# Maestría en Ciencias Naturales y Matemáticas

## Clase 20 - Cálculo Avanzado de Varias Variables


Mg: Julián Uribe Castañeda

UPB


6 de agosto de 2023

# Teorema de Cambio de Variable

***Idea (uso del teorema).***

El teorema de cambio de variable nos ayuda a determinar el valor de una integral para una función de variables de manera alternativa. En este caso, se realizan cambios de variable para que la integral dada sea más sencilla de hacer. Para entender esto un poco mejor, veamos el siguiente ejemplo, el cual muestra la utilidad de hacer cambios de variable para determinar el valor de una integral.

***Ejemplo (cambio de variable funciones de una variable).***

Hallar el valor de la integral $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\sqrt{1+x\sqrt{x}}\,dx.$

***Solución:***

Para realizar esta integral, realizamos el cambio de variable dado por:

$$u = 1 + x\sqrt{x},$$

y así tenemos que

$$(\checkmark)\ du = d(1+x\sqrt{x}) = d(x^{3/2}) = \frac{3}{2}x^{1/2}dx = \frac{3}{2}\sqrt{x}dx \iff dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{du}{\sqrt{x}}.$$

($\checkmark$) Si $x=0$, entonces $u=1+0\sqrt{0}=1$.

($\checkmark$) Si $x=1$, entonces $u=1+1\sqrt{1}=2$.

De lo anterior concluimos que

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_0^1 \sqrt{x}\,\sqrt{1+x\sqrt{x}}\,dx=\int_1^2 \sqrt{x}\,\sqrt{u}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{du}{\sqrt{x}}\right)=\int_1^2 \frac{2}{3}\sqrt{u}\,du=\\ &\frac{2}{3}\int_1^2 \sqrt{u}\,du=\frac{2}{3}\int_1^2 u^{1/2}\,du=\frac{2}{3}\left(\left.\frac{u^{3/2}}{3/2}\right|_1^2\right)=\frac{4}{9}\left(2^{3/2}-1\right).\end{aligned}}$$

En este caso, hemos realizado el cambio de variable $u=1+x\sqrt{x}$ para convertir la integral $\int_0^1 \sqrt{x}\,\sqrt{1+x\sqrt{x}}\,dx$ en la integral $\int_1^2 \frac{2}{3}\sqrt{u}\,du$ que es mucho más sencilla de hacer que la integral inicial.

***Observación (cambios de variable de funciones de una variable).***

Es importante destacar que al hacer cambios de variable (ó sustituciones) para integrales de funciones de una variable real, los limites de integración y la función a integrar cambian. Es decir que si deseamos encontrar la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ usando el cambio de variable dado por $x = g(t)$ (ó $t = g^{-1}(x)$), obtenemos:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\cdot g'(t)\,dt.}$$

La verificación de este hecho es sencilla, ya que

($\checkmark$) Si $x = g(t)$, entonces $dx = d(g(t)) = g'(t)dt$.

($\checkmark$) Si $x = g(t)$, entonces $t = g^{-1}(x)$ y así

$$\begin{cases} \text{Si } x = a \text{ entonces } t = g^{-1}(a), \\ \\ \text{Si } x = b \text{ entonces } t = g^{-1}(b). \end{cases}$$

y así concluimos que

$$\int_{a}^{b} f(x)\ dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t)\ dt.$$

En ocasiones, el factor $g'(t)$ es llamado el factor de corrección del cambio de variable $x = g(t)$.

### *Nota (siguiente teorema).*

El siguiente es el teorema de cambio de variable para integrales dobles. Este teorema nos dice como interpretar una integral de la forma

$$\iint_{D} f(x,y)\ dA$$

realizando un cambio de variable dado por $(x,y) = g(u,v)$, donde $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una función con ciertas características.

### *Teorema (cambio de variable para integrales dobles).*

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una función que satisface las siguientes condiciones:

- $g \in C^1(g^{-1}(D); \mathbb{R}^2)$ y $det[Dg(u,v)] \neq 0$ para todo $(u,v) \in g^{-1}(D)$.
- $g$ es una función inyectiva en $g^{-1}(D)$.

Entonces

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\ dA = \iint_{g^{-1}(D)} f(g(u,v)) \cdot \left| det\left[Dg(u,v)\right]\right|\ du\ dv.}$$

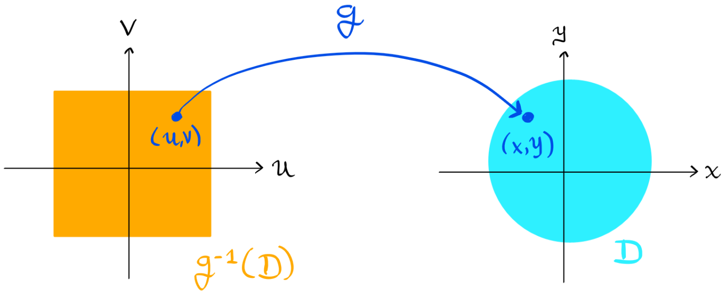
### *Observación (teorema anterior).*

En el teorema anterior, lo que denominamos cambio de variable es básicamente decir que $(x,y) = g(u,v)$. Al hacer este cambio de variable surgen algunos cambios en la integral

$$\iint_D f(x,y)\ dA,$$

los cuales son:

($\checkmark$) Cambiamos la región de integración $D$ que se describe en términos de $(x,y)$ a la región $g^{-1}(D)$ que se describe en términos de $(u,v)$.




