Universidad Pontificia Bolivariana

Maestría en Ciencias Naturales y Matemáticas

Clase 10 - Cálculo Avanzado de Varias Variables

Mg: Julián Uribe Castañeda

UPB

15 de diciembre de 2022

Definición (continuidad uniforme).

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Decimos que f es uniformemente continua sobre A, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{Si } x, y \in A \text{ y } \|x - y\| < \delta \text{ , entonces } \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Observación (definición anterior).

Es sencillo notar que toda función $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uniformemente continua sobre A es continua en A. Pero el reciproco no necesariamente es cierto, y para ver esto consideraremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo (función continua en $(0,1]$ que no es uniformemente continua en $(0,1]$).).

Sea $f: (0,1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

para $x \in (0,1]$. Entonces f satisface las siguientes propiedades:

(1) f es continua en $(0,1]$.

(2) f no es uniformemente continua en $(0,1]$.

Prueba de (1): La continuidad de f en $(0,1]$ es trivial. De hecho, f es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$.

Prueba de (2): Sea $\varepsilon=1$ y $\delta>0$, entonces tenemos los siguientes casos:

($\checkmark$) Si $0<\delta<1$, tomamos $x=\dfrac{\delta}{2}$ y $y=\dfrac{\delta}{3}$ $(x,y\in(0,1])$, de donde

$$\begin{cases} |x-y|=\left|\dfrac{\delta}{2}-\dfrac{\delta}{3}\right|=\dfrac{\delta}{6}<\delta, \\ \\ |f(x)-f(y)|=\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right|=\left|\dfrac{2}{\delta}-\dfrac{3}{\delta}\right|=\dfrac{1}{\delta}>1=\varepsilon. \end{cases}$$

($\checkmark$) Si $\delta\geq 1$, entonces tomamos $x=\dfrac{1/2}{2}$ y $y=\dfrac{1/2}{3}$ $(x,y\in(0,1])$, de donde

$$\begin{cases} |x-y|=\left|\dfrac{1/2}{2}-\dfrac{1/2}{3}\right|=\dfrac{1}{12}<1\leq\delta, \\ \\ |f(x)-f(y)|=\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right|=\left|\dfrac{2}{1/2}-\dfrac{3}{1/2}\right|=\dfrac{1}{1/2}=2>1=\varepsilon. \end{cases}$$

De esta manera, tenemos que existe $\varepsilon>0$, tal que para todo $\delta>0$, existen $x,y\in(0,1]$ tales que $|x-y|<\delta$ y $|f(x)-f(y)|>\varepsilon$; lo cual muestra que f no es uniformemente continua en $(0,1]$.

Ejemplo (función uniformemente continua en $(0,1]$).

Sea $f:(0,1]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x)=x^2$$

para $x\in(0,1]$. Entonces f es uniformemente continua en $(0,1]$.

Solución:

Para empezar, notemos inicialmente que para todo $x,y\in(0,1]$, se tiene que

($\checkmark$) $|x+y|\leq|x|+|y|\leq 1+1=2$.

($\checkmark$) $|f(x)-f(y)|=|x^2-y^2|=|(x-y)(x+y)|=|x-y|\cdot|x+y|\leq 2|x-y|$.

Por lo tanto, dado $\varepsilon>0$ al tomar $\delta:=\dfrac{\varepsilon}{2}$ tenemos que

$$\text{Si } |x-y|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}, \text{ entonces } |f(x)-f(y)|\leq 2|x-y|<2\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon$$

lo cual prueba que f es uniformemente continua en $(0,1]$.

Ejemplo (función continua en $\mathbb{R}$ que no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$).

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x)=x^2$$

para $x\in\mathbb{R}$. Entonces f no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Solución:

Para empezar, notemos las siguientes cosas:

($\checkmark$) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\left(\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ para cada $n\in\mathbb{N}$.

($\checkmark$) $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$

($\checkmark$) Debido a que $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|=0$, entonces dado $\delta>0$, existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $|\sqrt{m+1}-\sqrt{m}|<\delta$.

Así, al tomar $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, $\delta>0$ arbitrario, $x=\sqrt{m+1}$ y $y=\sqrt{m}$ $(x,y\in\mathbb{R})$ se tiene que

$$\begin{cases}|x-y|=|\sqrt{m+1}-\sqrt{m}|<\delta,\\[2em] |f(x)-f(y)|=|x^2-y^2|=|m+1-m|=1>\dfrac{1}{2}=\varepsilon.\end{cases}$$

De esta forma, el anterior análisis muestra que $f(x)=x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Sin embargo, f es continua en $\mathbb{R}$.

Nota (siguiente teorema).

El siguiente teorema nos dice cuando una función continua es uniformemente continua.

Teorema (una función continua en un conjunto compacto es uniformemente continua).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función que satisface las siguientes condiciones

($\checkmark$) A es compacto.

($\checkmark$) f es continua en A.

Entonces f es uniformemente continua sobre A.

