Clase 5.

Matrices y forma escalonada.

Definición (matriz de coeficientes y matriz aumentada).

consideremos el sistema de ecuaciones lineales dado por

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

entonces:

(1) Definimos la matriz de coeficientes del sistema como la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

(2) Definimos la matriz aumentada del sistema como la siguiente matriz:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Ejemplo.

Dado el sistema de ecuaciones

$$\boxed{\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ x \quad\quad + 5z &= 1 \\ -x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}} \qquad (\bigstar)$$

Entonces

(1) La matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones $(\bigstar)$ es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

(2) La matriz aumentada del sistema de ecuaciones $(\bigstar)$ es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right].$$

Observación (siguiente definición).

Al resolver un sistema de ecuaciones lineales, no siempre será posible reducir la matriz de coeficientes a la forma triangular como se ha hecho antes. Sin embargo, siempre se puede lograr un patrón de "escalera" como veremos a continuación.

Definición (forma escalonada por renglones).

Una matriz A de tamaño $m \times n$ con:

$$A = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

es escalonada por renglones, si satisface las siguientes propiedades:

(1) Si $R_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \cdots & 0 \end{bmatrix}$ para algún $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, entonces $R_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \cdots & 0 \end{bmatrix}$ para todo $j \geq i$.

Esto significa que si existen renglones nulos de A, entonces todos están abajo.

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\begin{matrix}
\longleftarrow \text{arriba} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\
\longleftarrow \text{abajo}
\end{matrix}
$$

(2) Si $R_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$ y a_{ij} es el primer número diferente de cero $\left(\xrightarrow{\text{izq a der}}\right)$ entonces:

$$
A = \begin{array}{c}
 \\ R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_i \\ R_{i+1} \\ \vdots \\ R_m
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & a_{in} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{(i+1)n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Esto significa que las entradas abajo de la i-ésima posición (de arriba a abajo) de las columnas $C_1, C_2, \ldots, C_j$ son cero.

Ejemplo 2.7 Las siguientes matrices están en forma escalonada por renglones:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Nota (matrices escalonadas por renglones).

Si una matriz A es escalonada por renglones, entonces:

si $R_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$ con a_{ij} el primer elemento no nulo de izquierda a derecha, entonces diremos que a_{ij} es un pivote para la matriz A.

Operaciones elementales con renglones.

A continuación describimos el procedimiento mediante el cual cualquier matriz puede "reducirse" a una matriz escalonada por renglones.

Existen ciertas operaciones que se pueden aplicar a un sistema de ecuaciones lineales llamadas operaciones elementales con renglones, las cuales transforman el sistema de ecuaciones en un sistema de ecuaciones equivalente, pero más fácil de resolver.

Definición Las siguientes ***operaciones elementales con renglones*** pueden realizarse sobre una matriz:

1. Intercambiar dos renglones.
2. Multiplicar un renglón por una constante distinta de cero.
3. Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.

Notación (operaciones elementales con renglones).

Usaremos la siguiente notación para las 3 operaciones elementales con renglones:

(1) $R_i \longleftrightarrow R_j$.

Esto significa que intercambiamos el i-esimo renglón y el j-ésimo renglón de la matriz.

(2) $c \cdot R_i$.

Esto significa que multiplicamos el i-ésimo renglón por $c \neq 0$ y sustituimos el renglón R_i por $c \cdot R_i$.

(3) $R_i + c \cdot R_j$.

Esto significa que multiplicamos por c el renglón R_j y luego sumamos con el renglón R_i. Luego el i-ésimo renglón R_i se reemplaza por $R_i + cR_j$.

Nota (operaciones elementales).

Cuando a una matriz A le aplicamos operaciones elementales y obtenemos como resultado una nueva matriz A', entonces decimos que A se reduce a A' usando operaciones elementales con renglones.

Ejemplo 2.9 Reduzca la siguiente matriz a forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

Trabajar columna a columna de izquierda a derecha y de arriba a abajo.

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-2R_1 \\ R_4+R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4+3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 29 & 29 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 29 & 29 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{8}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 29 & 29 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 29 & 29 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 - 29R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

Del anterior análisis tenemos que la matriz A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

se reduce a la matriz $\hat{A}$ que está en forma escalonada por renglones con

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & \boxed{-1} & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{24} \end{bmatrix}.$$

Definición Las matrices A y B son ***equivalentes por renglones*** si existe una secuencia de operaciones elementales con renglones que convierta A en B.

Ejemplo.

Las siguientes matrices son equivalentes por renglón.

(1)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 29 & 29 & -5 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}.$$

(2)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 29 & 29 & -5 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 29 & 29 & -5 \end{bmatrix}.$$

(3)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}.$$

Eliminación gaussiana

Cuando se aplica la reducción por renglones a la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, se crea un sistema equivalente que puede resolverse mediante sustitución hacia atrás. Todo el proceso se conoce como ***eliminación gaussiana***.

Eliminación gaussiana

1. Escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales.
2. Use operaciones elementales con renglones para reducir la matriz aumentada a forma escalonada por renglones.
3. Con sustitución hacia atrás, resuelva el sistema equivalente que corresponda a la matriz reducida por renglones.

Ejemplo 2.10 Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

Solución:

Para resolver este sistema de ecuaciones, procedemos con los siguientes pasos:

Paso(1): Encontrar la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \# \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right]$$

Paso(2): Reducir la matriz aumentada del paso(1) a una matriz escalonada por renglones.

$$
\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right]
\end{array}
\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right]
\xrightarrow{R_2 - 2R_1}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right]
\xrightarrow{\frac{1}{5} \cdot R_2}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right]
\xrightarrow{R_3 - 2R_2}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]
$$

Por lo tanto, el análisis anterior muestra que la matriz escalonada por renglones obtenida de la matriz aumentada del paso (1) es:

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]
$$

paso(3): Usar la matriz escalonada obtenida del paso (2), para resolver el sistema de ecuaciones original.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{r} 1\cdot x_1 - 1\cdot x_2 - 2\cdot x_3 = -5 \\ 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 3 \\ 1\cdot x_3 = 2 \end{array}$$

✓ $x_3 = 2.$

✓ $x_2 = 3 - x_3 = 3 - 2 = 1.$

✓ $x_1 = -5 + x_2 + 2x_3 = -5 + 1 + 2\cdot(2) = 0.$

Del anterior análisis concluimos que la solución del sistema de ecuaciones inicial es

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$