Teorema 4.2 El determinante de una matriz triangular es el producto de las entradas en su diagonal principal. Específicamente, si $A = [a_{ij}]$ es una matriz triangular de $n \times n$, entonces

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Ejemplo.

Hallar el determinante de las siguientes matrices

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = 1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1 = 1.$

matriz triángular superior

(2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 4 & 9 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow |B| = 1\cdot 8\cdot 7 = 56.$

matriz triángular inferior

Teorema 4.3 Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada.

a. Si A tiene un renglón (columna) cero, entonces $\det A = 0$.
b. Si B se obtiene al intercambiar dos renglones (columnas) de A, entonces $\det B = -\det A$.
c. Si A tiene dos renglones (columnas) idénticos, entonces $\det A = 0$.
d. Si B se obtiene al multiplicar un renglón (columna) de A por k, entonces $\det B = k \det A$.
e. Si A, B y C son idénticas, excepto que el i-ésimo renglón (columna) de C es la suma de los i-ésimos renglones (columnas) de A y B, entonces $\det C = \det A + \det B$.
f. Si B se obtiene al sumar un múltiplo de un renglón (columna) de A a otro renglón (columna), entonces $\det B = \det A$.

Ejemplos (literal ⓐ teorema anterior).

Hallar los determinantes de las siguientes matrices:

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \pi \\ e & 5 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = 0.$

(2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ e & \pi & 0 & -1 & 4 \\ 8 & 7 & 0 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow |B| = 0.$

Ejemplos (literal ⓑ teorema anterior).

(1) Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, entonces

$$|A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$
$$|B| = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 2 \longrightarrow |B| = -|A|.$$

(2) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & a \\ 3 & b & 1 \end{bmatrix}$ donde $\underline{\underline{a}}$ y $\underline{\underline{b}}$ son números reales que satisfacen que $|A| = 1$, entonces si

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & a & 5 \\ 3 & 1 & b \end{bmatrix}$$

tenemos que $|B| = -|A| = -1$, ya que B se obtiene de A cambiando las columnas $\underline{\underline{2 \text{ y } 3}}$.

(3) Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$,

entonces podemos notar que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \Leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 \Leftrightarrow C_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} = B$$

por lo tanto, tenemos que $|A|=|B|$ (se deja como ejercicio comprobar esto).

Ejemplos (literal ⓒ teorema anterior).

(1) si $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow |A|=0.$

(2) si $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ e & \pi & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 8 \\ e & \pi & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow |B|=0.$

(3) si $C=\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} \longrightarrow |C|=ab-ba=0.$

$D=\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} \longrightarrow |D|=ab-ab=0.$

Ejemplos (literal ⓓ teorema anterior).

(1) si $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, entonces

$$\boxed{\begin{array}{ll} |A| = 1\cdot 2 - 3\cdot 1 = -1 & \longrightarrow \quad |B| = 2|A| \\ |B| = 1\cdot 4 - 3\cdot 2 = -2 & \qquad\quad -2 = 2(-1) \end{array}}$$

(2) si $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$,

entonces:

$$\boxed{\begin{array}{ll} |A| = 1\cdot 2\cdot 8 = 16 & \longrightarrow \quad |B| = 2|A| \\ |B| = 1\cdot 4\cdot 8 = 32 & \qquad\quad 32 = 2(16) \end{array}}$$

(3) supongamos que $A_n = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2^n & 2^n\cdot 3 & 2^n\cdot 5 \\ e & f & g \end{bmatrix}$ y además $|A_0| = 10$.
Hallar $|A_n|$ para $n \geq 1$.

Solución:

- $A_1 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot 5 \\ e & f & g \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} |A_1| = 2|A_0| = 2\cdot 10 = 20 \\ |A_1| = 20. \end{array}$

- $A_2 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2^2 & 2^2 \cdot 3 & 2^2 \cdot 5 \\ e & f & g \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} |A_2| = 2\,|A_1| = 2(20) \\ |A_2| = 40. \end{array}$

- $A_n = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2^n & 2^n \cdot 3 & 2^n \cdot 5 \\ e & f & g \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} |A_n| = 2^n \cdot |A_0| = 2^n \cdot 10. \\ |A_n| = 2^n \cdot 10. \end{array}$

Ejemplos (literal ⓔ teorema anterior).

(1) Sean $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ e & f \end{bmatrix}$ y

$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c+e & d+f \end{bmatrix}$, entonces:

$$\boxed{\begin{array}{l} |A| = ad - bc \\ |B| = af - be \\ |C| = ad + af - bc - be \\ \quad = (ad - bc) + (af - be) = |A| + |B| \end{array}}$$

(2) Sean $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}$ y

$C=\begin{bmatrix} a & b+e \\ c & d+f \end{bmatrix}$, entonces:

$$\boxed{\begin{aligned} |A| &= ad-bc \\ |B| &= af-ec \\ |C| &= ad+af-bc-ec = |A|+|B| \\ &= (ad-bc)+(af-ec) \end{aligned}}$$

(3) Si $A=\begin{bmatrix} 4 & a & 3 \\ 5 & b & 1 \\ 2 & c & 3 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 4 & e & 3 \\ 5 & f & 1 \\ 2 & g & 3 \end{bmatrix}$ satisfacen que $|A|=5$ y $|B|=3$; y además

$C=\begin{bmatrix} 4 & a+e & 3 \\ 5 & b+f & 1 \\ 2 & c+g & 3 \end{bmatrix}$, entonces determinar

el valor de $|C|$.

Solución:

$|C| = |A| + |B|$ ya que la segunda columna de C es la suma de las segundas columnas de A y B, y además el resto de las columnas son iguales.

$$|C| = |A| + |B| = 5 + 3 = 8.$$

Ejemplos (literal (f) teorema anterior).

(1) Sean $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} a+rc & b+rd \\ c & d \end{bmatrix}$,

entonces:

$|A| = ad - bc$

$|B| = ad + rcd - bc - rcd$

$|B| = ad - bc$

$|A| = |B|$

(2) Sean $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} a & c+ra \\ b & d+rb \end{bmatrix}$,

entonces:

$$|A| = ad - bc$$
$$|B| = ad + rab - bc - rab$$
$$|B| = ad - bc$$

$$|A| = |B|.$$

(3) sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$, entonces:

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$

- $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

Lo cual implica que $|A| = 0.$

Ejemplo.

Sea $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$. Hallar $|A|$.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$R_1 \Leftrightarrow R_1$

$3[1\ 0\ -1\ 2]=[3\ 0\ -3\ 6]$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} = -(-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

R_3-2R_1

R_4-5R_1

$R_2 \Leftrightarrow R_4$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 15 & -33 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} =$$

$-1[0\ -1\ 2\ -9]=[0\ 1\ -2\ 9]$

R_3-4R_2

R_4-2R_2

$$= -3 \cdot \left(1 \cdot 1 \cdot 15 \cdot (-13)\right) = 3 \cdot 15 \cdot 13 = 585.$$