Clase 25.

Ortogonalidad en $\mathbb{R}^n$.

Definición (conjunto ortogonal).

Sean $v_1, \dots, v_m$ vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces decimos que $\{v_1, \dots, v_m\}$ es un conjunto ortogonal en $\mathbb{R}^n$, si:

$$\boxed{v_i \bullet v_j = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad (1 \leq i, j \leq m)}$$

$$\left(\begin{array}{l} u \bullet v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta \\ \theta = 90 \end{array} \longleftrightarrow u \bullet v = 0 \right)$$

Recordando que el producto punto entre 2 vectores u y v se define como

$$u \bullet v = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 \cdot v_1 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i.$$

Ejemplo (vectores ortogonales).

(1) Si definimos los vectores en $\mathbb{R}^n$ $\{e_1, \dots, e_n\}$ como:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

entonces $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es un conjunto ortogonal en $\mathbb{R}^n$, ya que:

$$\begin{cases} e_i \cdot e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0\cdot 0 + \cdots + 1\cdot 0 + \cdots + 0\cdot 1 + \cdots + 0\cdot 0 = 0. \\ i \neq j \end{cases}$$

(2) Sean $\{v_1, v_2, v_3\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ descritos como:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Verificar que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto ortogonal en $\mathbb{R}^3$

Solución (2).

Para verificar si $\{v_1, v_2, v_3\}$ son un conjunto ortogonal, notemos que:

$\checkmark_1$ $$v_1 \bullet v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0.$$

$\checkmark_2$ $$v_1 \bullet v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 0.$$

$\checkmark_3$ $$v_2 \bullet v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0.$$

Así, el análisis previo muestra que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto ortogonal en $\mathbb{R}^3$.

Teorema (propiedades de conjuntos ortogonales).

(1) Si $\{v_1, \dots, v_m\}$ es un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ ortogonales y no nulos ($v_i \neq 0$), entonces $\{v_1, \dots, v_m\}$ es un conjunto L.I (lineal/ independiente).

(2) Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto ortogonal en $\mathbb{R}^n$ y los vectores son no nulos ($v_i \neq 0$), entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ forman una base para $\mathbb{R}^n$.

(3) Supongamos que W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ tal que una base para W es un conjunto ortogonal $\{v_1, \dots, v_m\}$, entonces para cada $w \in W$ se

tiene que:

$$w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m$$

$$w = \left(\frac{w \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1 + \left(\frac{w \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2}\right) v_2 + \cdots + \left(\frac{w \cdot v_m}{v_m \cdot v_m}\right) v_m$$

Nota (base ortogonal).

sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es una base para W. Entonces decimos que $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es una base ortogonal para W, si $\{v_1, \ldots, v_m\}$ además de ser una base para W es un conjunto ortogonal ($v_i \cdot v_j = 0$ para $i \neq j$).

Nota (base ortonormal).

Decimos que una base ortogonal

$\{v_1, \ldots, v_m\}$ para un subespacio W de $\mathbb{R}^n$ es base ortonormal, si:

$$\boxed{\begin{array}{c} v_1 \cdot v_1 = 1 \\ v_2 \cdot v_2 = 1 \\ \vdots \\ v_m \cdot v_m = 1 \end{array}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \|v_1\| = 1 \\ \|v_2\| = 1 \\ \vdots \\ \|v_m\| = 1 \end{array}}$$

Ejemplo (aplicación del teorema anterior).

Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

los vectores del ejemplo anterior, entonces $\{v_1, v_2, v_3\}$ forman una base ortogonal para $\mathbb{R}^3$.

Solución:

Como $\{v_1, v_2, v_3\}$ son 3 vectores

ortogonales (ejemplo anterior) y no nulos, entonces por el teorema anterior podemos decir que $\{v_1, v_2, v_3\}$ forma una base ortogonal para $\mathbb{R}^3$.

