Universidad Pontifica Bolivariana

Cálculo Avanzado de Varias Variables

Julián Uribe Castañeda

Conexidad - Parte (1)

5 de febrero de 2025

Definición (conjunto disconexo en $\mathbb{R}^n$).

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Decimos que A es un subconjunto disconexo en $\mathbb{R}^n$, si existen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos tales que

(✓) $A \cap U \neq \emptyset$ y $A \cap V \neq \emptyset$.

(✓) $U \cap V = \emptyset$.

(✓) $A \subseteq U \cup V$.

Definición (conjunto conexo en $\mathbb{R}^n$).

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Decimos que A es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$, si A no es disconexo.

Observación (definición anterior).

Intuitivamente, un conjunto conexo es el que aparece como una sola pieza, que no se puede "dividir" o "partir".

Ejemplo (subconjuntos conexos en $\mathbb{R}^n$).

(1) $\emptyset$ es un subconjunto conexo en $\mathbb{R}^n$.

La verificación de este hecho se sigue inmediatamente de la definición de conexidad.

(2) Dado $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\{x\}$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$.

Si $\{x\}$ fuera disconexo, entonces existirían abiertos U y V de $\mathbb{R}^n$ tales que

$$\begin{cases} \{x\} \cap U \neq \emptyset \text{ y } \{x\} \cap V \neq \emptyset, \\ \\ U \cap V = \emptyset, \\ \\ \{x\} \subseteq U \cup V. \end{cases}$$

Pero esto implicaría que $x \in U \cap V = \emptyset$ lo cual es imposible. De esta manera $\{x\}$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$.

(3) Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq y$, entonces $\{x, y\}$ es un subconjunto disconexo de $\mathbb{R}^n$.

Si $\varepsilon = \dfrac{\|x-y\|}{2}$, definimos $U := B(x;\varepsilon)$ y $V := B(y;\varepsilon)$, entonces:

$$\begin{cases} \{x,y\}\cap U=\{x\}, \text{ y } \{x,y\}\cap V=\{y\}, \\ \\ U\cap V=\emptyset, \\ \\ \{x,y\}\subseteq U\cup V \end{cases}$$

lo cual prueba que $\{x,y\}$ es un subconjunto disconexo de $\mathbb{R}^n$.

(4) Si $a<b$, entonces $[a,b]$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$.

Veamos por reducción al absurdo que $[a,b]$ es conexo. Si $[a,b]$ fuera disconexo, entonces existen abiertos U y V de $\mathbb{R}$ tales

$$\begin{cases} [a,b]\cap U\neq\emptyset \text{ y } [a,b]\cap V\neq\emptyset, \\ \\ U\cap V=\emptyset, \\ \\ [a,b]\subseteq U\cup V. \end{cases}$$

De esta manera, al tomar $c:=\text{infimo}\{x\in\mathbb{R}: x\in[a,b]\cap U\}$, entonces $a\leq c$ y además $c\notin V$ ya que de lo contrario, existiría $\varepsilon>0$ tal que $[c,c+\varepsilon)\subseteq V$ y por caracterización de infimo, existe $y\in[a,b]\cap U$ tal que $y\in[c,c+\varepsilon)\subseteq V$ lo cual es imposible ($y\in U\cap V=\emptyset$).

Así se tiene que $c \in U$ y $c = a$, ya que de lo contrario $a < c$ y como $c \in [a,b] \cap U \subseteq U$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $c - \delta \in [a,b] \cap U$ lo cual es imposible ya que $c = \text{infimo}\{x \in \mathbb{R} : x \in [a,b] \cap U\} \leq c - \delta < c$.

Lo anterior muestra que $\text{infimo}\{x \in \mathbb{R} : x \in [a,b] \cap U\} = a \in U$ y de manera análoga podemos probar que $\text{infimo}\{x \in \mathbb{R} : x \in [a,b] \cap V\} = a \in V$, pero esto no es posible ya que $a \in U \cap V = \emptyset$. De esta manera, tenemos que $[a,b]$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$.

(5) El conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ es un subconjunto disconexo de $\mathbb{R}$.

Sea $I \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y sean $U = (-\infty, I)$ y $V = (I, +\infty)$, entonces es claro que U y V son abiertos y además:

$$\begin{cases} \mathbb{Q} \cap U \neq \emptyset \text{ y } \mathbb{Q} \cap V \neq \emptyset, \\ \\ U \cap V = \emptyset, \\ \\ \mathbb{Q} \subseteq U \cup V \end{cases}$$

lo cual muestra que $\mathbb{Q}$ es un subconjunto disconexo de $\mathbb{R}$.

