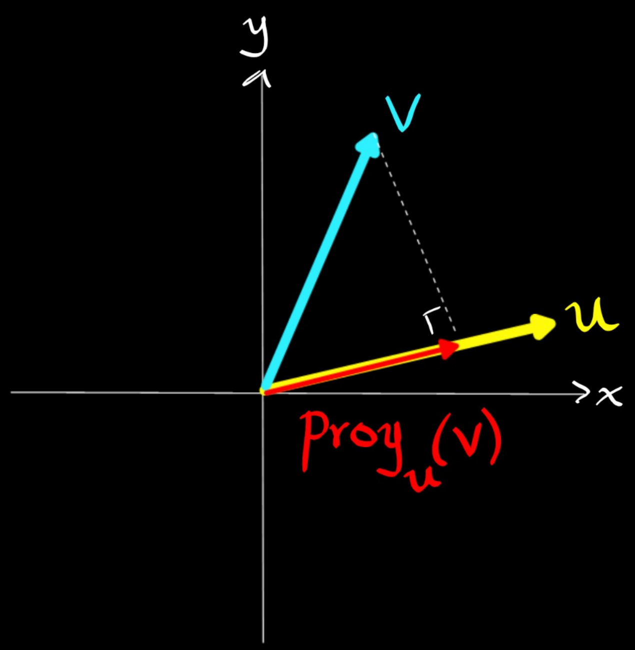
Clase 26 - continuación.

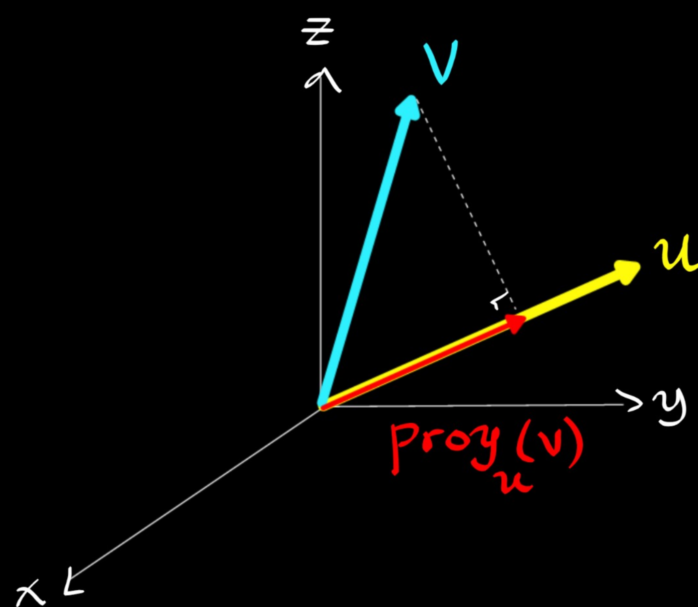
Proyecciones ortogonales.

Recordar (proyección de un vector sobre otro).

Sean u y v vectores en $\mathbb{R}^n$ con $u \neq 0$, entonces

$$\boxed{\operatorname{proy}_u(v) = \left(\frac{u \bullet v}{u \bullet u}\right) \cdot u}$$





Entonces es fácil notar que:

✓ $v = \operatorname{proy}_u(v) + (v - \operatorname{proy}_u(v))$.

✓ $\operatorname{proy}_u(v)$ y $v - \operatorname{proy}_u(v)$ son ortogonales.

Es decir

$$\boxed{\operatorname{proy}_u(v) \bullet \left(v - \operatorname{proy}_u(v)\right) = 0}$$

