Clase 7.

Aplicaciones – Asignación de recursos.

Ejemplo 2.27

Una bióloga colocó tres cepas de bacterias (denominadas I, II y III) en un tubo de ensayo, donde se alimentarán de tres diferentes fuentes alimenticias (A, B y C). Cada día, 2300 unidades de A, 800 unidades de B y 1500 unidades de C se colocan en el tubo de ensayo y cada bacteria consume cierto número de unidades de cada alimento por día, como se muestra en la tabla 2.2. ¿Cuántas bacterias de cada cepa pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir todo el alimento?

Tabla 2.2

	Bacteria cepa I	Bacteria cepa II	Bacteria cepa III
Alimento A	2	2	4
Alimento B	1	2	0
Alimento C	1	3	1

Solución:

Supongamos que

- x_1 = # Bacterias de la cepa I.
- x_2 = # Bacterias de la cepa II.
- x_3 = # Bacterias de la cepa III.

por otro lado, sabemos que estas bacterias se alimentan de la siguiente manera:

$$\boxed{\text{unidades de alimento A}} = 2300 = 2\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 4\cdot x_3.$$

unidades de alimento B	$= 800 = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \cdot$
unidades de alimento C	$= 1500 = 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3$

De esta manera, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones a resolver:

$$\boxed{\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 2300 \\ x_1 + 2x_2 &= 800 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1500 \end{aligned}} \cdot$$

Para resolver este sistema usaremos la eliminación de Gauss-Jordan.

Paso(1): Encontrar la matriz aumentada del sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \# \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2300 \\ 1 & 2 & 0 & 800 \\ 1 & 3 & 1 & 1500 \end{array}\right].$$

Paso(2): Usar operaciones elementales fila para llevar la matriz aumentada del sistema a una matriz escalonada reducida.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \# \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2300 \\ 1 & 2 & 0 & 800 \\ 1 & 3 & 1 & 1500 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 800 \\ 2 & 2 & 4 & 2300 \\ 1 & 3 & 1 & 1500 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 800 \\ 2 & 2 & 4 & 2300 \\ 1 & 3 & 1 & 1500 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 800 \\ 0 & -2 & 4 & 700 \\ 0 & 1 & 1 & 700 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 800 \\ 0 & -2 & 4 & 700 \\ 0 & 1 & 1 & 700 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 800 \\ 0 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & -2 & 4 & 700 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 800 \\ 0 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & -2 & 4 & 700 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 + 2R_2]{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -600 \\ 0 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & 0 & 6 & 2100 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -600 \\ 0 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & 0 & 6 & 2100 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{6}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -600 \\ 0 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & 0 & 1 & 350 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -600 \\ 0 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & 0 & 1 & 350 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 - R_3]{R_1 + 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 1 & 350 \end{array}\right].$$

paso (3): Hallar la solución del nuevo sistema de ecuaciones obtenido del paso (2).

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 1 & 350 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 100 \\ x_2 = 350 \\ x_3 = 350 \end{array}$$

Así, la biologa debe colocar 100 bacterias de la cepa I, 350 bacterias de la cepa II y 350 bacterias de la cepa III en su tubo de ensayo si quiere que las bacterias se consuman todo el alimento.

Ejemplo 2.28 Repita el ejemplo 2.27 y use los datos de consumo diario de alimento (unidades por día) que se muestran en la tabla 2.3. Suponga esta vez que en el tubo de ensayo se colocan diariamente 1500 unidades de A, 3000 unidades de B y 4500 unidades de C.

Tabla 2.3

	Bacteria cepa I	Bacteria cepa II	Bacteria cepa III
Alimento A	1	1	1
Alimento B	1	2	3
Alimento C	1	3	5

Solución:

Supongamos que

- x_1 = # Bacterias de la cepa I.
- x_2 = # Bacterias de la cepa II.
- x_3 = # Bacterias de la cepa III.

por otro lado, sabemos que estas bacterias se alimentan de la siguiente manera:

$$\boxed{\text{unidades de alimento A}} = 1500 = 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3.$$

$$\boxed{\text{unidades de alimento B}} = 3000 = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3.$$

$$\boxed{\text{unidades de alimento C}} = 4500 = 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3$$

De esta manera, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones a resolver:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1500 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3000 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4500 \end{aligned}}$$

para resolver este sistema usaremos la eliminación de Gauss-Jordan.

