# Clase 24.

## Semejanza y diagonalización.

**Definición (A semejante B):** sean $A$ y $B$ 2 matrices de tamaño $n\times n$, entonces decimos que $A$ es semejante a $B$, si existe una matriz $P$ de tamaño $n\times n$, tal que:

(1) $P$ es invertible ($\det(P)\neq 0$).

(2) $AP=PB$ ($A=PBP^{-1}$).

---

**Ejemplo (definición anterior).**

Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ y $P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

entonces verificar que $A$ es semejante a $B$.

**Ayuda:** Mostrar que $P$ es invertible y

$AP = PB$.

## Solución:

Para empezar, notemos que:

✓ $P$ es invertible.

$$\operatorname{Det}(P) = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 2 \neq 0$$

lo cual muestra que $P$ es invertible.

✓ $AP = PB$.

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & -1+2 \\ 0-1 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$PB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 0+1 \\ 1-2 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

El análisis anterior prueba que $A$ es semejante a la matriz $B$.

## Notación (matrices semejantes).

Si $A$ es semejante a $B$, usual/ escribimos $A \sim B$.

---

## Propiedades (semejanza de matrices).

Sean $A, B$ y $C$ tres matrices de tamaño $n \times n$, entonces:

(1) $A \sim A$ ⟶ (Reflexiva).

(2) Si $A \sim B$, entonces $B \sim A$ ⟶ (simétrica).

(3) Si $A \sim B$ y $B \sim C$, entonces $A \sim C$

(transitiva)

(4) Si $A \sim B$, entonces $\operatorname{Det} A = \operatorname{Det} B$.

(5) Si $A \sim B$, entonces:

$A$ es invertible $\longleftrightarrow$ $B$ es invertible.

(6) si $A \sim B$, entonces $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(B)$.

(7) si $A \sim B$, entonces

$$\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$$

esto significa que $A$ y $B$ tienen el mismo polinomio carácteristico (en particular $A$ y $B$ tienen los mismos eingenvalores).

---

Ejemplo (aplicación de las propiedades anteriores).

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Determinar si $A$ y $B$ son matrices semejantes.

Solución.

Para empezar notemos que:

✓ $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1-4 = -3.$

✓ $\mathrm{Det}(B) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4-1 = 3.$

Así, $\mathrm{Det}(A) \neq \mathrm{Det}(B)$ lo cual muestra que A no son semejantes.

---

Ejemplo.

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

entonces verificar si A y B son semejantes.

Solución.

Para empezar, notamos que:

✓ $\mathrm{Rank}(A) = 2.$

Esto se debe a que A es una matriz escalonada y A tiene 2 pivotes.

✓ $\operatorname{Rank}(B)=1$.

Esto se debe a que

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B'$$

es escalonada

lo cual muestra que el número de pivotes de una matriz escalonada para B es 1, lo que equivale a decir que $\operatorname{Rank}(B)=1$.

Por las propiedades previos podemos asegurar que A y B no son semejantes.

---

Nota ( propiedades de semejanza).

Es posible encontrar matrices A y B que satisfagan las siguientes propiedades:

- ✓ $Det(A) = Det(B)$.
- ✓ $Rank(A) = Rank(B)$.
- ✓ $Det(A - \lambda I) = Det(B - \lambda I)$.

Pero es posible que $A \not\sim B$ (A no es semejante a B).

---

Ejemplo (nota anterior).

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

entonces:

- ✓ $Det(A) = Det(B) = 1$.
- ✓ $Rank(A) = Rank(B) = 2$.
- ✓ $Det(A - \lambda I) = Det(B - \lambda I)$.

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(A-\lambda I) = (1-\lambda)^2.$$

$$B-\lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(B-\lambda I) = (1-\lambda)^2.$$

✓ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no son semejantes.

Si $A$ fuera semejante a $B$, entonces existiría una matriz $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que:

- $P$ es invertible.
- $AP = PB \longleftrightarrow$ $A = PBP^{-1}$

  $\boxed{B = P^{-1}AP}$

usaremos esta descripción

$$B = P^{-1}AP = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo cual es Imposible, ya que es claro que $B \neq I$.

