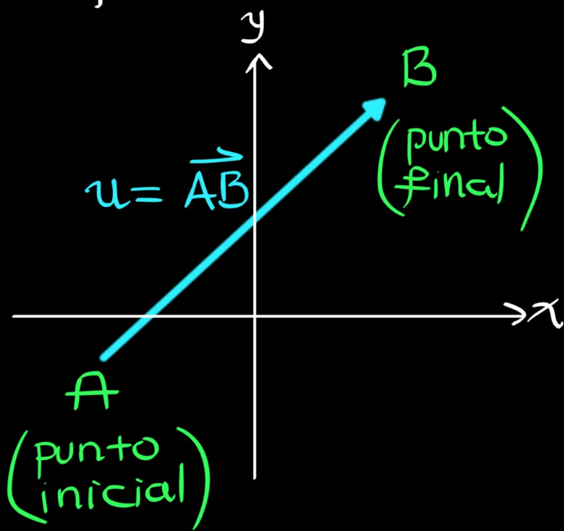
Clase 1 – Lineal.

Vectores en el plano.

Definición (vector): un vector en el plano ($\mathbb{R}^2$) es un segmento de recta dirigido que tiene punto inicial y punto final.

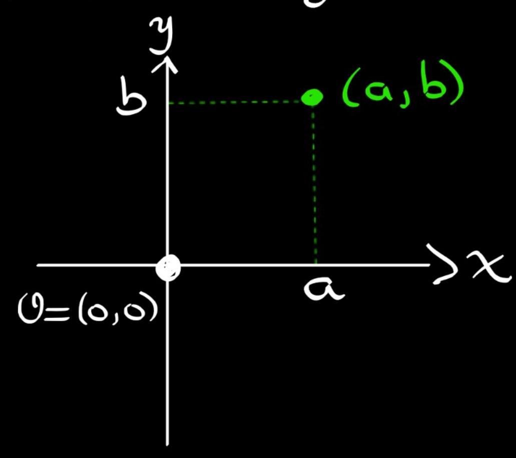
En este caso el vector $u = \overrightarrow{AB}$ mostrado en la figura, tiene punto inicial $\underline{\underline{A}}$ y punto final B.



Notación (Origen de coordenadas).

En $\mathbb{R}^2$ denotamos el origen de coordenadas con la letra O ($O = (0,0)$ – origen).

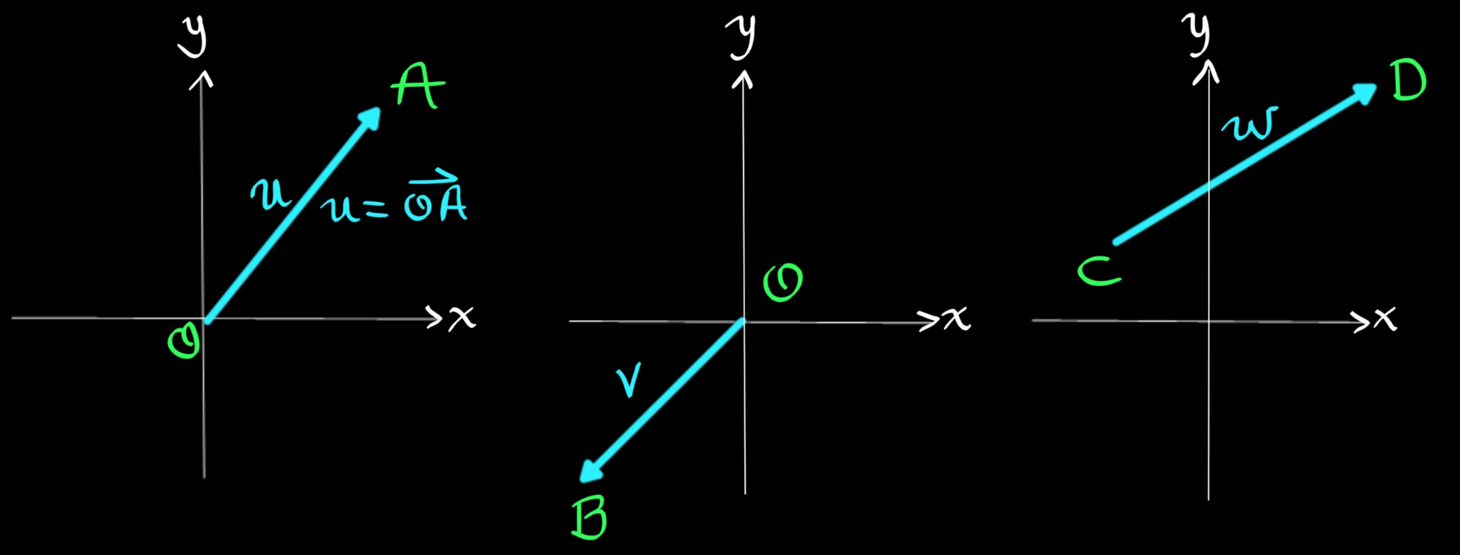
Además $\mathbb{R}^2$ consiste de todos las parejas ordenadas de la forma (a,b) con $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$.



Representación de vectores usando coordenadas.

Definición (vectores en posición en $\mathbb{R}^2$).

Un vector en posición en $\mathbb{R}^2$ es un vector en $\mathbb{R}^2$ que tiene como punto inicial el origen $O=(0,0)$.



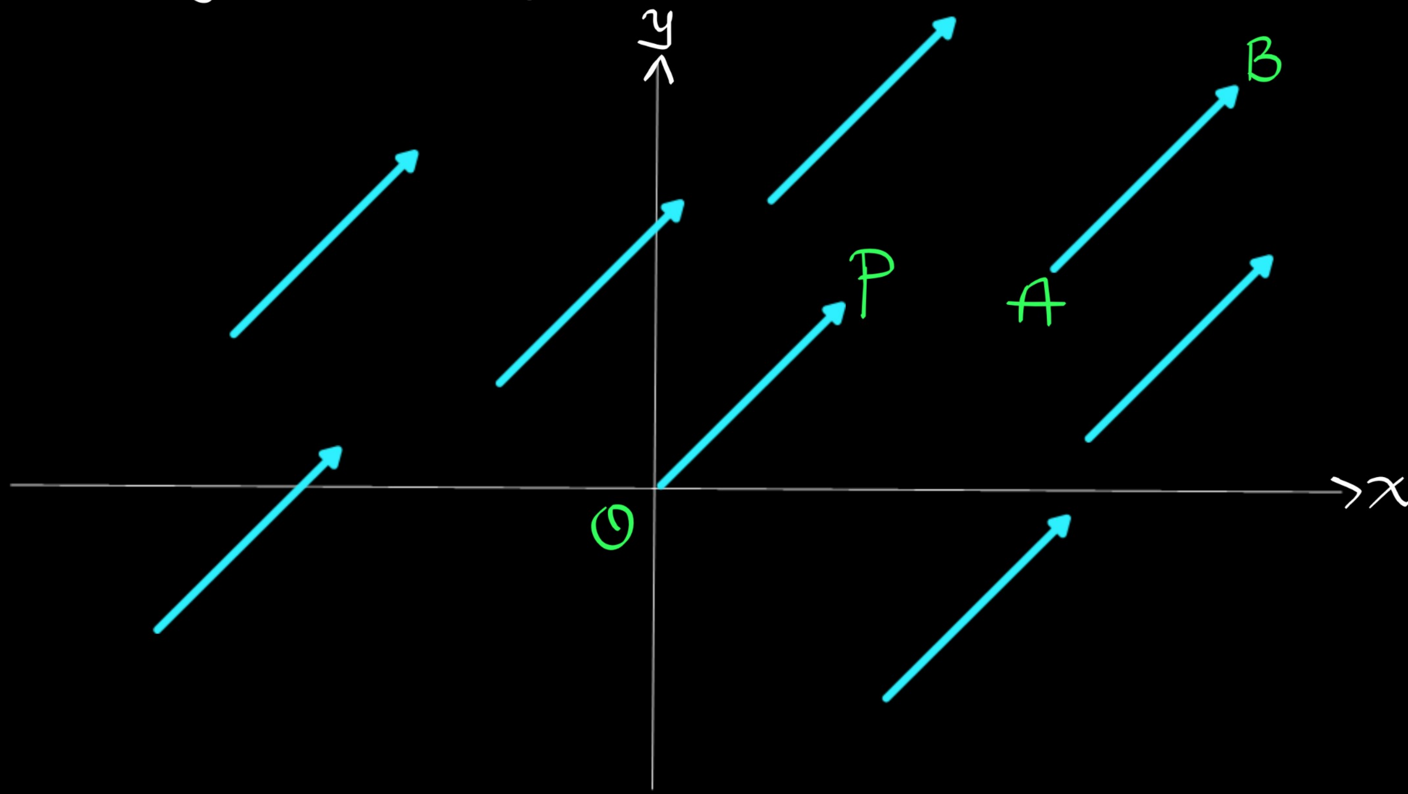
✓ $u=\overrightarrow{OA}$ es un vector en posición.

✓ $v=\overrightarrow{OB}$ es un vector en posición.

✓ $w=\overrightarrow{CD}$ no es un vector en posición.

Observación (vectores <u>vs</u> vectores en posición).

Si $\overrightarrow{AB}$ es un vector en el plano, entonces podemos "mover" el vector $\overrightarrow{AB}$ sin cambiar su magnitud y dirección, hasta hacerlo coincidir con un vector de la forma $\vec{Op}$ como se muestra en la siguiente figura.