(6) El conjunto de números irracionales $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es un subconjunto disconexo de $\mathbb{R}$.

La prueba de que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es disconexo es similar a la prueba de la disconexidad de $\mathbb{Q}$.

Lema (caracterización de conexidad).

Sea A es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ no vacío y supongamos que existen abiertos U y V de $\mathbb{R}^n$ tales que

(✓) $A \subseteq U \cup V$.

(✓) $U \cap V = \emptyset$.

Entonces $A \subseteq U$ ó $A \subseteq V$.

Demostración:

Dado $a \in A$, debido a que $A \subseteq U \cup V$, entonces $a \in U$ ó $a \in V$. Si $a \in U$, entonces $A \cap U \neq \emptyset$ y de esta manera, por la conexidad de A es necesario que $A \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, tenemos que

$$A = A \cap (U \cup V) = (A \cap U) \cup (A \cap V) = (A \cap U) \cup \emptyset = A \cap U \subseteq U$$

lo cual prueba que $A \subseteq U$. De manera análoga, se tiene que si $a \in V$, entonces $A \subseteq V$.

■

Nota (siguiente teorema).

El siguiente teorema nos muestra una manera de obtener conjuntos conexos a partir de una colección de conjuntos conexos que tienen intersección no vacía.

Teorema (unión de conexos con intersección no vacia es conexo).

Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una colección de subconjuntos conexos de $\mathbb{R}^n$ que satisfacen que $\bigcap\limits_{\alpha\in J} A_\alpha \neq \emptyset$, entonces $\bigcup\limits_{\alpha\in J} A_\alpha$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$.

Demostración:

Supongamos por reducción al absurdo que $\bigcup\limits_{\alpha\in J} A_\alpha$ es un subconjunto disconexo de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, existen abiertos U y V de $\mathbb{R}^n$ tales que

$$\begin{cases} \bigcup\limits_{\alpha\in J} A_\alpha \cap U \neq \emptyset \text{ y } \bigcup\limits_{\alpha\in J} A_\alpha \cap V \neq \emptyset, \\ U\cap V = \emptyset, \\ \bigcup\limits_{\alpha\in J} A_\alpha \subseteq U\cup V \end{cases}$$

Como $\bigcup\limits_{\alpha\in J} A_\alpha \cap U \neq \emptyset$ y $\bigcup\limits_{\alpha\in J} A_\alpha \cap V \neq \emptyset$, entonces existen $\alpha,\beta \in J$ tales que

$$A_\alpha \cap U \neq \emptyset \text{ y } A_\beta \cap V \neq \emptyset.$$

Ahora, usando el hecho de que A_α y A_β son conexos, entonces por el lema anterior se tiene que $A_\alpha \subseteq U$ y $A_\beta \subseteq V$. Por otro lado, si $a \in \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$, entonces $a \in A_\alpha \cap A_\beta \subseteq U \cap V = \emptyset$ lo cual es imposible. De esta forma, es necesario que $\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ sea conexo.

■

Nota (siguiente ejemplo).

En el siguiente ejercicio usaremos la siguiente caracterización de intervalos de números reales. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$, entonces

$$\boxed{I \text{ es un intervalo de números reales} \iff \text{para cada } a, b \in I \text{ se tiene que } [a,b] \subseteq I.}$$

La prueba de esta afirmación se deja como ejercicio.

Ejemplo (subconjunto conexo en $\mathbb{R}$).

Sea I un intervalo de números reales, entonces I es un subconjunto conexo de números reales.

Razón:

Supongamos por reducción al absurdo que I es un subconjunto disconexo de números reales, entonces existen abiertos U y V tales que

$$\begin{cases} I \cap U \neq \emptyset \text{ y } I \cap V \neq \emptyset, \\ \\ U \cap V = \emptyset, \\ \\ I \subseteq U \cup V. \end{cases}$$

Si $a \in I \cap U$ y $b \in I \cap V$, entonces $a \neq b$ ya que $U \cap V = \emptyset$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $a < b$, entonces como I es un intervalo de números reales, se tiene que

$$[a, b] \subseteq I$$

y como $I \subseteq U \cup V$, se tiene que $[a, b] \subseteq U \cup V$ y por la conexidad de $[a, b]$ y lema anterior se tiene que

$$[a, b] \subseteq U \text{ ó } [a, b] \subseteq V,$$

lo cual es imposible, ya que U y V son disjuntos y $a \in U$ y $b \in V$. De esta manera, es necesario que I sea un conjunto conexo de números reales.