Paso(1): Encontrar la matriz aumentada del sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1500 \\ 1 & 2 & 3 & 3000 \\ 1 & 3 & 5 & 4500 \end{array}\right] \end{array}.$$

Paso(2): Usar operaciones elementales fila para llevar la matriz aumentada del sistema a una matriz escalonada reducida.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1500 \\ 1 & 2 & 3 & 3000 \\ 1 & 3 & 5 & 4500 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1500 \\ 0 & 1 & 2 & 1500 \\ 0 & 2 & 4 & 3000 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1500 \\ 0 & 1 & 2 & 1500 \\ 0 & 2 & 4 & 3000 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-2R_2]{R_1-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

paso (3): Hallar la solución del nuevo sistema de ecuaciones obtenido del paso (2).

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \# \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 1500 \end{array}}$$

$$x_1 = x_3$$
$$x_2 = 1500 - 2x_3$$

Así, las soluciones $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ se describen como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ 1500-2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1500 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1500 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde $x_1, x_2, x_2 \geq 0$ y enteros. Lo cual implica que $x_3 \geq 0$, $1500 - 2x_3 \geq 0$ y x_3 es un entero. Así, tenemos que

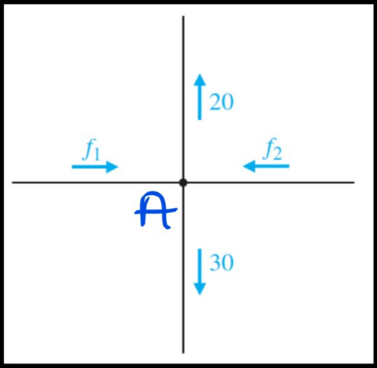
$0 \leq x_3 \leq 750$ con x_3 un número entero

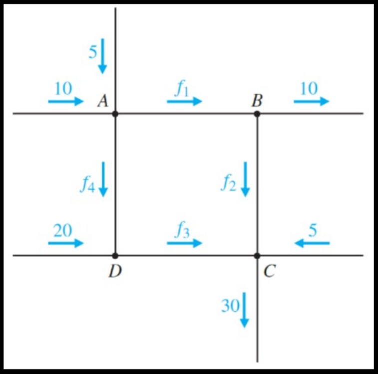
Nota (ejemplo anterior).

El sistema de ecuaciones anterior tiene infinitas soluciones, pero el problema aplicativo solo tiene finitas.

Aplicaciones: Análisis de redes.

Muchas situaciones prácticas originan redes: redes de transporte, redes de comunicaciones y redes económicas, por nombrar algunas. De particular interés son los posibles *flujos* a través de las redes. Por ejemplo, los vehículos que fluyen a través de una red de carreteras, la información que fluye a través de una red de datos, y los bienes y servicios que fluyen a través de una red económica.





Definición (red).

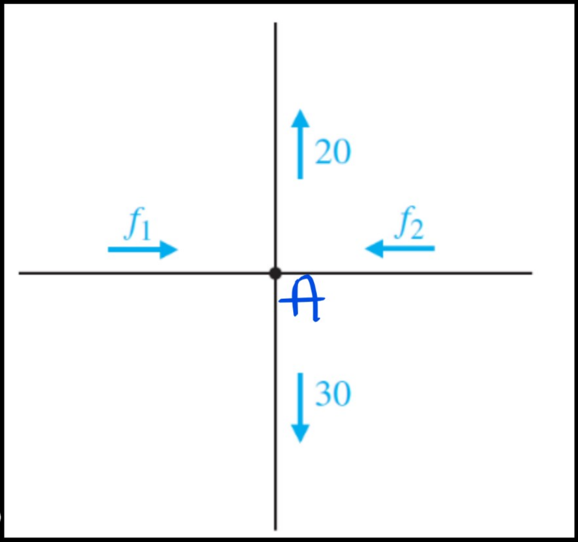
Una red consiste de un número finito nodos (también llamados vértices) conectados mediante una serie de aristas dirigidas llamadas ramas. Cada rama marcará con un flujo que representa la cantidad de un algún objeto que puede fluir a lo largo de cada rama en la dirección indicada.

Ley de conservación del flujo.

En cada nodo, el flujo de entrada es igual al flujo de salida.

Ejemplo.

Consideremos la red dada en la siguiente figura. Entonces



flujo entrante $= f_1 + f_2$

flujo saliente $= 20 + 30 = 50$

Así, tenemos que $\boxed{f_1 + f_2 = 50}$.