De hecho, se puede probar que $P = B - A$. Es decir, si $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$, entonces:

$$\boxed{P = B - A = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).}$$

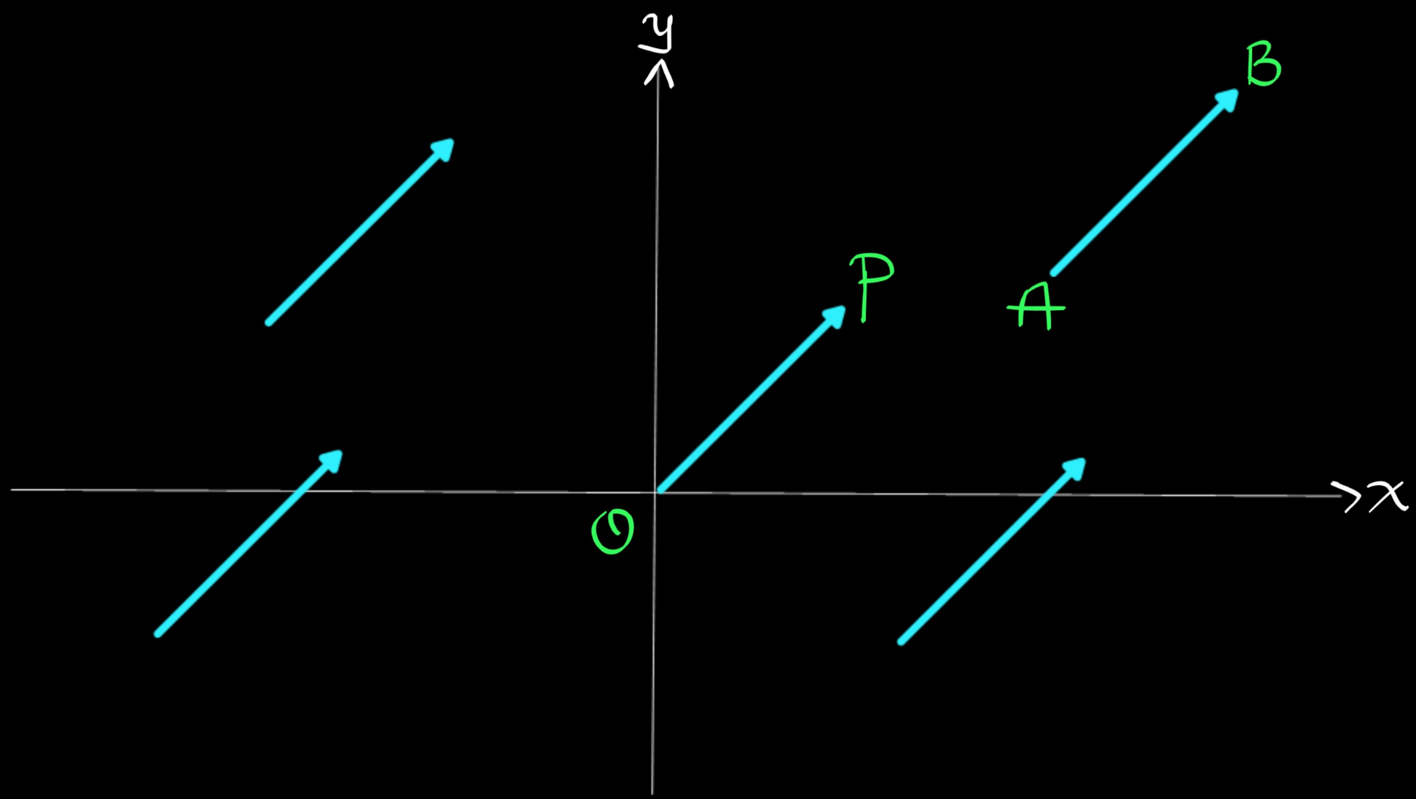
por este motivo, ofrecemos la siguiente definición.

Definición (igualdad de vectores en $\mathbb{R}^2$).

Dados $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ vectores en $\mathbb{R}^2$, decimos que $\overrightarrow{AB}$ es igual a $\overrightarrow{CD}$ si:

✓ La longitud de $\overrightarrow{AB}$ es igual a la longitud de $\overrightarrow{CD}$.

✓ La dirección de $\overrightarrow{AB}$ es igual a la dirección de $\overrightarrow{CD}$.



por ejemplo, todos los vectores de la mostrados en la figura anterior son iguales.

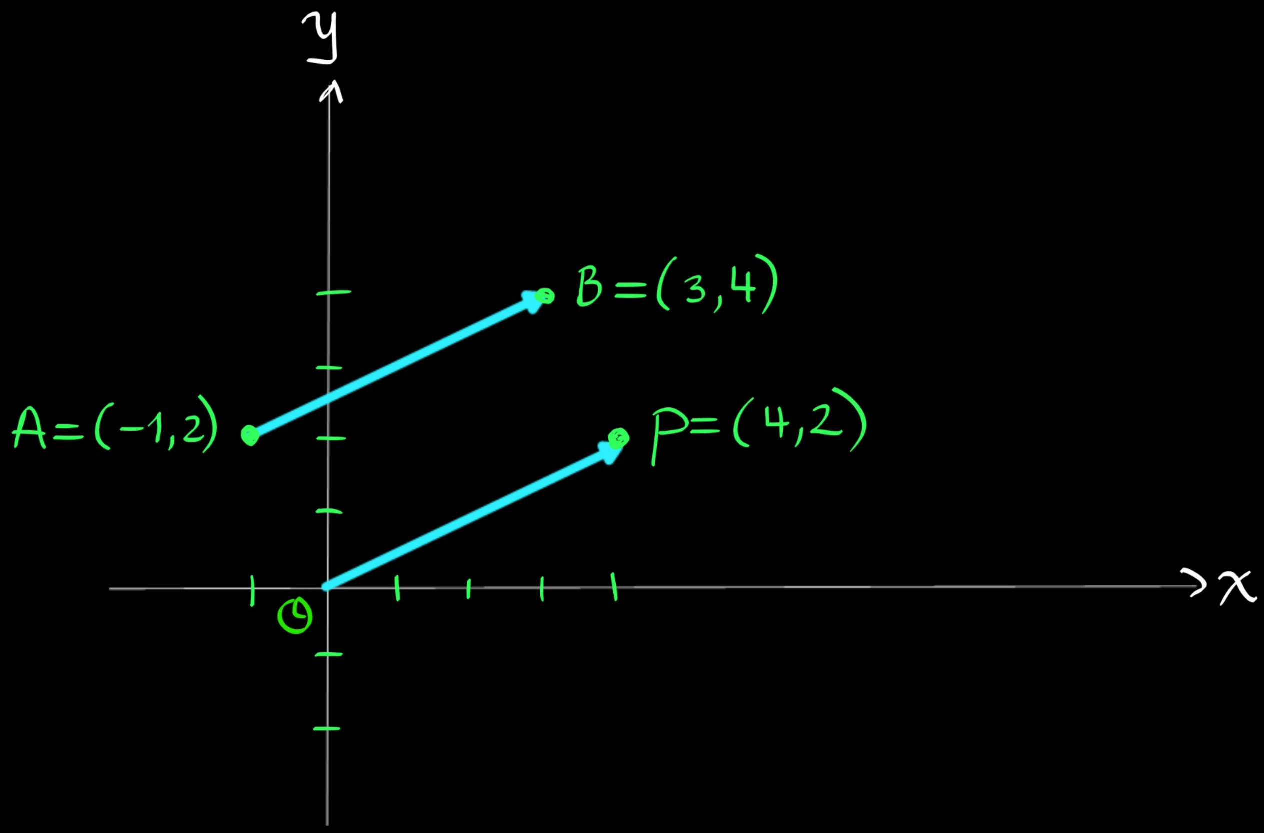
Nota (igualdad de vectores en $\mathbb{R}^2$).

Si $\overrightarrow{AB}$ es igual a $\overrightarrow{CD}$ escribimos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Ejemplo 1.1 Si $A = (-1, 2)$ y $B = (3, 4)$, encuentre $\overrightarrow{AB}$ y vuelva a dibujarlo (a) en posición estándar y (b) con su origen en el punto $C = (2, -1)$.

