Clase 2.

Matrices.

Definición (matriz).

Una matriz es un arreglo rectángular de números que se describe como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esta matriz además describe m-renglones y n-columnas las cuales son:

Renglones

$$R_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$R_m = \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

columnas

$$C_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \quad C_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

y diremos que esta matriz tiene tamaño $m \times n$ (m-renglones y n-columnas).

Ejemplo (matrices).

Los siguientes son ejemplos de matrices:

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ A es una matriz de tamaño 2×3.

(2) $B = \begin{bmatrix} 1 & \pi & -e \\ 2 & -3 & 8 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ B es una matriz de tamaño 3×3.

(3) $C = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ C es una matriz de tamaño 4×1.

(4) $D = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 10 \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ D es una matriz de tamaño 1×4.

Notación (coeficientes de una matriz).

Dada una matriz descrita de la forma

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \end{array} & \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{array} \end{array}$$

entonces los números a_{ij} con $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$ se llaman los coeficientes de la matriz y en ocasiones escribimos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Ejemplo.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{23} = 6.$

(2) $B = \begin{bmatrix} 1 & \pi & -e \\ 2 & -3 & 8 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow b_{11} = 1,\ b_{23} = 8,\ b_{33} = 0.$

Definición (matriz cuadrada y diagonal).

Sea $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ una matriz, entonces:

(1) Las entradas diagonales de A son las mostradas a continuación:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Longrightarrow a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{ii}.$$

(2) Decimos que A es una matriz cuadrada, si $m=n$ (es decir que el número de renglones coincide con el número de columnas).

(3) Decimos que A es una matriz diagonal, si A es cuadrada y las entradas no diagonales de A son cero. Es decir que A es una matriz diagonal, si se puede escribir como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo.

Dadas las siguientes matrices, verificar si son cuadradas y si son matrices diagonales.

(1) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$

✓ A es cuadrada, ya que es de tamaño 4x4.

✓ A no es una matriz diagonal.

(2) $B=\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \longrightarrow$

✓ B es cuadrada ya que tiene tamaño 1x1.

✓ B es diagonal.

(3) $C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$

✓ C es cuadrada, ya que tiene tamaño 3x3.

✓ C es una matriz diagonal.

(4) $D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$

✓ D no es cuadrada, ya que tiene tamaño 3x4

✓ D no es diagonal, ya que no es cuadrada.

(5) $E=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow$

✓ E no es cuadrada ni diagonal

(6) $F=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$

✓ F es cuadrada.

✓ F es diagonal.

Definición (igualdad de matrices).

Decimos que dos matrices A y B son iguales, si ellas tienen el mismo tamaño y sus coeficientes son iguales. Es decir, si $A=[a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ y $B=[b_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, entonces $a_{ij}=b_{ij}$ para todo $1\le i\le m$ y $1\le j\le n$.

$$A=B$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ y } B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{matrix} a_{11}=b_{11} \\ a_{12}=b_{12} \\ \vdots \\ a_{mn}=b_{mn} \end{matrix}$$

Ejemplo (igualdad de matrices).

Sean A, B y C las siguientes matrices

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } C=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

entonces:

✓ $A\neq B$ y $B\neq C$ ya que los tamaños son diferentes

✓ $A = C \iff 1 = a,\ 2 = b,\ 3 = c$ y $4 = d$.

Definición (suma de matrices).

Para generalizar la suma de vectores, se define la suma de matrices *por componentes*. Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices de $m \times n$, su ***suma*** $A + B$ es la matriz de $m \times n$ que se obtiene al sumar las entradas correspondientes. Por tanto,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

Ejemplo 3.3 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

✓ $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

✓ $A+C$ y $B+C$ no están definidas (recordar que solo se suman matrices del mismo tamaño).

Definición (multiplicación por escalar).

La definición por componentes de la multiplicación por un escalar no será sorpresa. Si A es una matriz $m \times n$ y c es un escalar, entonces el ***múltiplo escalar*** cA es la matriz $m \times n$ que se obtiene al multiplicar cada entrada de A por c. De manera más formal, se tiene

$$cA = c[a_{ij}] = [ca_{ij}]$$

Ejemplo.

✓ $$2\cdot\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

✓ $$-4\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 12 & -28 \end{bmatrix}.$$

Definición (matriz nula de tamaño mxn).

La matriz nula de tamaño $m\times n$, es la matriz $\mathbb{O}$ de tamaño $m\times n$, que satisface que todas sus entradas son cero.

$$\mathbb{O}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{O}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{O}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Definición (producto de matrices).

Sean $A = [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ y $B = [b_{jk}]_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le k\le r}}$ matrices de tamaño $m\times n$ y $n\times r$ respectiva/. Definimos el producto de A con B como la matriz $C = AB := [c_{ik}]_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le k\le r}}$ de tamaño $m\times r$ que satisface que:

$$\boxed{c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk}}$$

Para todo $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq k \leq r$.

