Universidad Nacional de Colombia

Cálculo en Varias Variables

Julián Uribe Castañeda

Doctorado en ciencias: Matemáticas

20 de marzo de 2024

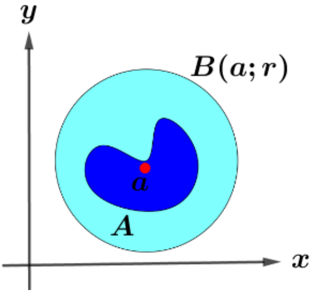
Extremos globales en regiones compactas

Definición (conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$).

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Decimos que A es un conjunto acotado, si para algún $a \in A$ y algún $r > 0$ se tiene que $A \subseteq B(a; r)$.

Nota (definición anterior).

Una forma de pensar un conjunto acotado, es pensar en conjuntos que no se extienden "infinitamente".



Definición (Conjunto compacto).

Supongamos que A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Decimos que *A es un conjunto compacto*, si A satisface las siguientes condiciones:

($\checkmark$) A es un conjunto acotado.

($\checkmark$) A es un conjunto cerrado.

Nota (definición anterior).

Los conjuntos compactos jugaran un papel muy importante en el estudio de máximos y mínimos de funciones de varias variables.

Nota (teorema del valor extremo en cálculo diferencial).

Recordemos de cálculo diferencial el teorema de valores extremos:

Teorema.

Sea $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre $[a,b]$, entonces:

($\checkmark$) f tiene un máximo absoluto sobre $[a,b]$.

($\checkmark$) f tiene un mínimo absoluto sobre $[a,b]$.

De esta manera, es natural preguntarse ¿cuál sería el resultado análogo para funciones de varias variables? El siguiente teorema responde esta pregunta.

Teorema (valor extremo - funciones de varias variables).

Supongamos que A es un conjunto compacto y $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre A, entonces:

($\checkmark$) f tiene máximo absoluto sobre A. Es decir que existe $a \in A$ tal que:

$$\begin{cases} f(x) \leq f(a), \\ \text{para todo } x \in A \end{cases}$$

($\checkmark$) f tiene mínimo absoluto sobre A. Es decir que existe $b \in A$ tal que:

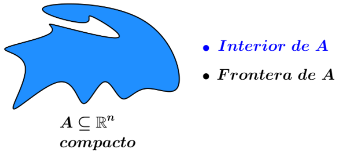
$$\begin{cases} f(b) \leq f(x), \\ \text{para todo } x \in A \end{cases}$$

Observación (teorema anterior).

Es importante notar que el teorema anterior nos garantiza la existencia de un máximo y mínimo global de una función continua f sobre un conjunto compacto A, pero no tiene un método para encontrar dichos puntos. A continuación se dan un conjunto de pasos que nos ayudarán a encontrar los máximos y mínimos absolutos de una función continua sobre un conjunto compacto $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Método para hallar los valores máximos y mínimos globales de una función sobre un conjunto compacto.

Sea A un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$ y $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre A.



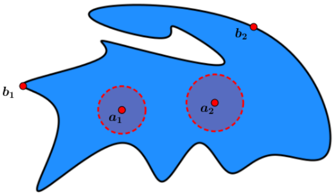
Entonces con los siguientes pasos determinamos los máximos y mínimos absolutos de f sobre A.

(1) Verificar que f es continua sobre A.

(2) Encontrar los puntos críticos de f que son puntos interiores de A.

(3) Encontrar los valores máximos y mínimos de f en la frontera de A.

(4) Comparar los puntos de los pasos (2) y (3), y así concluir cuales son los extremos globales (máximos y mínimos absolutos) de f sobre A.

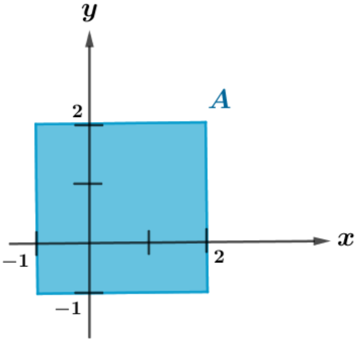


Ejemplo (aplicación algoritmo anterior).

Hallar los valores máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ sobre el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2,\ -1 \leq y \leq 2\}$.

Solución:

Es sencillo verificar que f es una función continua y A es un conjunto compacto.



(1) Puntos críticos en el interior: Los puntos críticos de f son aquellos puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ Tales que

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (2x - y, -x + 2y) = (0,0).$$

De esta forma es suficiente solucionar el sistema

$$\boxed{\begin{aligned} 2x - y &= 0, \\ -x + 2y &= 0. \end{aligned}}$$

El cual se puede ver fácilmente que únicamente tiene la solución $(x,y) = (0,0)$.

(2) Estudio de máximos y mínimos en la frontera de A: En este caso, tenemos que la frontera del conjunto A es $Fr(A) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, donde:

$$\boxed{\begin{aligned} A_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1, \ -1 \le y \le 2\}, \\ A_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2, \ -1 \le y \le 2\}, \\ A_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1, \ -1 \le x \le 2\}, \\ A_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2, \ -1 \le x \le 2\}. \end{aligned}}$$

Veamos cuales son los extremos de f sobre A_1, A_2, A_3 y A_4.

($\checkmark$) *Extremos de f sobre A_1:* Sobre A_1 la función f se describe como

$$f(-1,y) = (-1)^2 - (-1)y + y^2 + 1 \quad \text{con} \quad -1 \leq y \leq 2.$$

$$f(-1,y) = y^2 + y + 2 \quad \text{con} \quad -1 \leq y \leq 2.$$

Por lo tanto, para encontrar los máximos y mínimos de f sobre A_1, basta encontrar los máximos y mínimos de la función

$$g(y) = y^2 + y + 2 \text{ en el intervalo } [-1,2].$$

Para esto, encontramos los puntos críticos de g y luego los comparamos con los extremos del intervalo ($y = -1$ y $y = 2$). De esta manera, tenemos que

$$g'(y) = 2y + 1 = 0, \text{ lo cual implica que } y = -\frac{1}{2}.$$

Así, tenemos que:

$$\boxed{\begin{gathered} g\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4}, \\ g(-1) = (-1)^2 + (-1) + 2 = 2, \\ g(2) = 2^2 + 2 + 2 = 8. \end{gathered}}$$

Por lo tanto, el máximo de f en A_1 lo tiene en el punto $(x,y) = (-1,2)$ y el mínimo de f en A_1 lo tiene en el punto $(x,y) = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