($\checkmark$) Multiplicamos la función $f$ por el factor $\left|det[Dg(u,v)]\right|$, el cual le denominamos el factor de corrección del cambio de variable $(x,y)=g(u,v)$.

***Observación (teorema anterior).***

Sea $g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la función definida como

$$g(r,\theta)=(rcos\theta, rsin\theta)$$

para cada $(r,\theta)\in\mathbb{R}^2$. Entonces $g$ satisface las siguientes propiedades:

($\checkmark$) $g \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$.

($\checkmark$) $det\,[Dg(r,\theta)] = det \begin{bmatrix} cos\theta & -rsin\theta \\ sin\theta & rcos\theta \end{bmatrix} = rcos^2\theta + rsin^2\theta = r$.

Entonces al hacer $(x,y) = g(r,\theta) = (rcos\theta, rsin\theta)$ (realizar el cambio de variable a coordenadas polares), tenemos el siguiente resultado.

***Corolario (cambio de variable a coordenadas polares).***

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una función que satisface las siguientes condiciones:

- $g(r,\theta) = (rcos\theta, rsin\theta)$ para cada $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$.
- $g$ es una función inyectiva en $g^{-1}(D)$.

Entonces

$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x,y)\ dA = \iint\limits_{g^{-\mathbf{1}}(D)} f(g(r,\theta)) \cdot r\ dr\ d\theta = \iint\limits_{g^{-\mathbf{1}}(D)} f(rcos\theta, rsin\theta) \cdot r\ dr\ d\theta.}$$

**Ejemplo (cambio de variable a coordenadas polares).**

Encontrar el valor de la integral $\displaystyle\iint_D 1-x^2-y^2\ dA$, donde $D$ es la región en el plano acotada por la recta $y=0$ y la circunferencia $x^2+y^2=1$ con $y\geq 0$.

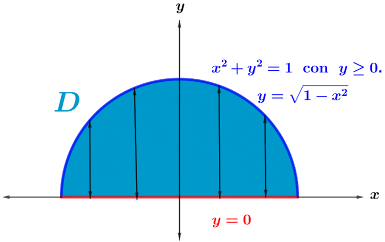
**Solución:**

Para hallar $\displaystyle\iint_D 1-x^2-y^2\ dA$ realizamos los siguientes pasos:

*Paso (1):* Describir la región $D$.

Es sencillo notar que $D$ es una región de tipo 1 que se describe como:

$$\boxed{D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq \sqrt{1-x^2}\}.}$$



*Paso (2):* Realizar la integral $\iint_D 1-x^2-y^2 \; dA$ usando el resultado del paso (1).

Dado que ya hemos descrito la región de integración $D$, entonces

$$\iint_D 1-x^2-y^2 \; dA = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} 1-x^2-y^2 \; dy \; dx.$$

Aunque esta integral no es tan complicada de hacer, usaremos el teorema de cambio de variable a coordenadas polares para resolverla. Para esto notaremos las siguientes cosas:

(1) Describir la función $f(x,y) = 1-x^2-y^2$ en coordenadas polares $(x,y) = (rcos\theta, rsin\theta)$.

$$1-x^2-y^2 = 1-(x^2+y^2) = 1-r^2.$$

(2) Describir $D$ en coordenadas polares.

$$\underset{\text{cartesianas}}{D} = \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}. \end{cases} \iff \underset{\text{polares}}{D} = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

De esta forma, el teorema de cambio de variable a coordenadas polares nos dice que:

$$\underbrace{\iint\limits_{D} 1-x^2-y^2 \; dA}_{\text{cartesianas}} = \underbrace{\iint\limits_{D} (1-r^2)\cdot r \; dr \; d\theta}_{\text{polares}} = \int_0^{\pi}\int_0^{1} r-r^3 \; dr \; d\theta =$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{1} r-r^3 \; dr \; d\theta = \int_0^{\pi} \left(\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^1 - \left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 \; d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}-\frac{1}{4} \; d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

***Nota (ejemplo anterior).***

Es importante destacar que $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} 1-x^2-y^2 \; dy \; dx$ es más complicada que $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{1} r-r^3 \; dr \; d\theta$. Es por este motivo que el teorema de cambio de variable es útil.

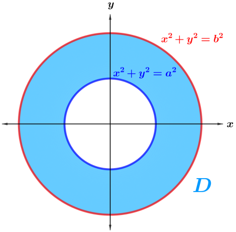
## Ejemplo (cambio de variable a coordenadas polares).