Observación (ejemplo anterior).

Del ejemplo anterior se tiene que $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ es un conjunto conexo.

Teorema (clasificación de conjuntos conexos en la recta real).

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$, entonces tenemos que

$$\boxed{I \text{ es un subconjunto conexo de } \mathbb{R} \iff I \text{ es un intervalo de números reales.}}$$

Demostración:

"$\Leftarrow$" Se tiene por el ejemplo anterior.

"$\Rightarrow$" Supongamos que I es un subconjunto conexo de números reales y sean $a, b \in I$. Si $[a,b] \nsubseteq I$, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $c \notin I$ y así al tomar $U = (-\infty, c)$ y $V = (c, +\infty)$ se tiene que U y V son subconjuntos abiertos de números reales que satisfacen las siguientes propiedades

$$\begin{cases} a \in U \cap I \text{ y } b \in V \cap I, \\ \\ U \cap V = \emptyset, \\ \\ I \subseteq U \cup V \end{cases}$$

lo cual muestra que I es disconexo que va en contra de nuestra hipótesis. De esta manera, tenemos que $[a,b] \in I$ y por la nota hecha anteriormente se tiene que I es un intervalo de números reales.

■

Problemas.

(1) Sea $I \subseteq \mathbb{R}$. Demostrar que I es un intervalo de números reales si y sólo sí para cada $a, b \in I$ se tiene que $[a, b] \subseteq I$.

(2) Sea X un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ y Y un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ el cual satisface que $X \subseteq Y \subseteq \overline{X}$. Demostrar que Y es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$.

Ayuda:

Si Y es disconexo, entonces existen abiertos U y V en $\mathbb{R}^n$ tales que

$$\begin{cases} Y \cap U \neq \emptyset \text{ y } Y \cap V \neq \emptyset, \\ \\ U \cap V = \emptyset, \\ \\ Y \subseteq U \cup V. \end{cases}$$

Por la conexidad de X se debe tener que $X \subseteq U$ ó $X \subseteq V$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $X \subseteq U$ y sea $a \in Y \cap V$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a; \varepsilon) \subseteq V$. Además $a \in ac(X)$ ya que $X \subseteq U$ y $U \cap V = \emptyset$, y así tenemos que

$$B^*(a; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$$

pero $B^*(a; \varepsilon) \cap X \subseteq V \cap X \subseteq V \cap U = \emptyset$ lo cual es imposible. De esta forma, es necesario que Y sea conexo.

(3) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y sean U y V abiertos de $\mathbb{R}^n$ que satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $A \cap U \cap V = \emptyset$.

(b) $A \cap U \neq \emptyset$ y $A \cap V \neq \emptyset$.

(c) $A \subseteq U \cup V$.

Demostrar que A es un conjunto disconexo.

Ayuda:

Sean $X = (A \cap U) - V$ y $Y = (A \cap V) - U$, entonces

⋆ Para cada $x \in X$, existe $\delta_x > 0$ tal que $B(x; 2\delta_x) \subseteq U$ (esto se debe a que $X \subseteq U$ y U es un conjunto abierto) y definimos L como

$$L := \bigcup_{x \in X} B(x; \delta_x).$$

⋆ Para cada $y \in Y$, existe $\delta_y > 0$ tal que $B(y; 2\delta_y) \subseteq V$ (esto se debe a que $Y \subseteq V$ y V es un conjunto abierto) y definimos M como

$$M := \bigcup_{y \in Y} B(y; \delta_y).$$

Entonces afirmamos que L y M son conjuntos abiertos que satisfacen las siguientes condiciones.

(i) $A \subseteq L \cup M$.

(ii) $A \cap L \neq \emptyset$ y $A \cap M \neq \emptyset$.

(iii) $L \cap M = \emptyset$.

