Maestría en Ciencias Naturales y Matemáticas

Clase 11 - Cálculo Avanzado de Varias Variables

Mg: Julián Uribe Castañeda

UPB

15 de diciembre de 2022

Topología en $\mathbb{R}^n$ - Compacidad (continuación).

Lema.

Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto y $t \in \mathbb{R}$. Entonces $A \times \{t\}$ es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Demostración:

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la función definida como

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, t)$$

para cada $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces f es continua en $\mathbb{R}^n$, ya que las componentes son funciones continuas. En particular f es continua en A y así $f(A) = A \times \{t\}$ es compacto en $\mathbb{R}^{n+1}$.

$\blacksquare$

Lema.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ un conjunto abierto. Si $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ y $(a, b) = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \in U$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

(1) $(a, b) \in B(a; \varepsilon) \times B(b; \varepsilon) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : x \in B(a; \varepsilon) \text{ y } y \in B(b; \varepsilon)\} \subseteq U$.

(2) $B(a; \varepsilon) \times B(b; \varepsilon)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^{n+m}$.

Demostración:

Debido a que $(a,b)\in U$ y U es abierto en $\mathbb{R}^{n+m}$, entonces existe $\varepsilon>0$ tal que $B((a,b);2\varepsilon)\subseteq U$. De esta manera, tenemos que

(1) $B(a;\varepsilon)\times B(b;\varepsilon)\subseteq U$.

Sea $(x,y)\in B(a;\varepsilon)\times B(b;\varepsilon)$, por tanto

$$\boxed{\begin{aligned}
&\|(x,y)-(a,b)\| = \|(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)-(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m)\| = \\
&\|(x_1-a_1,\dots,x_n-a_n,y_1-b_1,\dots,y_m-b_m)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-b_i)^2} \leq \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(y_i-b_i)^2} = \|x-a\|+\|y-b\| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon
\end{aligned}}$$

de donde, tenemos que $(x,y)\in B((a,b);2\varepsilon)$, y así $B(a;\varepsilon)\times B(b;\varepsilon)\subseteq B((a,b);2\varepsilon)\subseteq U$.

(2) $B(a;\varepsilon)\times B(b;\varepsilon)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^{n+m}$.

Sea $(x,y)\in B(a;\varepsilon)\times B(b;\varepsilon)$, entonces existen $\delta_1>0$ y $\delta_2>0$ tales que $B(x;\delta_1)\subseteq B(a;\varepsilon)$ y $B(y;\delta_2)\subseteq B(b;\varepsilon)$ (ya que $B(a;\varepsilon)$ y $B(b;\varepsilon)$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente). Si $\delta := \frac{\min\{\delta_1,\delta_2\}}{2}>0$, entonces afirmamos lo siguiente

Afirmación: $B((x,y);\delta)\subseteq B(a;\varepsilon)\times B(b;\varepsilon)$.

Sea $(z,w)\in B((x,y);\delta)$, entonces tenemos que

$$\|(z,w)-(x,y)\| = \|(z_1,\dots,z_n,w_1,\dots,w_m)-(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)\| =$$

$$= \|(z_1-x_1,\dots,z_n-x_n,w_1-y_1,\dots,w_m-y_m)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-x_i)^2+\sum_{i=1}^{m}(w_i-y_i)^2} < \delta$$

de donde se tiene que

$$\begin{cases} \|z-x\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(z_i-x_i)^2} \le \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(z_i-x_i)^2+\sum_{i=1}^{m}(w_i-y_i)^2} < \delta \le \delta_1, \\ \|w-y\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{m}(w_i-y_i)^2} \le \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(z_i-x_i)^2+\sum_{i=1}^{m}(w_i-y_i)^2} < \delta \le \delta_2 \end{cases}$$

lo cual implica que $z \in B(x,\delta_1) \subseteq B(a;\varepsilon)$, $w \in B(y;\delta_2) \subseteq B(b;\varepsilon)$ y así $(z,w) \in B(a;\varepsilon) \times B(b;\varepsilon)$. De esta manera $B((x,y);\delta) \subseteq B(a;\varepsilon) \times B(b;\varepsilon)$ y como (x,y) es un punto arbitrario de $B(a;\varepsilon) \times B(b;\varepsilon)$, se tiene que $B(a;\varepsilon) \times B(b;\varepsilon)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^{n+m}$.