Hallar el valor de $\displaystyle\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dA$, donde $D$ es la región que se encuentra acotada entre $x^2+y^2=a^2$ y $x^2+y^2=b^2$ con $0<a<b$.

**Solución:**

Notemos inicialmente que la región $D$ se describe como:

$$\underset{\text{cartesianas}}{D} = \left\{a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2\right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \underset{\text{polares}}{D} = \begin{cases} a^2 \leq r^2 \leq b^2, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$




Así tenemos que $D$ se describe en coordenadas polares como

$$\underset{\text{polares}}{D} = \begin{cases} a \leq r \leq b, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Y por el teorema de cambio de variable (a coordenadas polares $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$), tenemos que

$$\underbrace{\iint_D}_{\text{cartesianas}} \frac{y^2}{x^2+y^2}\, dA = \underbrace{\iint_D}_{\text{polares}} \frac{(r\sin\theta)^2}{r^2}\cdot r\ dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_a^b r\sin^2\theta\ dr\ d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cdot \left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_a^b\ d\theta =$$

$$=\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\ d\theta = \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)\pi.$$

***Nota (ejemplo anterior).***

Es importante resaltar que en el ejemplo anterior, la región de integración $D$ no es una región elemental, pero se puede escribir como una unión de regiones elementales. Es por esto que es más fácil hacer la integral $\int_0^{2\pi}\int_a^b r\sin\theta\ dr\ d\theta$ que la integral $\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2}\ dA$ usando regiones elementales.

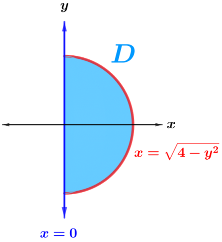
## *Ejemplo (cambio de variable a polares).*

Hallar el valor de $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dA$, donde $D$ es la región acotada por el semicírculo $x=\sqrt{4-y^2}$ y el eje $y$.

***Solución:***

Notemos inicialmente que la región $D$ se describe como:

$(\checkmark)$ $\underset{\text{cartesianas}}{D} = \begin{cases} -2 \le y \le 2, \\ 0 \le x \le \sqrt{4-y^2}. \end{cases} \Leftrightarrow \underset{\text{cartesianas}}{D} = \begin{cases} x^2+y^2 \le 4, \\ 0 \le x. \end{cases}$




$(\checkmark)$ $\underset{\text{polares}}{D} = \begin{cases} 0 \le r^2 \le 4, \\ 0 \le rcos\theta \end{cases} \Leftrightarrow \underset{\text{polares}}{D} = \begin{cases} 0 \le r \le 2, \\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Y por el teorema de cambio de variable (a coordenadas polares $(x,y)=(rcos\theta, rsin\theta)$), tenemos que

$$\underbrace{\iint\limits_{D} e^{-x^2-y^2}\, dA}_{\text{cartesianas}} = \underbrace{\iint\limits_{D} e^{-r^2}\cdot r\; dr\; d\theta}_{\text{polares}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{2} re^{-r^2}\; dr\; d\theta \underset{u=-r^2}{=}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{-4} e^{u}\; du\; d\theta = -\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{u}\Big|_{0}^{-4}\; d\theta = -\frac{1}{2}\left(e^{-4}-e^{0}\right)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\; d\theta = \frac{\pi(1-e^{-4})}{2}.$$

***Nota (ejemplo anterior).***

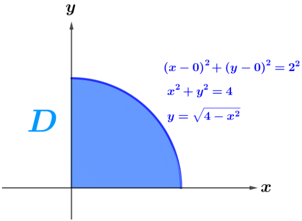
Es importante resaltar que la integral $\iint\limits_{D} e^{-x^2-y^2}\; dA$ no se puede hacer usando coordenadas cartesinas, ya que $\int e^{-t^2}\; dt$ no se puede hacer por métodos elementales.

## *Ejemplo (cambio de variable a coordenadas polares).*

Hallar $\displaystyle\iint_D cos(\sqrt{x^2+y^2})\ dA$ donde $D$ es la porción de disco con centro en el origen, radio 2 y que se encuentra en el primer cuadrante.

**Solución:**

Notemos inicialmente que la región $D$ se describe como:




$$\underset{\text{cartesianas}}{D} = \begin{cases} x^2+y^2 \leq 4, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \underset{\text{polares}}{D} = \begin{cases} r^2 \leq 4, \\ rcos\theta \geq 0, \\ rsin\theta \geq 0. \end{cases}$$

$$\underset{\text{polares}}{D} = \begin{cases} 0 \leq r \leq 2, \\ cos\theta \geq 0, \\ sin\theta \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \underset{\text{polares}}{D} = \begin{cases} 0 \leq r \leq 2, \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$\underbrace{\iint_{D}}_{\text{cartesianas}} \cos(\sqrt{x^2+y^2})\ dA = \underbrace{\iint_{D}}_{\text{polares}} \cos(r)\cdot r\ dr\ d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2} r\cos(r)\ dr d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} r\sin(r)+\cos(r)\Big|_{r=0}^{r=2}\ d\theta = (2\sin(2)+\cos(2)-1)\,\frac{\pi}{2}.$$

### *Nota (siguiente teorema).*

El siguiente es el teorema de cambio de variable para integrales triples. Este teorema nos dice como interpretar una integral de la forma

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV$$

realizando un cambio de variable dado por $(x,y,z)=g(u,v,w)$, donde $g: A\subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una función con ciertas características.

