Clase 15.

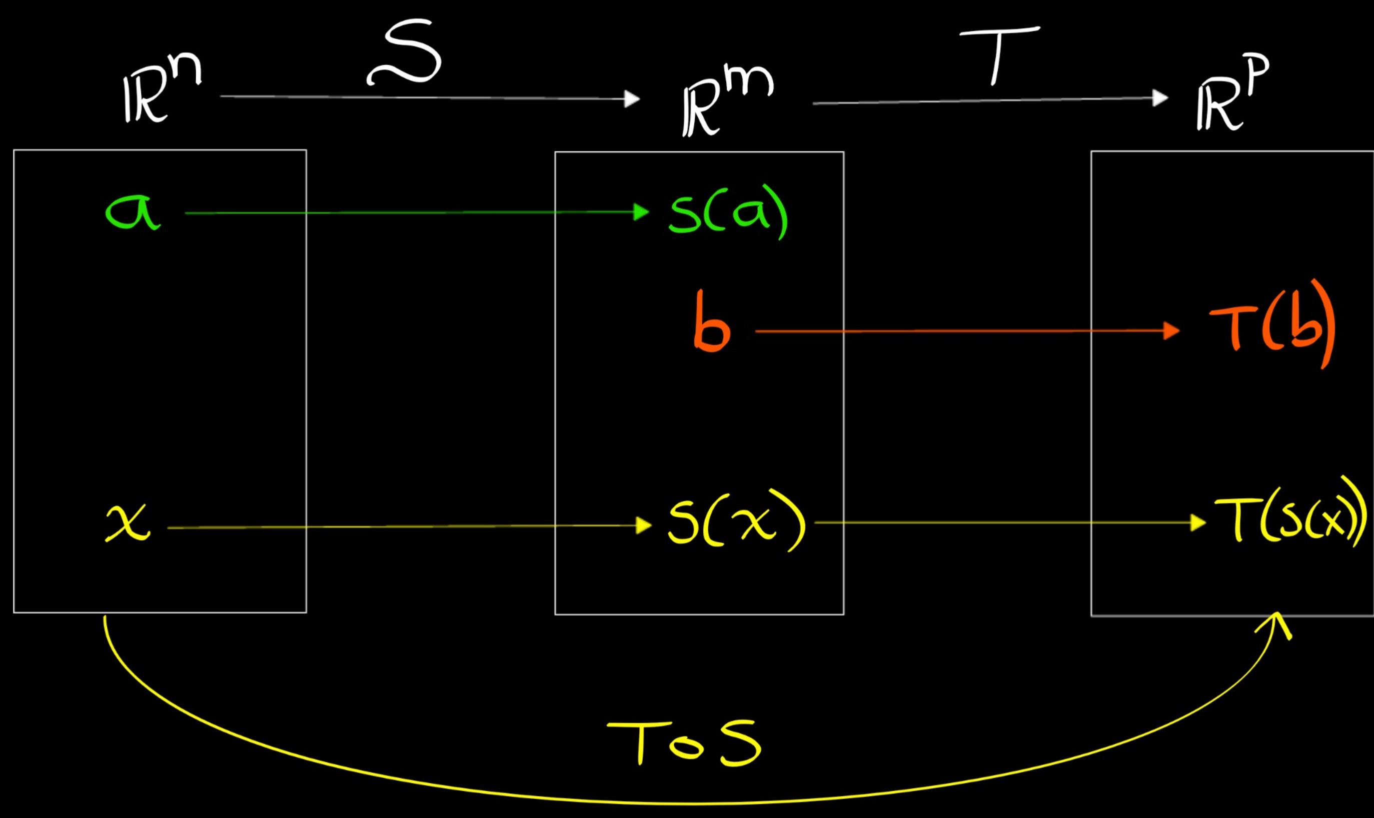
Transformaciones lineales.

Definición (composición de transformaciones).

Sea $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ dos transformaciones. Definimos la transformación

$$\begin{aligned} T \circ S : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ x &\longrightarrow (T \circ S)(x) = T(S(x)) \end{aligned}$$

la cual le daremos el nombre de la transformación compuesta por $\underline{\underline{S}}$ y $\underline{\underline{T}}$.



$$(T \circ S)(x) = T(S(x))$$

Teorema (la compuesta de transformaciones lineales es una transformación lineal).

Sean $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ transformaciones lineales, entonces $T \circ S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es una transformación lineal.