Solución:

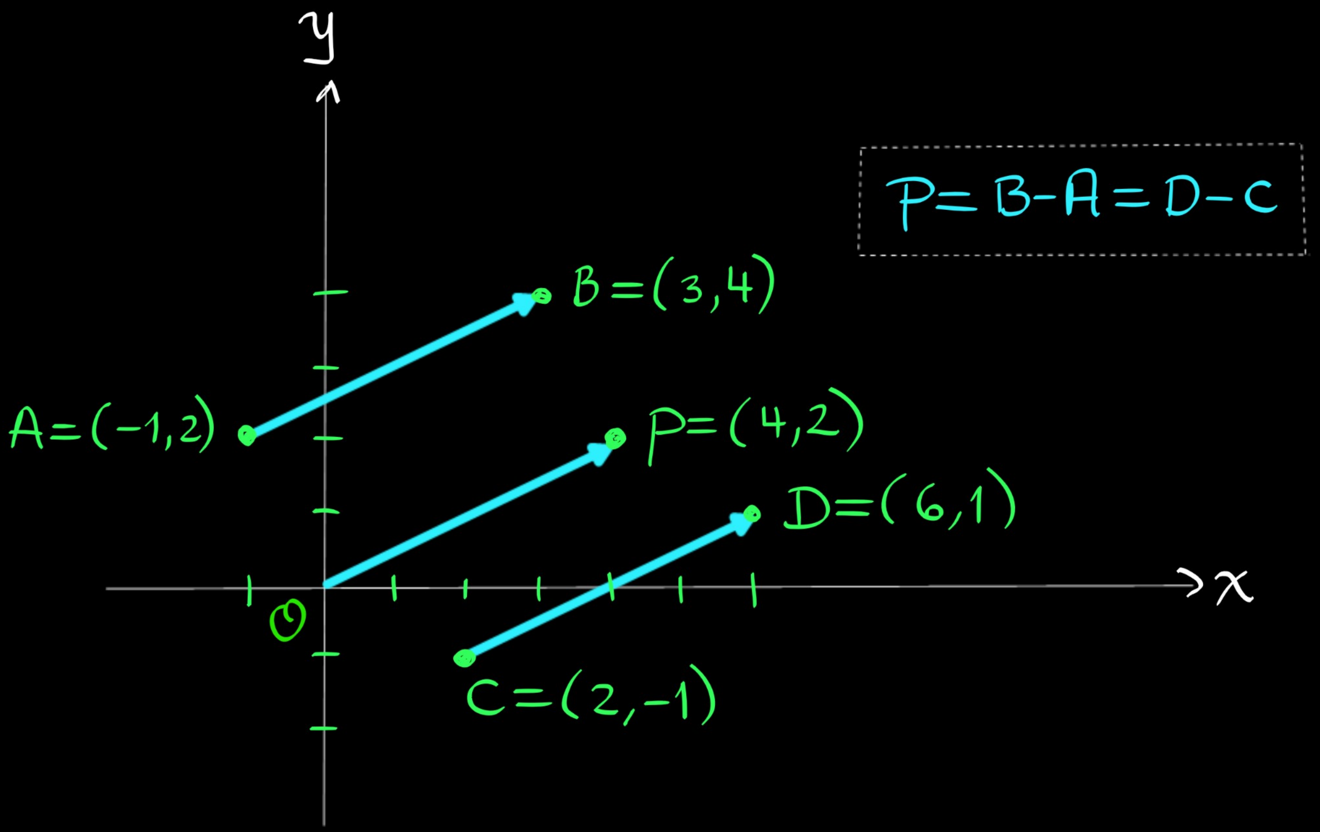
(a) La posición estandar del vector $\overrightarrow{AB}$ es $\overrightarrow{OP}$ donde $P = B - A = (3,4) - (-1,2) = (4,2)$. En la siguiente figura mostramos su representación gráfica:



(b) Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, entonces recordemos que

$$P = (4,2) = B - A = D - C = (d_1, d_2) - (2,-1) = (d_1 - 2, d_2 + 1)$$

Lo cual muestra que $d_1 - 2 = 4$ y $d_2 + 1 = 2$, y así $D = (d_1, d_2) = (6, 1)$. A continuación mostramos la descripción gráfica de $\overrightarrow{CD}$.



Notación (vectores en $\mathbb{R}^2$).

Sea $\overrightarrow{AB}$ un vector en $\mathbb{R}^2$ con $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$. Entonces dado que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ con $P = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, entonces en ocasiones escribimos $\overrightarrow{AB} = [b_1 - a_1, b_2 - a_2]$. Esto nos recuerda el punto final p del vector en posición $\vec{Op}$.

Operaciones entre vectores.

Definición (suma de vectores en $\mathbb{R}^2$).

Sean $u=[u_1, u_2]$ y $v=[v_1, v_2]$ vectores en $\mathbb{R}^2$, entonces definimos el vector $u+v$ como:

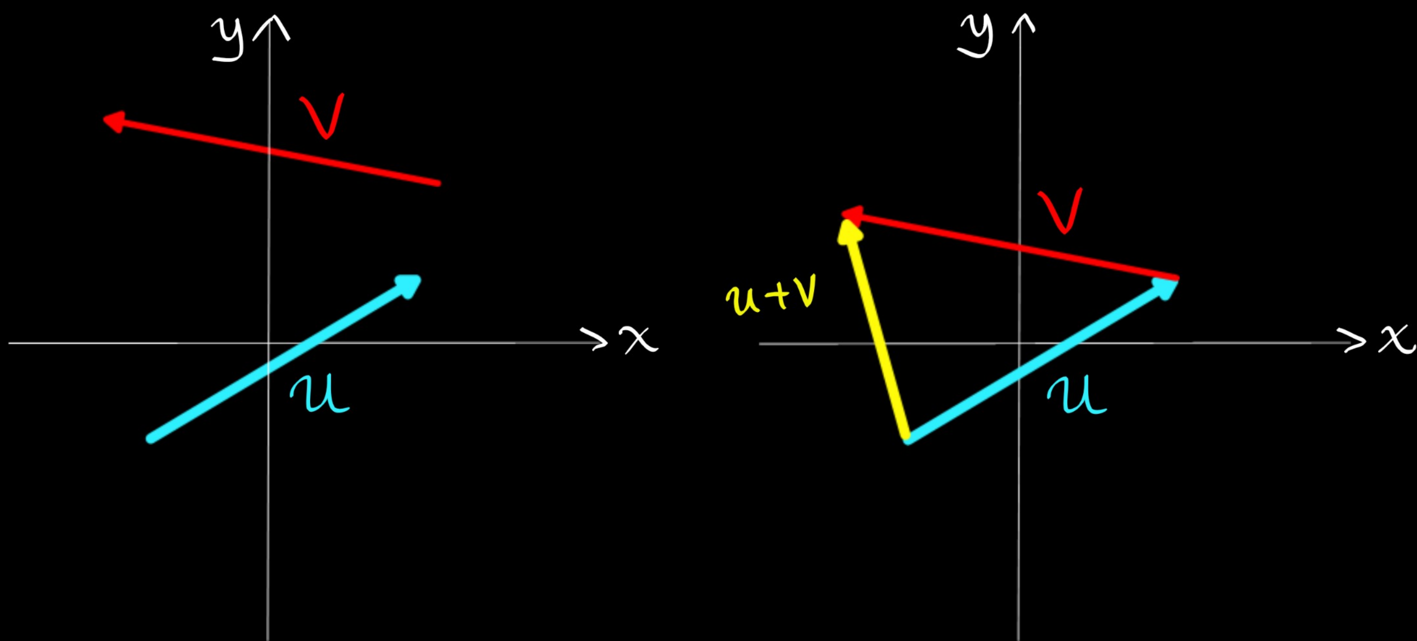
$$\boxed{u+v=[u_1, u_2]+[v_1, v_2]:=[u_1+v_1\ , u_2+v_2].}$$

Observación (definición anterior).

La descripción geométrica de la suma de vectores se ilustra con la regla del triángulo y la regla del paralelogramo.

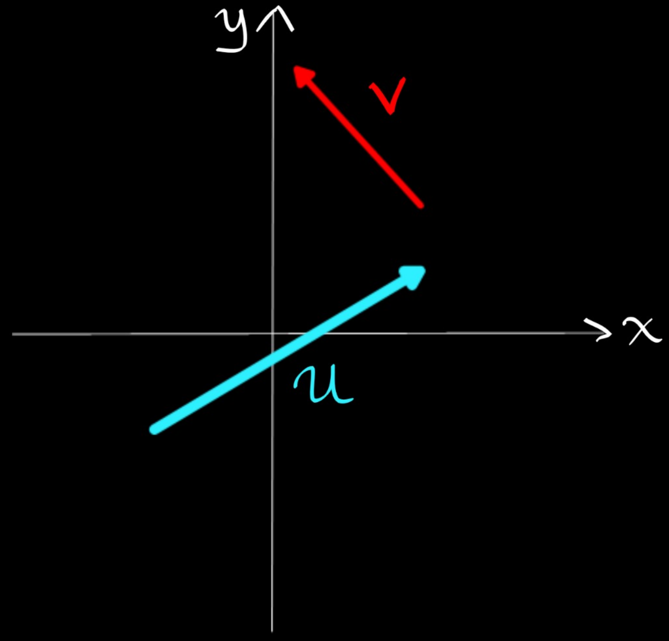
Regla del triángulo: sean u y v dos vectores en $\mathbb{R}^2$, entonces para describir el vector $u+v$, trasladamos v de modo que el nuevo origen de v coincida con el punto final de u.

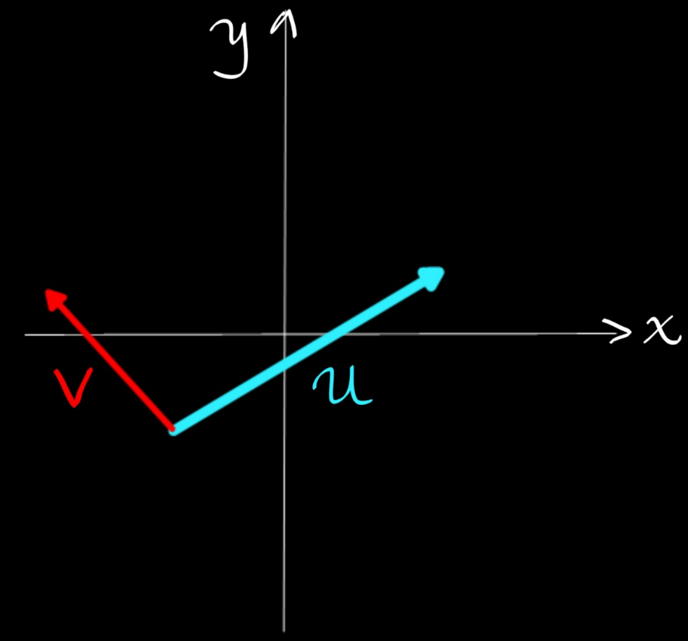
Así, $u+v$ es el vector que tiene como punto inicial el punto inicial de u y el punto final es el punto final del vector v trasladado como se muestra en la figura.