■

Lema (lema del tubo).

Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto y $t \in \mathbb{R}$. Si U es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^{n+1}$ con $A \times \{t\} \subseteq U$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $A \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subseteq U$.

Demostración:

Para cada $a \in A$, tenemos que $(a,t) \in A \times \{t\} \subseteq U$ y por el lema 2.5.2 tenemos que para cada $a \in A$, existe $\varepsilon_a > 0$ tal que

$$\begin{cases} (a,t) \in B(a;\varepsilon_a) \times B(t;\varepsilon_a) = B(a;\varepsilon_a) \times (t-\varepsilon_a, t+\varepsilon_a) \subseteq U, \\ \\ B(a;\varepsilon_a) \times (t-\varepsilon_a, t+\varepsilon_a) \text{ es un conjunto abierto en } \mathbb{R}^{n+1}. \end{cases}$$

Además es fácil notar que $A \subseteq \bigcup_{a \in A} B(a;\varepsilon_a) \times (t-\varepsilon_a, t+\varepsilon_a)$ y por la compacidad de $A \times \{t\}$, deben existir $a_1, \ldots, a_m \in A$ (finitos) tales que

$$A \times \{t\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(a_i;\varepsilon_{a_i}) \times (t-\varepsilon_{a_i}, t+\varepsilon_{a_i}) \subseteq U$$

y al tomar $\varepsilon := \text{mín}\{a_1, \ldots, a_m\}$, tenemos que

$$A \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(a_i;\varepsilon_{a_i}) \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(a_i;\varepsilon_{a_i}) \times (t-\varepsilon_{a_i}, t+\varepsilon_{a_i}) \subseteq U$$

lo cual prueba que $A \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subseteq U$. ∎

Definición (rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^n$).

Un rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto que se describe de la forma

$$[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n] := \{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : a_i\le x_i\le b_i \text{ para } 1\le i\le n\}$$

con $a_i<b_i$ para $1\le i\le n$.

Lema (los rectángulos cerrados son conjuntos compactos).

El rectángulo cerrado

$$[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n] := \{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : a_i\le x_i\le b_i \text{ para } 1\le i\le n\}$$

es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$.

Demostración:

Vamos a probar que $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ es compacto por inducción sobre n.

Paso base (n=1): Previamente se probó que $[a_1,b_1]$ es compacto en $\mathbb{R}$, lo cual es precisamente nuestro paso base.

Paso inductivo: Supongamos que $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{n-1},b_{n-1}]$ es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^{n-1}$ y veamos que $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{n-1},b_{n-1}]\times[a_n,b_n]$ es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ un cubrimiento abierto de $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{n-1},b_{n-1}]\times[a_n,b_n]$, entonces tenemos que:

($\checkmark$) Por el lema anterior, tenemos que para cada $t \in [a_n, b_n]$ se tiene que $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times \{t\}$ es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$.

($\checkmark$) Para cada $t \in [a_n, b_n]$ se tiene que $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times \{t\} \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ y por lo tanto por compacidad de $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times \{t\}$, existen $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_{m_t}}$ (finitos) tales que

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times \{t\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_t} U_{\alpha_i}.$$

($\checkmark$) Dado que $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times \{t\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_t} U_{\alpha_i}$ y que $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{n-1}$, entonces por el lema del tubo tenemos que existe $\varepsilon_t > 0$ tal que

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times (t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m_t} U_{\alpha_j}$$

para cada $t \in [a_n, b_n]$.

