# Maestría en Ciencias Naturales y Matemáticas

## Clase 3 - Cálculo Avanzado de Varias Variables

Mg: Julián Uribe Castañeda

UPB

28 de febrero de 2023

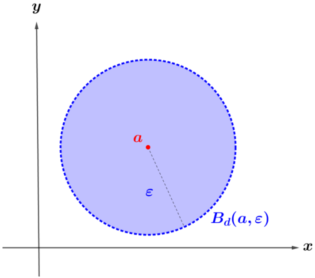
## Topología en $\mathbb{R}^n$ - Conjuntos abiertos y cerrados

A continuación definimos algunos conceptos básicos de topología.

### Definición (bola abierta en $\mathbb{R}^n$).

Sea $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una métrica en $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$. Entonces definimos la bola abierta en $\mathbb{R}^n$ con centro $a$ y radio $\varepsilon$ como

$$\boxed{B_d(a;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(a,x) < \varepsilon\}.}$$




El concepto de bola abierta será muy importante para nuestro estudio, ya que la noción de continuidad, diferenciabilidad y otras nociones importante dependen de esta definición.

***Definición (conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ respecto a una métrica $d$).***

Sea $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una métrica para $\mathbb{R}^n$ y $U\subseteq\mathbb{R}^n$. Decimos que $U$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica $d$, si para todo $a\in U$, existe $\varepsilon>0$ tal que $B_d(a;\varepsilon)\subseteq U$.

***Definición (conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$ respecto a una métrica $d$).***

Sea $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una métrica para $\mathbb{R}^n$ y $U\subseteq\mathbb{R}^n$. Decimos que $U$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica $d$, si:

$$U^c=\{x\in\mathbb{R}^n : x\notin U\}$$

es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica $d$.

***Teorema (Las bolas abiertas en $\mathbb{R}^n$ son conjuntos abiertos).***

Dados $a\in\mathbb{R}^n$ y $\varepsilon>0$, tenemos que $B_d(a;\varepsilon)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica $d$.

***Demostración.***

Sea $b\in B_d(a,\varepsilon)$ y entonces tenemos los siguientes casos:

*Caso (1):* Si $b=a$, entonces al tomar $\delta:=\varepsilon$ tenemos que $B_d(b,\delta)\subseteq B_d(a,\varepsilon)$.

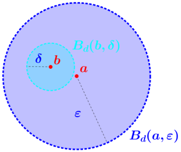
De hecho, tenemos que $B_d(b,\delta)=B_d(a,\varepsilon)$.

*Caso (2):* Si $b \neq a$, entonces al tomar $\delta := \dfrac{\text{mín}\{d(a,b); \varepsilon - d(a,b)\}}{2}$ tenemos que $B_d(b,\delta) \subseteq B_d(a,\varepsilon)$.

Para ver que $B_d(b,\delta) \subseteq B_d(a,\varepsilon)$, tomemos $x \in B_d(b,\delta)$ y veamos que $x \in B_d(a,\varepsilon)$.

$$\Big\{ \; d(a,x) \leq d(a,b) + d(b,x) \leq d(a,b) + \delta < d(a,b) + \varepsilon - d(a,b) = \varepsilon.$$

De lo anterior, concluimos que $d(a,x) < \varepsilon$, lo cual significa que $x \in B_d(a;\varepsilon)$ y así $B_d(b,\delta) \subseteq B_d(a,\varepsilon)$. En particular $B_d(a,\varepsilon)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica $d$.




■

***Teorema (propiedades de conjuntos abiertos).***

Sea $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una métrica para $\mathbb{R}^n$, entonces:

(1) Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una colección de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica $d$, entonces

$$\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$$

es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica $d$.

(2) Si $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ es una colección de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica $d$, entonces

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i$$

es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica $d$.

***Demostración.***

(1) Dado $a \in \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$, tenemos que existe $\beta \in J$ tal que $a \in U_\beta$. Así, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_d(a,\varepsilon) \subseteq U_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha,$$

lo cual implica que $B_d(a,\varepsilon) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ y así $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ es un conjunto abierto.