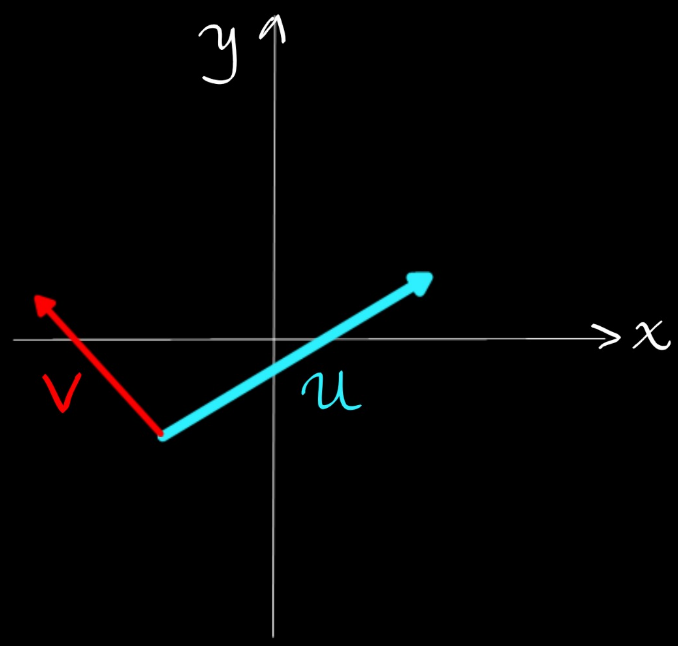
Regla del paralelogramo:

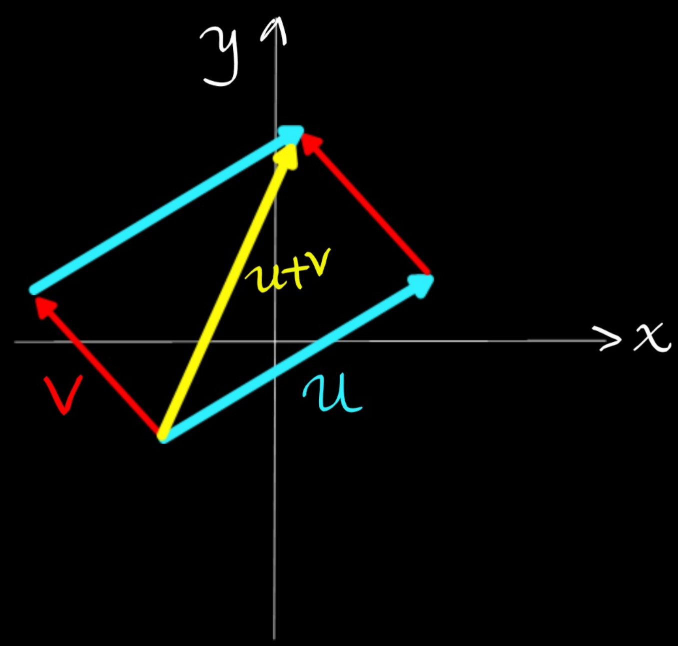
Supongamos que u y v son vectores en el plano, entonces para describir el vector $u+v$, trasladamos alguno de los 2 vectores de tal modo que ambos vectores tengan el mismo punto inicial como se muestra en la figura.



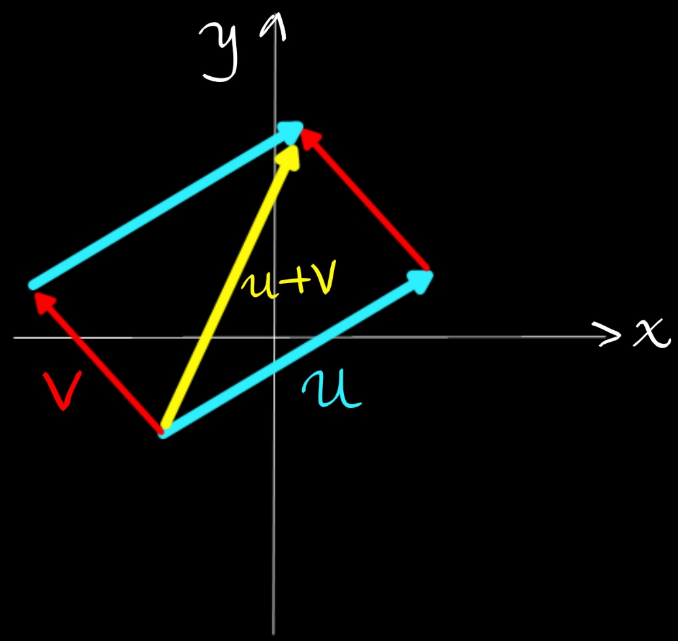


y luego formamos un paralelogramo





y el vector $u+v$ es la diagonal del paralelogramo formado anterior/, donde el punto inicial de $u+v$ es el mismo punto inicial de u y v (después de hacerlos coincidir).



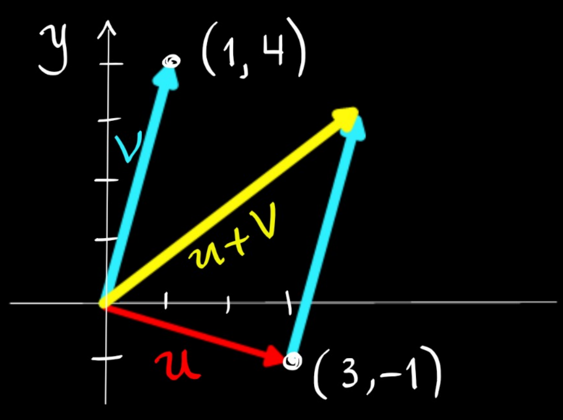
Ejemplo 1.2 Si $\mathbf{u} = [3, -1]$ y $\mathbf{v} = [1, 4]$, calcule y dibuje $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Solución:

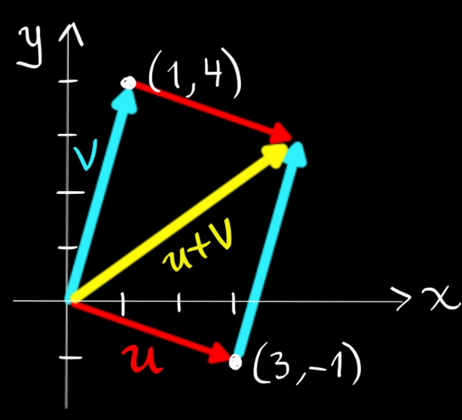
✓ Algebraicamente.

$$u+v = [3,-1]+[1,4] = [3+1\ ,\ -1+4] = [4,3].$$

✓ Geométricamente.



(Regla del triángulo)



(Regla paralelogramo)

Definición (multiplicación por escalar).

Sean $u = [u_1, u_2]$ un vector en $\mathbb{R}^2$ y c es un número real fijo. Entonces definimos el vector $c \cdot u$ como:

$$c \cdot u = c \cdot [u_1, u_2] := [c \cdot u_1, c \cdot u_2]$$

Ejemplo 1.3	Si $\mathbf{v} = [-2, 4]$, calcule y dibuje $2\mathbf{v}$, $\frac{1}{2}\mathbf{v}$, y $-2\mathbf{v}$.

Solución:

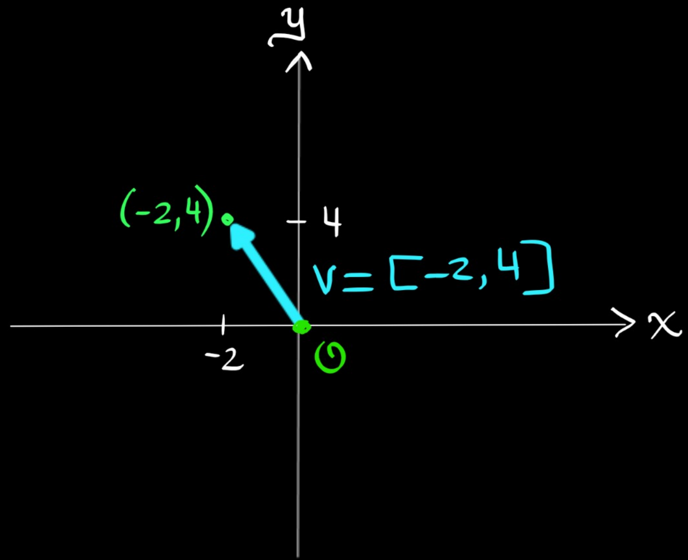
✓ Algebraicamente.