($\checkmark$) $[a_n, b_n] \subseteq \bigcup_{t \in [a_n, b_n]} (t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t) = \bigcup_{t \in [a_n, b_n]} B(t, \varepsilon_t)$ y por compacidad de $[a_n, b_n]$, tenemos que existen $t_1, \dots, t_k \in [a_n, b_n]$ (finitos) tales que

$$[a_n, b_n] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (t_i - \varepsilon_{t_i}, t_i + \varepsilon_{t_i}).$$

De lo anterior, podemos concluir que

$$[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{n-1},b_{n-1}]\times[a_n,b_n]\subseteq[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{n-1},b_{n-1}]\times\bigcup_{i=1}^{k}(t_i-\varepsilon_{t_i},t_i+\varepsilon_{t_i})=$$

$$=\bigcup_{i=1}^{k}\big([a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{n-1},b_{n-1}]\times(t_i-\varepsilon_{t_i},t_i+\varepsilon_{t_i})\big)\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{m_{t_i}}U_{\alpha_j}\ \text{(finitos)}.$$

El anterior análisis prueba que todo cubrimiento abierto de $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{n-1},b_{n-1}]\times[a_n,b_n]$ tiene un subcubrimiento finito, lo cual muestra que $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{n-1},b_{n-1}]\times[a_n,b_n]$ es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$.

■

Corolario (los conjuntos cerrados y acotados en $\mathbb{R}^n$ son conjuntos compactos).

Sea $A\subseteq\mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y acotado, entonces A es compacto.

Demostración:

Dado que A es acotado, existe $M>0$ tal que

$$A\subseteq B(O;M)=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|<M\}.$$

Además es claro que $B(O;M)\subseteq[-M,M]\times\cdots\times[-M,M]$, lo cual implica que

$$A \subseteq [-M, M] \times \cdots \times [-M, M]$$

y como $[-M, M] \times \cdots \times [-M, M]$ es compacto y A es cerrado, se tiene que A es compacto (clase 8 - problema 7).

$\blacksquare$

Corolario (Compacto en $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ cerrado y acotado).

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces

$$\boxed{A \text{ es compacto en } \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ es cerrado y acotado.}}$$

Demostración:

"$\Rightarrow$" Esta dirección ya había sido probada anteriormente (clase 8).

"$\Leftarrow$" Esta direccion es precisamente el corolario previo.

$\blacksquare$

Problemas.

(1) Sea $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. Demostrar que $\mathbb{S}^{n-1}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$.

Ayuda: Considerar la función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) := \|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces f es una función continua en $\mathbb{R}^n$ y además $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{S}^{n-1}$.

(2) Demostrar que $\mathbb{S}^{n-1}$ es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$.

Ayuda: Recordar que en $\mathbb{R}^n$ ser compacto equivale a ser cerrado y acotado.

(3) Sea $\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Demostrar que $\mathbb{D}^n$ es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$.

Ayuda: Considerar la función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) := \|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces f es una función continua en $\mathbb{R}^n$ y además $f^{-1}([0,1]) = \mathbb{D}^{n-1}$.

(4) Sea A un subconjunto compacto y no vacío de $\mathbb{R}^n$, y supongamos que $\{D_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es una colección de conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$ que satisfacen las siguientes propiedades:

- ⋆ $D_\alpha \subseteq A$ para cada $\alpha \in J$.
- ⋆ Para cada colección finita $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in J$ se tiene que $\bigcap_{i=1}^{m} D_{\alpha_i} \neq \emptyset$.

Demostrar que $\bigcap_{\alpha\in J} D_\alpha \neq \emptyset$.

Ayuda: Suponer por reducción al absurdo que $\bigcap_{\alpha\in J} D_\alpha = \emptyset$, entonces se tienen las siguientes cosas:

(a) Si $\bigcap_{\alpha\in J} D_\alpha = \emptyset$, entonces $\left(\bigcap_{\alpha\in J} D_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in J} D_\alpha^c = \mathbb{R}^n$.

(b) D_α^c es un conjunto abierto para cada $\alpha \in J$.

(c) Como $A \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} D_\alpha^c$, entonces por compacidad de A deben existir $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in J$ (finitos) tales que

$$A \subseteq D_{\alpha_1}^c \cup \cdots \cup D_{\alpha_m}^c \iff A \cap \left(D_{\alpha_1}^c \cup \cdots \cup D_{\alpha_m}^c\right)^c = \emptyset.$$

(d) $A \cap \left(D_{\alpha_1}^c \cup \cdots \cup D_{\alpha_m}^c\right)^c = A \cap \left(D_{\alpha_1} \cap \cdots \cap D_{\alpha_m}\right) = D_{\alpha_1} \cap \cdots \cap D_{\alpha_m} \neq \emptyset$.