Clase 4.

Sistemas de ecuaciones lineales.

Definición Una ***ecuación lineal*** en las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde los ***coeficientes*** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y el ***término constante*** b son constantes.

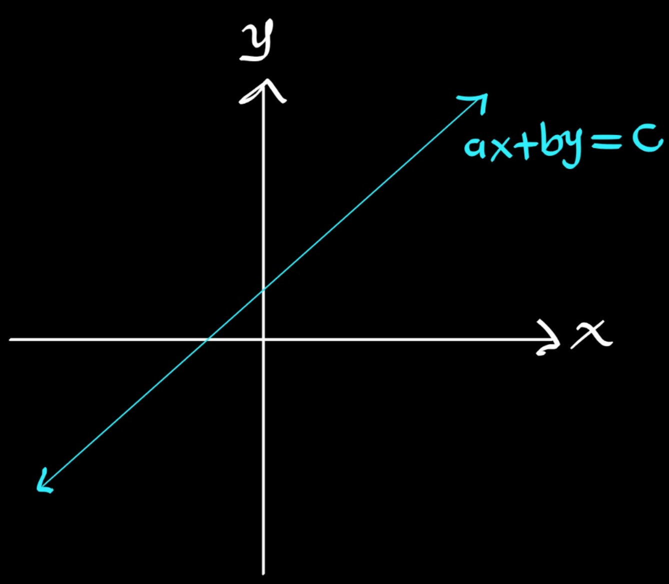
Observación (definición anterior).

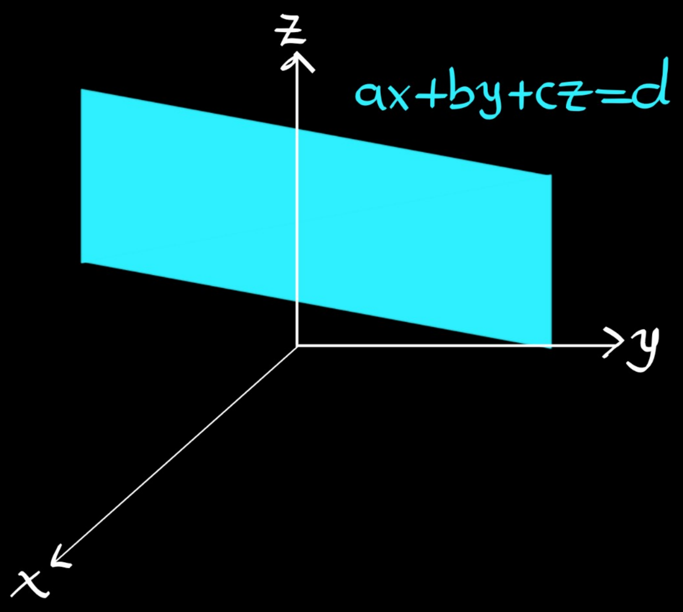
Recuerde que la ecuación general de una recta en $\mathbb{R}^2$ es de la forma

$$ax + by = c$$

y que la ecuación general de un plano en $\mathbb{R}^3$ es de la forma

$$ax + by + cz = d$$





Ejemplo 2.1

Las siguientes ecuaciones son lineales:

$3x - 4y = -1$ $\quad$ $r - \frac{1}{2}s - \frac{15}{3}t = 9$ $\quad$ $x_1 + 5x_2 = 3 - x_3 + 2x_4$

$\sqrt{2}x + \frac{\pi}{4}y - \left(\text{sen}\frac{\pi}{5}\right)z = 1$ $\quad$ $3.2x_1 - 0.01x_2 = 4.6$

Ecuación lineal.

$$\boxed{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n = b}$$

Ejemplo (ecuaciones no lineales).

Las siguientes ecuaciones no son lineales:

$xy + 2z = 1$ $\quad$ $x_1^2 - x_2^3 = 3$ $\quad$ $\frac{x}{y} + z = 2$

$\sqrt{2x} + \frac{\pi}{4}y - \text{sen}\left(\frac{\pi}{5}z\right) = 1$ $\quad$ $\text{sen}x_1 - 3x_2 + 2^{x_3} = 0$

Definición (solución de una ecuación lineal).

