Bases y dimensiones.

Definición (generado de un conjunto y conjunto generador).

Sean $\{v_1, \dots, v_n\}$ vectores en un espacio vectorial V, entonces:

- Definimos el conjunto generado por $\{v_1, \dots, v_n\}$ como:

$$\boxed{\text{gen}(v_1, \dots, v_n) = \left\{ c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \in V \,/\, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \right\}}$$

- Si $\text{gen}(v_1, \dots, v_n) = V$, entonces decimos que V es generado por $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Ejemplo (definición anterior).

Demostrar que $\{1, x, x^2\}$ genera a P_2, recordando que:

$$P_2 = \left\{ a + bx + cx^2 \,/\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Solución:

Por definición, tenemos que:

$$\text{gen}(1, x, x^2) = \{a \cdot 1 + bx + cx^2 / a, b, c \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{a + bx + cx^2 / a, b, c \in \mathbb{R}\} = \mathcal{P}_2.$$

Lo cual muestra que $\{1, x, x^2\}$ genera a $\mathcal{P}_2$.

Observación (ejemplo anterior).

De manera similar al ejemplo anterior, se puede probar que $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ genera a $\mathcal{P}_n$, donde:

$$\mathcal{P}_n = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n / a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Es decir que:

$$\boxed{\text{gen}(1, x, x^2, \ldots, x^n) = \mathcal{P}_n}.$$

Ejemplo (generado de un conjunto).

Dadas las matrices

$$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad E_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad E_{13}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$E_{21}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\quad E_{22}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad E_{23}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Demostrar que $\{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}\}$ generan a M_{23}. Es decir que

$$\boxed{\operatorname{gen}(E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}) = M_{23}}.$$

Solución:

Empecemos recordando que:

$$\operatorname{gen}(E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}) =$$

$$= \left\{ c_{11}E_{11} + c_{12}E_{12} + c_{13}E_{13} + c_{21}E_{21} + c_{22}E_{22} + c_{23}E_{23} \;\middle/\; \begin{matrix} c_{ij}\in\mathbb{R} \\ 1\le i\le 2 \\ 1\le j\le 3 \end{matrix} \right\}$$

Además, tenemos que:

$$c_{11}E_{11}+c_{12}E_{12}+c_{13}E_{13}+c_{21}E_{21}+c_{22}E_{22}+c_{23}E_{23}=$$

$$=\boxed{\begin{array}{l} c_{11}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+c_{12}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}+c_{13}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}+ \\ +c_{21}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}+c_{22}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}+c_{23}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\end{array}}$$

$$=\boxed{\begin{array}{l} \begin{bmatrix}c_{11}&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&c_{12}&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&c_{13}\\0&0&0\end{bmatrix}+ \\ +\begin{bmatrix}0&0&0\\c_{21}&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&c_{22}&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&c_{23}\end{bmatrix}\end{array}}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\end{bmatrix}.$$

De esta manera, tenemos que:

$$\operatorname{gen}(E_{11},E_{12},E_{13},E_{21},E_{22},E_{23})=$$

$$=\left\{c_{11}E_{11}+c_{12}E_{12}+c_{13}E_{13}+c_{21}E_{21}+c_{22}E_{22}+c_{23}E_{23}\;\middle/\;\begin{array}{l}c_{ij}\in\mathbb{R}\\1\leq i\leq 2\\1\leq j\leq 3\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\end{bmatrix}\;\middle/\;\begin{array}{l}c_{ij}\in\mathbb{R}\\1\leq i\leq 2\\1\leq j\leq 3\end{array}\right\}=M_{23}.$$

Lo anterior demuestra que $\{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}\}$ genera a M_{23}.

Observación (ejemplo anterior).