Demostración:

Para mostrar que $T \circ S$ es una transformación lineal, es necesario verificar las siguientes cosas:

(1) $(T \circ S)(x+y) = (T \circ S)(x) + (T \circ S)(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(2) $(T \circ S)(c x) = c \cdot (T \circ S)(x)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

prueba(1).

$$(T \circ S)(x+y) = T(S(x+y)) = T(S(x)+S(y)) =$$
$$= T(S(x)) + T(S(y)) = (T \circ S)(x) + (T \circ S)(y).$$

prueba(2).

$$(T \circ S)(c \cdot x) = T(S(c \cdot x)) = T(c \cdot S(x)) =$$
$$= c \cdot T(S(x)) = c \cdot (T \circ S)(x).$$

Ejemplo (composición de transformaciones lineales).

Considere las transformaciones lineales $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ y $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ dadas por

$$T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\2x_1-x_2\\3x_1+4x_2\end{bmatrix} \quad y \quad S\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2y_1+y_3\\3y_2-y_3\\y_1-y_2\\y_1+y_2+y_3\end{bmatrix}.$$

Encontrar $S\circ T$.

Solución:

Dado $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$, tenemos que:

$$(S\circ T)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=S\begin{bmatrix}x_1\\2x_1-x_2\\3x_1+4x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1+3x_1+4x_2\\3(2x_1-x_2)-(3x_1+4x_2)\\x_1-(2x_1-x_2)\\x_1+(2x_1-x_2)+(3x_1+4x_2)\end{bmatrix}$$

$$(S\circ T)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5x_1+4x_2\\3x_1-7x_2\\-x_1+x_2\\6x_1+3x_2\end{bmatrix}.$$

Notación $\left(\begin{array}{c}\text{matriz asociada de una} \\ \text{transformación lineal}\end{array}\right)$.

Si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal y $A = \left[T(e_1)\ T(e_2) \dots T(e_n) \right]$, entonces:

✓ $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida como $T_A(x) = A \cdot x$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal.

✓ $T(x) = T_A(x) = A \cdot x$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

Entonces decimos que A es la matriz que representa a la transformación lineal T y escribimos $A = [T]$.

Nota (siguiente teorema).

El siguiente teorema nos dice que la matriz asociada de la compuesta de 2 transformaciones lineales es el producto de las matrices inducidas.

Teorema (compuesta de transformaciones lineales es transformación lineal).

Sean $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $S: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ transformaciones lineales, entonces

$$\boxed{[S \circ T] = [S] \cdot [T]}.$$

Demostración:

Sean $A = [S]$, $B = [T]$ y $C = [S \circ T]$, entonces afirmamos lo siguiente:

Afirmación: $A \cdot B = C \quad \left([S] \cdot [T] = [S \circ T] \right).$

para demostrar que $A \cdot B = C$ es suficiente mostrar que:

$$\boxed{(A \cdot B)(x) = C \cdot (x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n}$$

De esta manera, notamos que:

$$(A\cdot B)(x) = A(B(x)) = A\cdot(T(x)) = S(T(x))$$

$$(A\cdot B)(x) = S(T(x)) = (S\circ T)(x) = C\cdot x$$

Lo cual prueba que $A\cdot B = C$ y

así se tiene que $[S]\cdot[T] = [S\circ T]$.

$\blacksquare$

Ejemplo (aplicación teorema anterior).

Dadas las transformaciones lineales

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dadas por:

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad S\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_1 + y_3 \\ 3y_2 - y_3 \\ y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 + y_3 \end{bmatrix}.$$

entonces:

(1) Hallar $[T]$.

(2) Hallar $[S]$.

(3) Hallar $[S\circ T]$.

(4) Usando $[S\circ T]$, describir $S\circ T$.

Solución:

(1) Dado $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, tenemos que:

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 3x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_2 \\ 4x_2 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

De donde, tenemos que $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(2) Dado $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, tenemos que:

$$S\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_1+y_3 \\ 3y_2-y_3 \\ y_1-y_2 \\ y_1+y_2+y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_1 \\ 0 \\ y_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3y_2 \\ -y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_3 \\ -y_3 \\ 0 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$S\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = y_1\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + y_3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, tenemos que $[S] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(3) por el teorema anterior, tenemos que:

$$[S \circ T] = [S] \cdot [T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[S \circ T] = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -7 \\ -1 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

(4) Debido a que $(S \circ T)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \circ T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$,

entonces:

$$(S \circ T)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -7 \\ -1 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - 7x_2 \\ -x_1 + x_2 \\ 6x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