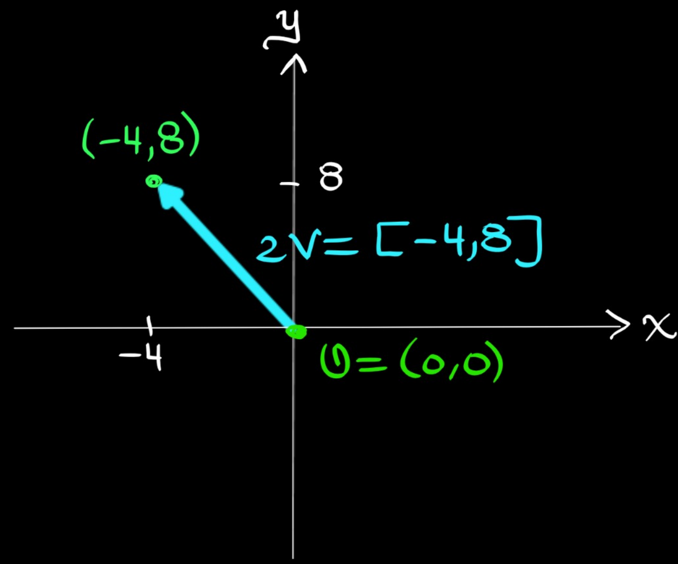
- $2V = 2[-2, 4] = [2(-2), 2(4)] = [-4, 8]$.
- $\frac{1}{2}V = \frac{1}{2}[-2, 4] = \left[\frac{1}{2}(-2), \frac{1}{2}(4)\right] = [-1, 2]$.

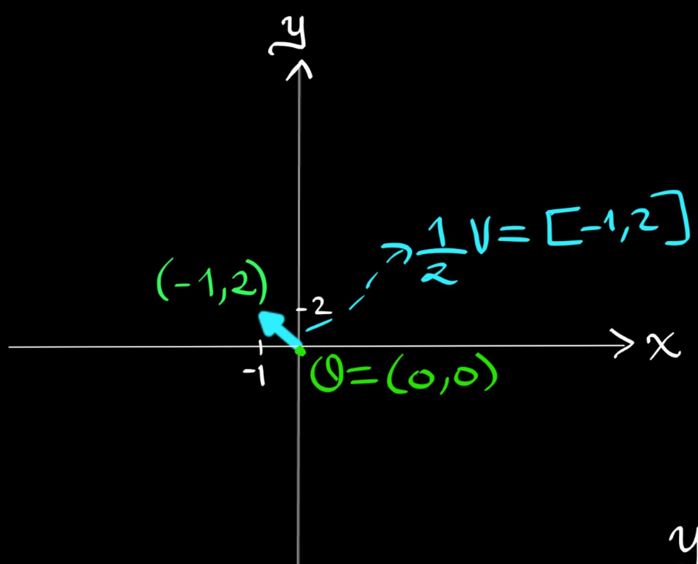
- $-2V = -2[-2, 4] = [-2(-2), -2(4)] = [4, -8]$.

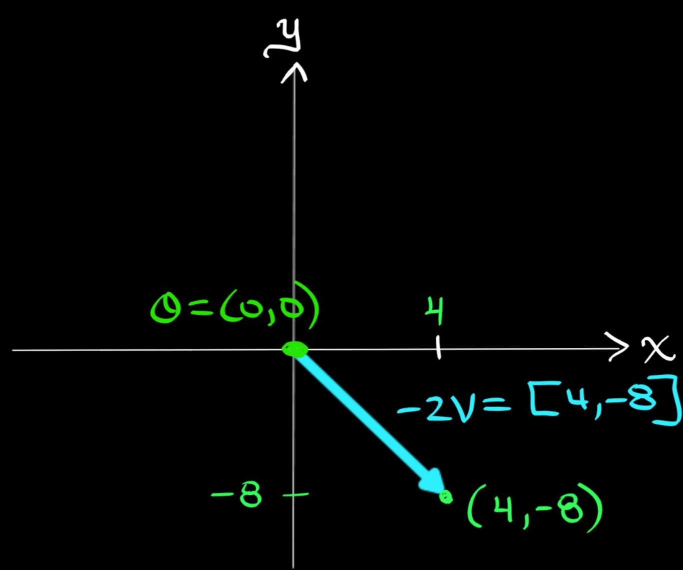
✓ Geométricamente.

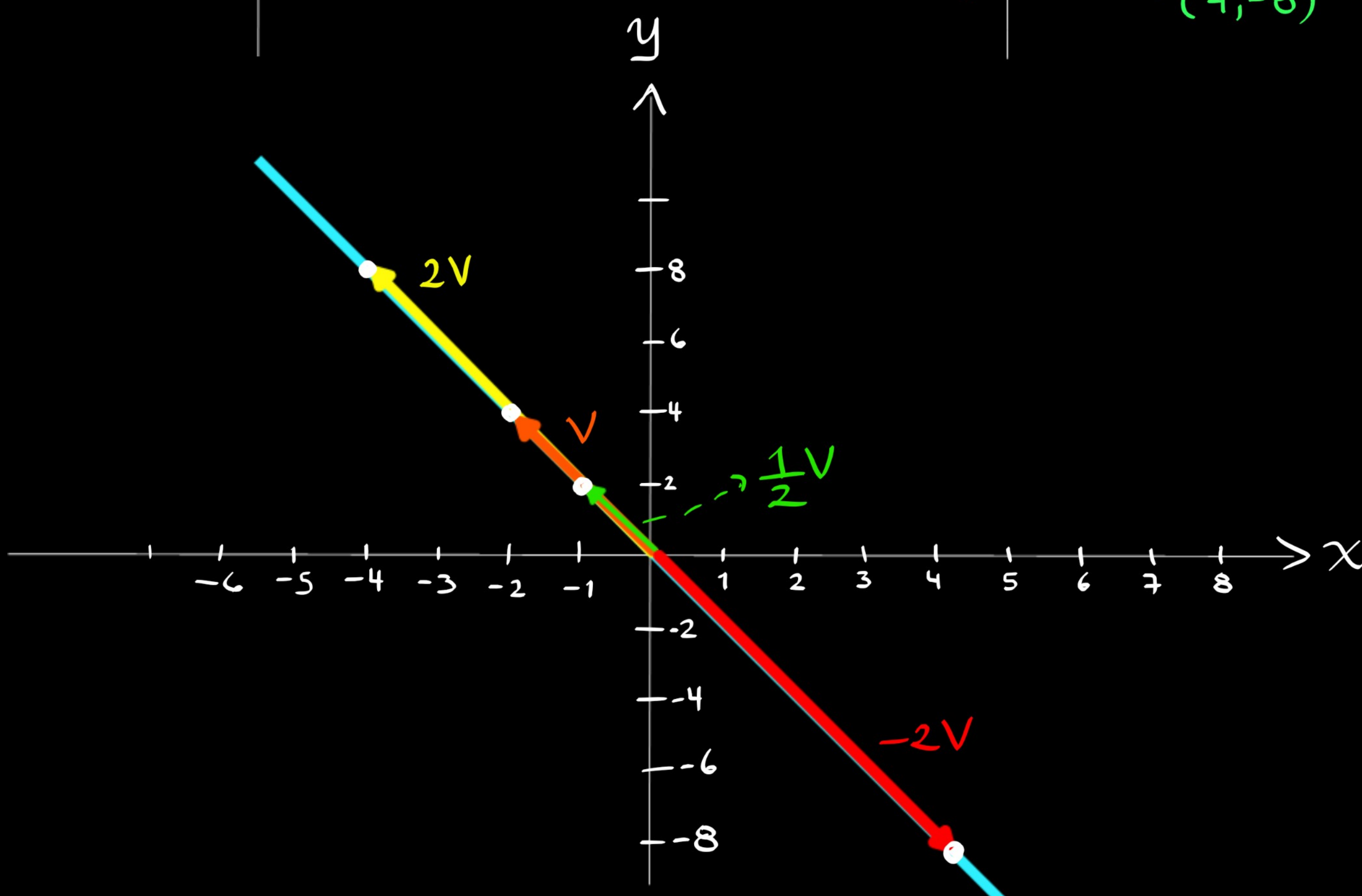
Los vectores $2V$, $\frac{1}{2}V$ y $-2V$ se muestran en la siguiente figura.


y
x
(-2,4)
4
V=[-2,4]
-2
O


y
x
(-4,8)
8
2V=[-4,8]
-4
O=(0,0)


y
x
(-1,2)
2
1/2 V=[-1,2]
-1
O=(0,0)


y
x
O=(0,0)
4
-2V=[4,-8]
-8
(4,-8)


y
x
2V
V
1/2 V
-2V
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8

Observación (producto por escalar - ejemplo anterior).

Es importante notar que dado un vector u en $\mathbb{R}^2$ y c un número real fijo, entonces:

✓ si $c>0$, entonces $c\cdot v$ tiene la misma dirección que v. Además la longitud de $c\cdot v$ es $|c|$ veces la longitud de v.

✓ si $c<0$, entonces $c\cdot v$ tiene dirección opuesta a v. Además la longitud de $c\cdot v$ es $|c|$ veces la longitud de v.

Definición (vectores paralelos en $\mathbb{R}^2$).