Es importante destacar que $\{v_1, v_2, v_3\}$ no es una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$, ya que $\|v_1\| \neq 1$, $\|v_2\| \neq 1$, $\|v_3\| \neq 1$

Ejemplo (base ortogonal para un subespacio de $\mathbb{R}^3$).

Sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \ x - y + 2z = 0 \right\}$, entonces:

(1) Hallar una base para W.

(2) Hallar una base ortogonal para W.

Solución.

(1) para empezar, notemos que W tiene las siguientes descripciones:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle/ x - y + 2z = 0 \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle/ z = \left(-\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)y \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle/ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -1/2\, x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ \frac{1}{2}y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle/ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle/ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \operatorname{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Lo cual muestra que $\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ es una base para W.

(2) En esta parte notamos que la base $\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ no es ortogonal, ya que

$$\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = 2\cdot 0 + 0\cdot 2 + (-1)\cdot 1 = -1 \neq 0.$$

Por este motivo tenemos la siguiente pregunta:

¿Cómo encontrar una base ortogonal para W con la base no ortogonal dada?

En este caso, será suficiente encontrar un vector $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ que satisfaga las siguientes propiedades:

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \longleftrightarrow 2x - z = 0$

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ satisface la ecuación $x - y + 2z = 0$.

De donde obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} x - y + 2z &= 0 \\ 2x - z &= 0 \end{aligned}}$$

Obteniendo que:

$$\boxed{\begin{aligned} x - y + 2z &= 0 \\ 2x - z &= 0 \end{aligned}} \longleftrightarrow \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{\frac{1}{2} R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{R_1+R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} x - \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{5}{2}z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{5}{2}z = 0 \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} x = z/2 \\ y = (5/2)z \\ z = z \end{array}$$

Así, tenemos que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z/2 \\ (5/2)z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

y el análisis anterior prueba que

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - y + 2z = 0 \right\}$$

$$W = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ satisface $x - y + 2z = 0$.

Ejemplo (aplicación teorema anterior).

Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

y $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Describir a w como combinación lineal de los vectores v_1, v_2, v_3.

Ayuda:

- $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

- $w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$

$$w = \left(\frac{w \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1 + \left(\frac{w \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2}\right) v_2 + \left(\frac{w \cdot v_3}{v_3 \cdot v_3}\right) v_3$$

(c_1, c_2, c_3 son las coordenadas de w respecto a la base $\{v_1, v_2, v_3\}$).

Solución.

Para empezar, notemos que:

$$w \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 3 = 1$$

$$w \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 2 + 3 = 5.$$

$$w \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 2 + 3 = 2.$$

$$v_1 \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 + 1 + 1 = 6.$$

$$v_2 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 1 + 1 = 2.$$

$$v_3 \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1+1+1=3.$$

Así, teniendo en cuenta que

$$w = \left(\frac{w \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1 + \left(\frac{w \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2}\right) v_2 + \left(\frac{w \cdot v_3}{v_3 \cdot v_3}\right) v_3$$

entonces:

$$\boxed{w = \left(\frac{1}{6}\right) v_1 + \left(\frac{5}{2}\right) v_2 + \left(\frac{2}{3}\right) v_3 .}$$

Ejemplo (bases ortonormales → base, → ortogonal, → $\|u\| = 1$).

(1) La base canónica (estandar) $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ es una base ortonormal.

Solución.

ya vimos que $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortogonal y por tanto solo falta probar que $\|e_i\|=1$ para $1 \leq i \leq n$.

$$\|e_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2+0^2+\cdots+0^2} = 1.$$

$$\|e_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0^2+1^2+\cdots+0^2} = 1.$$

$$\vdots$$

$$\|e_n\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0^2+0^2+\cdots+1^2} = 1.$$

(2) Demostrar que $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^3$.

→ conjunto ortogonal
$\|u\|=1$

Solución.