### Teorema (cambio de variable para integrales triples).

Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $g : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función que satisface las siguientes condiciones:

- $g \in C^1(g^{-1}(E); \mathbb{R}^3)$ y $det[Dg(u,v,w)] \neq 0$ para todo $(u,v,w) \in g^{-1}(E)$.
- $g$ es una función inyectiva en $g^{-1}(E)$.

Entonces

$$\boxed{\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \iiint_{g^{-1}(E)} f(g(u,v,w)) \cdot \left| det[Dg(u,v,w)] \right|\ du\ dv\ dw.}$$

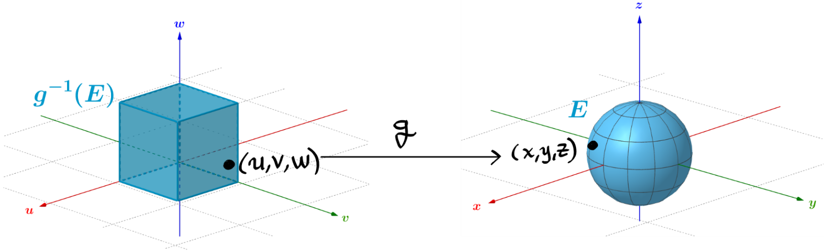
### Observación (teorema anterior).

En el teorema anterior, lo que denominamos cambio de variable es básicamente decir que $(x,y,z) = g(u,v,w)$. Al hacer este cambio de variable surgen algunos cambios en la integral

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV,$$

los cuales son:

($\checkmark$) Cambiamos la región de integración $E$ que se describe en términos de $(x,y,z)$ a la región $g^{-1}(E)$ que se describe en términos de $(u,v,w)$.




($\checkmark$) Multiplicamos la función $f$ por el factor $\left|det\left[Dg(u,v,w)\right]\right|$, el cual le denominamos el factor de corrección del cambio de variable $(x,y,z)=g(u,v,w)$.

***Observación (teorema anterior).***

Sea $g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la función definida como

$$g(r,\theta,z)=(rcos\theta, rsin\theta, z)$$

para cada $(r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3$. Entonces $g$ satisface las siguientes propiedades:

($\checkmark$) $g \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$.

($\checkmark$) $$det[Dg(r,\theta,z)] = det\begin{bmatrix} cos\theta & -rsin\theta & 0 \\ sin\theta & rcos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = rcos^2\theta + rsin^2\theta = r.$$

Entonces al hacer $(x,y,z) = g(r,\theta,z) = (rcos\theta, rsin\theta, z)$ (realizar el cambio de variable a coordenadas cilíndricas), tenemos el siguiente resultado.

***Corolario (cambio de variable a coordenadas cilíndricas).***

Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función que satisface las siguientes condiciones:

- $g(r,\theta,z) = (rcos\theta, rsin\theta, z)$ para cada $(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3$.
- $g$ es una función inyectiva en $g^{-1}(E)$.

Entonces

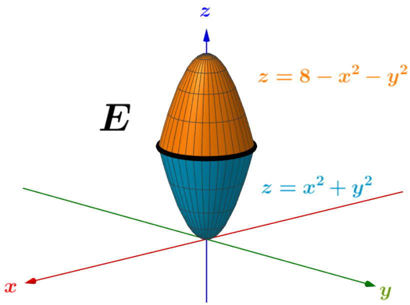
$$\boxed{\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \iiint_{g^{-1}(E)} f(g(r,\theta,z)) \cdot r\ dz\ dr\ d\theta = \iiint_{g^{-1}(E)} f(rcos\theta, rsin\theta, z) \cdot r\ dz\ dr\ d\theta.}$$

## *Ejemplo (cambio de variable a coordenadas cilíndricas).*

Calcular el volumen del sólido $E \subseteq \mathbb{R}^3$ que está acotado por los paraboloides $z = 8 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