Así, $A$ y $B$ no son matrices semejantes.

Ejercicio Mostrar de otra manera que $A$ no es semejante a $B$.

---

Recordar (matriz diagonal).

Recordemos que una matriz $\underline{\underline{D}}$ de tamaño $n \times n$ es diagonal, si se puede describir de la siguiente manera:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}.$$

## Definición (matrices diagonalizables).

Sea $A$ una matriz de tamaño $n \times n$, entonces decimos que $A$ es diagonalizable, si existe una matriz $D$ tal que:

$A \sim D$

$D$ es una matriz diagonal

$A \sim D \iff$ Existe una matriz $P$ tal que:

$AP = PD$

$P$ es invertible

---

## Ejemplo (definición anterior).

(1) Si $D$ es una matriz diagonal, entonces $D$ es diagonalizable.

- $D = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$

- $D \cdot I = I D \longrightarrow D \sim D$

  $I$ es la matriz identidad (invertible)

lo cual muestra que $D$ es diagonalizable.

(2) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, entonces $A$ es diagonalizable, ya que:

- $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal.

  $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ es invertible ($\operatorname{Det} P \neq 0$).

- $AP = PD$.

$$A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

lo cual muestra que $A \sim D$, y como $D$ es una matriz diagonal, entonces $A$ es diagonalizable.

---

Nota (definición anterior y ejemplo anterior).

De la definición previa y el ejemplo anterior, surge la siguientes preguntas:

¿cómo probar que $A$ es diagonalizable?

¿Si $A$ es diagonalizable, cómo se puede encontrar las matrices $P$ y $D$ enunciadas previa/?

El siguiente teorema nos dirá las respuestas de estas 2 preguntas.

---

Notación (siguiente teorema - reducir la escritura).

Si $A$ es una matriz de tamaño $n \times n$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_K$ son los eingenvalores de $A$ ($\lambda_1, \ldots, \lambda_K$ son las raices del polinomio carácteristico $Det(A - \lambda I)$), entonces:

$$E_{\lambda_1} = \{ x \in \mathbb{R}^n / (A - \lambda_1 I)(x) = 0 \}$$

tiene como base a $\{ V_1^1, \ldots, V_{m_1}^1 \}$

$$E_{\lambda_2} = \{ x \in \mathbb{R}^n / (A - \lambda_2 I)(x) = 0 \}$$

tiene como base a $\{ V_1^2, \ldots, V_{m_2}^2 \}$

⋮

$$E_{\lambda_k} = \{ x \in \mathbb{R}^n / (A - \lambda_k I)(x) = 0 \}$$

tiene como base $\{ v_1^k, \ldots, v_{m_k}^k \}$

Esta notación será muy útil para el siguiente teorema.

---

## Teorema (matrices diagonalizables).

Sea $A$ una matriz de tamaño $n \times n$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son los eingenvalores de $A$, entonces:

$\boxed{A \text{ es diagonalizable}} \longleftrightarrow$

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son reales.
- $\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}) = n$.

$$\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}) = \dim(E_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(E_{\lambda_k})$$

y además $AP = PD$ con:

$$P = \begin{bmatrix} \underbrace{V_1^1 \; V_2^1 \cdots V_{m_1}^1}_{E_{\lambda_1}} & \underbrace{V_1^2 \; V_2^2 \cdots V_{m_2}^2}_{E_{\lambda_2}} & \cdots & \underbrace{V_1^k \; V_2^k \cdots V_{m_k}^k}_{E_{\lambda_k}} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & & & & & & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & & & & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots \; \lambda_1 & & & & 0 & & & \vdots \\ & & & \lambda_2 & & & & & & \\ & & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & 0 & & & \ddots \; \lambda_2 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \lambda_k & & 0 \\ & & & & & & & & \lambda_k & \\ 0 & \cdots & & & & & & 0 & & \ddots \; \lambda_k \end{bmatrix}$$

## Ejemplo (aplicación teorema anterior).

sea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$, entonces

verificar si $A$ es diagonalizable y en el caso de que $A$ sea diagonalizable encontrar matrices $P$ y $D$ con $P$ invertible y $D$ diagonal tal que $A=PDP^{-1}$.