($\checkmark$) *Extremos de f sobre A_2:* Sobre A_2 la función f se describe como

$$f(2,y) = (2)^2 - (2)y + y^2 + 1 \quad \text{con} \quad -1 \leq y \leq 2.$$

$$f(2,y) = y^2 - 2y + 5 \quad \text{con} \quad -1 \leq y \leq 2.$$

Por lo tanto, para encontrar los máximos y mínimos de f sobre A_2, basta encontrar los máximos y mínimos de la función

$$h(y) = y^2 - 2y + 5 \quad \text{en el intervalo} \quad [-1,2].$$

Para esto, encontramos los puntos críticos de h y luego los comparamos con los extremos del intervalo ($y = -1$ y $y = 2$). De esta manera, tenemos que

$$h'(y) = 2y - 2 = 0, \text{ lo cual implica que } y = 1.$$

Así, tenemos que:

$$\boxed{\begin{aligned} &h(1) = 1^2 - 2(1) + 5 = 4, \\ &h(-1) = (-1)^2 - 2(-1) + 5 = 8, \\ &h(2) = 2^2 - 2(2) + 5 = 5. \end{aligned}}$$

Así el máximo de f sobre A_2 lo tiene en el punto $(x,y)=(2,-1)$ y el mínimo de f en A_2 lo tiene en el punto $(x,y)=(2,1)$.

($\checkmark$) *Extremos de f en A_3:* Por simetría, tenemos que el máximo de f sobre A_3 es $(x,y)=(2,-1)$ y el mínimo de f sobre A_3 es $(x,y)=\left(-\frac{1}{2},-1\right)$.

($\checkmark$) *Extremos de f en A_4:* Por simetría, tenemos que el máximo de f sobre A_4 es $(x,y)=(-1,2)$ y el mínimo de f sobre A_4 es $(x,y)=(1,2)$.

De esta forma, tenemos que los máximos de f sobre la $Fr(A)$ se tienen en los puntos $(-1,2)$ y $(2,-1)$, y los mínimos de f sobre $Fr(A)$ se tienen en los puntos $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$.

Conclusión de (1) y (2): De lo anterior tenemos que:

$$\boxed{\begin{gathered} f(0,0)=1 \text{ (punto crítico en el interior)}, \\ f(-1,2)=f(2,-1)=8 \text{ (máximos en la frontera)}, \\ f\left(-1,-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2},-1\right)=\frac{7}{4} \text{ (mínimos en la frontera)}. \end{gathered}}$$

Concluyendo que los máximos absolutos sobre A se obtienen en $(-1,2)$ y $(2,-1)$, y el mínimo absoluto sobre A se obtiene en $(0,0)$.

Nota (ejemplo anterior y otros).

Existen ocasiones en que la frontera de un conjunto compacto se describe como el conjunto de nivel de una función. En este caso, el siguiente teorema nos dirá como encontrar los máximos y mínimos sobre la frontera. Este teorema es llamado el teorema de multiplicadores de Lagrange.

Nota (ejemplo anterior y otros).

Existen ocasiones en que la frontera de un conjunto compacto se describe como el conjunto de nivel de una función. En este caso, el siguiente teorema nos dirá como encontrar los máximos y mínimos sobre la frontera. Este teorema es llamado el teorema de multiplicadores de Lagrange.

Teorema (multiplicadores de Lagrange - versión 1).

Sean $f,g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 sobre A, $S = g^{-1}(c) = \{x \in A : g(x) = c\}$ y $x_0 \in S$. Si x_0 es un máximo ó mínimo local de f sobre S y $\nabla g(x_0) \neq (0,\ldots,0)$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\boxed{\nabla f(x_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0).}$$

Nota (ejemplo anterior y otros).

Existen ocasiones en que la frontera de un conjunto compacto se describe como el conjunto de nivel de una función. En este caso, el siguiente teorema nos dirá como encontrar los máximos y mínimos sobre la frontera. Este teorema es llamado el teorema de multiplicadores de Lagrange.

Teorema (multiplicadores de Lagrange - versión 1).

Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 sobre A, $S = g^{-1}(c) = \{x \in A : g(x) = c\}$ y $x_0 \in S$. Si x_0 es un máximo ó mínimo local de f sobre S y $\nabla g(x_0) \neq (0, \ldots, 0)$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\boxed{\nabla f(x_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0).}$$

Observación (teorema de multiplicadores de Lagrange).

Nota (ejemplo anterior y otros).

Existen ocasiones en que la frontera de un conjunto compacto se describe como el conjunto de nivel de una función. En este caso, el siguiente teorema nos dirá como encontrar los máximos y mínimos sobre la frontera. Este teorema es llamado el teorema de multiplicadores de Lagrange.

Teorema (multiplicadores de Lagrange - versión 1).

Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 sobre A, $S = g^{-1}(c) = \{x \in A : g(x) = c\}$ y $x_0 \in S$. Si x_0 es un máximo ó mínimo local de f sobre S y $\nabla g(x_0) \neq (0, \ldots, 0)$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\boxed{\nabla f(x_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0).}$$

Observación (teorema de multiplicadores de Lagrange).

El teorema de multiplicadores de Lagrange, nos dice que si una función f tiene máximos ó mínimos sobre un conjunto $S = g^{-1}(c)$, entonces para encontrarlos tenemos que solucionar el sistema de ecuaciones:

Nota (ejemplo anterior y otros).

Existen ocasiones en que la frontera de un conjunto compacto se describe como el conjunto de nivel de una función. En este caso, el siguiente teorema nos dirá como encontrar los máximos y mínimos sobre la frontera. Este teorema es llamado el teorema de multiplicadores de Lagrange.

Teorema (multiplicadores de Lagrange - versión 1).

Sean $f,g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 sobre A, $S = g^{-1}(c) = \{x \in A : g(x) = c\}$ y $x_0 \in S$. Si x_0 es un máximo ó mínimo local de f sobre S y $\nabla g(x_0) \neq (0,\ldots,0)$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\boxed{\nabla f(x_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0).}$$

Observación (teorema de multiplicadores de Lagrange).

El teorema de multiplicadores de Lagrange, nos dice que si una función f tiene máximos ó mínimos sobre un conjunto $S = g^{-1}(c)$, entonces para encontrarlos tenemos que solucionar el sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{gathered}\nabla f(x_1,\ldots,x_n) = \lambda \cdot \nabla g(x_1,\ldots,x_n),\\ g(x_1,\ldots,x_n) = c.\end{gathered}}$$

Para las variables $x_1,\ldots,x_n$.

Ejemplo (aplicación teorema de multiplicadores de Lagrange).

Hallar los máximos y mínimos absolutos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Ejemplo (aplicación teorema de multiplicadores de Lagrange).

Hallar los máximos y mínimos absolutos de $f(x,y)=x^2+2y^2$ sobre la circunferencia $x^2+y^2=1$.

Solución:

Ejemplo (aplicación teorema de multiplicadores de Lagrange).

Hallar los máximos y mínimos absolutos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Solución:

Para hallar los máximos y mínimos de f sobre $S = g^{-1}(1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ $(g(x,y) = x^2 + y^2)$, es suficiente resolver el sistema de ecuaciones

Ejemplo (aplicación teorema de multiplicadores de Lagrange).