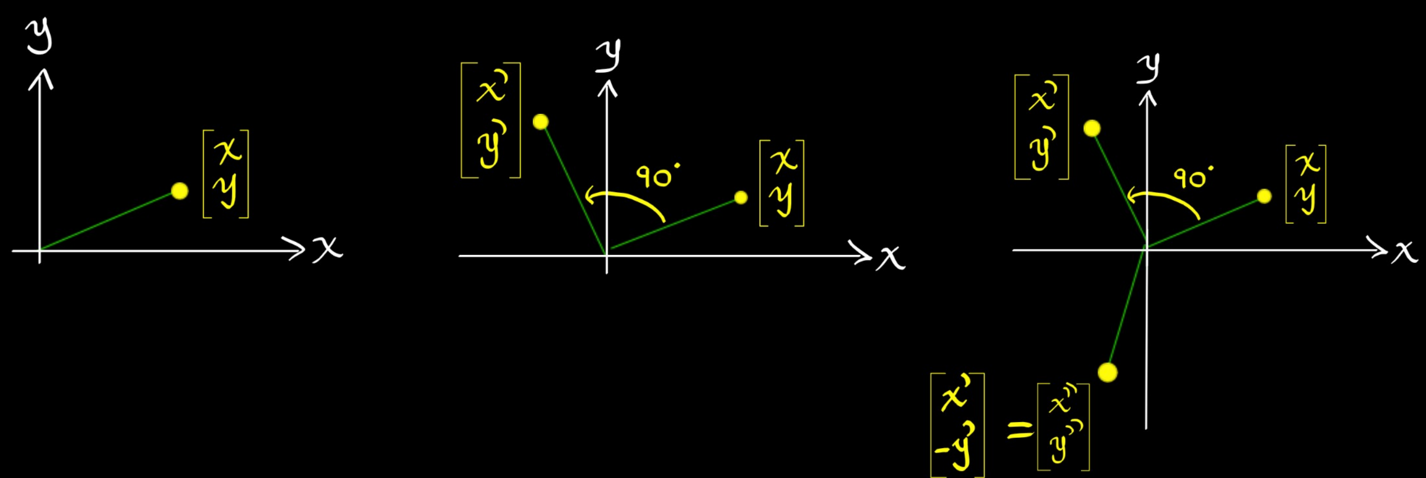
para cada $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Ejemplo.

Encuentre la matriz que representa a la transformación lineal que primero rota un punto 90° en sentido contrario de las manecillas del reloj en torno al origen y luego refleja el resultado en el eje x.

Solución:

Sea R la transformación que rota un vector arbitrario $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ alrededor del origen $90°$ en sentido contrario de las manecillas del reloj y luego refleja el resultado sobre el eje x como se muestra en la siguiente figura.



por lo tanto, tenemos que:

✓ $R\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}.$

✓ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(90°) & -\operatorname{sen}(90°) \\ \operatorname{sen}(90°) & \cos(90°) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}.$

Lo cual implica que

$$R\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ -y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

De esta manera, tenemos que

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observación (ejemplo anterior).

La transformación R del ejemplo anterior se puede interpretar como:

$$\boxed{R = T \circ S.}$$

donde

Rotación

$$S\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Reflexión

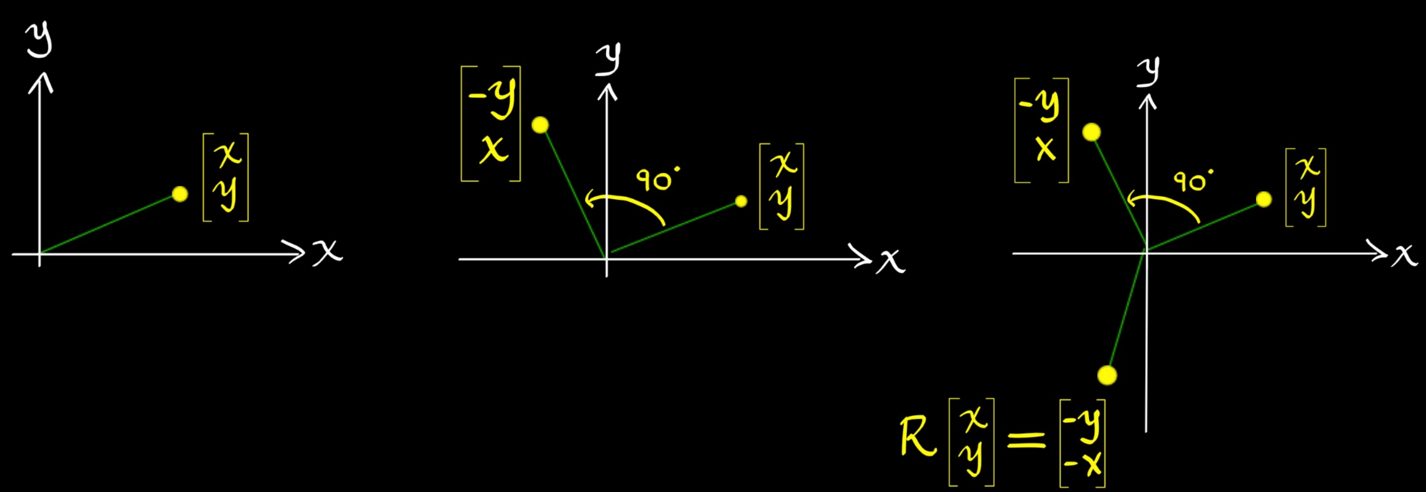
$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$[R] = [T \circ S] = [T] \cdot [S]$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$R\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [R] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}.$$



Observación (composicion de transformaciones).