Una ***solución*** de una ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ es un vector $[s_1, s_2, \ldots, s_n]$ cuyos componentes satisfacen la ecuación cuando se sustituye $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$

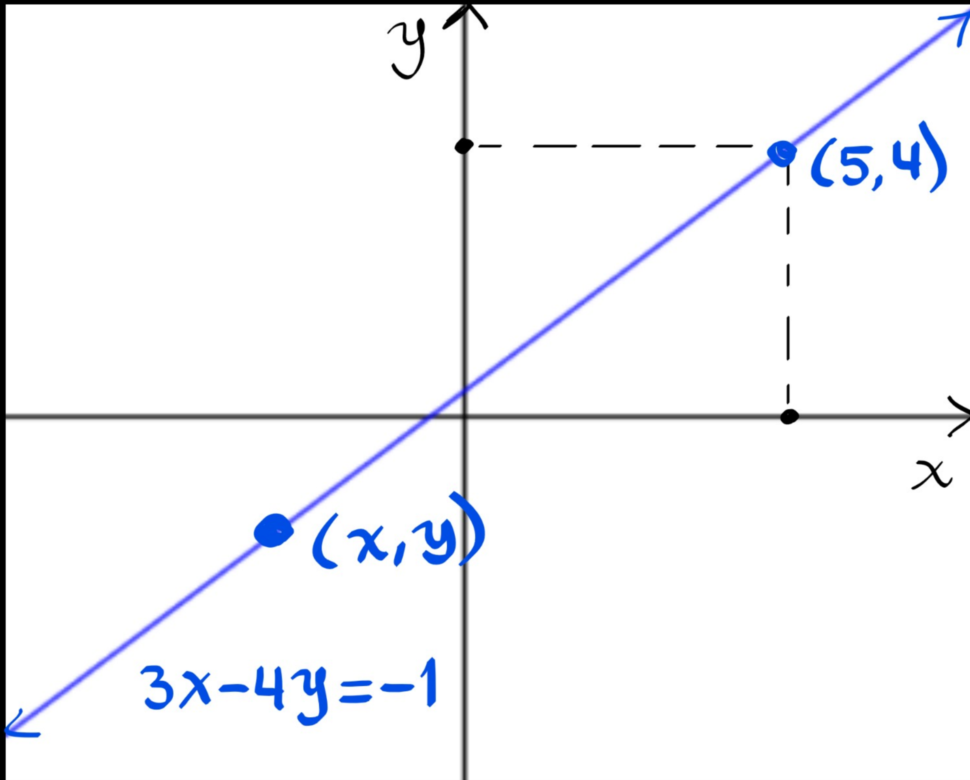
$$\boxed{a_1 \cdot s_1 + a_2 \cdot s_2 + \cdots + a_n \cdot s_n = b}$$

Ejemplo 2.2

(a) $[5, 4]$ es una solución de $3x - 4y = -1$ porque, cuando se sustituye $x = 5$ y $y = 4$, la ecuación se satisface: $3(5) - 4(4) = -1$.

