Clase 9.

La inversa de una matriz.

Definición Si A es una matriz de $n \times n$, una ***inversa*** de A es una matriz A' de $n \times n$ con la siguiente propiedad

$$AA' = I \quad \text{y} \quad A'A = I$$

donde $I = I_n$ es la matriz identidad. Si tal A' existe, entonces A es ***invertible***.

Ejemplo 3.22 Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, entonces $A' = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ es una inversa de A, pues

$$AA' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A'A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

✓ A es invertible.

✓ $A' = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 3.23 Demuestre que las siguientes matrices no son invertibles:

(a) $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Solución:

(a) Si $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ fuera invertible, entonces existiría una matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lo cual es imposible ya que $0 \neq 1$. Así la matriz nula O no tiene una inversa (ya que de lo contrario $0=1$).

(b) Si $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ fuera invertible, entonces existiría una matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que:

$$\blacklozenge \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{bmatrix}.$$

$$\bigstar \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b & 2a+4b \\ c+2d & 2c+4d \end{bmatrix}.$$

De $\blacklozenge$ tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\boxed{a+2c=1}$$
$$\boxed{b+2d=0}$$
$$\boxed{2a+4c=0}$$
$$\boxed{2b+4d=1}$$

$$a+2c=1$$
$$a+2c=0$$
$$\longrightarrow 1=0$$

lo que es imposible

De donde, se tiene que $\underline{\underline{B}}$ no tiene una inversa (ya que si existiera, tendriamos que $1=0$).

Nota (siguiente teorema).

El siguiente teorema nos dice que si una matriz $\underline{\underline{A}}$ tiene una inversa, entonces esta inversa es única. Es decir que si existen A' y A'' tales que:

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I_n \quad y \quad A \cdot A'' = A'' A = I_n$$

entonces $A' = A''$.

Teorema 3.6 Si *A* es una matriz invertible, entonces su inversa es única.

Demostración:

Supongamos que A' y A'' satisfacen que:

$A \cdot A' = A' \cdot A = I_n$ y $A \cdot A'' = A'' \cdot A = I$. por lo tanto:

$$A' = A' \cdot I_n = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I_n \cdot A'' = A''$$

Lo que muestra que $A' = A''$. ■

Notación (la inversa de una matriz).

En el caso que una matriz A sea invertible, denotaremos su única inversa por A^{-1}.

Nota (siguiente teorema).

El siguiente teorema nos dice cuando una matriz 2×2 es invertible.

Teorema (A es invertible $\iff |A| \neq 0$).

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces:

$$\boxed{A \text{ es invertible } \iff |A| = ad - bc \neq 0.}$$

Además, si A es invertible, tenemos que

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 3.24 Encuentre las inversas de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 12 & -15 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$, si existen.

Solución:

✓ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$, entonces A es invertible.

✓ $B = \begin{bmatrix} 12 & -15 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow |B| = 12 \cdot (-5) - 4(-15) = 0$ entonces B no es invertible.

por lo tanto, tenemos que.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 3.25 Use la inversa de la matriz de coeficientes para resolver el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 3x + 4y &= -2 \end{aligned}$$

Solución:

Notemos inicial/ que:

$$\boxed{\begin{aligned} x+2y&=3\\ 3x+4y&=-2\end{aligned}} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ahora, si $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ y $b=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

entonces:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \longleftrightarrow A \cdot X = b$$

Aquí nos damos cuenta que necesitamos determinar $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ y para esto recordamos que:

- Si A es invertible, entonces $A^{-1}A = I_2$.
- $I_2 \cdot X = X$, ya que:

$$I_2 \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 0y \\ 0 \cdot x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Si $A \cdot x = b$, entonces $A^{-1}Ax = A^{-1}b$ por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x = A^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6-2 \\ \frac{9}{2}+\frac{2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ \frac{11}{2} \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.9

a. Si A es una matriz invertible, entonces A^{-1} es invertible y

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

b. Si A es una matriz invertible y c es un escalar distinto de cero, entonces cA es una matriz invertible y

$$(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$$

c. Si A y B son matrices invertibles del mismo tamaño, entonces AB es invertible y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

d. Si A es una matriz invertible, entonces A^T es invertible y

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

e. Si A es una matriz invertible, entonces A^n es invertible para todo entero n no negativo y

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

Demostración:

(a) $A^{-1} \cdot A = I_n$, $A \cdot A^{-1} = I_n$ $\longrightarrow$ A^{-1} es invertible y por la unicidad de la inversa $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) $(c \cdot A) \cdot \left(\frac{1}{c} A^{-1}\right) = c \cdot \frac{1}{c} \cdot A \cdot A^{-1} = 1 \cdot I_n = I_n.$

$\left(\frac{1}{c} A^{-1}\right)(c \cdot A) = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = 1 \cdot I_n = I_n.$