Es importante resaltar que si $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, entonces NO necesaria/ $S \circ T = T \circ S$.

Definicion (inversas de transformaciones).

Sean $S, T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transformaciones lineales. Decimos que S y T son inversas una de otra, si:

$$\boxed{S \circ T = I_n \quad y \quad T \circ S = I_n}.$$

Esto significa que:

$$\boxed{\begin{array}{l} (S \circ T)(x) = I_n(x) \\ \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n \\ \\ (T \circ S)(x) = I_n(x) \\ \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n \end{array}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} S(T(x)) = x \\ T(S(x)) = x \end{array}}$$

En este caso diremos que S y T son invertibles y escribimos $S=T^{-1}$ y $T=S^{-1}$.

Observación (interpretación de transformaciones invertibles en términos de matrices).

Supongamos que $S,T:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ son transformaciones lineales invertibles con $S\circ T=I_n$ y $T\circ S=I_n$, entonces:

✓ $[S\circ T]=[I_n]$, $[I_n]=I_n$ y $[S\circ T]=[S]\cdot[T]$

Lo cual implica que $[S]\cdot[T]=I_n$

✓ $[T\circ S]=[I_n]$, $[I_n]=I_n$ y $[T\circ S]=[T]\cdot[S]$

Lo cual implica que $[T]\cdot[S]=I_n$.

Mostrando de esta manera que $[T]=[S]^{-1}$ y $[S]=[T]^{-1}$.

Nota (definición anterior).

Diremos que una transformación lineal $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es invertible, si existe una transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que S y T son inversas una de la otra.

Teorema (invertibilidad de transformaciones lineales).

Supongamos que $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal, entonces:

(1) S es invertible (transformación) $\longleftrightarrow$ $[S]$ es invertible (matriz)

(2) S es invertible $\longleftrightarrow$ $\det[S] \neq 0$.

(3) Si S es invertible y S^{-1} es la inversa de S, entonces:

$$\boxed{[S^{-1}] = ([S])^{-1}}.$$

Ejemplo (aplicación teorema anterior).

(1) Encuentre la matriz estandar de la rotación de 60° alrededor del origen en sentido contrario de las manecillas del reloj.

Solución (1):

Si R_{60} es la rotación de 60° en sentido contrario de las manecillas del reloj, entonces:

$$[R_{60}] = \begin{bmatrix} \cos 60 & -\operatorname{sen} 60 \\ \operatorname{sen} 60 & \cos 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(2) Hallar la matriz de la inversa de R_{60}.

Solución (2):

primero notemos que R_{60} es una transformación invertible ya que:

$$\operatorname{Det}\left[R_{60}\right] = \operatorname{Det}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \neq 0.$$

Además la inversa $\underline{\underline{S}}$ de $\underline{\underline{R_{60}}}$ satisface que:

$$[S] = \left[R_{60}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Lo cual implica que:

$$S\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [S]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2} \end{bmatrix}.$$

(3) Si R_θ es la rotación de θ grados al rededor del origen en sentido contrario de las manecillas del reloj, determinar la inversa de R_θ y la matriz que representa a la inversa.

Solución (3).

primero notemos que R_θ es una transformación invertible ya que:

$$\mathrm{Det}\left[R_\theta\right] = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \neq 0.$$

Además la inversa $\underline{\underline{S}}$ de $\underline{\underline{R_\theta}}$ satisface que:

$$[S] = [R_\theta]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

lo cual implica que:

$$S\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [\,S\,]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos\theta)\cdot x + (\operatorname{sen}\theta)\, y \\ (-\operatorname{sen}\theta)\cdot x + (\cos\theta)\cdot y \end{bmatrix}$$

$$S\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos\theta)\cdot x + (\operatorname{sen}\theta)\, y \\ (-\operatorname{sen}\theta)\cdot x + (\cos\theta)\cdot y \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 3.63 Determine si la proyección sobre el eje *x* es una transformación invertible y, si lo es, encuentre su inversa.

Ejercicio