Si $E_{pq} = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ es una matriz de tamaño $m\times n$ de tal manera que:

$$\begin{cases} a_{ij} = 0 & \text{si } (i,j)\neq(p,q), \\ a_{ij} = 1 & \text{si } (i,j)=(p,q). \end{cases}$$

$$E_{pq} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

posición (p,q) de la matriz

Entonces $\{E_{pq} / 1\leq p\leq m \text{ y } 1\leq q\leq n\}$ genera a M_{mn}. Es decir que:

$$\boxed{\operatorname{gen}\{E_{pq} / 1\leq p\leq m \text{ y } 1\leq q\leq n\} = M_{mn}}$$

Ejemplo (generado de un conjunto).

Sean $p(x)=1-x+x^2$, $q(x)=2+x-3x^2$ y $r(x)=1-4x+6x^2$. Determinar si

$$\boxed{r(x)\in \text{gen}(p(x),q(x))}.$$

Solución:

para empezar, recordemos que:

$$\text{gen}(p(x),q(x))=\{c\,p(x)+d\,q(x) / c,d\in\mathbb{R}\}$$

$$=\{c\cdot(1-x+x^2)+d\cdot(2+x-3x^2) / c,d\in\mathbb{R}\}$$

$$=\{(c+2d)+(-c+d)x+(c-3d)x^2 / c,d\in\mathbb{R}\}.$$

por lo tanto, tenemos que:

$$r(x)\in\text{gen}(p(x),q(x))$$

$$\Updownarrow$$

$$r(x)=(c+2d)+(-c+d)x+(c-3d)x^2 \quad \text{para } c,d\in\mathbb{R}$$

$$1-4x+6x^2 = (c+2d)+(-c+d)x+(c-3d)x^2$$

Lo cual nos dice que

$$\begin{array}{|rl|}\hline 1 = & c+2d \\ -4 = & -c+d \\ 6 = & c-3d \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{rl} 1 = & c+2d \\ -4 = & -c+d \\ \hline -3 = & 3d \\ d = & -1 \\ c = & d+4 = -1+4 = 3 \end{array} \quad y \quad \begin{array}{l} 6 = c-3d \\ 6 = 3-3\cdot(-1) \\ 6 = 3+3 \end{array}$$

Lo cual muestra que $r(x) \in \text{gen}(p(x), q(x))$ y además:

$$\boxed{r(x) = 1-4x+6x^2 = 3(1-x+x^2)+(-1)(2+x-3x^2)}.$$

Teorema (generado de conjuntos).

Sean $v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m$ vectores en un espacio vectorial V, entonces:

(1) $\text{gen}(v_1, \ldots, v_n) \subseteq V$ y además $\text{gen}(v_1, \ldots, v_n)$ es un subespacio de V.

(2) $\text{gen}(v_1,\ldots,v_n) \subseteq \text{gen}(v_1,\ldots,v_n, u_1,\ldots,u_m)$.

(3) $\text{gen}(v_1,\ldots,v_n, 0_V) = \text{gen}(v_1,\ldots,v_n)$.

Observación (combinación lineal trivial).

Sea V un espacio vectorial y $v_1,\ldots,v_n$ son vectores en V, entonces:

(1) $0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n = 0_V$. Esta combinación lineal le daremos el nombre de la combinación lineal trivial de $v_1,\ldots,v_n$.

(2) Es natural preguntarse si existen escalares $c_1,\ldots,c_n$ con $(c_1,\ldots,c_n) \neq (0,\ldots,0)$ tales que:

$$\boxed{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0_V} \quad (\star)$$

Debido a la diversidad de vectores que cumplen (★), le daremos un nombre particular a estos vectores.

Definición (dependencia e independencia lineal).

Sean $v_1, \ldots, v_n$ vectores en un espacio vectorial V, entonces:

(1) Decimos que $v_1, \ldots, v_n$ son lineal/ dependientes, si existen escalares $c_1, \ldots, c_n$ con $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tales que:

$$\boxed{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = \theta_V}.$$

(2) Decimos que $v_1, \ldots, v_n$ son lineal/ independientes, si los vectores $v_1, \ldots, v_n$ no son lineal/ dependientes. Es decir que:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = \theta_V \longrightarrow (c_1, \dots, c_n) = (0, \dots, 0).$$

Ejemplo (dependencia ó independencia lineal).