## Solución:

Notemos inicialmente que la región $E$ se describe como:




$$\underset{\text{cartesianas}}{E} = \begin{cases} x^2 + y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2, \\ x^2 + y^2 \leq 8 - x^2 - y^2. \end{cases}$$

$$\underset{\text{cartesianas}}{E} = \begin{cases} x^2 + y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2, \\ 2(x^2 + y^2) \leq 8. \end{cases}$$

$$\underset{\text{cartesianas}}{E} = \begin{cases} x^2 + y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2, \\ x^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$$

$$\underset{\text{cilíndricas}}{E} = \begin{cases} r^2 \leq z \leq 8 - r^2, \\ r^2 \leq 4. \end{cases} \iff \underset{\text{cilíndricas}}{E} = \begin{cases} r^2 \leq z \leq 8 - r^2, \\ 0 \leq r \leq 2, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Y por el teorema de cambio de variable (a coordenadas cilíndricas $(x,y,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$), tenemos que

$$Vol(E)=\underset{\substack{E\\ \text{cartesianas}}}{\iiint} 1\ dV=\underset{\substack{E\\ \text{cilíndricas}}}{\iiint} 1\cdot r\ dz\ dr\ d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{8-r^2} r\ dz\ dr\ d\theta=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r(8-r^2-r^2)\ dr\ d\theta=2\pi\int_0^{2} 8r-2r^3\ dr=2\pi\left(\frac{8r^2}{2}-\frac{2}{4}r^4\right)\Bigg|_0^2=2\pi(16-8)=16\pi.$$

### *Nota (ejemplo anterior).*

Es importante resaltar que el ejemplo anterior se pudo haber hecho con integrales en coordenadas cartesianas de la siguiente manera:

$$Vol(E)=\underset{\substack{E\\ \text{cartesianas}}}{\iiint} 1\ dV=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\ dz\ dy\ dx.$$

Pero esta integral es bastante tediosa de hacer.

## *Ejemplo (cambio de variable a coordenadas cilíndricas).*

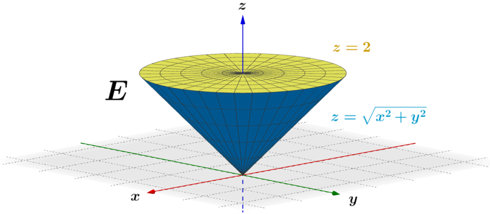
Hallar $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} x^2+y^2 \; dz \; dy \; dx.$

***Solución:***

Es sencillo notar que lo único que necesitamos hacer para resolver esta integral es realizar el cálculo de cada una de las integrales iteradas, pero este proceso es muy largo y se deja al lector verificar esto.

Por este motivo, vamos a cambiar de enfoque para resolver esta integral, y para esto veamos cual es la región $E$ de integración de la integral dada.

$$\underset{\text{cartesianas}}{E} = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2, \\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, \\ -2 \leq x \leq 2. \end{cases}$$



$$\underset{\text{cartesianas}}{E} = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2, \\ \\ x^2+y^2 \le 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{cilíndricas}}{E} = \begin{cases} r \le z \le 2, \\ \\ r^2 \le 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{cilíndricas}}{E} = \begin{cases} r \le z \le 2, \\ 0 \le r \le 2, \\ 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

Y por el teorema de cambio de variable (a coordenadas cilíndricas $(x,y,z) = (rcos\theta, rsin\theta, z)$), tenemos que

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} x^2+y^2 \; dz \; dy \; dx = \iiint\limits_{\underset{\text{cartesianas}}{E}} x^2+y^2 \; dV = \iiint\limits_{\underset{\text{cilíndricas}}{E}} r^2 \cdot r \; dz \; dr \; d\theta =$$

$$\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2} \int_{r}^{2} r^3 \; dz \; dr \; d\theta = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2} r^3(2-r) \; dr \; d\theta = 2\pi \int_{0}^{2} 2r^3 - r^4 \; dr =$$

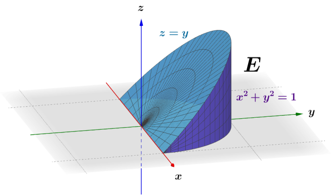
$$2\pi \left( \frac{2}{4} r^4 - \frac{r^5}{5} \right) \Bigg|_0^2 = 2\pi \left( \frac{2}{4} \cdot 16 - \frac{32}{5} \right) = 2\pi \left( 8 - \frac{32}{5} \right) = \frac{16\pi}{5}.$$

## *Ejemplo (cambio de variable a coordenadas cilíndricas).*

Hallar $\displaystyle\iiint_E xz\, dV$, donde $E$ es el sólido limitado por las superficies $z=0$, $z=y$, $x^2+y^2=1$ y la región $y\geq 0$.

## *Solución:*

Notemos inicialmente que $E$ se describe como




- $E_{\text{cartesianas}} = \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1, \\ 0 \leq z \leq y, \\ y \geq 0. \end{cases}$

- $E_{\text{cilíndricas}} = \begin{cases} r^2 \leq 1, \\ 0 \leq z \leq r\sin(\theta), \\ r\sin(\theta) \geq 0. \end{cases} = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq z \leq r\sin(\theta), \\ 0 \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$