Hallar los máximos y mínimos absolutos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Solución:

Para hallar los máximos y mínimos de f sobre $S = g^{-1}(1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ $(g(x,y) = x^2 + y^2)$, es suficiente resolver el sistema de ecuaciones

$$\boxed{\begin{gathered} \nabla f(x,y) = \lambda \cdot \nabla g(x,y), \\ x^2 + y^2 = 1. \end{gathered}}$$

Ejemplo (aplicación teorema de multiplicadores de Lagrange).

Hallar los máximos y mínimos absolutos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Solución:

Para hallar los máximos y mínimos de f sobre $S = g^{-1}(1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ $(g(x,y) = x^2 + y^2)$, es suficiente resolver el sistema de ecuaciones

$$\boxed{\begin{gathered} \nabla f(x,y) = \lambda \cdot \nabla g(x,y), \\ x^2 + y^2 = 1. \end{gathered}}$$

Lo cuál equivale a tener

Ejemplo (aplicación teorema de multiplicadores de Lagrange).

Hallar los máximos y mínimos absolutos de $f(x,y)=x^2+2y^2$ sobre la circunferencia $x^2+y^2=1$.

Solución:

Para hallar los máximos y mínimos de f sobre $S=g^{-1}(1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ $(g(x,y)=x^2+y^2)$, es suficiente resolver el sistema de ecuaciones

$$\boxed{\begin{gathered}\nabla f(x,y)=\lambda\cdot\nabla g(x,y),\\ x^2+y^2=1.\end{gathered}}$$

Lo cuál equivale a tener

$$\begin{aligned} f_x(x,y)&=\lambda g_x(x,y), & 2x&=\lambda(2x), & 2x(1-\lambda)&=0 & (1)\\ f_y(x,y)&=\lambda g_y(x,y), & 4y&=\lambda(2y), & 2y(2-\lambda)&=0 & (2)\\ x^2+y^2&=1, & x^2+y^2&=1, & x^2+y^2&=1 & (3)\end{aligned}$$

Ejemplo (aplicación teorema de multiplicadores de Lagrange).

Hallar los máximos y mínimos absolutos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Solución:

Para hallar los máximos y mínimos de f sobre $S = g^{-1}(1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ $(g(x,y) = x^2 + y^2)$, es suficiente resolver el sistema de ecuaciones

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \lambda \cdot \nabla g(x,y), \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}}$$

Lo cuál equivale a tener

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \lambda g_x(x,y), & 2x &= \lambda(2x), & 2x(1-\lambda) &= 0 & (1) \\ f_y(x,y) &= \lambda g_y(x,y), & 4y &= \lambda(2y), & 2y(2-\lambda) &= 0 & (2) \\ x^2 + y^2 &= 1, & x^2 + y^2 &= 1, & x^2 + y^2 &= 1 & (3) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación (1) nos dice que $x = 0$ ó $\lambda = 1$.

Ejemplo (aplicación teorema de multiplicadores de Lagrange).

Hallar los máximos y mínimos absolutos de $f(x,y)=x^2+2y^2$ sobre la circunferencia $x^2+y^2=1$.

Solución:

Para hallar los máximos y mínimos de f sobre $S=g^{-1}(1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ $(g(x,y)=x^2+y^2)$, es suficiente resolver el sistema de ecuaciones

$$\boxed{\begin{array}{c}\nabla f(x,y)=\lambda\cdot\nabla g(x,y),\\ x^2+y^2=1.\end{array}}$$

Lo cuál equivale a tener

$$\begin{aligned}
f_x(x,y)&=\lambda g_x(x,y), & 2x&=\lambda(2x), & 2x(1-\lambda)&=0 && (1)\\
f_y(x,y)&=\lambda g_y(x,y), & 4y&=\lambda(2y), & 2y(2-\lambda)&=0 && (2)\\
x^2+y^2&=1, & x^2+y^2&=1, & x^2+y^2&=1 && (3)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación (1) nos dice que $x=0$ ó $\lambda=1$.

($\checkmark$) Si $x=0$, entonces de la ecuación (3), tenemos que $y=\pm 1$.

Ejemplo (aplicación teorema de multiplicadores de Lagrange).

Hallar los máximos y mínimos absolutos de $f(x,y)=x^2+2y^2$ sobre la circunferencia $x^2+y^2=1$.

Solución:

Para hallar los máximos y mínimos de f sobre $S=g^{-1}(1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ $(g(x,y)=x^2+y^2)$, es suficiente resolver el sistema de ecuaciones

$$\boxed{\begin{gathered}\nabla f(x,y)=\lambda\cdot\nabla g(x,y),\\ x^2+y^2=1.\end{gathered}}$$

Lo cuál equivale a tener

$$\begin{aligned} f_x(x,y)&=\lambda g_x(x,y), & 2x&=\lambda(2x), & 2x(1-\lambda)&=0 && (1)\\ f_y(x,y)&=\lambda g_y(x,y), & 4y&=\lambda(2y), & 2y(2-\lambda)&=0 && (2)\\ x^2+y^2&=1, & x^2+y^2&=1, & x^2+y^2&=1 && (3)\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación (1) nos dice que $x=0$ ó $\lambda=1$.

($\checkmark$) Si $x=0$, entonces de la ecuación (3), tenemos que $y=\pm1$.

($\checkmark$) Si $\lambda=1$, entonces la ecuación (2) nos dice que $y=0$ y por la ecuación (3) tenemos que $x=\pm1$.

De lo anterior tenemos que existen 4 puntos que son solución del sistema, los cuales son:

De lo anterior tenemos que existen 4 puntos que son solución del sistema, los cuales son:

$$(0,1),\ (0,-1),\ (1,0) \text{ y } (-1,0).$$

De lo anterior tenemos que existen 4 puntos que son solución del sistema, los cuales son:

$$(0,1),\ (0,-1),\ (1,0) \text{ y } (-1,0).$$

Luego para saber cuales puntos son máximos ó mínimos, se evalúan los puntos en la función f y se comparan.

De lo anterior tenemos que existen 4 puntos que son solución del sistema, los cuales son:

$$(0,1),\ (0,-1),\ (1,0)\ \text{y}\ (-1,0).$$

Luego para saber cuales puntos son máximos ó mínimos, se evalúan los puntos en la función f y se comparan.

$$\boxed{\begin{aligned} f(0,1) &= f(0,-1) = 2, \\ f(-1,0) &= f(1,0) = 1. \end{aligned}}$$

De lo anterior tenemos que existen 4 puntos que son solución del sistema, los cuales son:

$$(0,1),\ (0,-1),\ (1,0) \text{ y } (-1,0).$$

Luego para saber cuales puntos son máximos ó mínimos, se evalúan los puntos en la función f y se comparan.