Sean $p(x) = 1 + x + x^2$, $q(x) = 1 - x + 3x^2$ y $r(x) = 1 + 3x - x^2$, entonces verificar si $\{p(x), q(x), r(x)\}$ son LD ó LI en P_2.

Solución:

Supongamos que existen $c, d, e \in \mathbb{R}$ tales que:

$$c \cdot p(x) + d \cdot q(x) + e \cdot r(x) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$c \cdot (1 + x + x^2) + d(1 - x + 3x^2) + e(1 + 3x - x^2) = 0$$

$$(c + d + e) + (c - d + 3e)x + (c + 3d - e)x^2 = 0$$

lo cual implica que:

$$\begin{aligned} c+d+e &= 0 \\ c-d+3e &= 0 \\ c+3d-e &= 0 \end{aligned} \longleftrightarrow \begin{array}{cccc} c & d & e & \# \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cccc} c & d & e & \# \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \longleftrightarrow \boxed{A \cdot x = \mathbb{O}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$x = \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} \qquad \mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resultado (sistemas homogeneos).

Si tenemos el sistema homogeneo $A \cdot x = \mathbb{O}$ con A una matriz de tamaño $n\times n$, entonces:

(1) $\mathrm{Det}(A) = 0 \longleftrightarrow$ Existen soluciones $x \neq \mathbb{O}$.
(A no es invertible)

(2) $\text{Det}(A) \neq 0$ $\longleftrightarrow$ Solamente existe la solucion trivial $x = \mathbb{O}$.

(A es invertible)

por lo tanto, al describir Det(A) se tiene que:

$$\text{Det}(A) = \text{Det}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = 1\cdot(1-9) - 1(-1-3) + 1\cdot(3+1)$$

$$= 1(-8) - 1(-4) + 1(4) = -8 + 4 + 4 = 0.$$

Lo cual muestra por el resultado descrito previa/ que existen soluciones

$x = \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ lo cual implica que

que $\{p(x), q(x), r(x)\}$ son lineal/ dependientes (ya que existen combinaciones lineales no triviales que dan como resultado 0).

Ejercicio (ejemplo anterior).

Encontrar las soluciones de c, d, e en el sistema homogeneo

$$\begin{array}{cccc} c & d & e & \# \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

y con esto mostrar que $\{p(x), q(x), r(x)\}$ son L.D (lineal/ dependientes).

Teorema (LD y LI en espacios vectoriales).

Sean $V_1, \ldots, V_n$ vectores en un espacio vectorial V, entonces:

(1) V_1 y V_2 son L.D $\longleftrightarrow$ $V_1 = \lambda V_2$ ó $V_2 = \lambda \cdot V_1$.

(2) $V_1, V_2, \ldots, V_{i-1}, V_i, V_{i+1}, \ldots, V_n$ son LD $\longleftrightarrow$ Existe V_i tal que $V_i \in gen(V_1, \ldots, V_{i-1}, V_{i+1}, \ldots, V_n)$.

Ejemplo (aplicación del teorema previo).

Sean $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 8 & 0 & 16 \\ 0 & 8 & 24 \end{bmatrix}$

matrices de tamaño 2×3. Verificar si $\{A, B\}$ son L.I ó L.D en M_{23}.

Solución:

Simplemente notamos que $B=8A$, lo cual muestra por el teorema pasado que $\{A, B\}$ son L.D (lineal/ dependientes).

Ejemplo (L.D ó LI en espacios vectoriales).

Verificar si $\{\text{sen}(x), \cos(x)\}$ son LD ó L.I en el espacio de funciones $\mathcal{F}=\{f : \mathbb{R}\to\mathbb{R} \,/\, f \text{ es una función}\}$.