Si $[x, y] = [5, 4] \longrightarrow 3x - 4y = -1$

$3(5) - 4(4) = 15 - 16 = -1$

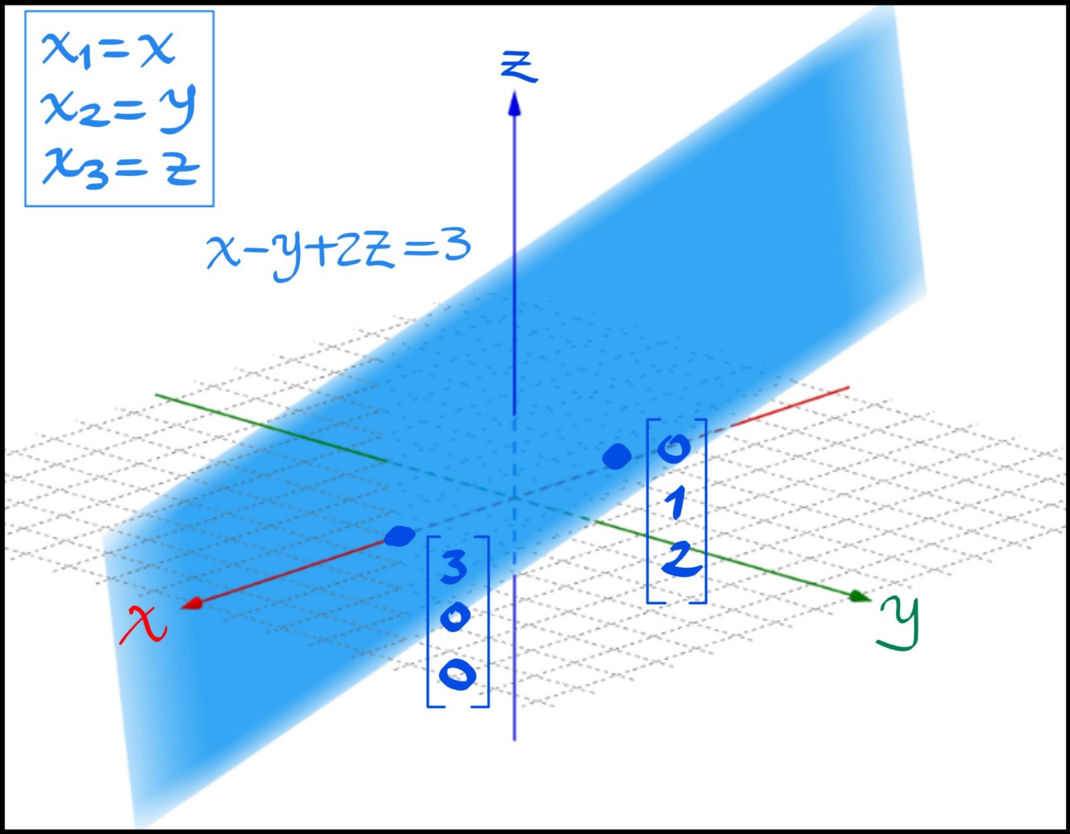


(b) La ecuación lineal $x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$ tiene $[3, 0, 0]$, $[0, 1, 2]$ y $[6, 1, -1]$ como soluciones específicas. El conjunto completo de soluciones corresponde al conjunto de puntos en el plano determinado por la ecuación dada.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3 - 0 + 2 \cdot (0) = 3 \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 0 - 1 + 2(2) = 3 \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 6 - 1 + 2(-1) = 3 \end{array}}$$



Definición (sistema de ecuaciones lineales).

Un ***sistema de ecuaciones lineales*** es un conjunto finito de ecuaciones lineales, cada una con las mismas variables. Una ***solución*** de un sistema de ecuaciones lineales es un vector que *simultáneamente* es una solución de cada ecuación en el sistema. El ***conjunto solución*** de un sistema de ecuaciones lineales es el conjunto de *todas* las soluciones del sistema.

$$\boxed{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}}
\begin{array}{l} \longrightarrow \text{Ecuación } 1 \\ \longrightarrow \text{Ecuación } 2 \\ \qquad \vdots \\ \longrightarrow \text{Ecuación } m \end{array}$$

Variables (incognitas): $x_1, \ldots, x_n$

Este sistema de ecuaciones lineales tiene m-ecuaciones con n-incognitas.

Ejemplo 2.3 El sistema

$$\boxed{\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned}}$$

tiene [2,1] como una solución, pues es una solución de ambas ecuaciones. Por otra parte, [1, −1] no es una solución del sistema, porque sólo satisface la primera ecuación.

solución

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{ll} 2x - y = 3, & x + 3y = 5 \\ 2(2) - 1 = 3 & 2 + 3(1) = 5 \end{array}$$

no es solución

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{ll} 2x - y = 3, & x + 3y = 5 \\ 2(1) - (-1) = 3 & 1 + 3(-1) = -2 \end{array}$$