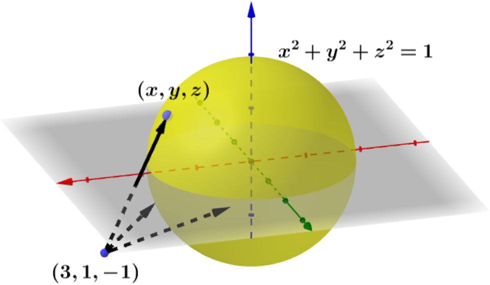
$$\boxed{\begin{aligned} &f(0,1) = f(0,-1) = 2, \\ &f(-1,0) = f(1,0) = 1. \end{aligned}}$$

Lo anterior nos dice que los máximos absolutos de f sobre $x^2+y^2=1$ se obtienen en los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$, y los mínimos absolutos de f sobre $x^2+y^2=1$ se obtienen en los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$.

Ejemplo (aplicación teorema de multiplicadores de Lagrange).

Hallar los puntos de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ que están más cerca y más lejanos del punto $(3,1,-1)$.

Solución:



En este caso, la función a optimizar es la distancia desde un punto (x,y,z) hasta $(3,1,-1)$ con $x^2+y^2+z^2=1$. Esta función se describe como:

$$\begin{cases} d(x,y,z)=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z-(-1))^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}, \\ \\ d(x,y,z)=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2} \end{cases}$$

Así, los máximos y mínimos de d sobre $S = g^{-1}(1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ ($g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$) los encontramos resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{array}{c} \nabla d(x,y,z) = \lambda \cdot \nabla g(x,y,z), \\ x^2+y^2+z^2 = 1. \end{array}}$$

Aunque por aquí se obtiene la solución, el problema se vuelve un poco extenso debido a la expresión de las derivadas parciales de d.

Por lo tanto, optimizaremos el cuadrado de la distancia sobre $S = g^{-1}(1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$, y con esto tendremos los máximos y mínimos de la distancia. Así tomando el cuadrado de la distancia

$$f(x,y,z) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2,$$

el sistema a resolver es

$$\boxed{\begin{array}{c} \nabla f(x,y,z) = \lambda \cdot \nabla g(x,y,z), \\ x^2+y^2+z^2 = 1. \end{array}}$$

Lo cuál equivale a tener

$$\begin{aligned} f_x &= \lambda g_x, & 2(x-3) &= \lambda(2x), & 2x(1-\lambda) &= 6 & (4)\\ f_y &= \lambda g_y, & 2(y-1) &= \lambda(2y), & 2y(1-\lambda) &= 2 & (5)\\ f_z &= \lambda g_z, & 2(z+1) &= \lambda(2z), & 2z(1-\lambda) &= -2 & (6)\\ x^2+y^2+z^2 &= 1, & x^2+y^2+z^2 &= 1, & x^2+y^2+z^2 &= 1 & (7) \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que $1-\lambda = \frac{6}{2x} = \frac{2}{2y} = -\frac{2}{2z}$, implicando que $y = \frac{x}{3}$, $z = -\frac{x}{3}$. Luego por la ecuación (7) tenemos

$$x^2+y^2+z^2 = 1,$$

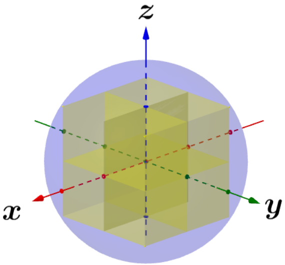
$$x^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(-\frac{x}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{x^2}{9} + \frac{x^2}{9} = \frac{11}{9}x^2 = 1.$$

Obteniendo que $x = \pm\frac{3}{\sqrt{11}}$. Por tanto $\left(\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$ y $\left(-\frac{3}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$ son la solución del sistema dado por el teorema de multiplicadores de Lagrange.

Por tanto, para saber cuál es el máximo y mínimo, evaluamos dichos puntos en la función f, obteniendo que $\left(\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$ es el punto más cercano y $\left(-\frac{3}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$ es el más lejano de $(3,1,-1)$.

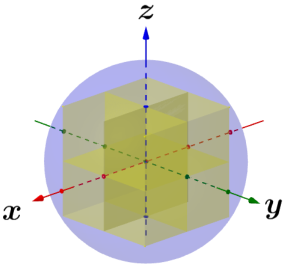
Ejemplo (aplicación teorema de multiplicadores de Lagrange).

Encontrar la caja (paralelepípedo rectangular) más grande que puede inscribirse en el elipsoide $3x^2+2y^2+z^2=6$.



Ejemplo (aplicación teorema de multiplicadores de Lagrange).

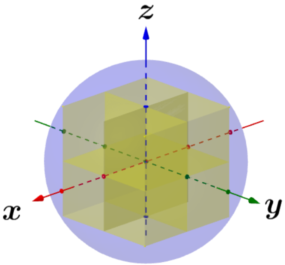
Encontrar la caja (paralelepípedo rectangular) más grande que puede inscribirse en el elipsoide $3x^2+2y^2+z^2=6$.



Solución:

Ejemplo (aplicación teorema de multiplicadores de Lagrange).

Encontrar la caja (paralelepípedo rectangular) más grande que puede inscribirse en el elipsoide $3x^2+2y^2+z^2=6$.

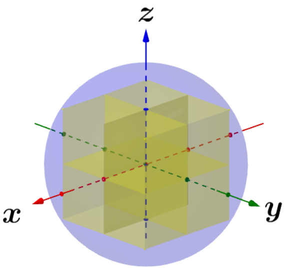


Solución:

Inicialmente simplificamos el problema de la siguiente forma:

Ejemplo (aplicación teorema de multiplicadores de Lagrange).

Encontrar la caja (paralelepípedo rectangular) más grande que puede inscribirse en el elipsoide $3x^2+2y^2+z^2=6$.



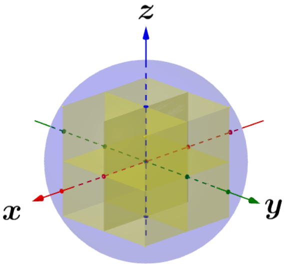
Solución:

Inicialmente simplificamos el problema de la siguiente forma:

Encontrar la caja más grande que podemos inscribir en el interior del elipsoide $3x^2+2y^2+z^2=6$ con $x,y,z\geq 0$.

Ejemplo (aplicación teorema de multiplicadores de Lagrange).

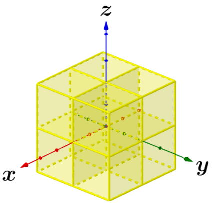
Encontrar la caja (paralelepípedo rectangular) más grande de que puede inscribirse en el elipsoide $3x^2+2y^2+z^2=6$.

