# Clase 17.

## Ejemplo (subespacios de espacios vectoriales).

Sea $\mathscr{C}$ el conjunto de todas las funciones continuas con valor real definidas en $\mathbb{R}$ y sea $\mathcal{D}$ el conjunto de todas las funciones diferenciables con valor real en $\mathbb{R}$. Demostrar que $\mathscr{C}$ y $\mathcal{D}$ son subespacios de $\mathcal{F}$.

- $\mathscr{C} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, / \, f \text{ es continua en } \mathbb{R} \}$
- $\mathcal{D} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, / \, f \text{ es diferenciable en } \mathbb{R} \}$
- $\mathcal{F} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, / \, f \text{ es una función} \}$.

## Solución:

Necesitamos probar que:

(1) $\mathscr{C}$ es subespacio de $\mathcal{F}$.

(2) $\mathcal{D}$ es subespacio de $\mathcal{F}$.

## Prueba (1).

para probar que $\mathcal{C}$ es subespacio de $\mathcal{F}$, es necesario verificar las siguientes cosas:

$\checkmark_1$ $\mathcal{C}$ es cerrado bajo la suma.

$\checkmark_2$ $\mathcal{C}$ es cerrado bajo la multiplicación por escalar.

$\checkmark_3$ $\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{O}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \mathcal{O}(x) = 0 \end{array}}$ satisface que

$\mathcal{O} \in \mathcal{C}$.

## prueba $\checkmark_1$.

Sean $f, g \in \mathcal{C}$ (esto significa que $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas). pero un resultado de cálculo diferencial nos garantiza $f+g$ es también una función continua, es decir que

$f+g \in \mathscr{C}$, lo cual demuestra que $\mathscr{C}$ es cerrado bajo la suma.

prueba $\checkmark_2$.

Si $f \in \mathscr{C}$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y además por otro resultado de calculo diferencial se tiene

$$\boxed{\begin{aligned} c \cdot f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (c \cdot f)(x) = c \cdot f(x) \end{aligned}}$$

es una función continua $\left( c \cdot f \in \mathscr{C} \right)$.

Así, se tiene que $\mathscr{C}$ es cerrado bajo la multiplicación por escalar.

prueba $\checkmark_3$.

Recordemos que $\boxed{\begin{aligned} \mathcal{O} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathcal{O}(x) = 0 \end{aligned}}$, entonces $\mathcal{O}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua ya que es una función constante y toda función constante es una función continua.

Así, el anterior análisis prueba que

$\mathscr{C} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f$ es continua en $\mathbb{R} \}$

es un subespacio de $\mathcal{F}$.

---

para probar que $\mathcal{D}$ es subespacio de $\mathcal{F}$, es necesario verificar las siguientes cosas:

✓1 $\mathcal{D}$ es cerrado bajo la suma.

✓2 $\mathcal{D}$ es cerrado bajo la multiplicación por escalar.

✓3 $\boxed{\begin{aligned} \mathbb{O} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathbb{O}(x) = 0 \end{aligned}}$ satisface que $\mathbb{O} \in \mathcal{D}$.

y se deja al estudiante como ejercicio verificar que $\mathcal{D}$ satisface estas condiciones (las condiciones de ser subespacio), demostrando así que D es un subespacio de $\mathcal{F}$.

---

**Ejemplo (Subespacios).**

Sea $L = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, \int_0^1 f(x)\,dx = 0 \right\}$,

entonces demostrar que $L$ es un subespacio de $\mathcal{F}$.

**Solución:**

Para probar que $L$ es subespacio de $\mathcal{F}$ es necesario verificar las siguientes cosas:

$\checkmark_1$ $L$ es cerrado bajo la suma.

$\checkmark_2$ $L$ es cerrado bajo la multiplicación por escalar.

$\checkmark_3$ 

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{O}: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathcal{O}(x)=0 \end{aligned}}$$

satisface que $\mathcal{O} \in L$.

Prueba $\checkmark_1$.

Sean $f, g \in L$, entonces $\int_0^1 f(x)dx = 0$ y $\int_0^1 g(x)dx = 0$. De donde:

$$\boxed{\int_0^1 f(x)+g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = 0+0=0}$$

lo cual muestra que $\int_0^1 f(x)+g(x)dx=0$ y esto significa $f+g \in L$. Así, $L$ es cerrado bajo la suma.

Prueba $\checkmark_2$:

Sean $f \in L$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $\int_0^1 f(x)dx = 0$ y además:

$$\boxed{\int_0^1 c \cdot f(x)dx = c\int_0^1 f(x)dx = c \cdot 0 = 0}$$

lo cual prueba que $\int_0^1 c \cdot f(x)dx = 0$ y así $c \cdot f \in L$, lo cual demuestra que $L$ es cerrado bajo multiplicación por escalar.

Prueba $\checkmark_3$.

