Clase 21

Definición (representación de un vector u en un espacio vectorial V respecto a una base).

Sea $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base para un espacio vectorial V ($gen(B)=V$ y $\{v_1,\dots,v_n\}$ son lineal/ independientes). Si u es un vector en V, sabemos que existen únicos números $c_1,\dots,c_n$ tales que:

$$\boxed{u=c_1\cdot v_1+\dots+c_n\cdot v_n}.$$

Entonces definimos la representación del vector u sobre la base $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ como el siguiente vector:

$$[u]_B=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Ejemplo (representación de un vector respecto a una base).

Sean $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$,

entonces:

(1) $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$.

Esto se debe a que:

$$\boxed{B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \text{ es base para } \mathbb{R}^2} \longleftrightarrow \boxed{\mathrm{Det} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \neq 0},$$

y $\mathrm{Det} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = (-1)(-1) - (2)(2) = 1 - 4 = -3 \neq 0.$

(2) $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ es base para } \mathbb{R}^2} \longleftrightarrow \boxed{\mathrm{Det} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0},$$

$$y \ \operatorname{Det}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (1)(1)-(1)\cdot(0) = 1 \neq 0.$$

(3) Es fácil notar que:

$$(\checkmark)\quad 1\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$(\checkmark)\quad 6\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$(\checkmark)\quad \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(4) Es fácil notar que:

$$(\checkmark)\quad 2\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$(\checkmark)\quad 0\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(v) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_{B_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Ejemplo (representación de un vector respecto a una base).

Sean $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

y supongamos que $x \in \mathbb{R}^2$ satisface que

$[x]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Determinar $[x]_{B_2}$.

Solución:

Recordemos que $[x]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ significa que

$$\boxed{x = 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}} \quad \bigstar$$

entonces para determinar a $[x]_{B_2}$ es suficiente escribir a $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ (la base B_1) como combinación lineal de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (la base B_2) para luego reemplazar en ★ como se muestra a continuación:

✓ Determinar a y b tales que $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \boxed{\begin{aligned} a+b &= -1 \\ b &= 2 \end{aligned}} \longleftrightarrow \begin{aligned} a &= -3 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

✓ Determinar c y d tales que $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \boxed{\begin{aligned} c+d &= 2 \\ d &= -1 \end{aligned}} \longleftrightarrow \begin{aligned} c &= 3 \\ d &= -1 \end{aligned}$$

Del anterior análisis, tenemos que:

$$x = 1\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 1\cdot\left(-3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + 3\left(3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$x = 6 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lo que demuestra que $[x]_{B_2} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Nota (siguiente teorema).

El siguiente teorema nos muestra algunas propiedades de representación de vectores sobre una base de un espacio vectorial.

---

teorema (Propiedades de representación de vectores respecto a una base).

Supongamos que V es un espacio vectorial y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base finita para V. Si $x, y \in V$ y c es un número real, entonces:

(1) $[x+y]_B = [x]_B + [y]_B$.

(2) $[c \cdot x]_B = c \cdot [x]_B$.

Ejercicio

Ejemplo (aplicación teorema anterior).

Supongamos que $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

entonces B es una base para M_{22} (Ejercicio).

Si A_1 y A_2 son matrices de tamaño 2×2 que satisfacen que $[A_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \pi \\ e \end{bmatrix}$ y $[A_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Encontrar $[2A_1 + 3A_2]_B$.

Solución:

Por el teorema anterior, tenemos que:

$$[2A_1 + 3A_2]_B = 2[A_1]_B + 3[A_2]_B$$

$$[2A_1 + 3A_2]_B = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \pi \\ e \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 \\ 4+3 \\ 2\pi - 3 \\ 2e+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 2\pi-3 \\ 2e+6 \end{bmatrix}.$$

teorema (matriz de cambio de base).

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $\mathcal{B}=\{u_1,\dots,u_n\}$ y $\mathcal{C}=\{v_1,\dots,v_n\}$ bases para V. Si $[x]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, entonces:

$$\boxed{[x]_{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix} [u_1]_{\mathcal{C}} & \cdots & [u_n]_{\mathcal{C}} \\ | & & | \\ | & \cdots & | \\ | & & | \end{bmatrix}\cdot [x]_{\mathcal{B}}.}$$

Demostración:

$$[x]_{\mathcal{C}}=[c_1u_1+\cdots+c_n\cdot u_n]_{\mathcal{C}}=c_1[u_1]_{\mathcal{C}}+\cdots+c_n[u_n]_{\mathcal{C}}$$

$$=\begin{bmatrix} [u_1]_{\mathcal{C}} & \cdots & [u_n]_{\mathcal{C}} \\ | & & | \\ | & \cdots & | \\ | & & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [u_1]_{\mathcal{C}} & \cdots & [u_n]_{\mathcal{C}} \\ | & & | \\ | & \cdots & | \\ | & & | \end{bmatrix}\cdot [x]_{\mathcal{B}}$$

$\blacksquare$

Nota (teorema anterior).

