Proyecciones en $\mathbb{R}^n$:

Definición (proyección de un vector a otro).

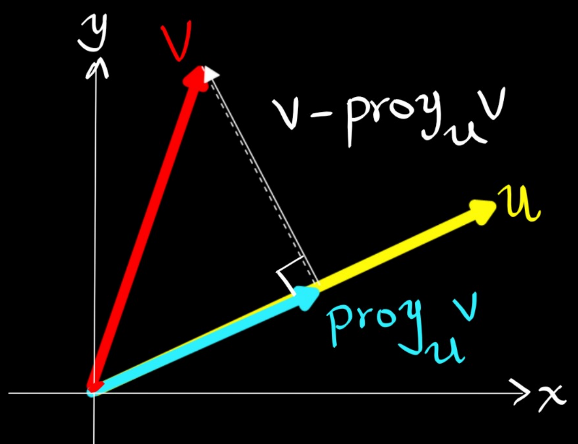
Supongamos que u y v son vectores en $\mathbb{R}^n$, con $u \neq 0$. Entonces definimos la proyección de v sobre u denotado por $\text{proy}_u(v)$, como aquel vector en $\mathbb{R}^n$ que satisface las siguientes propiedades:

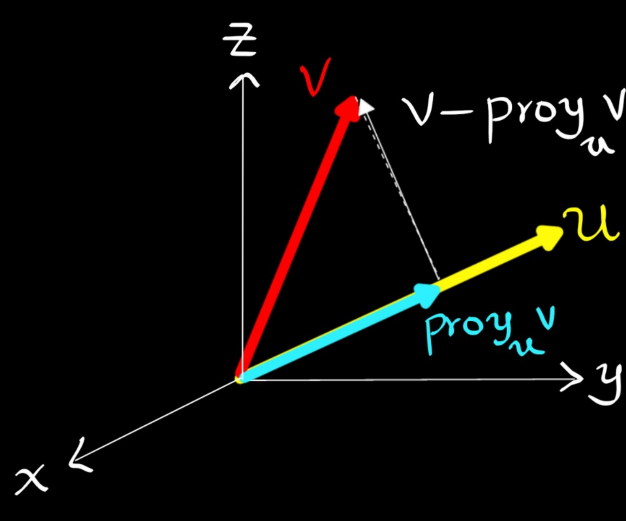
(1) $\text{proy}_u(v)$ es paralelo a u. Es decir que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\text{proy}_u(v) = c \cdot u$.

(2) $\text{proy}_u(v)$ es perpendicular a $v - \text{proy}_u(v)$.

Observación (definición anterior).

Geométrica/ podemos interpretar a $\text{proy}_u(v)$ de la siguiente manera:

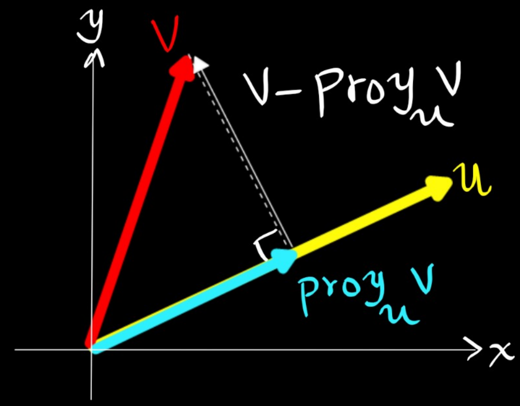




Además, tenemos que:

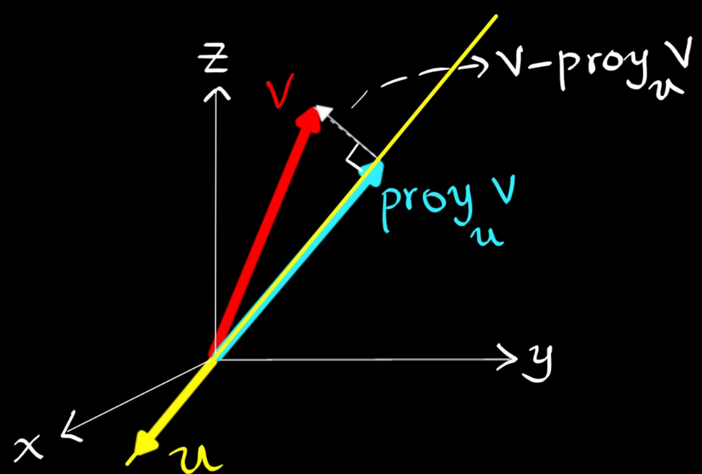
(1) se puede demostrar en $\mathbb{R}^2$ que:

$$\boxed{\text{Proy}_u(v) = \left(\frac{u \cdot v}{u \cdot u}\right) \cdot u}$$



(2) se puede demostrar en $\mathbb{R}^3$ que:

$$\boxed{\text{Proy}_u(v) = \left(\frac{u \cdot v}{u \cdot u}\right) \cdot u}$$



Es claro que en $\mathbb{R}^n$ con $n > 3$ no tenemos estas consideraciones geométricas. Sin embargo, la formula dada anterior/ para la proyección en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ es consistente para $\mathbb{R}^n$ con $n > 3$. Por este motivo, nos atrevemos a definir la proyección de un vector a otro de la siguiente manera.

Definición Si **u** y **v** son vectores en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, entonces la ***proyección de* v *sobre* u** es el vector $\text{proy}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ definido por

$$\boxed{\text{proy}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right)\mathbf{u}}$$

Ejemplo 1.24 Encuentre la proyección de **v** sobre **u** en cada caso.

(a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u} = \mathbf{e}_3$

(c) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$

Solución:

(a) $proy_u(v) = \left(\frac{u \bullet v}{u \bullet u}\right) u$, donde:

✓ $u \bullet v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2(-1) + 1 \cdot 3 = -2 + 3 = 1.$

✓ $u \bullet u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 4 + 1 = 5.$

✓ $proy_u(v) = \left(\frac{u \bullet v}{u \bullet u}\right) u = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}.$

(b) $proy_u(v) = \left(\frac{u \bullet v}{u \bullet u}\right) u$, donde:

✓ $u \bullet v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 3.$

✓ $u \bullet u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot 0 + 0\,0 + 1 \cdot 1 = 1.$

✓ $\text{proy}_u(v) = \left(\dfrac{u \bullet v}{u \bullet u} \right) u = \dfrac{3}{1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$

(b) $\text{proy}_u(v) = \left(\dfrac{u \bullet v}{u \bullet u} \right) u$, donde:

✓ $u \bullet v = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 + \dfrac{1}{2} \cdot 2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3 = \dfrac{3\sqrt{2}+3}{2}.$

✓ $u \bullet u = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 1.$

✓ $\text{proy}_u(v) = \left(\dfrac{u \bullet v}{u \bullet u} \right) u = \dfrac{\frac{3\sqrt{2}+3}{2}}{1} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}+3}{4} \\ \frac{3\sqrt{2}+3}{4} \\ \frac{3\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$

Observación (definición anterior).

(1) si u y v son vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$, entonces u es paralelo a $\text{proy}_u(v)$ y v es paralelo a $\text{proy}_v(u)$.

✓ $\operatorname{proy}_u v = \left(\frac{u \cdot v}{u \cdot u}\right) \cdot u$ ⇢ $u \parallel \operatorname{proy}_u v$.

✓ $\operatorname{proy}_v u = \left(\frac{u \cdot v}{v \cdot v}\right) \cdot v$ ⇢ $v \parallel \operatorname{proy}_v u$.

(paralelos)

(2) Si u y v son vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$, entonces $\operatorname{proy}_u(v) \neq \operatorname{proy}_v(u)$.