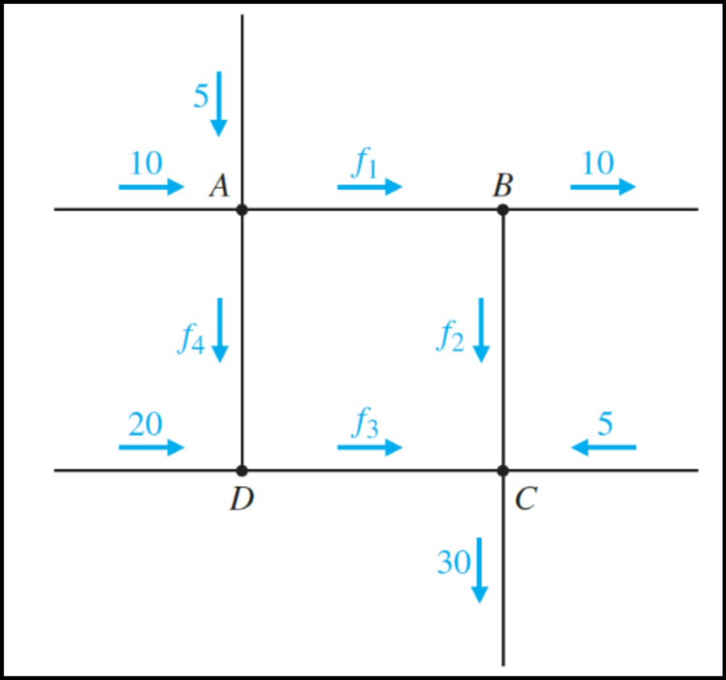
Observación (análisis del flujo en una red).

Se puede analizar el flujo a través de una red, al describir el sistema de ecuaciones lineales que describe dicha red, y luego este sistema se puede solucionar con alguno de los métodos conocidos.

$\boxed{\text{Método de Gauss}}$, $\boxed{\text{Método de Gauss Jordan}}$

Ejemplo.

Describir los posibles flujos a través de la red de tubería de aguas dado en la siguiente figura.



Solución:

Flujo entrante en $A = 10 + 5 = 15$.

Flujo saliente en $A = f_1 + f_4$.

Flujo entrante en $B = f_1$.

Flujo saliente en $B = f_2 + 10$.

Flujo entrante en $C = f_2 + f_3 + 5$.

Flujo saliente en $C = 30$.

Flujo entrante en D$= f_4 + 20$

Flujo saliente en D$= f_3$.

Así, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_1 + f_4 &= 15 \\ f_2 + 10 &= f_1 \\ f_2 + f_3 + 5 &= 30 \\ f_4 + 20 &= f_3 \end{aligned} \longleftrightarrow \begin{aligned} f_1 \qquad\qquad\quad + f_4 &= 15 \\ f_1 - f_2 \qquad\qquad &= 10 \\ f_2 + f_3 \qquad &= 25 \\ f_3 - f_4 &= 20 \end{aligned}$$

y para solucionar este sistema, usamos eliminación de Gauss-Jordan.

paso(1): Describir la matriz aumentada del sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{cccc|c} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \# \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \end{array} \longleftrightarrow \begin{aligned} f_1 \qquad\qquad\quad + f_4 &= 15 \\ f_1 - f_2 \qquad\qquad &= 10 \\ f_2 + f_3 \qquad &= 25 \\ f_3 - f_4 &= 20 \end{aligned}$$

paso(2): Usando operaciones elementales por renglón, reducir la matriz aumentada del sistema a una matriz escalonada reducida.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \# \end{array} \\ \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 + R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 - R_3]{R_4 - R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Paso(3): Encontrar la solución del sistema de ecuaciones original, usando la matriz escalonada del paso (2).

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} f_1 + f_4 = 15. \\ f_2 + f_4 = 5. \\ f_3 - f_4 = 20 \end{array}$$

de donde

✓ $f_1 = 15 - f_4.$ ✓ $f_3 = 20 + f_4.$

✓ $f_2 = 5 - f_4.$ ✓ $f_4 = f_4.$

Así, tenemos que la solución del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 - f_4 \\ 5 - f_4 \\ 20 + f_4 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -f_4 \\ -f_4 \\ f_4 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} + f_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde $f_1, f_2, f_3, f_4 \geq 0$. Así, tenemos que:

(✓) $15 - f_4 \geq 0 \longleftrightarrow f_4 \leq 15.$

(✓) $5 - f_4 \geq 0 \longleftrightarrow f_4 \leq 5.$

(v) $20+f_4 \geq 0 \longleftrightarrow f_4 \geq -20$

(v) $f_4 \geq 0$

Conclusión:

Los flujos f_1, f_2, f_3, f_4 que se pueden distribuir sobre la red satisfacen que:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} + f_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad 0 \leq f_4 \leq 5.$$