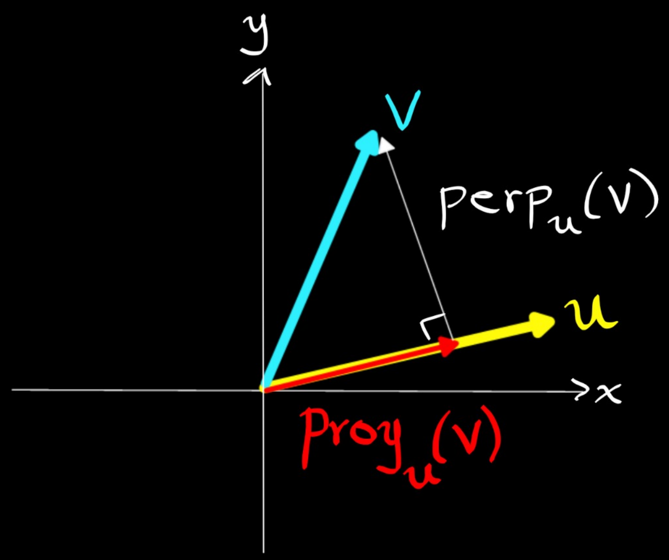
$$\downarrow$$

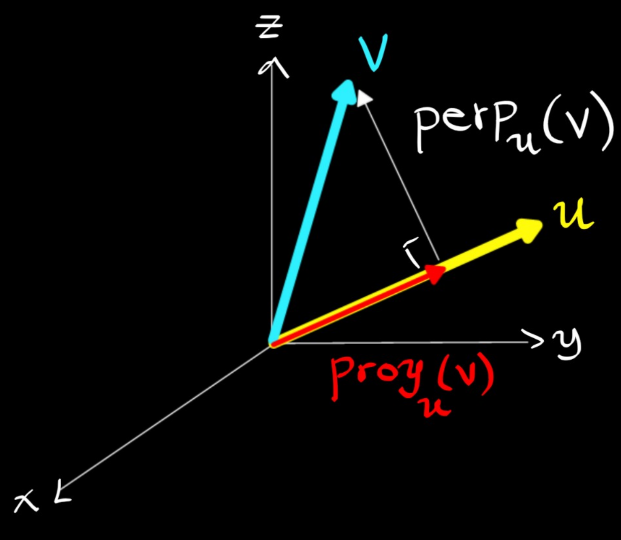
$$\left[\left(\frac{u \bullet v}{u \bullet u}\right) \cdot u\right] \bullet \left[v - \left(\frac{u \bullet v}{u \bullet u}\right) \cdot u\right] = \frac{(u \bullet v)^2}{u \bullet u} - \frac{(u \bullet v)^2 \cdot (u \bullet u)}{(u \bullet u)^2} = 0.$$

Entonces si denotamos por $\operatorname{perp}_u(v) = v - \operatorname{proy}_u(v)$, tenemos que:

$$\boxed{\begin{array}{l} v = \operatorname{proy}_u(v) + \operatorname{perp}_u(v) \\ \operatorname{proy}_u(v) \bullet \operatorname{perp}_u(v) = 0 \end{array}} \longrightarrow$$

$\operatorname{proy}_u(v)$ y $\operatorname{perp}_u(v)$ son perpendiculares.





Estas ideas las generalizamos en la siguiente definición.

Definición Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ una base ortogonal para W. Para cualquier vector $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$, la ***proyección ortogonal de* v *sobre* W** se define como

$$\boxed{\mathrm{proy}_W(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\right)\mathbf{u}_1 + \cdots + \left(\frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k}\right)\mathbf{u}_k}$$

El ***componente ortogonal de* v *a* W** es el vector

$$\boxed{\mathrm{perp}_W(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathrm{proy}_W(\mathbf{v})}$$

✓ $\mathrm{proy}_W(v) = \mathrm{proy}_{u_1}(v) + \mathrm{proy}_{u_2}(v) + \dots + \mathrm{proy}_{u_k}(v)$.