Sean u y v vectores en $\mathbb{R}^2$. Entonces decimos que u y v son paralelos, si existe $c\geq 0$ tal que:

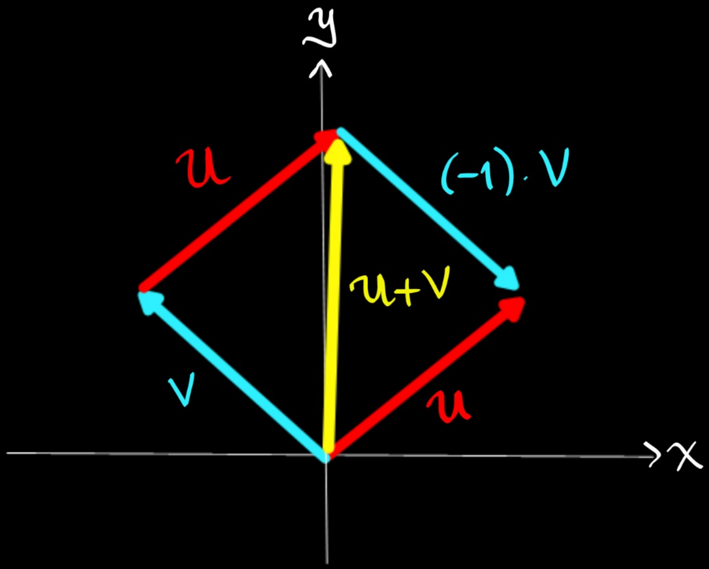
$$\boxed{u = c\cdot v \qquad \text{o} \qquad v = c\cdot u}$$

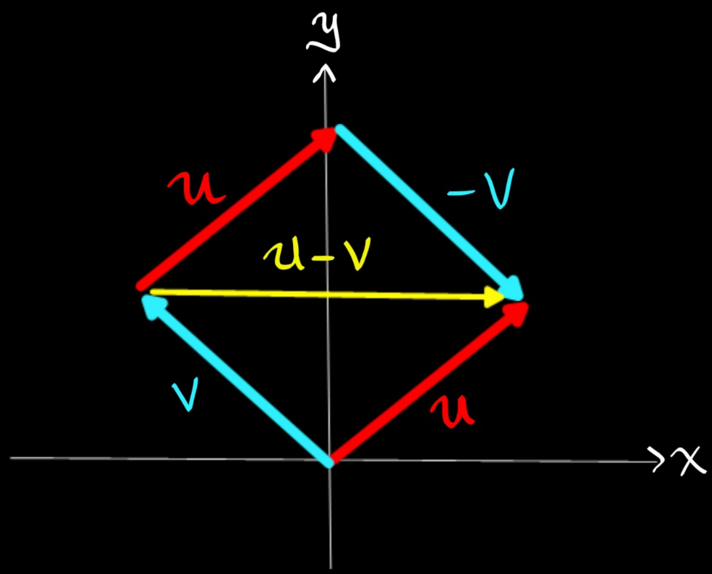
Definicion (resta de vectores):

Dados u y v vectores en $\mathbb{R}^2$, definimos el vector $u-v$ como:

$$\boxed{u-v := u+(-1)\cdot v}$$

El vector $u-v$ lo llamamos la resta entre u y v.





Ejemplo 1.4 Si $\mathbf{u} = [1, 2]$ y $\mathbf{v} = [-3, 1]$, entonces $\mathbf{u} - \mathbf{v} = [1 - (-3), 2 - 1] = [4, 1]$.

$$u-v=[1,2]-[-3,1]=[1,2]+[3,-1]=$$

$$=[1+3\ ,\ 2+(-1)]=[4,1].$$

Vectores en $\mathbb{R}^3$.

Todo lo que se ha hecho se extiende con facilidad a tres dimensiones. El conjunto de todas las *ternes ordenadas* de números reales se denota mediante $\mathbb{R}^3$. Puntos y vectores se localizan usando tres ejes coordenados mutuamente perpendiculares que se reúnen en el origen O. Un punto como $A = (1, 2, 3)$ puede localizarse del modo siguiente: primero recorra 1 unidad a lo largo del eje x, luego avance 2 unidades paralelas al eje y y finalmente mueva 3 unidades paralelas al eje z. El vector correspondiente $\mathbf{a} = [1, 2, 3]$ es entonces $\overrightarrow{OA}$, como se muestra en la figura 1.15.

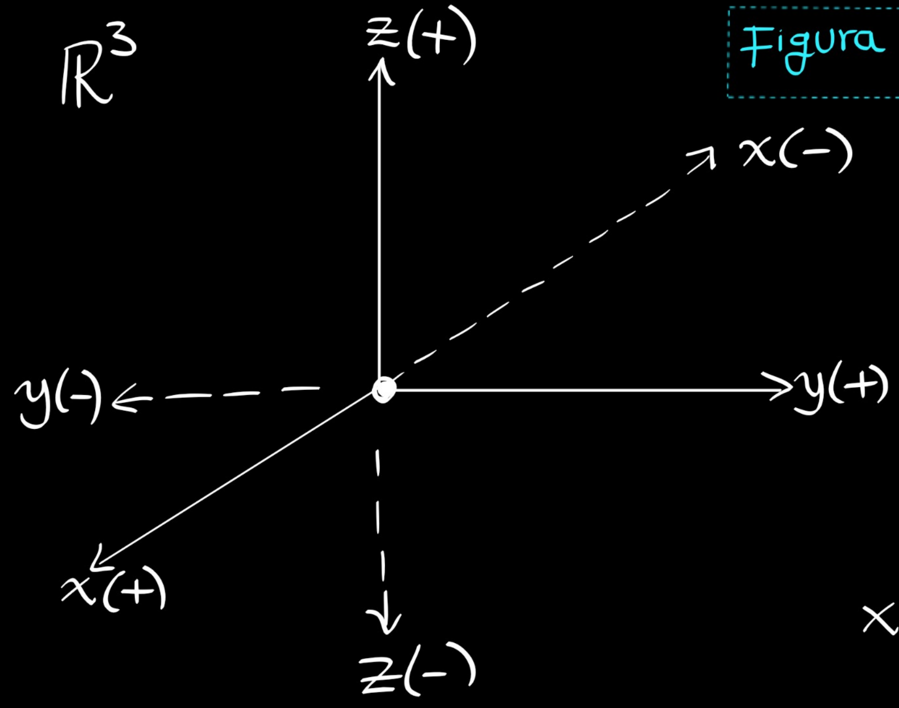
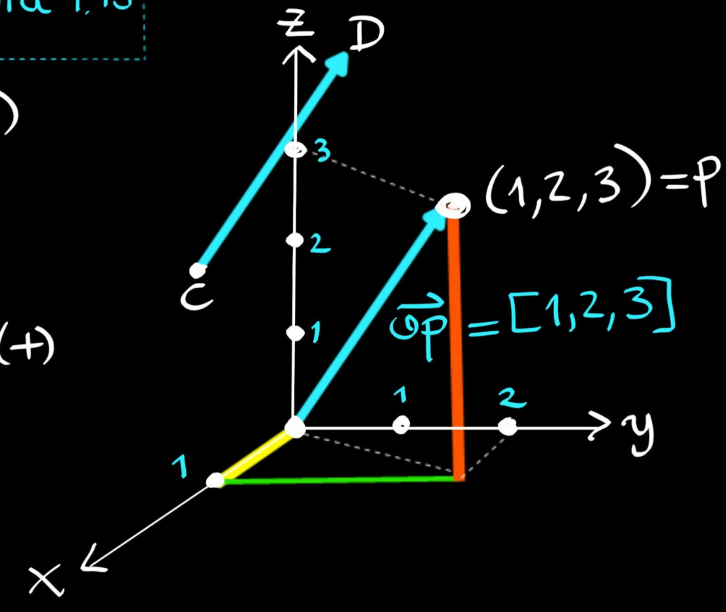


Figura 1.15



Vectores en $\mathbb{R}^n$:

En general, $\mathbb{R}^n$ se define como el conjunto de todas las *n-adas ordenadas* de números reales escritos como vectores renglón o columna. Por ende, un vector **v** en $\mathbb{R}^n$ es de la forma

$$[v_1, v_2, \ldots, v_n] \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Las entradas individuales de **v** son sus componentes; v_i se llama el componente *i*-ésimo.

Definición (suma y multiplicación por escalar en $\mathbb{R}^n$).

Sean $u=[u_1,\ldots,u_n]$ y $v=[v_1,\ldots,v_n]$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y $c\in\mathbb{R}$, entonces:

✓ $u+v=[u_1,\ldots,u_n]+[v_1,\ldots,v_n]:=[u_1+v_1,\ldots,u_n+v_n]$.

✓ $c\cdot u=c\cdot[u_1,\ldots,u_n]:=[c\cdot u_1,\ldots,c\cdot u_n]$.

Teorema 1.1 Propiedades algebraicas de los vectores en $\mathbb{R}^n$

Sean **u**, **v** y **w** vectores en $\mathbb{R}^n$ y sean c y d escalares. Entonces

a. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ Commutatividad

b. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ Asociatividad

c. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ $\rightarrow$ $0 = [0, \dots, 0]$

d. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

e. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ Distributividad

f. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ Distributividad

g. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$

h. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Definición Un vector **v** es una ***combinación lineal*** de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ si existen escalares $c_1, c_2, \dots, c_k$ tales que $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$. Los escalares $c_1, c_2, \dots, c_k$ se llaman ***coeficientes*** de la combinación lineal.

$$V = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots + C_k \cdot V_k$$

Ejemplo 1.6 El vector $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ es una combinación lineal de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$, pues

$$3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- $3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$
- $2\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $-\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo.