Ejemplo 2.4 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

(a) $\boxed{\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned}}$ (b) $\boxed{\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x - 2y &= 4 \end{aligned}}$ (c) $\boxed{\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x - y &= 3 \end{aligned}}$

(a) $\boxed{\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned}}$ $\longrightarrow$

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 3 \\ \hline 2x &= 4 \\ x &= \frac{4}{2} = 2 \\ y &= x - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones lineales es tiene como única solución $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) $\boxed{\begin{array}{l} x-y=2 \\ 2x-2y=4 \end{array}}$ $\longrightarrow$

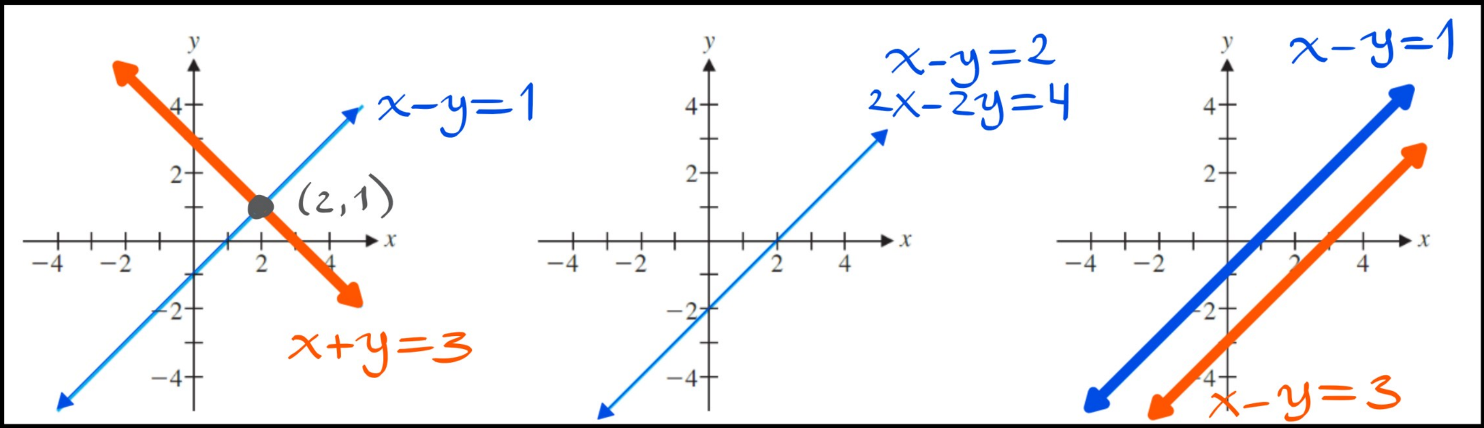
$$x=2+y$$
$$2x-2y=4$$
$$2(2+y)-2y=4$$
$$4+2y-2y=4$$

$\longrightarrow$ $4=4.$

Este sistema tiene infinitas soluciones y estas satisfacen que $x-y=2$.

(c) $\boxed{\begin{array}{l} x-y=1 \\ x-y=3 \end{array}}$ $\longrightarrow$ $1=3$
una contradicción (imposible)

por lo tanto, este sistema de ecuaciones lineales no tiene solución.



(a) (b) (c)

Nota (sistemas de ecuaciones).

Un sistema de ecuaciones lineales se llama ***consistente*** si tiene al menos una solución. Un sistema sin soluciones se llama ***inconsistente.***

Teorema (existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales).

Un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes reales tiene

(a) una solución única (un sistema consistente) o
(b) un número infinito de soluciones (un sistema consistente) o
(c) ninguna solución (un sistema inconsistente).

