Clase 22.

Eingenvalores y eingenvectores.

Definición (eingenvalor y eingenvector).

Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ y λ un número. Decimos que λ es eingenvalor de A, si:

> Existe $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ tal que
> $$A \cdot x = \lambda \cdot x$$

Además x lo denotamos como un eingenvector de A relativo al eingenvalor λ.

Ejemplo (definición anterior).

Demuestre que $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un eingenvector de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y encuentre el eingenvalor correspondiente.

Solución:

Para empezar, notemos que:

- $A \cdot x = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y tomamos a $\lambda = 4$.

Así, tenemos que:

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y así se prueba que $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un eingenvector de A relativo al eingenvalor $\lambda = 4$.

Observación (eingenvalores y eingenvectores).

Sea A una matriz de tamaño $n \times n$, λ un eingenvalor de A y x un eingenvector de A relativo a λ ($A \cdot x = \lambda x$ y $x \neq 0$), entonces:

$$\begin{array}{c} A \cdot x = \lambda x \\ x \neq 0 \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c} A \cdot x - \lambda x = 0 \\ x \neq 0 \end{array}$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{array}{c} (A - \lambda I) x = 0 \\ x \neq 0 \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c} A \cdot x - \lambda I \cdot x = 0 \\ x \neq 0 \end{array}$$

$$\updownarrow$$

$A - \lambda I$ no es invertible $\longleftrightarrow$ $\mathrm{Det}(A - \lambda I) = 0$.

Así, el argumento anterior nos muestra lo siguiente:

λ es un eingenvalor para A $\longleftrightarrow$ $\operatorname{Det}(A-\lambda I)=0$.

Lo cual, nos da un método para hallar los eingenvalores de una matriz.

Ejemplo (aplicación obs. anterior).

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, entonces:

(1) Encontrar los eingenvalores de A y demostrar que $\lambda=5$ es un eingenvalor de A.

(2) Encontrar los eingenvectores de la matriz A correspondientes

a $\lambda=5$.

Solución

(1) para empezar, recordemos que para determinar los eingenvalores de A, es necesario resolver la siguiente ecuación

$$\text{Det}(A-\lambda I)=0$$

para λ. De donde:

- $A-\lambda I=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{pmatrix}$.

- $\text{Det}(A-\lambda I)=(1-\lambda)(3-\lambda)-8=$

$= 3-\lambda-3\lambda+\lambda^2-8=\lambda^2-4\lambda-5$.

$$\text{Det}(A-\lambda I)=0 \longleftrightarrow \begin{aligned}&\lambda^2-4\lambda-5=0\\ &(\lambda-5)(\lambda+1)=0\\ &\lambda=5 \text{ ó } \lambda=-1.\end{aligned}$$

Del análisis previo, concluimos que los eingenvalores de A son $\lambda_1=5$ y $\lambda_2=-1$.

(2) para hallar los eingenvectores de A relativos a $\lambda=5$, notemos que:

✓ $\lambda=5$ es un eingenvalor de A $\longleftrightarrow$ $(A-5I)x=0$ con $x\neq 0$.

✓ $(A-5I)x=0$ se describe como:

$$A-5I=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&2\\4&-2\end{pmatrix}$$

$$(A-5I)x=\begin{pmatrix}-4&2\\4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4x+2y\\4x-2y\end{pmatrix}$$

$$(A-5I)x=0 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -4x+2y \\ 4x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\updownarrow$$

$$4x-2y=0 \longleftrightarrow \begin{cases} -4x+2y=0 \\ 4x-2y=0 \end{cases}$$

$$x=\frac{y}{2}$$

$$\updownarrow$$

$$(A-5I)x=0, \quad x=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y/2 \\ y \end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, podemos concluir que los eingenvectores de A relativos a $\lambda=5$ son:

$$\boxed{\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 / x=\frac{y}{2}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}=\left\{y\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 / y\neq 0\right\}.}$$

Observación (ejemplo anterior).

Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ y λ un eingenvalor de A, entonces los eingenvectores de A relativos al eingenvalor λ se describen en el siguiente conjunto:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Eingenvectores} \\ \text{de } A \text{ relativos} \\ \text{a } \lambda\end{array}} = \text{Nul}(A - \lambda I) - \{0\}.$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n / (A - \lambda I)x = 0 \ \text{ y } \ x \neq 0\}.$$

Definición (eingenespacio E_λ).

Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ y λ un eingenvalor de A, entonces definimos el eingenespacio E_λ del eingenvalor λ como el siguiente conjunto:

$$E_\lambda = \mathrm{Nul}(A - \lambda I) = \boxed{\text{Los eingenvectores de } A \text{ relativos a } \lambda} \cup \{0\}.$$

Ejemplo(definición anterior).

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, entonces hallar el eingenespacio relativo al eingenvalor $\lambda = 5$.

Solución:

Debido a computos previos, podemos decir que:

- $\lambda = 5$ es un eingenvalor de A.
- $E_5 = \mathrm{Nul}(A - 5I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / x = \frac{y}{2} \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} y/2 \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Así, $E_5 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

Ejemplo.

Sea $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, entonces:

(1) Encontrar los eingenvalores de A y demostrar que $\lambda = 6$ es un eingenvalor de A.

(2) Encontra E_6 y hallar una base para E_6.

Solución.

(1) Para determinar los eingen-valores de A, es necesario hallar

la solución de

$$\mathrm{Det}(A-\lambda I)=0$$

para λ. De esta manera, tenemos que:

✓ $A-\lambda I=\begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 7-\lambda & 1 & -2 \\ -3 & 3-\lambda & 6 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

✓ $\mathrm{Det}(A-\lambda I)=$

$$=(7-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 3-\lambda & 6 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -3 & 3-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=(7-\lambda)\Big((3-\lambda)(2-\lambda)-12\Big)-1\Big((-3)(2-\lambda)-12\Big)$$

$$-2\Big(-6-2(3-\lambda)\Big)$$

$$=-\lambda^3+12\lambda^2-36\lambda=-\lambda(\lambda^2-12\lambda+36)$$

simplificando un "poco".

$$= -\lambda(\lambda-6)(\lambda-6) = -\lambda(\lambda-6)^2.$$

$$\mathrm{Det}(A-\lambda I)=0 \longleftrightarrow -\lambda(\lambda-6)^2 = 0$$

$$\lambda = 0 \text{ ó } \lambda = 6.$$

Así, el análisis previo muestra que los eingenvalores de A, son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 6$.

(2) para determinar E_6, recordemos que:

$$E_6 = \mathrm{Nul}(A-6I)$$

de donde:

$$A-6I = \begin{pmatrix} 7-6 & 1 & -2 \\ -3 & 3-6 & 6 \\ 2 & 2 & 2-6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

- $\mathrm{Nul}(B) = \{ x \in \mathbb{R}^n / B \cdot x = 0 \}.$

- $E_6 = \mathrm{Nul}(A - 6I) =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \ (A - 6I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- $(A - 6I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2+3R_1}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} x+y-2z=0 \\ z=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y \end{array}$$

$$E_6 = \mathrm{Nul}(A-6I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, (A-6I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y-2z=0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, z=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x,y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1/2\, x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 1/2\, y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x,y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Adicional/ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$ forman una base para E_6.