Es fácil notar que $\int_0^1 \Theta(x)dx = \int_0^1 0\,dx = 0$, donde $\boxed{\begin{array}{l}\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \Theta(x) = 0\end{array}}$. Así, se tiene que $\mathbb{O} \in L$.

## Conclusión:

$L$ es un subespacio de $\mathcal{F}$.

---

## Ejemplo (subespacio).

Sea $\mathcal{J}$ el conjunto definido como:

$$\mathcal{J} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \in M_{22} \Big/ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

entonces demostrar que $\mathcal{J}$ es un subespacio de $M_{22}$.

## Solución:

Para demostrar que $\mathcal{J}$ es un subespacio de $M_{22}$, debemos de verificar las siguientes cosas:

✓[1] $J$ es cerrado bajo la suma.

✓[2] $J$ es cerrado bajo la multiplicación por escalar.

✓[3] $\mathbb{O}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ está en $J$.

## Prueba ✓[1].

Sean $A, B \in J$, entonces $A$ y $B$ tienen la siguiente forma:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \quad y \quad B=\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & -c \end{bmatrix}$$

entonces

$$A+B=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & -c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 0 & -(a+c) \end{bmatrix}$$

y es sencillo verificar $\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 0 & -(a+c) \end{bmatrix} \in J$, lo cual prueba que $J$ es cerrado bajo la suma.

Prueba ✓$_2$.

Sea $A \in J$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces existen números $a, b$ tales que:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix},$$

entonces

$$c \cdot A = c \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & bc \\ 0 & -ac \end{bmatrix}$$

lo cual muestra que $c \cdot A \in J$ y esto significa que $J$ es cerrado bajo la multiplicación por escalar.

Prueba ✓$_3$.

Al tomar $a=b=0$, en la escritura

de una matriz genérica en $J$, entonces:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

lo que muestra que $\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in J$.

Conclusion:

En efecto $J$ es un subespacio de $M_{22}$.

---

Ejemplo (subconjuntos que no son subespacios).

Sea $w$ el conjunto

$$w = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M_{22} \Big/ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

entonces demostrar que $w$ no es subespacio de $M_{22}$.

## Solución:

Para probar que $\mathcal{W}$ no es subespacio de $M_{22}$, es suficiente probar que algunas de las propiedades que satisface un subespacio no se cumplen.

En este caso probaremos que

$\mathbb{O}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ no está en $\mathcal{W}$. Si la

matriz $\mathbb{O}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ estuviera en $\mathcal{W}$,

entonces existirían números $\underline{\underline{a}}$ y $\underline{\underline{b}}$ tales que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a+1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \longleftrightarrow \boxed{\begin{matrix} 0=a \\ 0=a+1 \\ 0=0 \\ 0=b \end{matrix}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{matrix} a=0=-1 \\ b=0 \end{matrix}}$$

Imposible

De esta manera, tenemos que

en efecto $\mathbb{O}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin W$ y esto prueba que $W$ no puede ser un subespacio de $M_{22}$.

---

Ejemplo (subespacios).

Verificar si el conjunto $S$ dado por

$$\boxed{S=\left\{a+bx-bx^2+ax^3 \in P_3 \,/\, a,b\in\mathbb{R}\right\}}$$

es un subespacio de $P_3$.

Solución:

Para probar que $S$ es subespacio de $P_3$ es necesario verificar que:

(1) para todo $u,v\in S$ y todo $c,d\in\mathbb{R}$ se tiene que $cu+dv\in S$.

(2) $p(x)=0 \in S$.

donde $p(x)=0$ es el polinomio constante cero

Prueba (1).

Sean $u=a+bx-bx^2+ax^3 \in S$ y $v=e+fx-fx^2+ex^3 \in S$ y $c,d \in \mathbb{R}$, entonces:

$$c\cdot u+d\cdot v=c\cdot\left(a+bx-bx^2+ax^3\right)+d\cdot\left(e+fx-fx^2+ex^3\right)$$
$$=ca+cbx-cbx^2+cax^3+de+dfx-dfx^2+dex^3$$
$$=(ca+de)+(cbx+dfx)-(cbx^2+dfx^2)+(cax^3+dex^3)$$
$$=\underset{a}{(ca+de)}+\underset{b}{(cb+df)}x-\underset{b}{(cb+df)}x^2+\underset{a}{(ca+de)}x^3$$

$$a+bx-bx^2+ax^3$$

y es sencillo notar $c\cdot u+d\cdot v \in S$.

## Prueba (2).

Al tomar en la escritura de un elemento genérico $a+bx-bx^2+ax^3$ de $S$ al tomar $a=b=0$, tenemos que

$$a+bx-bx^2+ax^3=0+0\cdot x-0x^2+0\cdot x^3=0$$

lo que demuestra que $\boxed{p(x)=0\in S.}$ el polinomio constante cero

## Conclusión:

Del análisis anterior, concluimos que $S$ es un subespacio de $P_3$.