(2) Dado $a \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, tenemos que $a \in U_i$ para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$. Así, existen $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ números positivos tales que $B_d(a;\varepsilon_i) \subseteq U_i$ para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$. Si tomamos $\varepsilon := \min_{1\leq i\leq n} \varepsilon_i$, entonces para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ se tiene que

$$B_d(a;\varepsilon) \subseteq B_d(a;\varepsilon_i) \subseteq U_i,$$

lo cual implica que $B_d(a;\varepsilon) \subseteq U_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y así $B_d(a;\varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Esto demuestra que $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ es un conjunto abierto.

■

***Corolario (propiedades de conjuntos cerrados).***

Sea $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una métrica para $\mathbb{R}^n$, entonces:

(1) Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una colección de conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica $d$, entonces

$$\bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha$$

es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica $d$.

(2) Si $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ es una colección de conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica $d$, entonces

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica $d$.

***Demostración.***

(1) Supongamos que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es una colección de conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica $d$. Para probar que $\bigcap\limits_{\alpha\in J} U_\alpha$ es cerrado, es necesario verificar que $\left(\bigcap\limits_{\alpha\in J} U_\alpha\right)^c$ es abierto. En este caso, tenemos que

(✓) Para cada $\alpha\in J$ se tiene que $U_\alpha^c$ es abierto.

(✓) Por el teorema anterior, tenemos que $\left(\bigcap\limits_{\alpha\in J} U_\alpha\right)^c = \bigcup\limits_{\alpha\in J} U_\alpha^c$ es abierto.

Así, tenemos que $\bigcap\limits_{\alpha\in J} U_\alpha$ es cerrado.

(2) Supongamos que $\{U_i\}_{i=1}^n$ es una colección finita de conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica $d$. Para probar que $\bigcup\limits_{i=1}^n U_i$ es cerrado, es necesario verificar que $\left(\bigcup\limits_{i=1}^n U_i\right)^c$ es abierto. En este caso, tenemos que

(✓) Para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$ se tiene que $U_i^c$ es abierto.

(✓) Por el teorema anterior, tenemos que $\left(\bigcup\limits_{i=1}^n U_i\right)^c = \bigcap\limits_{i=1}^n U_i^c$ es abierto.

Así, tenemos que $\bigcup_{i=1}^{n} U_\alpha$ es cerrado.

$\blacksquare$

***Observación (teorema anterior).***

Es importante resaltar en el teorema anterior que no siempre la intersección arbitraria de abiertos es un conjunto abierto. Para entender esto veamos el siguiente ejemplo.

***Ejemplo (intersección de abiertos no necesariamente es abierto).***

Sea $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la métrica Euclídea sobre $\mathbb{R}$, entonces:

(1) Demostrar que para todo $a\in\mathbb{R}$ y todo $\varepsilon>0$ se tiene $B_d(a;\varepsilon)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$.

(2) Demostrar que $\{0\}$ no es conjunto abierto en $\mathbb{R}$ con la métrica Euclídea.

(3) Demostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_d\left(0;\frac{1}{n}\right)=\{0\}$.

***Solución:***

(1) Dado $a\in\mathbb{R}$ y $\varepsilon>0$ tenemos que

$$B_d(a;\varepsilon)=\{x\in\mathbb{R}: d(a,x)<\varepsilon\}=\{x\in\mathbb{R}: \sqrt{(x-a)^2}=|x-a|<\varepsilon\}.$$

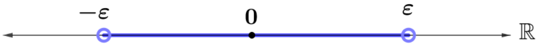
Ahora, recordando la definición de la función valor absoluto, tenemos que:

$$|x-a|=\begin{cases} x-a & \text{si } x-a\geq 0, \\ -(x-a) & \text{si } x-a<0 \end{cases} = \begin{cases} x-a & \text{si } x\geq a, \\ a-x & \text{si } x<a. \end{cases}$$