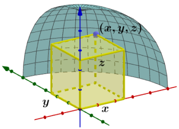


Solución:

Inicialmente simplificamos el problema de la siguiente forma:

> Encontrar la caja más grande que podemos inscribir en el interior del elipsoide
>
> $3x^2+2y^2+z^2=6$ con $x,y,z\geq 0$.





Con un poco de trabajo, podemos notar que:

Con un poco de trabajo, podemos notar que:

($\checkmark$) La función a optimizar es $V(x,y,z) = xyz$ (el volumen de la caja).

Con un poco de trabajo, podemos notar que:

(✓) La función a optimizar es $V(x,y,z)=xyz$ (el volumen de la caja).

(✓) El conjunto en el cual optimizaremos el volumen de la caja es

Con un poco de trabajo, podemos notar que:

(✓) La función a optimizar es $V(x,y,z) = xyz$ (el volumen de la caja).

(✓) El conjunto en el cual optimizaremos el volumen de la caja es

$$\begin{cases} S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6\} = g^{-1}(6), \\ \\ g(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2. \end{cases}$$

Con un poco de trabajo, podemos notar que:

($\checkmark$) La función a optimizar es $V(x,y,z) = xyz$ (el volumen de la caja).

($\checkmark$) El conjunto en el cual optimizaremos el volumen de la caja es

$$\begin{cases} S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6\} = g^{-1}(6), \\ \\ g(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2. \end{cases}$$

Por lo tanto, el teorema de multiplicadores de Lagrange nos dice que para encontrar el volumen máximo debemos solucionar el sistema:

Con un poco de trabajo, podemos notar que:

($\checkmark$) La función a optimizar es $V(x,y,z) = xyz$ (el volumen de la caja).

($\checkmark$) El conjunto en el cual optimizaremos el volumen de la caja es

$$\begin{cases} S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6\} = g^{-1}(6), \\ g(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2. \end{cases}$$

Por lo tanto, el teorema de multiplicadores de Lagrange nos dice que para encontrar el volumen máximo debemos solucionar el sistema:

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla V(x,y,z) = \lambda \cdot \nabla g(x,y,z), \\ &3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6. \end{aligned}}$$

Con un poco de trabajo, podemos notar que:

($\checkmark$) La función a optimizar es $V(x,y,z)=xyz$ (el volumen de la caja).

($\checkmark$) El conjunto en el cual optimizaremos el volumen de la caja es

$$\begin{cases} S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 3x^2+2y^2+z^2=6\}=g^{-1}(6), \\ \\ g(x,y,z)=3x^2+2y^2+z^2. \end{cases}$$

Por lo tanto, el teorema de multiplicadores de Lagrange nos dice que para encontrar el volumen máximo debemos solucionar el sistema:

$$\boxed{\begin{array}{l} \nabla V(x,y,z)=\lambda\cdot\nabla g(x,y,z), \\ 3x^2+2y^2+z^2=6. \end{array}}$$

Lo cuál equivale a tener:

Con un poco de trabajo, podemos notar que:

($\checkmark$) La función a optimizar es $V(x,y,z)=xyz$ (el volumen de la caja).

($\checkmark$) El conjunto en el cual optimizaremos el volumen de la caja es

$$\begin{cases} S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 3x^2+2y^2+z^2=6\}=g^{-1}(6), \\ g(x,y,z)=3x^2+2y^2+z^2. \end{cases}$$

Por lo tanto, el teorema de multiplicadores de Lagrange nos dice que para encontrar el volumen máximo debemos solucionar el sistema:

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla V(x,y,z)=\lambda\cdot\nabla g(x,y,z), \\ &3x^2+2y^2+z^2=6. \end{aligned}}$$

Lo cuál equivale a tener:

$$\begin{aligned} V_x&=\lambda g_x, & yz&=\lambda(6x), & xyz&=6x^2\lambda \qquad (8)\\ V_y&=\lambda g_y, & xz&=\lambda(4y), & xyz&=4y^2\lambda \qquad (9)\\ V_z&=\lambda g_z, & xy&=\lambda(2z), & xyz&=2z^2\lambda \qquad (10)\\ 3x^2+2y^2+z^2&=6, & 3x^2+2y^2+z^2&=6, & 3x^2+2y^2+z^2&=6 \qquad (11) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $6x^2\lambda = 4y^2\lambda = 2z^2\lambda,$

Por tanto, tenemos que $6x^2\lambda = 4y^2\lambda = 2z^2\lambda$, lo cual implica que $\sqrt{6}x = 2y = \sqrt{2}z$ (si $\lambda = 0$, entonces

Por tanto, tenemos que $6x^2\lambda = 4y^2\lambda = 2z^2\lambda$, lo cual implica que $\sqrt{6}x = 2y = \sqrt{2}z$ (si $\lambda = 0$, entonces $xyz = 0$, pero este es precisamente el volumen de la caja que deseamos maximizar y además aquí usamos el supuesto que $x, y, z \geq 0$). De esta manera, reemplazando en la ecuación (11), tenemos que:

Por tanto, tenemos que $6x^2\lambda = 4y^2\lambda = 2z^2\lambda$, lo cual implica que $\sqrt{6}x = 2y = \sqrt{2}z$ (si $\lambda = 0$, entonces $xyz = 0$, pero este es precisamente el volumen de la caja que deseamos maximizar y además aquí usamos el supuesto que $x, y, z \geq 0$). De esta manera, reemplazando en la ecuación (11), tenemos que:

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6,$$

Por tanto, tenemos que $6x^2\lambda = 4y^2\lambda = 2z^2\lambda$, lo cual implica que $\sqrt{6}x = 2y = \sqrt{2}z$ (si $\lambda = 0$, entonces $xyz = 0$, pero este es precisamente el volumen de la caja que deseamos maximizar y además aquí usamos el supuesto que $x, y, z \geq 0$). De esta manera, reemplazando en la ecuación (11), tenemos que:

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6,$$

$$3x^2 + 2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}x\right)^2 = 6,$$

Por tanto, tenemos que $6x^2\lambda = 4y^2\lambda = 2z^2\lambda$, lo cual implica que $\sqrt{6}x = 2y = \sqrt{2}z$ (si $\lambda = 0$, entonces $xyz = 0$, pero este es precisamente el volumen de la caja que deseamos maximizar y además aquí usamos el supuesto que $x, y, z \geq 0$). De esta manera, reemplazando en la ecuación (11), tenemos que:

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6,$$

$$3x^2 + 2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}x\right)^2 = 6,$$

$$3x^2 + 3x^2 + 3x^2 = 9x^2 = 6.$$

Por tanto, tenemos que $6x^2\lambda = 4y^2\lambda = 2z^2\lambda$, lo cual implica que $\sqrt{6}x = 2y = \sqrt{2}z$ (si $\lambda = 0$, entonces $xyz = 0$, pero este es precisamente el volumen de la caja que deseamos maximizar y además aquí usamos el supuesto que $x, y, z \geq 0$). De esta manera, reemplazando en la ecuación (11), tenemos que:

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6,$$

$$3x^2 + 2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}x\right)^2 = 6,$$

$$3x^2 + 3x^2 + 3x^2 = 9x^2 = 6.$$

De donde $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $y = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 1$ y $z = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$ (recordar que $x, y, z \geq 0$).