Y por el teorema de cambio de variable (a coordenadas cilíndricas $(x,y,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$), tenemos que

$$\underbrace{\iiint_E xz\, dV}_{\text{cartesianas}} = \underbrace{\iiint_E [r\cos(\theta)z]\cdot r\; dz\; dr\; d\theta}_{\text{cilíndricas}} = \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{r\sin(\theta)} [r\cos(\theta)z]\cdot r\; dz\; d\theta\; dr =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{r\sin(\theta)} r^2\cos(\theta)z\; dz\; d\theta\; dr = \int_0^1 \int_0^{\pi} r^2\cos(\theta) \left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=r\sin(\theta)} d\theta\; dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{\pi} r^4\cos(\theta)\; \sin^2(\theta)\; d\theta\; dr = \frac{1}{2}\int_0^1 r^4 \int_0^{\pi} \cos(\theta)\; \sin^2(\theta)\; d\theta\; dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 r^4 \left(\frac{\sin^3(\theta)}{3}\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi} dr = 0.$$

***Observación(teorema anterior).***

Sea $g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la función definida como

$$g(\rho,\phi,\theta) = (\rho\, cos(\theta) sin(\phi), \rho\, sin(\theta) sin(\phi), \rho\, cos(\phi))$$

para cada $(\rho,\phi,\theta) \in \mathbb{R}^3$. Entonces $g$ satisface las siguientes propiedades:

$(\checkmark)$ $g \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$.

$$(\checkmark)\ det\,[Dg(\rho,\phi,\theta)] = det \begin{bmatrix} cos(\theta)sin(\phi) & \rho\, cos(\theta)cos(\phi) & -\rho\, sin(\theta)sin(\phi) \\ sin(\theta)sin(\phi) & \rho\, sin(\theta)cos(\phi) & \rho\, cos(\theta)sin(\phi) \\ cos(\phi) & -\rho\, sin(\phi) & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\rho^2 cos^2(\theta) sin^3(\phi) + \rho^2 cos^2(\theta) cos^2(\phi) sin(\phi)} + \underbrace{\rho^2 sin^2(\theta) sin^3(\phi) + \rho^2 sin^2(\theta) cos^2(\phi) sin(\phi)}$$

$$= \rho^2 cos^2(\theta) sin(\phi)\ [sin^2(\phi) + cos^2(\phi)] + \rho^2 sin^2(\theta) sin(\phi)\ [sin^2(\phi) + cos^2(\phi)] =$$

$$= \rho^2 cos^2(\theta) sin(\phi) + \rho^2 sin^2(\theta) sin(\phi) = \rho^2 sin(\phi)\ [cos^2(\theta) + sin^2(\theta)] = \rho^2 sin(\phi).$$

Entonces al hacer $(x,y,z) = g(\rho,\phi,\theta) = (\rho\, cos(\theta) sin(\phi), \rho\, sin(\theta) sin(\phi), \rho\, cos(\phi))$ (realizar el cambio de variable a coordenadas esféricas), tenemos el siguiente resultado.

### *Corolario (cambio de variable a coordenadas esféricas).*

Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función que satisface las siguientes condiciones:

- $g(\rho,\phi,\theta) = (\rho cos(\theta) sin(\phi), \rho sin(\theta) sin(\phi), \rho cos(\phi))$ para cada $(\rho,\phi,\theta) \in \mathbb{R}^3$.
- $g$ es una función inyectiva en $g^{-1}(E)$.

Entonces

$$\iiint\limits_{E} f(x,y,z)\ dV = \iiint\limits_{g^{-1}(E)} f(g(\rho,\phi,\theta)) \cdot \rho^2 sin(\phi)\ d\rho\ d\phi\ d\theta =$$

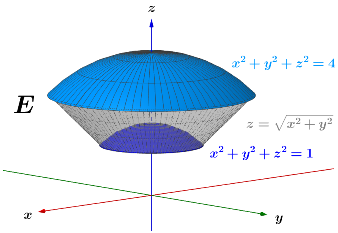
$$\iiint\limits_{E} f(x,y,z)\ dV = \iiint\limits_{g^{-1}(E)} f(\rho cos(\theta) sin(\phi), \rho sin(\theta) sin(\phi), \rho cos(\phi)) \cdot \rho^2 sin(\phi)\ d\rho\ d\phi\ d\theta.$$

## *Ejemplo (cambio de variable a coordenadas esféricas).*

Hallar $\displaystyle\iiint\limits_E \frac{e^{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dV$, donde $E$ es el sólido limitado por las esferas $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$ y encima del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

***Solución:***

Notemos inicialmente que $E$ se describe como




$$(\checkmark)\quad \underset{\text{cartesianas}}{E} = \begin{cases} 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4, \\ z \geq \sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

$$(\checkmark)\quad \underset{\text{cartesianas}}{E} = \begin{cases} 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4, \\ z^2 \geq x^2+y^2, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

$$\underset{\text{cartesianas}}{E} = \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \\ z^2 \geq x^2 + y^2, \\ z \geq 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{esféricas}}{E} = \begin{cases} 1 \leq \rho^2 \leq 4, \\ \rho^2 cos^2(\phi) \geq \rho^2 sin^2(\phi), \\ \rho\, cos(\phi) \geq 0. \end{cases}$$