(1) si $u=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, entonces:

✓ $u=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ es una combinación lineal de u, ya que $u=1\cdot u$.

✓ $0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ es una combinación lineal de u, ya que $0=0\cdot u$.

✓ todos los vectores de la forma $c\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ son combinaciones lineales de u.

(2) si $u=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ y $v=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$, entonces:

✓ $0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=0\cdot u+0\cdot v=0\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+0\cdot\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$.

✓ $1 \cdot u + 5 \cdot v = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 22 \end{bmatrix}$.

Así, $\begin{bmatrix} 16 \\ 22 \end{bmatrix}$ es una combinación lineal de u y v!

✓ Existen infinitos vectores que son combinación lineal de $\underline{\underline{u}}$ y $\underline{\underline{v}}$.

✓ ¿El vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ es combinación lineal de u y v?

Veamos si existen $c, d \in \mathbb{R}$ tales que

$$\boxed{c \cdot u + d \cdot v = c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}}$$

✓ $c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+3d \\ 2c+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} c+3d=3 \\ 2c+4d=8 \end{matrix}$

✓ $\begin{matrix} c+3d=3 \\ 2c+4d=8 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} -2c-6d=-6 \\ 2c+4d=8 \\ \hline -2d=2 \\ d=-1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} c+3d=3 \\ c=3-3d \\ c=3-3(-1) \\ c=6 \end{matrix}$

Por tanto $6 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$, y así $\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ es combinación lineal de $\underline{\underline{u}}$ y $\underline{\underline{v}}$.

Producto punto en $\mathbb{R}^n$.

Definición Si

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

entonces el ***producto punto*** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se define mediante

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Ejemplo 1.15

Calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ cuando $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución:

$$u \cdot v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (5) + (-3) \cdot 2 = 1.$$

Teorema 1.2 Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$, y sea c un escalar. Entonces

a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ — Conmutatividad
b. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ — Distributividad
c. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
d. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}.$$

Demostración:

(a) $u \bullet v = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$

$v \bullet u = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots + v_n \cdot u_n.$

$u \bullet v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n = v_1 u_1 + \cdots + v_n \cdot u_n = v \bullet u.$

(b) Ejercicio

(c) Ejercicio

(d) Ejercicio

Ejemplo 1.16 Demuestre que $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ para todos los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$.

Demostración:

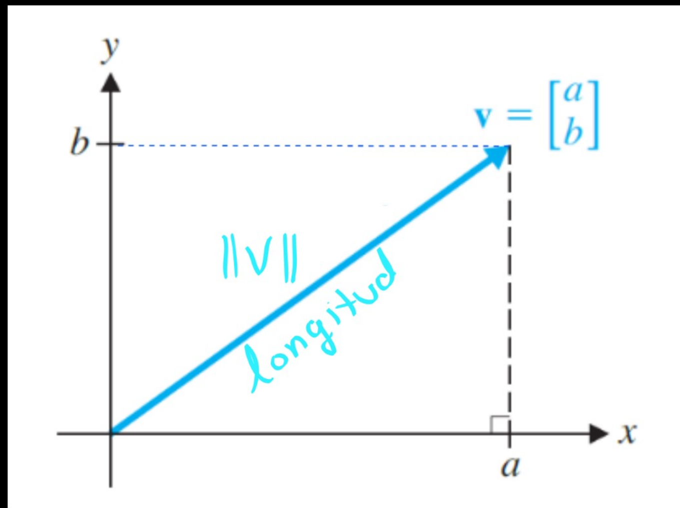
$(u+v)\bullet(u+v) = (u+v)\bullet u + (u+v)\bullet v = u\bullet(u+v) + v\bullet(u+v)$

$= u\bullet u + u\bullet v + v\bullet u + v\bullet v = u\bullet u + u\bullet v + u\bullet v + v\bullet v$

$= u\bullet u + 2(u\bullet v) + v\bullet v.$

Longitud de un vector en $\mathbb{R}^n$.

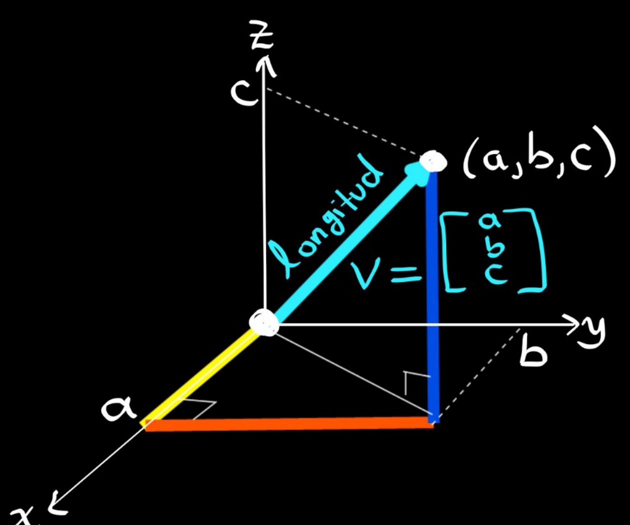
Consideremos un vector $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$, como se muestra en la siguiente figura.

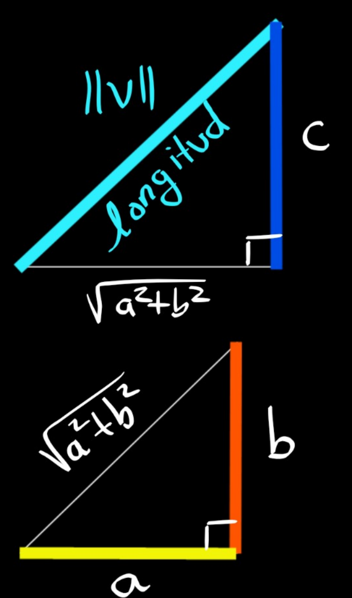


Entonces si denotamos por $\|V\|$ la longitud de V, por el teorema de pitágoras se tiene que:

$$\|V\|^2 = a^2 + b^2 \longrightarrow \|V\| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

De manera similar, si $V = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ es un vector en $\mathbb{R}^3$ y $\|V\|$ es su longitud, entonces se puede probar que:





pitágoras

$$\|V\|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + c^2$$

$$\|V\|^2 = a^2+b^2+c^2$$

$$\|V\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Definición La *longitud* (o *norma*) de un vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^n$ es el escalar no negativo $\|\mathbf{v}\|$ definido por

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

$$V \cdot V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2 + \cdots + v_n \cdot v_n = v_1^2 + \cdots + v_n^2.$$

Ejemplo.

Hallar la longitud del vector $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución:

$$\|v\| = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}.$$

Teorema 1.3 Sea $\mathbf{v}$ un vector en $\mathbb{R}^n$ y sea c un escalar. Entonces

a. $\|\mathbf{v}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

b. $\|c\mathbf{v}\| = |c|\|\mathbf{v}\|$

Ejercicio

Definición (vector unitario).

un vector v en $\mathbb{R}^n$ se denomina unitario, si $\|v\| = 1$.

Observación (Normalizar un vector).

Sea $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ un vector no nulo en $\mathbb{R}^n$, entonces $\frac{1}{\|v\|} \cdot v$ es un vector unitario, ya que:

$$\boxed{\left\| \frac{1}{\|v\|} \cdot v \right\| = \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \cdot \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1.}$$

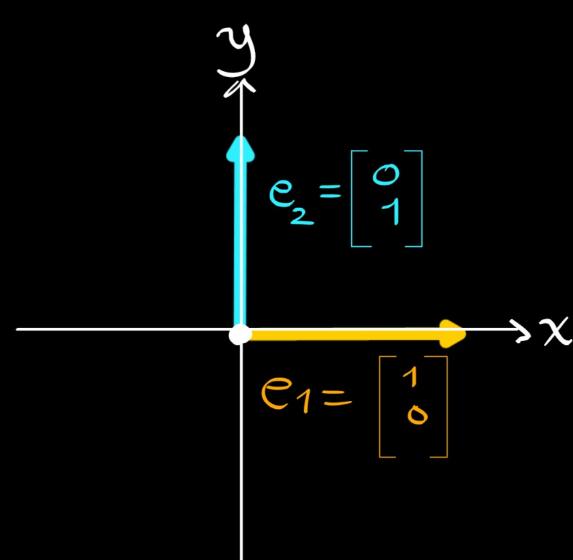
En ocasiones el vector $u = \frac{1}{\|v\|} \cdot v$ es llamado la normalización del vector v. $(\|u\| = 1)$.

Ejemplo.

Sean $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^2$, entonces e_1 y e_2 son vectores unitarios, ya que:

✓ $\|e_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1.$

✓ $\|e_2\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1.$



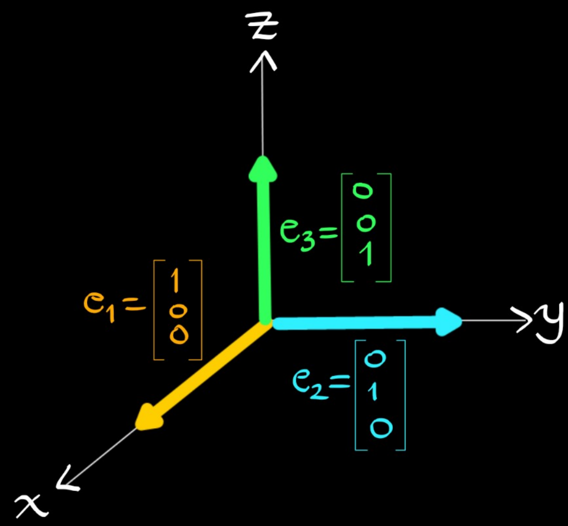
Ejemplo.