Por tanto, tenemos que $6x^2\lambda = 4y^2\lambda = 2z^2\lambda$, lo cual implica que $\sqrt{6}x = 2y = \sqrt{2}z$ (si $\lambda = 0$, entonces $xyz = 0$, pero este es precisamente el volumen de la caja que deseamos maximizar y además aquí usamos el supuesto que $x, y, z \geq 0$). De esta manera, reemplazando en la ecuación (11), tenemos que:

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6,$$

$$3x^2 + 2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}x\right)^2 = 6,$$

$$3x^2 + 3x^2 + 3x^2 = 9x^2 = 6.$$

De donde $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $y = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 1$ y $z = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$ (recordar que $x, y, z \geq 0$). Por lo tanto, el teorema de multiplicadores de Lagrange nos dice que la caja con dimensiones $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $y = 1$ y $z = \frac{3}{\sqrt{2}}$ es la caja más grande que puede inscribirse en el elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$ con $x, y, z \geq 0$.

Por tanto, tenemos que $6x^2\lambda = 4y^2\lambda = 2z^2\lambda$, lo cual implica que $\sqrt{6}x = 2y = \sqrt{2}z$ (si $\lambda = 0$, entonces $xyz = 0$, pero este es precisamente el volumen de la caja que deseamos maximizar y además aquí usamos el supuesto que $x, y, z \geq 0$). De esta manera, reemplazando en la ecuación (11), tenemos que:

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6,$$

$$3x^2 + 2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}x\right)^2 = 6,$$

$$3x^2 + 3x^2 + 3x^2 = 9x^2 = 6.$$

De donde $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $y = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 1$ y $z = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$ (recordar que $x, y, z \geq 0$). Por lo tanto, el teorema de multiplicadores de Lagrange nos dice que la caja con dimensiones $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $y = 1$ y $z = \frac{3}{\sqrt{2}}$ es la caja más grande que puede inscribirse en el elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$ con $x, y, z \geq 0$. Lo anterior implica que la caja más grande que puede inscribirse en el elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$ tiene dimensiones

Por tanto, tenemos que $6x^2\lambda = 4y^2\lambda = 2z^2\lambda$, lo cual implica que $\sqrt{6}x = 2y = \sqrt{2}z$ (si $\lambda = 0$, entonces $xyz = 0$, pero este es precisamente el volumen de la caja que deseamos maximizar y además aquí usamos el supuesto que $x, y, z \geq 0$). De esta manera, reemplazando en la ecuación (11), tenemos que:

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6,$$

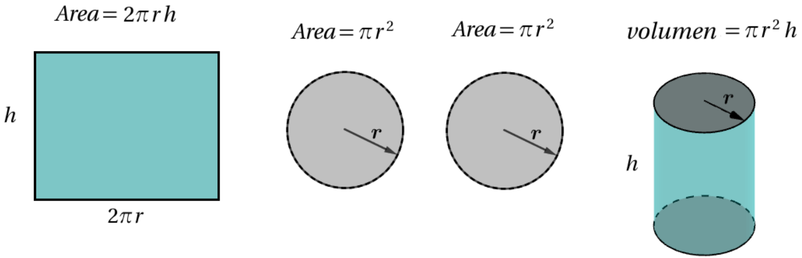
$$3x^2 + 2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}x\right)^2 = 6,$$

$$3x^2 + 3x^2 + 3x^2 = 9x^2 = 6.$$

De donde $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $y = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 1$ y $z = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$ (recordar que $x, y, z \geq 0$). Por lo tanto, el teorema de multiplicadores de Lagrange nos dice que la caja con dimensiones $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $y = 1$ y $z = \frac{3}{\sqrt{2}}$ es la caja más grande que puede inscribirse en el elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$ con $x, y, z \geq 0$. Lo anterior implica que la caja más grande que puede inscribirse en el elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$ tiene dimensiones $2x = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, $2y = 2$ y $2z = \frac{6}{\sqrt{2}}$.

Ejemplo (aplicación teorema de multiplicadores de Lagrange).

Supongamos que un cilindro circular recto tiene un volumen de $1000cm^3$. Hallar las dimensiones del cilindro que minimizan el área superficial.



Solución (1): Usando multiplicadores de Lagrange.

Para esta parte, es suficiente resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{gathered}\nabla A(r,h) = \lambda \cdot \nabla g(r,h), \\ \pi r^2 h = 1000.\end{gathered}}$$

donde $A(r,h)=2\pi r^2+2\pi rh$ y $g(r,h)=\pi r^2 h$. Además, este sistema equivale a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
A_r &= \lambda g_r & 4\pi r+2\pi h &= \lambda(2\pi rh) & 2r+h &= \lambda(rh) \qquad (12)\\
A_h &= \lambda g_h & 2\pi r &= \lambda(\pi r^2) & 2r &= \lambda(r^2) \qquad (13)\\
\pi r^2 h &= 1000 & \pi r^2 h &= 1000 & \pi r^2 h &= 1000 \qquad (14)
\end{aligned}$$

Luego tomando el cociente entre la ecuación (12) y (13), tenemos que:

$$\frac{2r+h}{2r}=\frac{\lambda(rh)}{\lambda(r^2)}=\frac{h}{r}, \text{ lo cuál implica que } \frac{2r+h}{2r}=\frac{h}{r}.$$

$$2r^2+rh=2rh \quad\Rightarrow\quad r(2r-h)=0 \quad\Rightarrow\quad 2r-h=0 \quad\Rightarrow\quad h=2r.$$

Luego reemplazando h en la ecuación (14), tenemos que

$$\pi r^2 h=1000 \quad\Rightarrow\quad \pi r^2(2r)=1000 \quad\Rightarrow\quad r^3=\frac{500}{\pi} \quad\Rightarrow\quad \boxed{r=\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}}.$$

De lo anterior, tenemos que las dimensiones del cilindro que hacen que el area superficial sea mínima (¿por qué?) son $r=\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ y $h=\dfrac{1000}{\pi r^2}=\dfrac{1000}{\pi\sqrt[3]{\frac{250000}{\pi^2}}}$.

Solución (2): Sin usar multiplicadores de Lagrange.