$$\underset{\text{esféricas}}{E} = \begin{cases} 1 \leq \rho \leq 2, \\ tan^2(\phi) \leq 1, \\ cos(\phi) \geq 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{esféricas}}{E} = \begin{cases} 1 \leq \rho \leq 2, \\ 0 \leq \phi \leq \dfrac{\pi}{4}, \\ 0 \leq \phi \leq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{esféricas}}{E} = \begin{cases} 1 \leq \rho \leq 2, \\ 0 \leq \phi \leq \dfrac{\pi}{4}, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Y por el teorema de cambio de variable (a coordenadas esféricas $(x,y,z) = g(\rho,\phi,\theta) = (\rho\, cos(\theta) sin(\phi), \rho\, sin(\theta) sin(\phi), \rho\, cos(\phi))$) tenemos que:

$$\boxed{\iiint\limits_{\underset{\text{cartesinas}}{E}} \frac{e^{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dV = \iiint\limits_{\underset{\text{esféricas}}{E}} \frac{e^{\rho^2}}{\rho} \cdot \rho^2 sin(\phi)\;\; d\phi\;\, d\theta\;\, d\rho =}$$

$$\int_1^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\frac{e^{\rho^2}}{\rho}\cdot\rho^2 sin(\phi)\ d\phi\ d\theta\ d\rho=\int_1^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\rho e^{\rho^2} sin(\phi)\ d\phi\ d\theta\ d\rho=$$

$$=-\int_1^2\int_0^{2\pi}\rho\ e^{\rho^2}\ cos(\phi)\Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi/4}\ d\theta\ d\rho=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_1^2\int_0^{2\pi}\rho\ e^{\rho^2}\ d\theta\ d\rho=$$

$$=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_1^2\rho\ e^{\rho^2}\ d\rho=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[\frac{e^{\rho^2}}{2}\Bigg|_{\rho=1}^{\rho=2}\right]=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{e^4-e}{2}\right).$$

***Nota (ejemplo anterior).***

Es importante resaltar que la integral $\iiint_E \frac{e^{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ dV$ no se puede hacer usando coordenadas cartesinas, ya que $\int \frac{e^{t^2}}{t}\ dt$ no se puede hacer por métodos elementales.

## *Ejemplo (cambio de variable a coordenadas esféricas).*

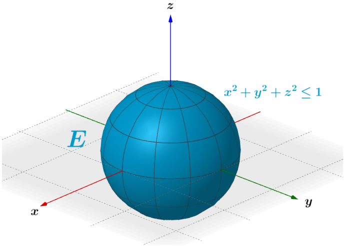
Hallar $\iiint\limits_E e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV$, donde $E$ es la pelota unitaria descrita como $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq 1\}$.

**Solución:**

Notemos inicialmente que $E$ se describe se describe como:

$(\checkmark)$ $E_{\text{cartesianas}} = \left\{x^2+y^2+z^2 \leq 1.\right.$

$(\checkmark)$ $E_{\text{esféricas}} = \begin{cases} \rho^2 \leq 1, \\ 0\leq \phi \leq \pi, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} = \begin{cases} 0\leq \rho \leq 1, \\ 0\leq \phi \leq \pi, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$




Y por el teorema de cambio de variable (a coordenadas esféricas $(x,y,z)=g(\rho,\phi,\theta)=(\rho cos(\theta)sin(\phi),\rho sin(\theta)sin(\phi),\rho cos(\phi))$) tenemos que:

$$\underbrace{\iiint_E e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV}_{\text{cartesianas}} = \underbrace{\iiint_E e^{(\rho^2)^{3/2}} \cdot \rho^2 sin(\phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta}_{\text{esféricas}} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} \rho^2 e^{\rho^3} sin(\phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sin(\phi)\cdot \int_0^{1} \rho^2 e^{\rho^3}\, d\rho\, d\phi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sin(\phi)\cdot \left(\frac{e^{\rho^3}}{3}\right)\Bigg|_0^1 d\phi\, d\theta = 2\pi\cdot\left(\frac{e-1}{3}\right)\int_0^{\pi} sin(\phi)\, d\phi = 4\pi\cdot\left(\frac{e-1}{3}\right).$$

***Nota (ejemplo anterior).***

Es importante resaltar que la integral $\iiint_E e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV$ no se puede hacer usando coordenadas cartesinas, ya que $\int e^{t^{3/2}}\, dt$ no se puede hacer por métodos elementales.

### *Ejemplo (cambio de variable a coordenadas esféricas).*

Hallar el volumen del sólido que se encuentra sobre el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y bajo la esfera $x^2+y^2+z^2 = z$.