Debido a que la matriz del teorema anterior es tan versátil y nos dá la relación entre $[x]_{\mathcal{C}}$ y $[x]_{B}$, entonces le damos un nombre y una escritura particular.

Definición (matriz de cambio de base).

Sean $B=\{u_1,\dots,u_n\}$ y $\mathcal{C}=\{v_1,\dots,v_n\}$ bases para un espacio vectorial V.

Definimos la matriz de cambio de base $\underset{\mathcal{C}\leftarrow B}{P}$ como la matriz

$$\boxed{\underset{\mathcal{C}\leftarrow B}{P}=\begin{bmatrix} [u_1]_{\mathcal{C}} & \cdots & [u_n]_{\mathcal{C}} \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix}.}$$

Nota (definición anterior).

(1) La matriz $\underset{\mathcal{C}\leftarrow B}{P}$ satisface que:

$$\boxed{[x]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow B} \cdot [x]_B}.$$

(2) La matriz $P_{B\leftarrow \mathcal{C}}$ satisface que:

$$\boxed{[x]_B = P_{B\leftarrow \mathcal{C}} \cdot [x]_{\mathcal{C}}}.$$

(4) Aunque en general $P_{\mathcal{C}\leftarrow B} \neq P_{B\leftarrow \mathcal{C}}$, se puede probar que:

$$\boxed{\left(P_{\mathcal{C}\leftarrow B}\right)^{-1} = P_{B\leftarrow \mathcal{C}}} \quad y \quad \boxed{\left(P_{B\leftarrow \mathcal{C}}\right)^{-1} = P_{\mathcal{C}\leftarrow B}}.$$

Ejemplo (matriz de cambio de base).

Encuentre las matrices de cambio de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow B}$ y $P_{B\leftarrow \mathcal{C}}$ para las bases

$$B = \{1, x, x^2\} \quad y \quad \mathcal{C} = \{1+x,\, x+x^2,\, 1+x^2\}$$

de $\mathcal{P}_2$. Luego encuentre la representación de $p(x) = 1 + 2x - x^2$ respecto a la base $\mathcal{C}$.

Solución:

(a) $P_{B \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} (1+x)_B & (x+x^2)_B & (1+x^2)_B \end{bmatrix}$, donde:

$$(1+x)_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (x+x^2)_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1+x^2)_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De donde:

$$P_{B \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} (1+x)_B & (x+x^2)_B & (1+x^2)_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) $P_{\mathcal{C} \leftarrow B} = \begin{bmatrix} (1)_{\mathcal{C}} & (x)_{\mathcal{C}} & (x^2)_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} = \left(P_{B \leftarrow \mathcal{C}}\right)^{-1}$.

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2} R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 + R_3]{R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Del algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan, tenemos que:

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(3) si $p(x) = 1+2x-x^2$, entonces

$$[p(x)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

Recordando que
$B = \{1, x, x^2\}$.

(4) por la nota anterior, tenemos que:

$$[p(x)]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow B} \cdot [p(x)]_B$$

$$[p(x)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[p(x)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo.

Sean $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ y $E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ matrices de tamaño 2×2 y $\mathcal{B}=\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ es una base para M_{22}. Si $\mathcal{C}=\{A, B, C, D\}$ es una base para M_{22} con:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

entonces:

(1) Hallar $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$.

(2) Hallar $[x]_{\mathcal{C}}$ donde $x=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.

Solución.

(1) $$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}=\Big[\ [A]_{\mathcal{B}}\quad [B]_{\mathcal{B}}\quad [C]_{\mathcal{B}}\quad [D]_{\mathcal{B}}\ \Big]$$

con:

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$[B]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$[C]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$[D]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.}$$

(2) Por teorema previo, tenemos que

$$[x]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \cdot [x]_{\mathcal{B}}.$$

donde:

✓ $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$

✓ $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

por lo tanto:

$$[x]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \cdot [x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2+0+0 \\ 0+2-3+0 \\ 0+0+3-4 \\ 0+0+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

---

teorema (propiedad matriz cambio de base).

Supongamos que V es un espacio vectorial de dimensión finita, con bases B_1, B_2 y B_3 descritas como $B_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $B_2 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_3 = \{w_1, \ldots, w_n\}$, entonces:

$$\boxed{P_{B_1 \leftarrow B_3} = P_{B_1 \leftarrow B_2} \cdot P_{B_2 \leftarrow B_3}}$$