Solución:

Supongamos que existen $c, d \in \mathbb{R}$

tales que:

$$\boxed{c \cdot \operatorname{sen}(x) + d \cdot \cos(x) = 0} \qquad (\blacklozenge)$$

Así, al tomar los siguientes valores de $\underline{\underline{x}}$, tenemos que:

- Si $x = 0$ en $(\blacklozenge)$, entonces

$$c \cdot \operatorname{sen}(x) + d \cdot \cos(x) = 0$$
$$c \cdot \operatorname{sen}(0) + d \cdot \cos(0) = 0$$
$$d = 0.$$

- Si $x = \frac{\pi}{2}$ en $(\blacklozenge)$, entonces

$$c \cdot \operatorname{sen}(x) + d \cdot \cos(x) = 0$$
$$c \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + d \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$c = 0.$$

Lo que muestra que $(c, d) = (0, 0)$ y esto significa que $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ son L.I (lineal/ independientes) en $\mathcal{F}$.

Definición (base para un espacio vectorial).

Sean $v_1, \dots, v_n$ vectores en un espacio vectorial V, entonces decimos que $v_1, \dots, v_n$ es una base para V, si:

(1) $\{v_1, \dots, v_n\}$ son L.I.

(2) $\text{gen}(v_1, \dots, v_n) = V$.

Ejemplo.

(1) $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ es una base para $P_n = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \,/\, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$.

(2) Si $E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$

Este 1 se encuentra en la posición (i, j)

entonces una base para M_{mn} es

$$\left\{ E_{ij} \in M_{mn} \Big/ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{array} \right\}.$$

(3) Si P es el espacio vectorial de todos los polinomios, entonces una base para P es

$$\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\}.$$

Ejemplo (bases para espacios vectoriales).

Encontrar una base para el subespacio L de $\mathbb{R}^3$ que está dado por:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ 2x - y + 3z = 0 \right\}.$$

Solución:

para empezar notemos que:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{L} \longleftrightarrow \begin{matrix} 2x - y + 3z = 0 \\ y = 2x + 3z \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{L} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x+3z \\ z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De donde, podemos asegurar que:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \; 2x - y + 3z = 0 \right\}.$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \; \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ con } x, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\mathcal{L} = \left\{ x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \; x, z \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Así, podemos garantizar que:

✓ $\mathcal{L}$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$ ya que $\mathcal{L}$ es el generado de un conjunto de vectores y por teorema anterior es necesario que L sea subespacio de $\mathbb{R}^3$.

✓ Los vectores $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}$ generan a L.

✓ Los vectores $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}$ son lineal/ independientes ya que ninguno de ellos es multiplo escalar del otro

por lo tanto, podemos concluir que $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}$ son una base para $\mathcal{L}$.

Ejemplo (bases para P_2).

Sean $p(x) = 2$, $q(x) = 1 + 3x$ y $r(x) = 4x + x^2$. Determinar si $\{p(x), q(x), r(x)\}$ forman una base

Para $\mathcal{P}_2$.

Solución:

Para verificar si $\{p(x), q(x), r(x)\}$ forman una base para $\mathcal{P}_2$ es necesario garantizar las siguientes cosas:

(1) $\{p(x), q(x), r(x)\}$ sean L.I.

(2) $gen(p(x), q(x), r(x)) = \mathcal{P}_2$.

Condición (1).

Supongamos que existen escalares c, d, e tales que:

$$c \cdot p(x) + d \cdot q(x) + e \cdot r(x) = 0$$

de donde al reemplazar tenemos que:

$$c \cdot (2) + d \cdot (1+3x) + e(4x+x^2) = 0$$

$$\boxed{(2c+d)+(3d+4e)x+e\cdot x^2=0}$$

lo cual implica que:

$$\boxed{\begin{aligned} 2c+d&=0\\ 3d+4e&=0\\ e&=0 \end{aligned}} \longrightarrow c=d=e=0.$$

El análisis anterior muestra que $(c,d,e)=(0,0,0)$ y esto significa que $\{p(x),q(x),r(x)\}$ son lineal/ independientes.