De esta manera $(cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}.$

(c) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1}$

$= A \cdot A^{-1} = I_n.$

De forma similar $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n.$
Así, se tiene que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$

(d) $(A \cdot A^{-1})^T = (I_n)^T = I_n.$

$(A^{-1})^T \cdot A^T = I_n$

De forma similar se prueba que $A^T \cdot (A^{-1})^T = I_n.$ por lo tanto, tenemos que

$$\boxed{(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.}$$

(e) $A^n \cdot (A^{-1})^n = \underbrace{A \cdots A}_{n\text{-veces}} \cdot \underbrace{A^{-1} \cdots A^{-1}}_{n\text{-veces}} = I_n$

$$(A^{-1})^n \cdot A^n = \underbrace{A^{-1} \cdots A^{-1}}_{n\text{-veces}} \cdot \underbrace{A \cdots A}_{n\text{-veces}} = I_n$$

por lo tanto, tenemos que $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

$\blacksquare$

Ejemplo 3.26

Resuelva la siguiente ecuación matricial para encontrar X (suponga que las matrices involucradas son tales que todas las operaciones indicadas están definidas):

$$A^{-1}(BX)^{-1} = (A^{-1}B^3)^2$$

Solución:

Usando las propiedades anteriores, tenemos que:

✓ $A^{-1} \cdot (BX)^{-1} = (A^{-1} \cdot B^3)^2$.

$A^{-1} \cdot (X^{-1} \cdot B^{-1}) = A^{-1} \cdot B^3 \cdot A^{-1} \cdot B^3$.

✓ $A\, A^{-1} \cdot (X^{-1} \cdot B^{-1}) = A \cdot A^{-1} \cdot B^3 \cdot A^{-1} \cdot B^3$

$X^{-1} \cdot B^{-1} = B^3 \cdot A^{-1} \cdot B^3$

✓ $X^{-1} \cdot B^{-1} \cdot B = B^3 \cdot A^{-1} \cdot B^3 \cdot B$

$$X^{-1} = B^3 \cdot A^{-1} \cdot B^4$$

✓ $(X^{-1})^{-1} = (B^3 \cdot A^{-1} \cdot B^4)^{-1}$

$$X = (B^4)^{-1}(A^{-1})^{-1}(B^3)^{-1}$$

$$X = (B^{-1})^4 \cdot A \cdot (B^{-1})^3$$

Conclusión:

La solución de la ecuación matricial $A^{-1} \cdot (BX)^{-1} = (A^{-1} \cdot B^3)^2$ es $X = (B^{-1})^4 \cdot A \cdot (B^{-1})^3$.

Teorema 3.13 Sea A una matriz cuadrada. Si B es una matriz cuadrada tal que $AB = I$ o $BA = I$, entonces A es invertible y $B = A^{-1}$.

✓ $A \cdot B = I_n \rightarrow$ A es invertible y $A^{-1} = B$

✓ $B \cdot A = I_n \rightarrow$ A es invertible y $A^{-1} = B$.

Nota (siguiente teorema).

El siguiente teorema nos dice como determinar la inversa de una matriz invertible.

Teorema 3.14 Sea A una matriz cuadrada. Si una secuencia de operaciones elementales con renglones reduce A a I, entonces la misma secuencia de operaciones elementales transforma I en A^{-1}.

paso (1): coger A una matriz $n \times n$ y encontrar la forma escalonada reducida de A.

paso (2): si la forma escalonada reducida de A es la identidad, entonces A es invertible.

paso (3): Las operaciones hecha a A, al aplicarlas a la identidad I, producirán la inversa de A.

Algoritmo de Gauss-Jordan para hallar La inversa de una matriz.

paso (1): Escribir la matriz A y a la derecha la matriz identidad In.

$$\left[\begin{array}{c:c} A & I_n \end{array}\right].$$

paso (2): Usar operaciones elementales por renglón para llevar la matriz A a la matriz identidad. y hacer estas mismas operaciones elementales por renglón a la matriz In.

$$\left[\begin{array}{c:c} I_n & B \end{array}\right].$$

paso (3): La inversa de A es B.

Ejemplo 3.30 Encuentre la inversa de

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}}$$

si existe.

Solución:

paso(1): considerar la siguiente matriz aumentada.

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Paso(2): Aplicar operaciones elementales por renglones, con el objetivo de llevar la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ a la matriz identidad $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 + 2R_2]{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2+2R_3]{R_1-3R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -\frac{3}{2} & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

paso(3): La inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

es la matriz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -\frac{3}{2} & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo.

Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

entonces:

(a) Determinar A^{-1} usando el método de Gauss-Jordan.

(2) Usando la inversa del literal anterior, resolver el sistema de ecuaciones

$$\boxed{\begin{aligned} 3x + y + z &= 1 \\ y - 2z &= 3 \\ x + 2y + 3z &= 1 \end{aligned}}\,.$$