Clase 23.

Teorema (eingenvalores de una matriz).

Sea A una matriz de tamaño $n \times n$, entonces las soluciones de la ecuación

$$\operatorname{Det}(A - \lambda I) = 0$$

para λ, son precisa/ los eingenvalores de la matriz A.

Definición (polinomio característico y ecuación característica).

Si A es una matriz de tamaño $n \times n$, entonces:

(1) El polinomio característico de la matriz A es el polinomio en la variable λ dado por:

$$\operatorname{Det}(A - \lambda I).$$

(2) La ecuación característica de la matriz A es la siguiente ecuación

$$\operatorname{Det}(A-\lambda I)=0.$$

Observación (polinomio característico).

Si A una matriz de tamaño $n\times n$, entonces el polinomio característico de A denotado por $\operatorname{Det}(A-\lambda I)$ es un polinomio de grado n.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$\boxed{\operatorname{Det}(A-\lambda I) = (-1)^n \cdot \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0}$$

polinomio
característico

Además por el teorema fundamental del aritmética, todo polinomio de grado $\underline{\underline{n}}$ tiene a lo más n raices.

Esto nos dice particular/ que toda matriz de tamaño $n \times n$ tiene a lo más n- eingenvalores.

Ejemplo (eingenvalores).

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, encontrar los eingenvalores de A.

Solución:

para encontrar los eingenvalores de A, es suficiente determinar las soluciones de la ecuación característica

$$\operatorname{Det}(A-\lambda I)=0$$

$$\operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)=0$$

$$\operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right)=0=\lambda^2+1.$$

De donde, tenemos que $\lambda=\pm\sqrt{-1}=\pm i$.

Ejemplo.

Sea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

(1) Hallar la ecuación característica de A.

(2) Hallar los eingenvalores de A.

Solución:

(1) La ecuación característica de A es:

$$\operatorname{Det}(A-\lambda I)=0$$

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}=0$$

$$(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$$

$$ad-(a+d)\lambda+\lambda^2-bc=0$$

$$\boxed{\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0}$$

ecuación característica.

(2) Los eingenvalores de A son:

$$\lambda=\frac{(a+d)\pm\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}.$$

Observación (eingenvalores).

Si A es una matriz de tamaño $n\times n$ ($n\neq 2$), entonces es más

complejo determinar los eingen-
valores de A.

Ejemplo (eingenvalores y eingenvectores).

Encontrar los eingenvalores y los eingenespacios correspondientes de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

para empezar, determinemos los eingenvalores de A, usando la ecuación característica.

$$\mathrm{Det}(A - \lambda I) = 0$$

$$\text{Det}\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 2 & -5 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$=(-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$=(-\lambda)\Big((-\lambda)(4-\lambda)+5\Big)-1\,(-2)=0$$

$$=(-\lambda)\left(-4\lambda+\lambda^2+5\right)+2=0$$

$$=4\lambda^2-\lambda^3-5\lambda+2=0$$

$$=-\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2=0.$$

por lo tanto, los eingenvalores λ de la matriz A, satisfacen la ecuación

$$\boxed{\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0}.$$

Ahora, para hallar las raices del polinomio $\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2$, usaremos el siguiente resultado de matemáticas básicas:

Teorema (ceros racionales).

Si $p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ es un polinomio con coeficientes enteros $\left(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}\right)$ y $x=\frac{p}{q}$ es una raiz racional para este polinomio, entonces:

$$\boxed{\begin{array}{l} p \text{ divide a } a_0 \\ q \text{ divide a } a_n \end{array}}$$

Corolario (este es el que usaremos).

Si $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ es un polinomio con coeficientes enteros y x es una raiz entera ($x \in \mathbb{Z}$) del polinomio $p(x)$, entonces:

$$\boxed{x \text{ divide a } a_0}.$$

De donde las posibles raices enteras del polinomio $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$ son ± 1 y ± 2 (los divisores enteros de -2).

- Si $\lambda = 1$, entonces:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 1^3 - 4(1)^2 + 5(1) - 2 = 0$$

lo cual muestra que $\lambda = 1$ es raiz del polinomio $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$.