De manera análoga $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ son vectores unitarios.

✓ $\|e_1\| = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = \sqrt{1} = 1.$

✓ $\|e_2\| = \sqrt{0^2+1^2+0^2} = \sqrt{1} = 1.$

✓ $\|e_3\| = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = \sqrt{1} = 1.$



Nota (vectores unitarios estandar en $\mathbb{R}^n$).

En general, en $\mathbb{R}^n$, se definen vectores unitarios $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, donde $\mathbf{e}_i$ tiene 1 en su i-ésimo componente y ceros en cualquier otra parte. Tales vectores surgen de manera repetida en álgebra lineal y se llaman ***vectores unitarios estándar***.

✓ $e_1 = [1, 0, 0, \ldots, 0]$.

✓ $e_2 = [0, 1, 0, \ldots, 0]$.

✓ $e_3 = [0, 0, 1, \ldots, 0]$.

$\vdots$

✓ $e_{n-1} = [0, 0, 0, \ldots, 1, 0]$.

✓ $e_n = [0, 0, 0, \ldots, 1]$.

Ejemplo 1.19

Normalice el vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución:

✓ $\|v\| = \sqrt{2^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{14}.$

$$\checkmark \quad u = \frac{1}{\|v\|} \cdot v = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{14} \\ -1/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{bmatrix}.$$

Teorema 1.4 **La desigualdad de Cauchy-Schwarz**

Para todos los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$,

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

Teorema 1.5 **La desigualdad del triángulo**

Para todos los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$,

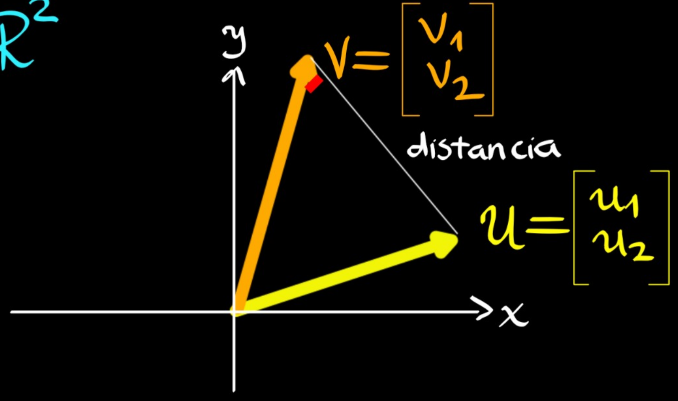
$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

Distancia entre vectores en $\mathbb{R}^n$.

Definición La ***distancia*** $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$ se define por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

$\mathbb{R}^2$



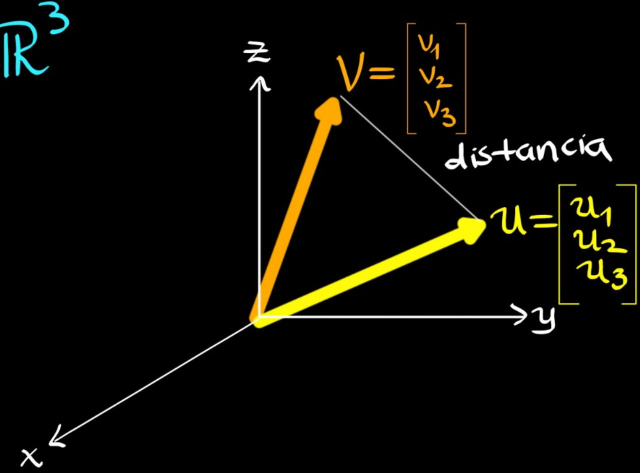
se puede demostrar que

distancia =

$$= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$$

$$= \| u - v \|$$

$\mathbb{R}^3$



se puede demostrar que

distancia

$$= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^3}$$

$$= \| u - v \|$$

Ejemplo 1.20

Encuentre la distancia entre $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución:

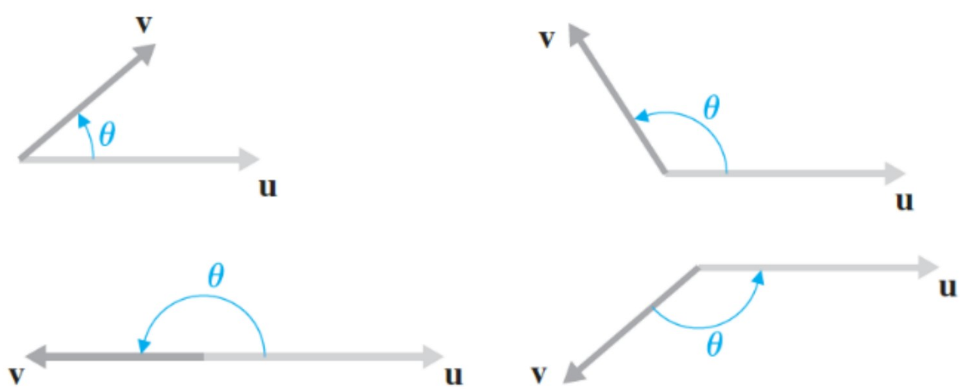
$$\boxed{\text{Distancia}(u,v) = \|u - v\|}$$

✓ $u - v = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} - 0 \\ 1 - 2 \\ -1-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

✓ $\|u - v\| = \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$. Lo que muestra que la distancia entre $\underline{\underline{u}}$ y $\underline{\underline{v}}$ es $\underline{\underline{2}}$.

Ángulos

El producto punto también se puede usar para calcular el ángulo entre un par de vectores. En $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, el ángulo entre los vectores **u** y **v** distintos de cero se referirá al ángulo θ determinado por estos vectores que satisfaga $0 \leq \theta \leq 180°$ (vea la figura 1.32).



Definición (ángulo entre vectores no nulos):

Sean $u=\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ y $v=\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$, entonces definimos el ángulo θ entre u y v como aquel número real que satisface la siguiente ecuación:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}} \longrightarrow \boxed{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}\right)}$$

Ejemplo 1.21	Calcule el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = [2, 1, -2]$ y $\mathbf{v} = [1, 1, 1]$.

Solución:

Para empezar, notemos que:

✓ $\|u\| = \sqrt{2^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$

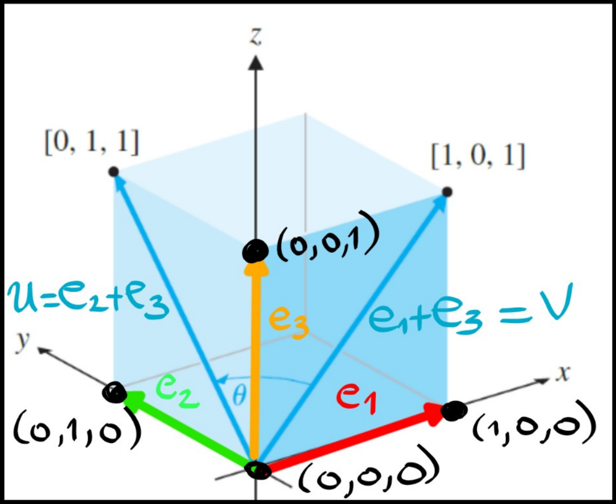
✓ $\|v\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}.$

✓ $u\cdot v = [2,1,-2]\cdot[1,1,1] = 2\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-2)\cdot 1 = 1$

✓ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3\cdot\sqrt{3}}\right) = 78.9^\circ$

Ejemplo 1.22 Calcule el ángulo entre las diagonales de dos caras adyacentes de un cubo.

Solución:



Para empezar, notemos que:

✓ $\|u\| = \sqrt{0^2+1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

✓ $\|V\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$

✓ $u \cdot V = \begin{bmatrix} 0,1,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,0,1 \end{bmatrix}$

$= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1.$

✓ $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{u \cdot V}{\|u\| \cdot \|V\|}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\theta = 60^\circ$

Definición Dos vectores **u** y **v** en $\mathbb{R}^n$ son mutuamente ***ortogonales*** si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

u y V son ortogonales $\longleftrightarrow$ $\theta = 90^\circ$ es el ángulo entre u y V $\longleftrightarrow$ $u \cdot V = \|u\| \cdot \|V\| \cos(90^\circ)$

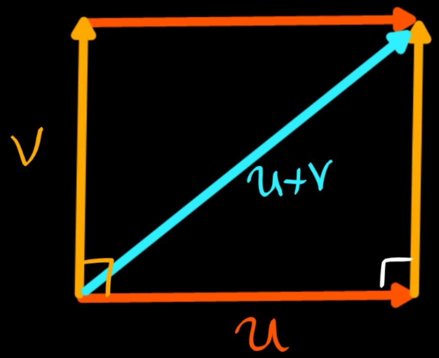
$u \cdot V = 0$.

Ejemplo 1.23 En $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u} = [1, 1, -2]$ y $\mathbf{v} = [3, 1, 2]$ son ortogonales, pues $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3 + 1 - 4 = 0$.

$u \cdot V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = 0 \longrightarrow$ u y V son ortogonales.

Teorema 1.6 **Teorema de Pitágoras**

Para todos los vectores **u** y **v** en $\mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ si y sólo si **u** y **v** son ortogonales.



$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$