Ejemplo 2.15

Sea $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Determine si las rectas $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{u}$ y $\mathbf{x} = \mathbf{q} + t\mathbf{v}$ se intersectan y, si es así, encuentre su punto de intersección.

Solución:

Sean L_1 y L_2 las rectas con ecuaciones

$$L_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Big/ \ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$L_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Big/ \ s \in \mathbb{R} \right\}.$$

para saber si L_1 y L_2 se cortan en un punto $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, notamos que $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ satisface:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

De donde, tenemos que:

$1+t=3\cdot s \longrightarrow t-3s=-1.$

$t=2-s \longrightarrow t+s=2.$

$-1+t=1-s \longrightarrow t+s=2.$

obteniendo de esta manera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{array}{l} t-3s=-1. \\ t+s=2. \end{array}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} t-3s=-1. \\ t+s=2. \\ t+s=2. \end{array}}.$$

y para solucionar este sistema de ecuaciones, usamos el algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan, el cual requiere los siguientes pasos:

paso(1): Encontrar la matriz aumentada del sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t & s & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} t-3s=-1. \\ t+s=2. \end{array}}$$

Paso(2): Reducir la matriz aumentada del Paso(1) a una matriz escalonada educida.

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t & s & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4} R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + 3R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

Paso(3): Hallar la solución del sistema de ecuaciones original usando la matriz escalonada del paso(2).

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} t & s \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} t = 5/4 \\ s = 3/4 \end{array}$$

Del anterior análisis, podemos concluir que:

$(r)\ t = 5/4 \quad y \quad s = 3/4.$

$$(r) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{5}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/4 \\ 5/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

Este es el punto de intersección de ambas rectas.