***Solución:***

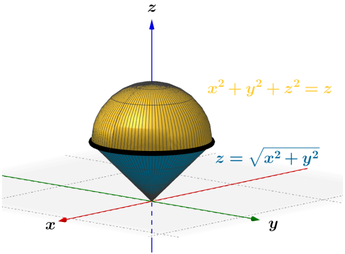
Notemos inicialmente que

($\checkmark$) $z = \sqrt{x^2+y^2} \iff \rho\cos(\phi) = \rho\sin(\phi) \iff \cos(\phi) = \sin(\phi) \iff \tan(\phi) = 1 \iff \phi = \dfrac{\pi}{4}.$

($\checkmark$) $x^2+y^2+z^2 = z \iff \rho^2 = \rho\cos(\phi) \iff \rho = \cos(\phi).$

($\checkmark$) $$E_{\text{cartesianas}} = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \dfrac{1+\sqrt{1-4(x^2+y^2)}}{2}, \\ x^2+y^2 \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^2. \end{cases}$$

($\checkmark$) $$E_{\text{esféricas}} = \begin{cases} 0 \le \rho \le \cos(\phi), \\ 0 \le \phi \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$



Y por el teorema de cambio de variable (a coordenadas esféricas $(x,y,z)=g(\rho,\phi,\theta)=(\rho\cos(\theta)\sin(\phi),\rho\sin(\theta)\sin(\phi),\rho\cos(\phi))$) tenemos que:

$$\underset{\substack{E\\ \text{cartesianas}}}{\iiint} 1\ dV = \underset{\substack{E\\ \text{esféricas}}}{\iiint} 1\cdot\rho^2\sin(\phi)\ d\rho\ d\phi\ d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos(\phi)}\rho^2\sin(\phi)\ d\rho\ d\phi\ d\theta =$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\sin(\phi)\cdot\int_0^{\cos(\phi)}\rho^2\ d\rho\ d\phi\ d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\sin(\phi)\cos^3(\phi)\ d\phi\ d\theta =$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^4(\phi)}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/4}\ d\theta = -\frac{2\pi}{12}\left(\frac{1}{4}-1\right)=\frac{\pi}{8}.$$

***Nota (ejemplo anterior).***

Es importante resaltar que la integral $\underset{E}{\iiint} 1\ dV$ es demasiado complicada de hacer usando coordenadas cartesinas.

# Problemas.

(1) Evaluar las siguientes integrales iteradas realizando un cambio de variable a coordenadas polares.

(a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{-x^2-y^2}\; dy\; dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} 2x+y\; dx\; dy.$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{1-y^2}} 5xy^2\; dx\; dy.$

(2) Hallar el valor de la siguiente suma

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\; dy\; dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{x} xy\; dy\; dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy\; dy\; dx.$$

(3) Sea $\overline{B((0,0),R)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R\}$, entonces:

(a) Hallar $\displaystyle\iint\limits_{\overline{B((0,0),R)}} e^{-(x^2+y^2)}\ dA.$

(b) Hallar $\displaystyle\lim_{R \mapsto +\infty} \iint\limits_{\overline{B((0,0),R)}} e^{-(x^2+y^2)}\ dA.$

(c) Demostrar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\ dx\ dy = \pi.$

(d) Demostrar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}$ y $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

(4) Evaluar las siguientes integrales iteradas realizando un cambio de variable a coordenadas cilíndricas.

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xz\ dz\ dx\ dy.$

(b) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\;dy\;dx.$

(5) Evalué $\displaystyle\iiint_E x+y+z\;dV$, donde $E$ es el sólido en el primer octante acotado por la gráfica del paraboloide $z=4-x^2-y^2$.

(6) Evalué $\displaystyle\iiint_E x-y\;dV$, donde $E$ es el sólido en acotado por los cilindros $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=16$, encima del plano $xy$ y abajo del plano $z=y+4$.

(7) Determine el volumen del sólido encerrado por el cono $z=\sqrt{x^2y^2}$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=2$.

(8) Determine el volumen del sólido encerrado entre el paraboloide $z=x^2+y^2$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=2$.

(9) Evaluar las siguientes integrales iteradas realizando un cambio de variable a coordenadas esféricas.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy \ dz \ dy \ dx.$

(b) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x^2z+y^2z+z^3 \ dz \ dy \ dx.$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{2+\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} \ dz \ dy \ dx.$

(10) Demostrar que el volumen de una esfera de radio $R$ es $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

(11) Evalué $\displaystyle\iiint_E (x^2+y^2+z^2)^2 \ dV$, donde $E$ es la esfera sólida con centro en el origen y radio 5.

(12) Evalué $\displaystyle\iiint_E y^2z^2 \ dV$, donde $E$ es el sólido que se encuentra encima del cono $\phi = \dfrac{\pi}{3}$ y

(13) Evalué $\iiint\limits_E x^2+y^2 \; dV$, donde $E$ es el sólido acotado por las esferas $x^2+y^2+z^2=4$ y $x^2+y^2+z^2=4$.

(14) Evalué $\iiint\limits_E 9-x^2-y^2 \; dV$, donde $E$ es el hemisferio sólido $x^2+y^2+z^2 \leq 9$ y $z \geq 0$.

(15) Evalué $\iiint\limits_E \sqrt{x^2+y^2+z^2} \; dV$, donde $E$ es el sólido acotado por el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y las esferas $x^2+y^2+z^2=1$ y $x^2+y^2+z^2=4$.