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces para cada $a \in A$, existe $\delta_a > 0$ tal que

$$\text{Si } x \in B(a;\delta_a) \cap A, \text{ entonces } \|f(x) - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora teniendo en cuenta que $A \subseteq \bigcup_{a\in A} B\left(a; \dfrac{\delta_a}{2}\right)$, entonces por la compacidad de A, existen $a_1, \ldots, a_p \in A$ (finitos) tales que

$$A \subseteq B\left(a_1; \frac{\delta_{a_1}}{2}\right) \cup \cdots \cup B\left(a_p; \frac{\delta_{a_p}}{2}\right).$$

Si $\delta := \text{mín}\left\{\dfrac{\delta_{a_1}}{2}, \ldots, \dfrac{\delta_{a_p}}{2}\right\}$, entonces consideramos la siguiente afirmación

Afirmación: Dados $x, y \in A$ con $\|x - y\| < \delta$, entonces $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Supongamos que $x, y \in A$ y $\|x - y\| < \delta$, entonces existe $a_k \in \{a_1, \ldots, a_p\}$ tal que $x \in B\left(a_k, \dfrac{\delta_{a_k}}{2}\right)$, ya que $x \in A$ y $A \subseteq B\left(a_1; \dfrac{\delta_{a_1}}{2}\right) \cup \cdots \cup B\left(a_p; \dfrac{\delta_{a_p}}{2}\right)$. Además, tenemos que

($\checkmark$) $\|y - a_k\| = \|(y - x) + (x - a_k)\| \leq \|y - x\| + \|x - a_k\| < \delta + \dfrac{\delta_{a_k}}{2} \leq \dfrac{\delta_{a_k}}{2} + \dfrac{\delta_{a_k}}{2} = \delta_{a_k}$.

($\checkmark$) $x, y \in B(a_k; \delta_{a_k})$.

($\checkmark$) $\|f(x) - f(y)\| = \|[f(x) - f(a_k)] + [f(a_k) - f(y)]\| \leq \|f(x) - f(a_k)\| + \|f(a_k) - f(y)\| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

De esta manera, el análisis anterior prueba la afirmación y así f es uniformemente continua sobre A.

$\blacksquare$

Problemas.

(1) Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Demostrar que si f es uniformemente continua en A, entonces f es continua en A.

(2) Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función uniformemente continua sobre A. Demostrar que si $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq A$ es una sucesión de Cauchy, entonces $\{f(x_k)\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq \mathbb{R}^m$ es una sucesión de Cauchy.

(3) Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función que satisface que existe $M > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$$

para todo $x, y \in A$. Demostrar que f es uniformemente continua en A.

(4) Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $d_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como

$$d_A(x) = \text{infimo}\{\|x - a\| \in \mathbb{R} : a \in A\}$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que d_A es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.

Ayuda:

Demostrar que $|d_A(x) - d_A(y)| \leq \|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y usar el problema anterior.

(5) Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : d_A(x) = 0\}$$

donde $d_A(x) = \text{ínfimo}\{\|x - a\| \in \mathbb{R} : a \in A\}$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

(6) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) f es uniformemente continua sobre A.

(b) Para todo par de sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq A$ tales que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \|x_n - y_n\| = 0$, se tiene que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \|f(x_n) - f(y_n)\| = 0$.

(7) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) f no es uniformemente continua sobre A.

(b) Existe $\varepsilon > 0$ y existen sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq A$ tales que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ y $\|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon$.

(8) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función y $B \subseteq A$. Si f es uniformemente continua en A, demostrar que f es uniformemente continua en B.

(9) Sea $f:(0,1)\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x)=e^x$$

para $x\in(0,1)$. Demostrar que f es uniformemente continua en $(0,1)$.

(10) Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x)=sin(x)$$

para $x\in\mathbb{R}$. Demostrar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Ayudas:

⋆ $sin(x)-sin(y)=2sin\left(\frac{x-y}{2}\right)cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$ para cada $x,y\in\mathbb{R}$.

⋆ $|sin(x)-sin(y)|\leq 2\left|sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|$ para cada $x,y\in\mathbb{R}$..

⋆ $|sin(x)|\leq|x|$ para cada $x\in\mathbb{R}$.

(11) Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$. Si f es una función periódica con periodo $L>0$, entonces f es una función uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Ayudas:

(a) Como f es uniformemente continua en $[0,2L]$, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ ($\delta < L$) tal que

$$\text{Si } x,y \in [0,2L] \text{ con } |x-y| < \delta, \text{ entonces } |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

(b) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existen $n \in \mathbb{Z}$ y $r \in [0,L)$ tal que $x = nL + r$.

(c) Si $x,y \in \mathbb{R}$ satisfacen que $|x-y| < \delta < L$ con $x = nL + r$ y $y = mL + s$, entonces $|n-m| \leq 1$.

(d) Si $x,y \in \mathbb{R}$ satisfacen que $|x-y| < \delta < L$ con $x = nL + r$ y $y = mL + s$, entonces

$$|x-y| = \begin{cases} |r-s| & \text{Si } n = m, \\ |L+r-s| & \text{Si } n = m+1, \\ |L+s-r| & \text{Si } m = n+1. \end{cases}$$

(e) Si $x,y \in \mathbb{R}$ satisfacen que $|x-y| < \delta < L$ con $x = nL + r$ y $y = mL + s$, entonces

$$|f(x)-f(y)| = \begin{cases} |f(r)-f(s)| & \text{Si } n = m, \\ |f(L+r)-f(s)| & \text{Si } n = m+1, \\ |f(L+s)-f(r)| & \text{Si } m = n+1. \end{cases}$$

(f) Si $x,y \in \mathbb{R}$ satisfacen que $|x-y| < \delta < L$, entonces $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.