- Si $\lambda = -1$, entonces:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (-1)^3 - 4(-1)^2 + 5(-1) - 2$$
$$= -1 - 4 - 5 - 2 = -12$$

lo cual muestra que $\lambda=-1$ no es raiz del polinomio $\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2$.

- si $\lambda=2$, entonces:

$$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=(2)^3-4(2)^2+5(2)-2=0$$

lo cual muestra que $\lambda=2$ es raiz del polinomio $\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2$.

- si $\lambda=-2$, entonces:

$$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=(-2)^3-4(-2)^2+5(-2)-2=-36$$

lo cual muestra que $\lambda=-2$ no es raiz del polinomio $\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2$.

Ahora, veamos como se factoriza $\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2$ (esto debido a que es posible la existencia de una tercera raiz del polinomio).

$$
\begin{array}{rr|l}
\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2 & & \lambda-1 \\ \cline{3-3}
-\lambda^3+\ \lambda^2 & & \lambda^2-3\lambda+2 \\ \cline{1-1}
-3\lambda^2+5\lambda & & \\
+3\lambda^2-3\lambda & & \\ \cline{1-1}
2\lambda-2 & & \\
-2\lambda+2 & & \\ \cline{1-1}
0 & &
\end{array}
$$

Así, tenemos que:

$$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+2)$$

$$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

$$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

lo cual muestra que los eingenvalores de la matriz A satisfacen que:

$$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0$$

$$(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0 \quad \longleftrightarrow \quad \lambda=1 \ \text{ó} \ \lambda=2$$

Mostrando de esta forma que los eingenvalores de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$.

(2) Recordemos que los eingenespacios de los eingenvalores son:

$$E_1 = \text{Nul}(A - 1 \cdot I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle/ (A - 1 \cdot I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_2 = \text{Nul}(A - 2 \cdot I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle/ (A - 2 \cdot I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

de donde, tenemos que:

✓ $$A - 1 \cdot I = \begin{pmatrix} 0-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0-1 & 1 \\ 2 & -5 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(A - 1 \cdot I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

y escalonando la matriz aumentada (★), obtenemos la siguiente matriz:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} x = z \\ y = z \\ z = z \end{array}$$

probando que

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \; x = y = z \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \; z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big/ \; z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para E_1.

$$A-2I=\begin{pmatrix} 0-2 & 1 & 0 \\ 0 & 0-2 & 1 \\ 2 & -5 & 4-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \underbrace{\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \atop \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right]}_{\blacktriangle}$$

y escalonando la matriz aumentada ($\blacktriangle$), obtenemos la siguiente matriz:

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \atop \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longleftrightarrow \begin{array}{l} x=\frac{1}{4}z \\ y=\frac{1}{2}z \\ z=z \end{array}$$

Así, tenemos que:

$$E_2=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,/\, x=\frac{1}{4}z,\ y=\frac{1}{2}z\right\}=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix} z/4 \\ z/2 \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,/\, z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{z\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \,/\, z\in\mathbb{R}\right\}$$

$$= \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}.$$

$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ es una base para E_2.

Definición (multiplicidad algebraica y geométrica de un eingenvalor).

Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ y λ es un eingenvalor de A, entonces:

(1) La multiplicidad algebraica de λ es la multiplicidad de λ como raiz del polinomio característico $\text{Det}(A - \lambda I)$.

(2) La multiplicidad geométrica de λ es la dimensión del eingenespacio E_λ. Es decir

$$\text{La multiplicidad geométrica de } \lambda = \mathrm{Dim}(E_\lambda)$$

Ejemplo.

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$, entonces los eingenvalores de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. Además podemos decir que:

✓ La multiplicidad algebraica del eingenvalor $\lambda_1 = 1$ es 2, ya que:

$$\mathrm{Det}(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$$

$$\mathrm{Det}(A-\lambda I) = -(\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2)$$

$$\mathrm{Det}(A-\lambda I) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

este es el motivo.

✓ La multiplicidad algebraica del eingenvalor $\lambda_2 = 2$ es 1.

✓ La multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 1$ es 1, ya que:

$$\text{Multiplicidad geométrica de } \lambda_1 = 1 = \mathrm{Dim}(E_1) = 1$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para E_1.