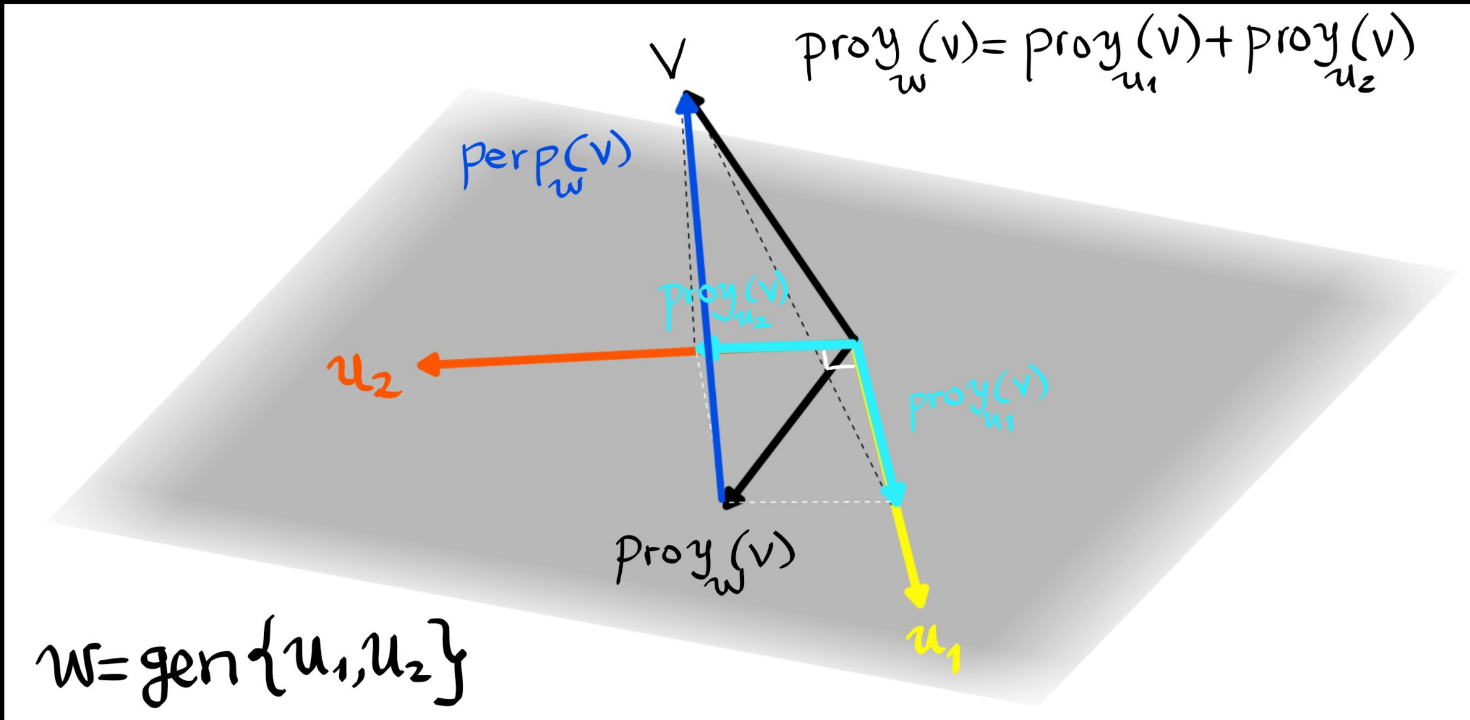
✓ $v = \mathrm{proy}_W(v) + \mathrm{perp}_W(v)$.

✓ $\mathrm{proy}_W(v)$ está en W.

Ejercicio $\mathrm{proy}_W(v) \cdot \mathrm{perp}_W(v) = 0$.

Observación (interpretación geométrica de $\mathrm{proy}_W(v)$ y $\mathrm{perp}_W(v)$).

Supongamos que W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y que $\{u_1, u_2\}$ es una base ortogonal para W. Si $v \in \mathbb{R}^3$, entonces:



✓ $\text{proy}_W(v) = \text{proy}_{u_1}(v) + \text{proy}_{u_2}(v).$

✓ $\text{perp}_W(v) = v - \text{proy}_W(v).$

Ejemplo 5.11

Sea W el plano en $\mathbb{R}^3$ con ecuación $x - y + 2z = 0$ y sea $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Encuentre la proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre W y el componente ortogonal de $\mathbf{v}$ a W.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ x - y + 2z = 0 \right\}.$$

Solución:

Para determinar $\text{proy}_W(v)$ y $\text{perp}_W(v)$ realizaremos los siguientes pasos:

paso(1): Encontrar una base ortogonal para W.

paso(2): Si $\{u_1, u_2\}$ es una base ortogonal para W, entonces:

$$\text{proy}_W(v) = \left(\frac{u_1 \cdot v}{u_1 \cdot u_1}\right) u_1 + \left(\frac{u_2 \cdot v}{u_2 \cdot u_2}\right) u_2$$

$$\text{perp}_W(v) = v - \text{proy}_W(v)$$

Desarrollo (paso(1)).

En un ejemplo anterior probamos que

$$\left\{ \underset{u_1}{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}} \right\}$$ es una base ortogonal para W.

Desarrollo (paso(2)).