En este caso, sabemos que el volumen del cilindro es $\pi r^2 h = 1000$ y nos piden minimizar el área superficial, la cual es $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Despejando h en la ecuación del volumen del cilindro y reemplazándola en la función del área superficial, tendremos que:

$$\begin{cases} A = 2\pi r^2 + 2\pi r^2 h = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\dfrac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r}, \\ \\ A(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r}. \end{cases}$$

De esta manera, para optimizar la función $A(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r}$ usamos el criterio de la segunda derivada.[a] En los siguientes pasos mostramos el proceso para optimizar a $A(r)$.

Paso (1): Encontrar los puntos críticos de $A(r)$.

Para encontrar los puntos críticos de $A(r)$ importantes, es suficiente resolver la siguiente ecuación:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0.$$

Así, el único punto crítico interesante de $A(r)$ es $r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$ (*¿por qué?*).

[a] Si $f:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función de clase C^2 sobre (a,b) y $c\in(a,b)$ es un punto crítico de f. Por tanto, si $f''(c)>0$, entonces c es un mínimo local y si $f''(c)<0$, entonces c es un máximo local.

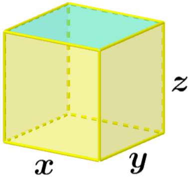
Paso (2): Describir los extremos locales de $A(r)$.

Como $A''(r) = 4\pi + \dfrac{4000}{r^3}$, entonces al hacer el computo de $A''\left(\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}\right)$ se tiene que $A''\left(\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}\right) > 0$ y esto implica que $r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$ es un mínimo local para $A(r)$.

De esta manera, tenemos que las dimensiones del cilindro que hacen que el área superficial sea mínima son $r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$ y $h = \dfrac{1000}{\pi r^2} = \dfrac{1000}{\pi \sqrt[3]{\dfrac{250000}{\pi^2}}}$.

Ejemplo (aplicación teorema de multiplicadores de Lagrange).

Se va a fabricar una caja rectangular abierta de modo que tenga un volumen fijo de 4 metros^3. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para minimizar la cantidad de material que se utilice para construirla?



Solución:

Para empezar, notemos que la función a optimizar es el área superficial de la caja construida, la cual se describe como:

$$f(x,y,z)=xy+2xz+2yz,$$

teniendo en cuenta que la caja es abierta (si fuera cerrada $f(x,y)=2xy+2xz+2yz$). Por otro lado, el cuento sobre el cual optimizaremos el área superficial de la caja está dado por:

$$\begin{cases} S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ xyz=4\}=g^{-1}(4), \\ \\ g(x,y,z)=xyz \end{cases}$$

Entonces por el teorema de multiplicadores de Lagrange es suficiente resolver el sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{gathered}\nabla f(x,y,z) = \lambda \cdot \nabla g(x,y,z),\\ xyz = 4.\end{gathered}}$$

Y el sistema de ecuaciones previo es equivalente al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
f_x &= \lambda g_x & y+2z &= \lambda(yz) & xy+2xz &= xyz\lambda & \quad (15)\\
f_y &= \lambda g_y & x+2z &= \lambda(xz) & xy+2yz &= xyz\lambda & \quad (16)\\
f_z &= \lambda g_z & 2x+2y &= \lambda(xy) & 2xz+2yz &= xyz\lambda & \quad (17)\\
xyz &= 4 & xyz &= 4 & xyz &= 4 & \quad (18)
\end{aligned}$$

Ahora, al igualar las ecuaciones (15) y (16) tenemos que:

$$\begin{cases} xy+2xz = xy+2yz, \\ 2xz = 2yz, xz = yz. \end{cases}$$

lo cual implica que $x = y$ (aquí usamos el hecho de que $x, y, z > 0$). Luego igualando las ecuaciones (16) y (17) tenemos que

$$\begin{cases} xy+2yz = 2xz+2yz, \\ xy = 2yz, \end{cases}$$

lo cual implica que $x = 2z$. Así, usando la ecuación (18) y el hecho que $x = y = 2z$ se obtiene lo siguiente:

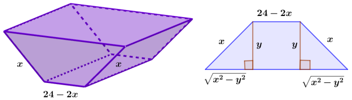
$$\begin{cases} xyz = x \cdot x \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right) = 4, \\ x = 2 \end{cases}$$

De esta forma tenemos que el único punto (x,y,z) que satisface las condiciones del teorema de multiplicadores de Lagrange con $x,y,z > 0$ es $(x,y,z) = (2,2,1)$. Además, se puede probar que en efecto este punto es donde el área superficial de la caja abierta con volumen 4 es mínima y su valor es

$$f(2,2,1) = (2)(2) + 2(2)(1) + 2(2)(1) = 12.$$

Ejemplo (aplicación teorema de multiplicadores de Lagrange).

Una lámina de hojalata de 24 cm de ancho se dobla para formar la parte longitudinal de un abrevadero cuya sección transversal es un trapecio isósceles. Calcule x (longitud del lado inclinado) y θ (ángulo de ese lado con la horizontal) de manera que el área de la sección transversal sea máxima y determine dicha área.



Solución:

Para empezar, notemos que la función a optimizar es el área del trapecio mostrado en la figura, la cual se describe algebraicamente como:

$$f(x,y) = (24-2x)y + y\sqrt{x^2-y^2}.$$

Además, cabe resaltar que la función f describe el área de la figura, y esta solo tiene sentido si suponemos que las distancias descritas en la figura anterior son positivas. Es decir $x \geq 0$, $24-2x \geq 0$, $y \geq 0$ y $x^2 - y^2 \geq 0$. Lo anterior implica que:

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 12, \\ 0 \leq y \leq x. \end{array}}$$

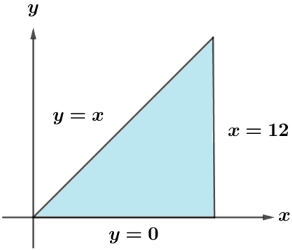
Por lo tanto, el anterior análisis muestra que:

($\checkmark$) La función a optimizar es

$$\boxed{f(x,y)=(24-2x)y+y\sqrt{x^2-y^2}.}$$

($\checkmark$) El conjunto en el que optimizaremos a f es

$$\boxed{S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 12\ ,\ 0\le y\le x\}.}$$



De esta manera para encontrar el máximo y mínimo de f sobre S procedemos de la siguiente manera:

Paso (1): Encontrar los puntos críticos de f en el interior de S.