Condición(2).

Empecemos analizando el conjunto $\text{gen}(p(x),q(x),r(x))$, por lo tanto:

✓ $c\cdot p(x)+d\cdot q(x)+e\cdot r(x)=$

$$=(2c+d)+(3d+4e)x+e\cdot x^2.$$

✓ $\text{gen}(p(x), q(x), r(x)) =$

$$= \{ c \cdot p(x) + d \cdot q(x) + e \cdot r(x) \in \mathcal{P}_2 \, / \, c, d, e \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (2c+d) + (3d+4e)x + e \cdot x^2 \, / \, c, d, e \in \mathbb{R} \}.$$

✓ $\mathcal{P}_2 = \{ f + gx + hx^2 \, / \, f, g, h \in \mathbb{R} \}.$

✓ si $f + gx + hx^2$ es un polinomio arbitrario en $\mathcal{P}_2$, veamos que este polinomio se puede escribir de la forma $(2c+d) + (3d+4e)x + e \cdot x^2$ para ciertos números c, d y e.

$$f + gx + hx^2 = (2c+d) + (3d+4e)x + e \cdot x^2,$$

de donde tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2c + d &= f \\ 3d + 4e &= g \\ e &= h \end{aligned}$$

Aquí buscamos los valores de $\underline{\underline{c}}$, $\underline{\underline{d}}$ y $\underline{\underline{e}}$ en terminos de f, g, h

Así, podemos asegurar que:

$$\begin{aligned} 2c + d &= f \\ 3d + 4e &= g \\ e &= h \end{aligned} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c & d & e & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & f \\ 0 & 3 & 4 & g \\ 0 & 0 & 1 & h \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c & d & e & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & f \\ 0 & 3 & 4 & g \\ 0 & 0 & 1 & h \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[\frac{1}{3}R_2]{\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & f/2 \\ 0 & 1 & 4/3 & g/3 \\ 0 & 0 & 1 & h \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & f/2 \\ 0 & 1 & 4/3 & g/3 \\ 0 & 0 & 1 & h \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - \frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/3 & \frac{f}{2} - \frac{g}{6} \\ 0 & 1 & 4/3 & g/3 \\ 0 & 0 & 1 & h \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/3 & \frac{f}{2}-\frac{g}{6} \\ 0 & 1 & 4/3 & g/3 \\ 0 & 0 & 1 & h \end{array}\right] \xrightarrow[R_2-\frac{4}{3}R_3]{R_1+\frac{2}{3}R_3} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c & d & e \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{f}{2}-\frac{g}{6}+\frac{2h}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{g}{3}-\frac{4h}{3} \\ 0 & 0 & 1 & h \end{array}\right] \end{array}$$

De donde, el análisis previo nos dice que si es posible encontrar c, d y e en terminos de f, g y h. Además

$$c = \frac{f}{2}-\frac{g}{6}+\frac{2h}{3}, \quad d = \frac{g}{3}-\frac{4h}{3}, \quad e = h.$$

Con esto probamos que:

$$\boxed{\operatorname{gen}(p(x), q(x), r(x)) = P_2.}$$

Conclusión:

Los polinomios $p(x)=2$, $q(x)=1+3x$ y $r(x)=4x+x^2$ forman una base para P_2.

Teorema (el número de elementos de una base es único).

Supongamos que V es un espacio vectorial con $\{v_1, \dots, v_n\}$ y $\{u_1, \dots, u_m\}$ dos bases para V, entonces:

$$\boxed{\begin{gathered} \#\text{ de elementos } \{v_1, \dots, v_n\} = \#\text{ de elementos } \{u_1, \dots, u_m\} \\ n = m \end{gathered}}.$$

Definición (dimensión de un espacio vectorial).