✓ $u_1 \cdot u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 4 + 0 + 1 = 5.$

✓ $u_2 \cdot u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 + 25 + 4 = 30.$

✓ $u_1 \cdot v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 6 + 0 - 2 = 4.$

✓ $u_2 \bullet v = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3-5+4=2.$

★ $$\mathrm{Proy}_W(v) = \left(\frac{u_1 \bullet v}{u_1 \bullet u_1}\right) u_1 + \left(\frac{u_2 \bullet v}{u_2 \bullet u_2}\right) u_2 =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{2}{30} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/5 \\ 0 \\ -4/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/15 \\ 1/3 \\ 2/15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/5 + 1/15 \\ 1/3 \\ -4/5 + 2/15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25/15 \\ 1/3 \\ -10/15 \end{bmatrix}.$$

★ $$\mathrm{perp}_W(v) = v - \mathrm{proy}_W(v) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 25/15 \\ 1/3 \\ -10/15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - \frac{25}{15} \\ -1 - \frac{1}{3} \\ 2 + \frac{10}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20/15 \\ -4/3 \\ 40/15 \end{bmatrix}.$$

Teorema 5.11 **El teorema de descomposición ortogonal**

Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v}$ un vector en $\mathbb{R}^n$. Entonces existen vectores únicos $\mathbf{w}$ en W y $\mathbf{w}^\perp$ en $W^\perp$ tales que

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp} \leftarrow \boxed{v = \mathrm{proy}_W(v) + \mathrm{perp}_W(v)}$$

✓ $W = \mathrm{gen}\{u_1, \ldots, u_m\}$ con $\{u_1, \ldots, u_m\}$ una base ortogonal para W.

✓ si $w = \mathrm{proy}_W(v)$, entonces $w \in W$.

✓ si $w^\perp = \mathrm{perp}_W(v)$, entonces $w^\perp \in W^\perp$.

✓ $v = \mathrm{proy}_W(v) + \mathrm{perp}_W(v) = w + w^\perp$.

Teorema 5.13 Si W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\boxed{\dim W + \dim W^{\perp} = n}$$

Ejemplo.

Sea $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle/ -x+3y-5z=0 \right\}$, entonces:

(1) Encontrar una base para W.

(2) Determinar $W^{\perp}$ y encontrar una base para $W^{\perp}$.

(3) Encontrar una base ortonormal para W.

(4) Encontrar una base ortonormal para $W^{\perp}$.

(5) Demostrar que $\dim(W)+\dim(W^{\perp})=3$ sin usar el teorema 5.13.

Solución:

(1) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle/ -x+3y-5z=0 \right\} =$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 3y-5z \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, y,z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ es una base para } W.$$

(2) Para determinar $W^{\perp}$, notemos que dado $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W^{\perp}$, entonces:

$W^{\perp} = \{ x \in \mathbb{R}^n / x \cdot w = 0 \text{ para todo } w \in W \}$

$$\checkmark \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow 3x + y = 0 \longrightarrow y = -3x.$$

$$\checkmark \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow -5x + z = 0 \longrightarrow z = 5x.$$

por lo tanto $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W^{\perp}$ satisface que:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -3x \\ 5x \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Lo cual demuestra que

$$W^{\perp} = \left\{ x\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ x \in \mathbb{R} \right\} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

una base para $W^{\perp}$ es $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

(3) para encontrar una base ortonormal para W, primero recordemos que

$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es una base para W, pero esta

base ni siquiera es ortogonal. Así, primero encontraremos una base ortogonal para W y luego la volveremos ortonormal dividiendo cada vector por su norma.

Supongamos que $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ está en W y además

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} -x+3y-5z &= 0 \\ 3x+y \quad\quad &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -x+3y-5z=0 \\ 3x+y \qquad =0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & -15 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & -15 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\left(\frac{1}{10}\right)R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+3R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x+\frac{1}{2}z=0 \\ y-\frac{3}{2}z=0 \end{array}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2}z \\ y=\frac{3}{2}z \\ z=z \end{array}}$$

Lo que muestra que $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{3}{2}z \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}z \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. por lo

tanto $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ es una base ortogonal para

W y $\left\{ \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \end{bmatrix} \right\}$

es una base ortonormal para W.

(4) Para encontrar una base ortonormal para $W^{\perp}$, recordamos que una base para $W^{\perp}$ es $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$. Así, una base ortonormal para $W^{\perp}$ es $\left\{ \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{35} \\ -3/\sqrt{35} \\ 5/\sqrt{35} \end{bmatrix} \right\}$.

(5) Del literal (1) tenemos que $\dim(W) = 2$ y del literal (2) se tiene que $\dim(W^{\perp}) = 1$. Así que $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = 3$.