## Solución.

Para empezar es necesario determinar los eingenvalores de la matriz $A$.

- $A-\lambda I=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 2 & -5 & 4-\lambda \end{pmatrix}.$$

- $\text{Det}(A-\lambda I)=$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\big((-\lambda)(4-\lambda)+5\big) - 1(-2)$$

$$= -\lambda(-4\lambda+\lambda^2+5)+2$$

$$= 4\lambda^2-\lambda^3-5\lambda+2$$

$$= -\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2$$

polinomio carácteristico

Ejercicio Mostrar que

$$-\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2 = -(\lambda-1)^2\cdot(\lambda-2)$$

Ayuda.

Usar el teorema de los ceros racionales y división sintética.

lo cual muestra que los eingenvalores de A son:

$\lambda = 1$ (multiplicidad algebraica 2) , $\lambda = 2$ (multiplicidad algebraica 1)

Ahora, encontremos bases para los eingenespacios $E_1$ y $E_2$.

(★) $E_1 = Nul(A - 1 \cdot I) =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ (A - 1 \cdot I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- $A - 1 \cdot I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$

- $(A - 1 \cdot I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \phantom{0} \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \phantom{0} \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{(-1)R_1} \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \phantom{0} \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{(-1)R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[R_3 + 3R_2]{R_1 + R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} x = z \\ y = z \\ z = z \end{array}$$

De donde $E_1$ se describe como:

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \ x = z,\ y = z,\ z = z \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \ z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \ z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(★) $E_2 = \text{Nul}(A - 2I) =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \ (A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- $$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $$(A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Ejercicio

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} x = \frac{1}{4}z \\ y = \frac{1}{2}z \\ z = z \end{array}$$

De donde la descripción $E_2$ es:

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = \frac{1}{4}z,\ y = \frac{1}{2}z,\ z = z \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1/4\, z \\ 1/2\, z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

(★) $E_1 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base para $E_1$

$E_2 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ es base para $E_2$

(★) $\text{Dim}(E_1) + \text{Dim}(E_2) = 1 + 1 = 2 \neq 3.$

Así, por el teorema previo concluimos que $A$ no es diagonalizable ya que $Dim(E_1) + Dim(E_2) = 2 \neq 3$.

super importante verificar esta suma para la conclusión

---

Ejemplo (aplicación del teorema anterior).

Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, entonces verificar si $A$ es diagonalizable y en caso en que $A$ sea diagonalizable encontrar matrices $P$ y $D$ con $P$ invertible y $D$ diagonal tal que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

## Solución.

Para empezar, encontremos los eingenvalores de $A$.

- $A-\lambda I=\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & -\lambda & -3 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$.

- $\mathrm{Det}(A-\lambda I)=$

$$=(-1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1-\lambda)\cdot\Big((-\lambda)(-1-\lambda)\Big)+\lambda$$

$$=(-1-\lambda)\cdot(\lambda+\lambda^2)+\lambda$$

$$=-\lambda-\lambda^2-\lambda^2-\lambda^3+\lambda=-\lambda^3-2\lambda^2$$

$$=-\lambda^2(\lambda+2).$$

- Del computo previo, podemos garantizar que los eingenvalores de $A$ son $\lambda=0$ y $\lambda=-2$.

$E_0 = \mathrm{Nul}(A - 0I)$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ (A - 0 \cdot I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- $A - 0 \cdot I = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

- $(A - 0 \cdot I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Ejercicio

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c} -x + z = 0. \\ (x = z) \end{array}$$

--> Aplicar el algoritmo de Gauss-Jordan.