Para empezar, veamos que el conjunto

dado es ortogonal

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{18}} - \frac{2}{\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{18}} = 0.$$

Ahora, veamos que la magnitud de los 2 vectores es 1.

$$\left\| \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1.$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6}} = 1.$$

El anterior análisis prueba que

$\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1\ \sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$ forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^3$.

Teorema (conjunto ortogonal $\rightarrow$ conjunto ortonormal).

Supongamos que $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es un conjunto ortogonal en $\mathbb{R}^m$, entonces el conjunto $\left\{\frac{1}{\|v_1\|}\cdot v_1, \frac{1}{\|v_2\|}\cdot v_2, \dots, \frac{1}{\|v_m\|}\cdot v_m\right\}$

es conjunto ortonormal y además

(1) $\boxed{\text{gen}\{v_1, \dots, v_m\} = \text{gen}\left\{\frac{1}{\|v_1\|}\cdot v_1, \frac{1}{\|v_2\|}\cdot v_2, \dots, \frac{1}{\|v_m\|}\cdot v_m\right\}}$.

(2) $\boxed{\{v_1, \dots, v_m\} \text{ es base para un subespacio } W \text{ de } \mathbb{R}^n} \longleftrightarrow \boxed{\left\{\frac{1}{\|v_1\|}\cdot v_1, \frac{1}{\|v_2\|}\cdot v_2, \dots, \frac{1}{\|v_m\|}\cdot v_m\right\} \text{ es base para un subespacio } W \text{ de } \mathbb{R}^n}$.

Ejemplo (aplicación teorema anterior).

Hallar una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ distinta a la base canónica, usando los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solución.

Empecemos recordando que

$\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto ortogonal.

Además $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortogonal en $\mathbb{R}^3$ (base y ortogonal).

Para determinar una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$, es suficiente normalizar los vectores v_1, v_2, v_3 de la siguiente manera:

- $$\|v_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

- $$\|v_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$$

- $$\|v_3\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

- $$\frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

- $\frac{1}{\|V_2\|} \cdot V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$

- $\frac{1}{\|V_3\|} \cdot V_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$

Por lo tanto, una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ es:

$$\left\{ \frac{1}{\|V_1\|} \cdot V_1, \frac{1}{\|V_2\|} \cdot V_2, \frac{1}{\|V_3\|} \cdot V_3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

Teorema (equivalencia de ortogonalidad en terminos de matrices).

Sea $\{v_1, \dots, v_m\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ y $P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix}_{n\times m}$ entonces:

$\boxed{\{v_1, \dots, v_m\} \text{ es un conjunto ortonormal en } \mathbb{R}^n} \longleftrightarrow \boxed{P^T \cdot P = I_m}$

$\downarrow$

$\{v_1, \dots, v_m\}$ es ortogonal $\left(\underset{i \neq j}{v_i \cdot v_j = 0} \right)$

$\|v_i\| = 1$ con $1 \leq i \leq m$

Definición (matriz ortogonal).

Sea P una matriz de tamaño $n \times n$ con $P = [v_1 \; v_2 \cdots v_n]$ ($v_1, \dots, v_n$ son vectores en $\mathbb{R}^n$). Entonces decimos que P es una matriz ortogonal, si $v_1, \dots, v_n$ forman un conjunto ortonormal ($P^T \cdot P = I_n$).

Ejemplo.

Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

entonces verificar si A y B son matrices ortogonales.

Solución.

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{} \overset{I_3}{=}$$

Lo cual muestra que A es una matriz ortogonal.

$$B^T \cdot B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta & -\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta \\ -\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta + \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Lo cual muestra que B es una matriz ortogonal.

Ejemplo.

Las siguientes matrices no son ortogonales:

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

A no es ortogonal, ya que las columnas de A tienen que tener longitud 1 y todas tienen longitud.