∎

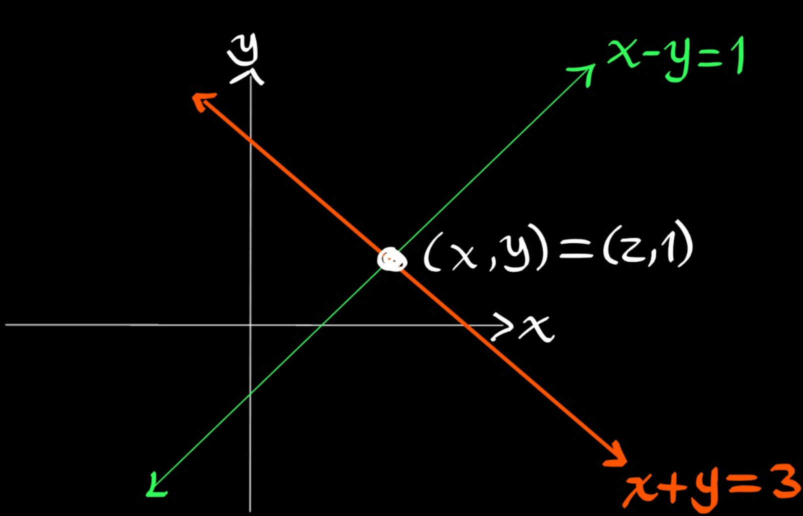
Definición (sistemas de ecuaciones equivalentes).

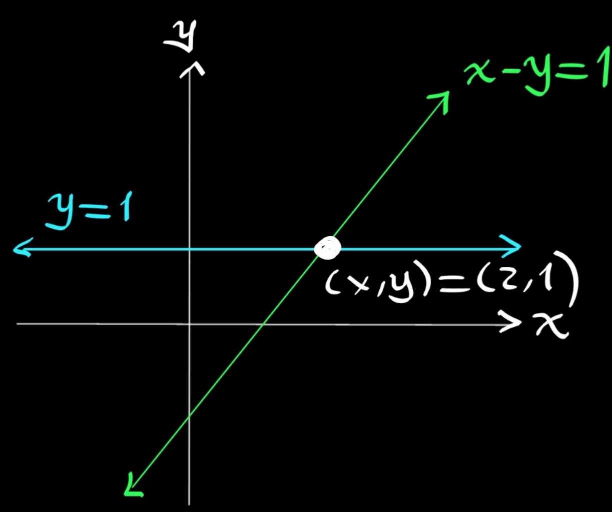
Dos sistemas lineales se llaman ***equivalentes*** si tienen los mismos conjuntos solución.

Ejemplo (sist. de ecuaciones lineales equivalentes).

$$\boxed{\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned}} \quad \text{y} \quad \boxed{\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 0x - y &= 1 \end{aligned}}$$

son equivalentes, pues ambos tienen la solución única [2, 1].





$$\boxed{\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned}} \longrightarrow \begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 3 \\ \hline 2x &= 4 \end{aligned} \longrightarrow x = 2 \longrightarrow \begin{aligned} y &= x - 1 \\ y &= 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x-y=1 \\ y=1 \end{array}} \longrightarrow \begin{array}{l} x=1+y \\ x=1+1=2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}$$

Nota (sistemas de ecuaciones equivalentes).

El planteamiento para resolver un sistema de ecuaciones lineales es transformar el sistema dado en uno equivalente que sea más fácil de resolver. El patrón triangular del segundo ejemplo anterior (en el que la segunda ecuación tiene una variable menos que la primera) es el que se buscará.

Ejemplo 2.5 Resuelva el sistema

$$\boxed{\begin{aligned} x - y - z &= 2 \\ y + 3z &= 5 \\ 5z &= 10 \end{aligned}}$$

Solución:

✓ $5z=10 \longrightarrow \boxed{z=\frac{10}{5}=2}$.

✓ $y+3z=5 \longrightarrow \begin{array}{l} y=5-3z \\ y=5-3(2) \end{array} \longrightarrow \boxed{y=-1}$.

✓ $x-y-z=2 \longrightarrow \begin{array}{l} x=y+z+2 \\ x=-1+2+2 \end{array} \longrightarrow \boxed{x=3}$.

De modo que la única solución es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Este método se llama sustitución hacia atrás.

Observación (solución de sistemas).

Ahora se regresa a la estrategia general para transformar un sistema dado en uno equivalente que puede resolverse fácilmente mediante sustitución hacia atrás. Este proceso se describirá con mayor detalle en la siguiente sección; por ahora, simplemente se le observará en acción en un solo ejemplo.