Es decir, si A y B se describen como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}_{n \times r}.$$

entonces:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mr} \end{bmatrix}_{m \times r},$$

donde

✓ $$c_{11} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}}_{\text{Renglón 1 de } A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}}_{\text{columna 1 de } B} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1}.$$

$$\checkmark \; C_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n2}.$$

Renglón 1 de A — columna 2 de B

$$\vdots$$

$$\checkmark \; C_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Renglón i de A — columna j de B

$$\vdots$$

$$\checkmark \; C_{mr} = \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1r} \\ b_{2r} \\ \vdots \\ b_{nr} \end{bmatrix} = a_{m1} \cdot b_{1r} + a_{m2} \cdot b_{2r} + \cdots + a_{mn} \cdot b_{nr}.$$

Renglón m de A — columna r de B

Ejemplo 3.6 Calcule AB si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -8 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$c_{24} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.7 Ann y Bert planean ir a comprar frutas para la siguiente semana. Cada uno quiere comprar algunas manzanas, naranjas y uvas, pero en diferentes cantidades. La tabla 3.1 menciona lo que quieren comprar. Hay dos mercados de frutas cercanos, Sam's y Theo's, y sus precios se proporcionan en la tabla 3.2. ¿Cuánto costará a Ann y Bert hacer sus compras en cada uno de los dos mercados?

Tabla 3.1

	Manzanas	Uvas	Naranjas
Ann	6	3	10
Bert	4	8	5

Tabla 3.2

	Sam's	Theo's
Manzana	\$0.10	\$0.15
Uva	\$0.40	\$0.30
Naranja	\$0.10	\$0.20

Solución:

Costo de compras de Ann al comprar en Sam's $= 6\cdot(0,1)+3\cdot(0,4)+10\cdot(0,1)= 2,8$

Costo de compras de Ann al comprar en Theo's. $= 6\cdot(0,15)+3\cdot(0,3)+10\cdot(0,2)= 3,8$

Costo de compras de Bert al comprar en Sam's. $= 4\cdot(0,1)+8\cdot(0,4)+5\cdot(0,1)= 4,1$

Costo de compras de Bert al comprar en Theo's. $= 4\cdot(0,15)+8\cdot(0,3)+5\cdot(0,2)= 4$

Lo interesante del anterior análisis es que al tomar las matrices

$$\begin{array}{c} \\ \text{Ann} \\ \text{Bert} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M & U & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 3 & 10 \\ 4 & 8 & 5 \end{bmatrix} \end{array} \quad y \quad \begin{array}{c} \\ M \\ U \\ N \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Sams} & \text{theo's} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,1 & 0,15 \\ 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} \end{array}$$

entonces:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 10 \\ 4 & 8 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,1 & 0,15 \\ 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,8 & 3,8 \\ 4,1 & 4 \end{bmatrix}$$

de donde, podemos decir que en la matriz anterior tenemos todos los resultados previos

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Sam's} & \text{Theo's} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Ann} \\ \text{Bert} \end{array} & \begin{bmatrix} 2,8 & 3,8 \\ 4,1 & 4 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Definición (matriz identidad de tamaño nxn).

Sea $n \geq 1$ un entero. Definimos la matriz identidad de tamaño nxn como la matriz I_n que se describe de la siguiente manera:

$$\boxed{I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}} \quad \text{con } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Ejemplo (matriz identidad).

Las siguientes matrices representan a la matriz identidad de varios tamaños.

(1) $I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$.

(2) $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(3) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(4) $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Definición (potencia de matrices).

Sea A una matriz de tamaño $n \times n$, entonces definimos:

✓ $A^0 = I_n$.

✓ $A^1 = A$.

✓ $A^2 = A \cdot A$.

✓ $A^3 = (A \cdot A) \cdot A = A^2 \cdot A$.

$\vdots$

✓ $A^m = A^{m-1} \cdot A$ para todo entero $m \geq 1$.

Ejemplo (potencia de matrices).

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces:

$$\checkmark\ A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^1 & 2^1 \\ 2^1 & 2^1 \end{bmatrix}$$

$$\checkmark\ A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 \end{bmatrix}$$

$$\checkmark\ A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 2^3 \\ 2^3 & 2^3 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\checkmark\ A^m = \begin{bmatrix} 2^{m-1} & 2^{m-1} \\ 2^{m-1} & 2^{m-1} \end{bmatrix} \text{ para todo } m \geq 1.$$

Observación (potencia de matrices).

Es importante destacar que la potencia de matrices solo tiene sentido si la matriz es cuadrada debido a la definición de multiplicación de matrices.

Definición (transpuesta de una matriz).

Sea $A=\left[a_{ij}\right]_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$ una matriz de tamaño $m\times n$, entonces definimos la transpuesta de A como la matriz $A^T=\left[b_{ji}\right]_{\substack{1\leq j\leq n\\1\leq i\leq m}}$ con $b_{ji}=a_{ij}$ para $1\leq i\leq m$ y $1\leq j\leq n$. Es decir, si

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

entonces

$$A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Nota (transpuesta de una matriz).

Una manera alternativa de interpretar la transpuesta de una matriz A es cambiar los renglones de A por columnas y viceversa.

Ejemplo (traspuesta de una matriz).

(1) Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, entonces $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$.

(2) Si $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, entonces $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

Definición (matriz simétrica).

Sea A una matriz de tamaño $n \times n$, entonces decimos que A es simétrica si $A = A^T$.

Ejemplo.

Verificar si las siguientes matrices son simétricas.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. (2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Solución:

(1) Si $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, entonces:

$$A^T=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

lo cual muestra que $A=A^T$ y así A es una matriz simétrica.

(2) Si $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, entonces:

$$B^T=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

lo cual muestra que $B\neq B^T$ y así B no es una matriz simétrica.

Nota (siguiente teorema).

En el siguiente teorema se muestran las propiedades comunes del algebra de matrices.