(2) $B = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$

B no es matriz ortogonal, ya que

las columnas de B no forman un conjunto ortogonal. Por ejemplo, al tomar $V_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $V_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

entonces $V_1 \bullet V_2 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \neq 0$ lo cual prueba que V_1 y V_2 no son ortogonales.

Observación → Las columnas de B tienen longitud 1, pero B no es ortogonal

(3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

C no es una matriz ortogonal, ya que las columnas de C no tienen longitud 1 (ambas columnas tienen longitud $\sqrt{2}$).

Observación las columnas de C, forman un conjunto ortogonal, pero no las columnas no tienen longitud 1.

Propiedades (matrices ortogonales).

Sea P una matriz de tamaño $n \times n$, entonces:

(1) Si P es ortogonal, entonces P es invertible ($\operatorname{Det}(P) \neq 0$).

(2) Si P es ortogonal, entonces $\operatorname{Det}(P) = 1$ ó $\operatorname{Det}(P) = -1$.

no hay más posibilidades

(3) P es ortogonal $\longleftrightarrow$ $\|P \cdot x\| = \|x\|$. para cada $x \in \mathbb{R}^n$

$(P^T \cdot P = I)$

(
P preserva la longitud de los vectores

(4) P es ortogonal $\longleftrightarrow$ $\boxed{(Px)\bullet(Py)=x\bullet y \text{ para cada } x,y\in\mathbb{R}^n}$

$(P^T\cdot P=I_n)$

P preserva el producto punto en $\mathbb{R}^n$

Ejemplo (aplicación del teorema anterior).

Sea $P=\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, verificar si

P es ortogonal y además calcular

$(Px)\bullet(Py)$ con $x=\begin{pmatrix}5\\10\\20\end{pmatrix}$ y $y=\begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}$.

Solución.

Para empezar, notemos que:

$$P^T \cdot P = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}+\frac{1}{4}+0 & -\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}+0 & 0+0+0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}+0 & \frac{1}{4}+\frac{3}{4}+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

De esta manera, concluimos que P es una matriz ortogonal y además:

$$(Px) \cdot (Py) = x \cdot y = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 10+40+160 = 210.$$

propiedades enunciadas anterior/

P preserva el producto punto

Definición $\left(\begin{array}{l}\text{(1) vector ortogonal a un subespacio de } \mathbb{R}^n \\ \text{(2) complemento ortogonal}\end{array}\right)$.

Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ (W es cerrado bajo la suma y la multiplicación por escalar) y $v \in \mathbb{R}^n$, entonces:

(1) Decimos que v es ortogonal a W, si $v \bullet x = 0$ para todo $x \in W$.

v es ortogonal a cada uno de los elementos de $\underline{\underline{W}}$.

(2) Definimos el complemento ortogonal de W como el siguiente conjunto:

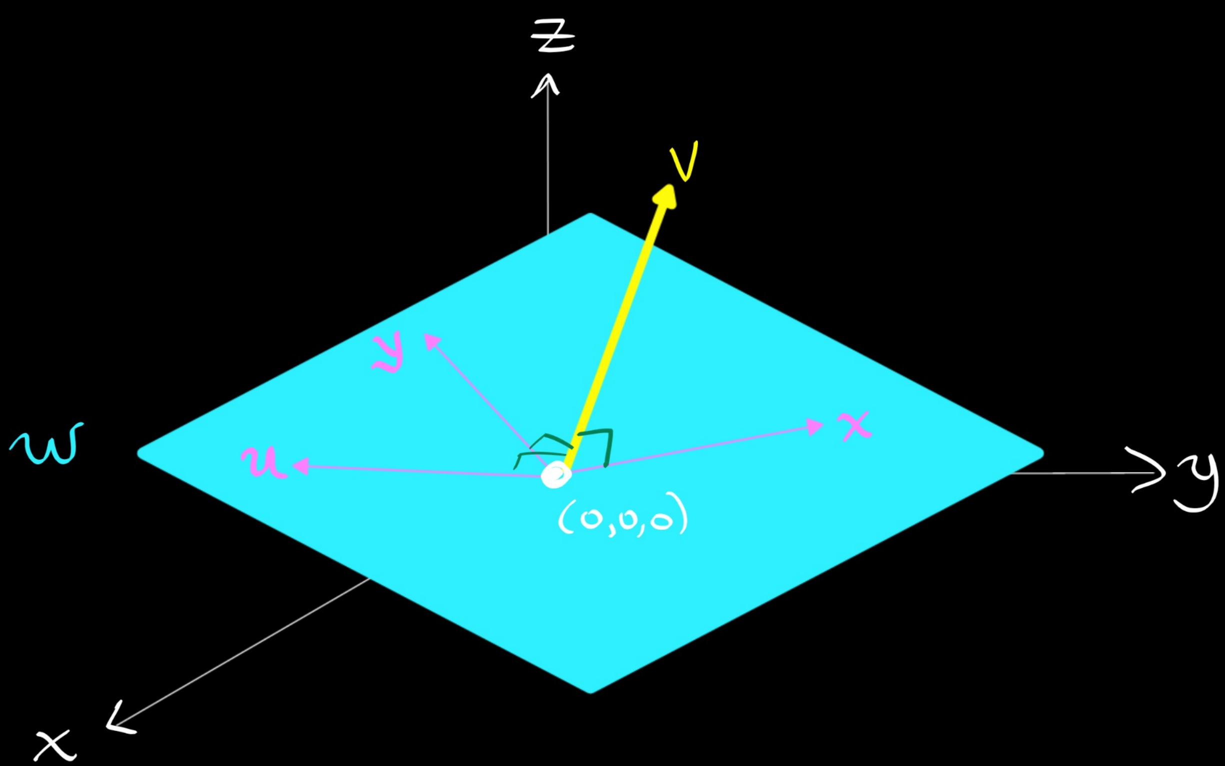
$$W^{\perp} = \{ z \in \mathbb{R}^n / z \text{ es ortogonal a } W \}$$

$$= \{ z \in \mathbb{R}^n / \; z \cdot x = 0 \text{ para todo } x \in W \}$$

El complemento ortogonal de W es precisa/ el conjunto de todos los vectores ortogonales a W.

Observación (definición anterior).

Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por el plano que pasa por el origen mostrado en la siguiente figura:



entonces v es ortogonal a W ($v \in W^{\perp}$).

Teorema (propiedades complementos ortogonales).

Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces:

(1) $W^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ (cerrado bajo suma y mult. por escalar).

(2) $(W^\perp)^\perp = W$.

(3) $W \cap W^\perp = \{0\}$.

Esto nos dice que el único elemento $v \in W$ que es ortogonal a W es $v = 0$.

(4) $\mathbb{R}^n = W + W^\perp = \{x + y \in \mathbb{R}^n / x \in W, y \in W^\perp\}$.

Esto significa que todo vector $z \in \mathbb{R}^n$ se escribe como

$$\begin{cases} z = x + y \\ \text{para algún } x \in W, \text{ algún } y \in W^\perp \end{cases}$$

Ejemplo.

Sea $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 / x+y-z=0\right\}$, entonces determinar $W^{\perp}$.

Solución

Para empezar, notemos que:

- $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in W \iff x+y-z=0$
  $z=x+y$.

- $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in W \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\x+y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

- $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 / x+y-z=0\right\}$

$$=\left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 / x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\operatorname{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para W.

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W^\perp \iff \begin{matrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{matrix}$

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W^\perp \iff \begin{matrix} x+z=0 \\ y+z=0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} x=-z \\ y=-z \\ z=z \end{matrix}$

De donde, podemos concluir que:

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ es ortogonal a } W \right\}$$

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ x=-z,\ y=-z,\ z=z \right\}$$

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W^{\perp} = \left\{ z\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / z \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$W^{\perp} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$