Ejemplo 2.6 Resuelva el sistema

$$\boxed{\begin{aligned} x - y - z &= 2 \\ 3x - 3y + 2z &= 16 \\ 2x - y + z &= 9 \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &R_1 \\ &R_2 \\ &R_3 \end{aligned}$$

Solución:

Para solucionar este sistema, intentaremos encontrar un sistema triángular equivalente y luego solucionar este mediante sustitución hacia atrás.

Paso(1): convertir el sistema de ecuaciones dado en un sistema de ecuaciones triángular equivalente.

Eliminar los coeficientes de la variable x.

$$\boxed{\begin{aligned} x - y - z &= 2 \quad (R_1) \\ 3x - 3y + 2z &= 16 \quad (R_2) \\ 2x - y + z &= 9 \quad (R_3) \end{aligned}} \quad \begin{aligned} & \\ &\longrightarrow R_2 - 3R_1 \\ &\longrightarrow R_3 - 2R_1 \end{aligned}$$

✓
$$\begin{aligned} 3x - 3y + 2z &= 16 \\ -3x + 3y + 3z &= -6 \\ \hline 5z &= 10 \end{aligned} \quad \longleftarrow R_2 - 3R_1$$

$$\begin{array}{r} 2x-y+z=9 \\ -2x+2y+2z=-4 \\ \hline y+3z=5 \end{array}$$

De esta manera, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones que es equivalente al original.

$$\begin{array}{r} x-y-z=2 \\ 5z=10 \\ y+3z=5 \end{array} \quad\longleftrightarrow\quad \begin{array}{rl} x-y-z=2 & (R_1) \\ 3x-3y+2z=16 & (R_2) \\ 2x-y+z=9 & (R_3) \end{array}$$

En este proceso, es importante observar que se trabajó única/ con los coeficientes del sistema de ecuaciones de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rl} x-y-z=2 & (R_1) \\ 3x-3y+2z=16 & (R_2) \\ 2x-y+z=9 & (R_3) \end{array} \quad\longleftrightarrow\quad \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} x & y & z & \# \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 16 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array}\right] & \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x & y & z & \# \end{array} \\ \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 16 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-3R_1} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \# \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right] \longleftrightarrow \begin{aligned} x-y-z&=2 \\ 5z&=10 \\ y+3z&=5 \end{aligned}$$

Sin embargo, el nuevo sistema de ecuaciones todavía no tiene patrón triángular. Por lo tanto, seguiremos reduciendo nuevo sistema de ecuaciones.

$$\boxed{\begin{aligned} x-y-z&=2 \quad (R_1) \\ 5z&=10 \quad (R_2) \\ y+3z&=5 \quad (R_3) \end{aligned}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{aligned} x-y-z&=2 \\ y+3z&=5 \\ 5z&=10 \end{aligned}}$$

En este caso, es importante notar que solo cambiamos los coeficientes de (R_2) y (R_3) como se muestra a continuación.

$$\boxed{\begin{aligned} x-y-z&=2 \quad (R_1) \\ 5z&=10 \quad (R_2) \\ y+3z&=5 \quad (R_3) \end{aligned}} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{R_2 \Leftrightarrow R_3} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \# \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \# \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right] \longleftrightarrow \boxed{\begin{aligned} x-y-z&=2 \\ y+3z&=5 \\ 5z&=10 \end{aligned}}$$

✓ $5z=10 \longrightarrow z=\frac{10}{5}=2.$

✓ $y+3z=5 \longrightarrow y=5-3z=5-3(2)=-1.$

✓ $x-y-z=2 \longrightarrow x=2+y+z=2+(-1)+2=3.$

por lo tanto, la solución del sistema es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio.

Supongamos que tenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\boxed{\begin{aligned} ax+by&=L \\ cx+dy&=M \end{aligned}}$$

entonces:

(1) Determinar la posible solución del sistema de ecuaciones lineales.

(2) En que casos podemos asegurar que el sistema de ecuaciones no tiene solución.

(3) ¿Qué nos dice el número $ad-bc$ respecto a las posibles soluciones del sistema?