Sea V un espacio vectorial y sea n el número de elementos de una base para V, entonces diremos que la dimensión del espacio vectorial V es n y escribiremos:

$$\boxed{\operatorname{Dim}(V) = n}.$$

Ejemplos (dimensión de un espacio vectorial)

(1) $\text{Dim}(\mathbb{R}^n) = n$, ya que $\mathbb{R}^n$ tiene la base estandar $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

(2) $\text{Dim}(P_n) = n+1$, ya que P_n tiene la base $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$.

(3) $\text{Dim}(P) = +\infty$, ya que una base para P es $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\ldots, \ldots\}$.

(4) $\text{Dim}(M_{mn}) = m \cdot n$ ya que una base para M_{nn} es:

$$\left\{ E_{ij} \in M_{mn} \Big/ \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix} \right\}$$

con $E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

Esta es la posición (i, j) de la matriz.

Teorema ($LI \Rightarrow$ base y gen $\Rightarrow$ base).

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n, entonces:

(1) Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ son n-vectores lineal/ independientes en V, entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base para V.

(2) Si $\{u_1, \dots, u_n\}$ son n-vectores tales que $\text{gen}(u_1, \dots, u_n) = V$, entonces $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una base para V.

Ejemplo (aplicación teorema anterior).

(1) Dados los vectores $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$, verificar que ellos forman una base para $\mathbb{R}^3$.

Solución:

Para ver que estos 3 vectores son una base para $\mathbb{R}^3$, es suficiente probar que ellos son L.I ($\text{Dim}\,\mathbb{R}^3 = 3$).

Prueba de la independencia lineal.

Supongamos que existen $c, d, e \in \mathbb{R}$ tales que:

$$c\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}1\\4\\0\end{bmatrix} + e\begin{bmatrix}8\\4\\10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

de donde tenemos que:

$$c\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}1\\4\\0\end{bmatrix} + e\begin{bmatrix}8\\4\\10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c & d & e & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c & d & e & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} 10e = 0 \\ 4d + 4e = 0 \\ 2c + d + 8e = 0 \end{array}$$

$$10e=0$$
$$4d+4e=0 \quad \longleftrightarrow \quad c=d=e=0.$$
$$2c+d+8e=0$$

El análisis anterior muestra que $(c,d,e)=(0,0,0)$ y esto significa que los vectores

$$\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\4\\0\end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix}8\\4\\10\end{bmatrix}$$

Son lineal/ independientes y por el teorema anterior podemos asegurar que ellos forman una base para $\mathbb{R}^3$.

(2) Verificar si los polinomios $p(x)=1$, $q(x)=1+5x$ y $r(x)=x+x^2$ forman una base para $\mathcal{P}_2$.

Solución:

Debido a que $\text{Dim}(\mathcal{P}_2)=3$ y tenemos 3 polinomios, es suficiente probar que $\{p(x), q(x), r(x)\}$ son lineal/ independientes.

prueba de independencia lineal.

Supongamos que existen $c, d, e \in \mathbb{R}$ tales que:

$$c \cdot p(x) + d \cdot q(x) + e \cdot r(x) = 0,$$

$$c \cdot (1) + d \cdot (1+5x) + e \cdot (x+x^2) = 0,$$

$$(c+d) + (5d+e)x + e x^2 = 0.$$

De donde, es sencillo notar que la última igualdad nos ofrece el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c + d &= 0 \\ 5d + e &= 0 \\ e &= 0 \end{aligned}$$

y así al solucionar el sistema

anterior se tiene que $(c,d,e)=(0,0,0)$ y esto prueba que $\{p(x), q(x), r(x)\}$ son L.I.

conclusión:

por el teorema anterior, concluimos que $\{p(x), q(x), r(x)\}$ forman una base para P_2.