De donde la descripción de $E_0$ es:

$$E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ x = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

y además una base para $E_0$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$E_{-2} = \text{Nul}(A - (-2)I) =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ (A - (-2)I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A-(-2)I=\begin{pmatrix}-1-(-2) & 0 & 1\\ 3 & -(-2) & -3\\ 1 & 0 & -1-(-2)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$(A-(-2)I)\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\longleftrightarrow \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{array}$$

**Ejercicio**

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\longleftrightarrow \begin{aligned} x&=-z\\ y&=3z\\ z&=z\end{aligned}$$

y de esta forma $E_{-2}$ tiene la siguiente descripción:

$$E_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ x = -z,\ y = 3z,\ z = z \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ z \in \mathbb{R} \right\} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Además una base para $E_{-2}$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

✓ $E_0 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \text{Dim}(E_0) = 2.$

$E_{-2} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \text{Dim}(E_{-2}) = 1.$

$$\boxed{\text{Dim}(E_0) + \text{Dim}(E_{-3}) = 2 + 1 = 3}$$

$\dashrightarrow$ A es diagonalizable

Del teorema anterior concluimos que $A$ es diagonalizable y además $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ con $P$ invertible y $D$ diagonal donde:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_0 \qquad\qquad E_{-2}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} A = P \cdot D \cdot P^{-1} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \end{array}}$$

Corolario $\left( A_{n\times n} \text{ y } \underset{\text{eingenvalores}}{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}} \longrightarrow \underset{\text{diagonalizable}}{A \text{ es}} \right)$.

Supongamos que $A$ es una matriz de tamaño $n\times n$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ son los eingenvalores de $A$ (diferentes), entonces $A$ es diagonalizable y además:

$$A = P \cdot D P^{-1}$$

con

$$P = \begin{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ E_{\lambda_1}}}{v_1^1} & \underset{\substack{\uparrow \\ E_{\lambda_2}}}{v_1^2} & \cdots & \underset{\substack{\uparrow \\ E_{\lambda_n}}}{v_1^n} \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

---

Ejemplo (aplicación corolario anterior).

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, entonces:

(1) Encontrar los eingenvalores de $A$.

(2) Demostrar que A es diagonalizable.

(3) Encontrar una matriz diagonal D tal que $A \sim D$.

(4) Hallar $D^{10}$.

(5)* Hallar $A^{10}$.

Solución.

(1) $\text{Det}(A-\lambda I)=0$

$$\text{Det}\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda)-2=0$$

$$-\lambda+\lambda^2-2=\lambda^2-\lambda-2=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda+1)=0$$

$$\lambda=2 \quad \text{ó} \quad \lambda=-1.$$

por lo tanto los eingenvalores de

$A$, son $\lambda=2$ y $\lambda=-1$.

(2) por el corolario anterior, podemos decir que $A$ es diagonalizable ya que:

| |
|---|
| $\lambda=2$ y $\lambda=-1$ son 2 eingenvalores reales diferentes para la matriz $A$ que tiene tamaño $2\times 2$. |

(3) La matriz $\underline{\underline{D}}$ pedida es

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ y por teorema previo $A\sim D$.

(4) $D^{10}=?$

- $D^2=D\cdot D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix}.$

- $D^3=D^2\cdot D=\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & (-1)^3 \end{pmatrix}.$

- $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \rightsquigarrow D^{10} = \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & (-1)^{10} \end{pmatrix}$

$$D^{10} = \begin{pmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5)* $A^{10} = ?$

como A es diagonalizable, entonces $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ donde P es una matriz invertible y D es diagonal.

- $A \cdot A = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1})$

  $A \cdot A = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$

- $A^3 = A^2 \cdot A = (P \cdot D^2 \cdot P^{-1})(P \cdot D \cdot P^{-1})$

  $A^3 = P \cdot D^3 \cdot P^{-1}$.

- $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$ $\longleftarrow$ Esto es lo más importante para terminar, determinemos la matriz $P$.

(★) $E_2 = Nul(A-2I)$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / (A-2\cdot I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

ejercicio

(★) $E_{-1} = Nul(A-(-1)\cdot I) =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / (A-(-1)\cdot I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= gen\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ejercicio

De donde, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y además:

$$A^{10} = P \cdot D^{10} \cdot P^{-1}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 342 & 341 \\ 682 & 683 \end{pmatrix}.$$