Para esto, es suficiente resolver $\nabla f(x,y)=(f_x(x,y),f_y(x,y))=(0,0)$, lo cual equivale a tener:

$$\left(-2y+\frac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}},\ 24-2x+\sqrt{x^2-y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)=(0,0),$$

y esto nos dice que:

$$\begin{cases} -2y+\dfrac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}}=0,\\ 24-2x+\sqrt{x^2-y^2}-\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}=0. \end{cases}$$

Simplificando un poco, tenemos los siguientes resultados:

$$(\checkmark)\ \begin{cases} -2y+\dfrac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}}=0 & \Leftrightarrow\quad y\left(-2+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=0,\ \ 2\sqrt{x^2-y^2}=x, \\ y=0,\ \ 2\sqrt{x^2-y^2}=x & \Leftrightarrow\quad y=0,\ \ 4(x^2-y^2)=x^2 \quad\Leftrightarrow\quad y=0,\ \ 3x^2=4y^2, \\ y=0,\ \ 3x^2=4y^2 & \Leftrightarrow\quad y=0,\ \ y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}x. \end{cases}$$

Además, es fácil notar que él único resultado posible deacuerdo a nuestro problema es $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

$(\checkmark)$ Al reemplazar $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ en la ecuación $24-2x+\sqrt{x^2-y^2}-\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}=0$ se tiene que:

$$24-2x+\frac{x}{2}-\frac{\frac{3}{4}x^2}{\frac{1}{2}x}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 24-2x+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}x=0 \quad\Leftrightarrow\quad 24-3x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=8.$$

De lo anterior tenemos que el único punto crítico de f en el interior de S es:

$$\boxed{(x,y)=\left(x,\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)=(8,4\sqrt{3}).}$$

Paso (2): Encontrar el máximo de f en la frontera de S.

En este caso la frontera de S es $Fr(S) = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, donde:

$$\boxed{\begin{aligned} A_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0,\ 0 \leq x \leq 12\}, \\ A_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x,\ 0 \leq x \leq 12\}, \\ A_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 12,\ 0 \leq y \leq 12\}. \end{aligned}}$$

Veamos cual es el comportamiento de f a lo largo de A_1, A_2 y A_3.

($\checkmark$) Máximo de f sobre $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0,\ 0 \leq x \leq 12\}$.

Para todo $(x,y) = (x,0) \in A_1$, se tiene que $f(x,y) = f(x,0) = 0$.

($\checkmark$) Máximo de f sobre $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x,\ 0 \leq x \leq 12\}$.

Para todo $(x,y) = (x,x) \in A_2$, se tiene que $f(x,y) = f(x,x) = (24-2x)x + x\sqrt{x^2 - x^2} = 24x - 2x^2$. Por lo tanto, para hallar los valores máximos y mínimos de f sobre A_2 es suficiente encontrar los máximos y mínimos de la función $g(x) = 24x - 2x^2$ en el intervalo $[0,12]$. Para esto, es suficiente comparar los valores de g en sus puntos críticos que se encuentran en el intervalo $(0,12)$ junto con los puntos $g(0)$ y $g(12)$.

⋆ Como $g'(x) = 24 - 4x = 0$, entonces $x = 6$ es el único punto crítico de g.

⋆ $g(6)=24(6)-2\cdot 6^2=72$.

⋆ $g(0)=24(0)-2\cdot 0^2=0$.

⋆ $g(12)=24(12)-2(12)^2=0$.

Lo anterior muestra que el máximo de f sobre A_2 se obtiene en el punto $(x,y)=(x,x)=(6,6)$.

($\checkmark$) Máximo de f sobre $A_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=12,\ 0\leq y\leq 12\}$.

Para todo $(x,y)=(12,y)\in A_3$, se tiene que $f(12,y)=y\sqrt{144-y^2}$ con $0\leq y\leq 12$. Por lo tanto, para hallar los valores máximos y mínimos de f sobre A_3 es suficiente encontrar los máximos y mínimos de la función $h(x)=y\sqrt{144-y^2}$ en el intervalo $[0,12]$. Para esto, es suficiente comparar los valores de h en sus puntos críticos que se encuentran en $(0,12)$, con los valores de $h(0)$ y $h(12)$.

⋆ Como $h'(y)=\sqrt{144-y^2}-\dfrac{y^2}{\sqrt{144-y^2}}=0$, entonces $y=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$ es el único punto crítico de h.

⋆ $h(6\sqrt{2})=72$.

⋆ $h(0)=0$.

⋆ $h(12)=0$.

Lo anterior muestra que el valor máximo de f sobre A_3 se obtiene en el punto $(x,y)=(12,y)=(12,6\sqrt{2})$.

Paso (3): Comparar los resultados obtenidos de los pasos (1) y (2) mediante la función f y concluir donde f alcanza su valor máximo absoluto sobre S.

- $f(8,4\sqrt{3}) = 48\sqrt{3}$,
- $f(6,6) = 72$,
- $f(12,6\sqrt{2}) = 72$.

Así, el análisis exhaustivo anterior nos dice que f alcanza su valor máximo en el punto $(8,4\sqrt{3})$ y además el ángulo con la horizontal es:

$$\boxed{\theta = sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = sin^{-1}\left(\frac{4\sqrt{3}}{8}\right) = sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.}$$

Problemas.

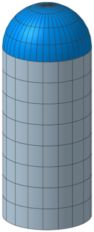
(1) Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como $f(x,y)=2x-y$. Determinar los máximos y mínimos de f sobre el conjunto S dado por:

$$S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 3x^2+2y^2=\frac{33}{2}\right\}.$$

(2) Sea $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como $f(x,y,z)=-x-4y+5z$. Determinar los máximos y mínimos de f sobre el conjunto S dado por:

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 5x^2+y^2+z^2-1030=0\}.$$

(3) Una granjera diseña un silo para guardar sus 900π pies^3 de grano. El silo va a tener forma cilíndrica con techo hemisférico. Suponga que hacer el techo cuesta (por pie^2 de lamina usada) cinco veces lo que cuesta hacer el piso circular, y hacer el piso cuesta el doble que hacer las paredes. Entonces ¿Qué dimensiones minimizan el costo total?



(4) Hallar los puntos sobre $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$ donde la función $f(x,y)=x^2+y^2-x-y+1$ alcanza su máximo y mínimo absoluto.

(5) Encontrar los valores extremos de $f(x,y,z)=x+z$ sobre la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

(6) ¿Qué dimensiones minimizan la cantidad de material necesario para construir una lata cilíndrica, de tal manera que pueda contener un litro de agua?

(7) Usar multiplicadores de Lagrange para probar que el triangulo con área máxima que tiene un perímetro P es un triángulo equilátero.

Ayuda: El área A de un triangulo con lados x, y y z se describe como:

$$\begin{cases} A=\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}, \\ s=\dfrac{x+y+z}{2}. \end{cases}$$

(8) Sea $f : A\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n}$$

con $x_1,\ldots,x_n$ números reales no negativos, entonces:

(a) Usando multiplicadores de Lagrange, encontrar el máximo absoluto de f en el conjunto $S=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n=c\}$ con c un número real positivo.

(b) Usando el literal (a), demostrar que:

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n}{n}$$

para todo $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ con $\begin{cases} x_i\geq 0, \\ i\in\{1,\dots,n\}. \end{cases}$