De esta manera, tenemos que

$$|x-a|<\varepsilon \iff \begin{cases} x-a<\varepsilon & \text{si } x\geq a, \\ a-x<\varepsilon & \text{si } x<a. \end{cases} \iff \begin{cases} x<a+\varepsilon & \text{si } x\geq a, \\ a-\varepsilon<x & \text{si } x<a. \end{cases} \iff a-\varepsilon<x<a+\varepsilon.$$

Esto muestra que $B_d(a;\varepsilon)=\{x\in\mathbb{R}: a-\varepsilon<x<a+\varepsilon\}=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$.




$$\boldsymbol{B_d(0;\varepsilon)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)}$$

(2) Si $\{0\}$ fuera un conjunto abierto, entonces existiría un número $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(0;\varepsilon) \subseteq \{0\}$. Pero esto no es posible ya que $B_d(0;\varepsilon) = (-\varepsilon,\varepsilon)$ tiene infinitos puntos y $\{0\}$ solo tiene un punto.

(3) Supongamos que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_d\left(0;\frac{1}{n}\right)$, entonces $x \in B_d\left(0;\frac{1}{n}\right)$ para cada $n \geq 1$. Así, tenemos que:

$$x \in B_d\left(0;\frac{1}{n}\right) \text{ para cada } n \geq 1 \iff -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \text{ para cada } n \geq 1.$$

Y como $\lim\limits_{n\mapsto\infty} -\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\mapsto\infty} \frac{1}{n} = 0$, entonces el teorema de estricción nos dice que

$$\lim_{n\mapsto\infty} x = 0.$$

Pero $\lim\limits_{n\mapsto\infty} x = x$, lo cual muestra que $x = 0$ es el único punto de $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_d\left(0;\frac{1}{n}\right)$.

***Observación (uniones de conjuntos cerrados).***

De manera similar es importante resaltar que no siempre la unión de conjuntos cerrados es cerrado. Se deja como ejercicio al lector verificar esto.

# Problemas..

(1) Sea $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una métrica en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que $\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$ son conjuntos abiertos y cerrados en $\mathbb{R}^n$ respecto a la métrica $d$.

(2) Sea $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una métrica en $\mathbb{R}^n$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$ y $a\in A$. Decimos que $a$ es un punto interior de $A$, si existe $\varepsilon>0$ tal que $B_d(a;\varepsilon)\subseteq A$. Si denotamos por $int(A)$ al conjunto de puntos interiores de $A$, entonces demostrar que $int(A)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica $d$.

(3) Sea $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una métrica en $\mathbb{R}^n$ y $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Demostrar que

$$\boxed{A \text{ es un conjunto abierto en } \mathbb{R}^n \text{ bajo la métrica } d \iff int(A)=A.}$$

(4) Sea $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una métrica en $\mathbb{R}^n$ y $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Demostrar que

$$\boxed{int(A)=\bigcup_{\substack{B\subseteq A\\ B\ \text{abierto}}} B.}$$

Esto nos dice que $int(A)$ es el conjunto abierto más grande contenido en $A$.

(5) Suponiendo que $\mathbb{R}$ tiene la métrica Euclídea, encontrar el interior de los siguientes conjuntos.

(a) $A = (5,7) = \{x \in \mathbb{R} : 5 < x < 7\}$.

(b) $B = [3,8) = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x < 8\}$.

(c) $C = (2,4) \cup (4,8] = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 4 \text{o } 4 < x \leq 8\}$.

(d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{1}{n} \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\right\}$.

(6) Verificar si los conjuntos dados en (5) son conjuntos abiertos respecto a la métrica Euclídea en $\mathbb{R}$.

(7) Verificar si los conjuntos dados en (5) son conjuntos cerrados respecto a la métrica Euclídea en $\mathbb{R}$.

(8) Suponiendo que $\mathbb{R}^2$ tiene la métrica Euclídea, encontrar el interior de los siguientes conjuntos.

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$.

(b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1,\ 0 < y \leq 1\}$.

(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$.

(9) Verificar si los conjuntos dados en (8) son conjuntos abiertos respecto a la métrica Euclídea en $\mathbb{R}^2$.