Ejemplo.

Encuentre la recta de intersección de los planos $x+2y-z=3$ y $2x+3y+z=1$.

Solución:

Debido a que la recta satisface la ecuación de ambos planos, entonces es suficiente resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{array}{l} x+2y-z=3 \\ 2x+3y+z=1 \end{array}}$$

y para esto consideramos los siguientes pasos:

Paso(1): Describir la matriz aumentada del sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \# \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x+2y-z=3 \\ 2x+3y+z=1 \end{array}}$$

Paso(2): Aplicar operaciones elementales para reducir la matriz aumentada del paso(1) a una matriz escalonada reducida.

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \# \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1-2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right]$$

paso(3): Encontrar la solución del sistema de ecuaciones usando la matriz escalonada encontrada en el paso(2).

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} x+5z=-7 \\ y-3z=5 \end{array}$$

✓ $x=-7-5z.$ ✓ $z=z.$

✓ $y = 5+3z.$

por lo tanto la solución del sistema de ecuaciones $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7-5z \\ 5+3z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5z \\ 3z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad z \in \mathbb{R}.}$$