Las pruebas de (i) y (ii) son sencillas de la construcción de L y M. Veamos la prueba de (iii). Supongamos por reducción al absurdo que $L \cap M \neq \emptyset$ y sea $z \in L \cap M$, entonces de la definición de L y M tenemos que deben existir $x \in X$ y $y \in Y$ tales que

$$z \in B(x;\delta_x) \cap B(y;\delta_y).$$

Además, tenemos que

$$\|x-y\| = \|(x-z)-(y-z)\| \leq \|x-z\| + \|y-z\| < \delta_x + \delta_y$$

de donde

$$\begin{cases} \|x-y\| < 2\delta_x \text{ si } \delta_y \leq \delta_x, \\ \\ \|x-y\| < 2\delta_y \text{ si } \delta_y \geq \delta_x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in B(x;2\delta_x) \subseteq U \text{ si } \delta_y \leq \delta_x, \\ \\ x \in B(y;2\delta_y) \subseteq V \text{ si } \delta_y \geq \delta_x. \end{cases}$$

Pero lo anterior es imposible (ya que $y \notin U$ y $x \notin V$). De esta manera, es necesario que $L \cap M = \emptyset$ y por (i), (ii) y (iii) se tiene que A es un subconjunto disconexo de $\mathbb{R}^n$.

Definición (conjunto arco conexo en $\mathbb{R}^n$): Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que A es un conjunto arco conexo en $\mathbb{R}^n$, si para cada $a, b \in A$, existe función continua $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

- ⋆ $\alpha([0,1]) = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\} \subseteq A$.
- ⋆ $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$.

(4) Demostrar que si A es un conjunto arco conexo en $\mathbb{R}^n$, entonces A es un conjunto conexo en $\mathbb{R}^n$.

Ayuda:

Si A fuese disconexo, entonces existirían abiertos U y V de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{cases} A \cap U \neq \emptyset \text{ y } A \cap V \neq \emptyset, \\ \\ A \subseteq U \cup V, \\ \\ U \cap V = \emptyset. \end{cases}$$

Sean $a \in A \cap U$ y $b \in A \cap V$, entonces por arco conexidad de A, existe una función continua $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

- ⋆ $\alpha([0,1]) = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\} \subseteq A$.
- ⋆ $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$.

Ahora, por la continuidad de α se tiene que $\alpha^{-1}(U)$ y $\alpha^{-1}(V)$ son conjuntos abiertos en $[0,1]$. Es decir que existen L y M abiertos en $\mathbb{R}$ tales que $\alpha^{-1}(U) = L \cap [0,1]$ y $\alpha^{-1}(V) = M \cap [0,1]$, y además es fácil notar que L y M satisfacen las siguientes propiedades

$$\begin{cases} 0 \in [0,1] \cap L = \alpha^{-1}(U) \text{ y } 1 \in [0,1] \cap M = \alpha^{-1}(V), \\ \\ [0,1] \cap L \cap M = \alpha^{-1}(U) \cap \alpha^{-1}(V) = \emptyset, \\ \\ [0,1] \subseteq L \cup M \end{cases}$$

pero el problema anterior nos dice que $[0,1]$ es disconexo, lo cual es imposible ya que sabemos de antemano que $[0,1]$ es conexo. De esta manera, es necesario que A sea un conjunto conexo.

Definición (conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$): Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que A es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, si para cada $a, b \in A$ se tiene que el segmento de recta I que va desde a hasta b definido como

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n : x = t \cdot (b - a) + a \text{ con } 0 \leq t \leq 1\}$$

está contenido en A.

(5) Sea A un subconjunto convexo en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que A es arco conexo.

Ayuda:

Sean $a, b \in A$ con $a = (a_1, \ldots, a_n)$ y $b = (b_1, \ldots, b_n)$, entonces definimos $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$\alpha(t) = t \cdot (b - a) + a = (t(b_1 - a_1) + a_1, \ldots, t(b_n - a_n) + a_n)$$

para cada $t \in [0,1]$. Entonces es fácil notar que α es una función continua y además

$$\begin{cases} \alpha([0,1]) = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\} \subseteq A, \\ \\ \alpha(0) = a \text{ y } \alpha(1) = b \end{cases}$$

pero lo anterior muestra que A es arco conexo.

(6) Sea A un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que A es conexo.

(7) Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$. Demostrar que $B(x;\varepsilon)$ es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$.

Ayuda:

Dados $a, b \in B(x;\varepsilon)$ y $t \in [0,1]$, veamos que $t \cdot (b - a) + a = (1 - t) \cdot a + t \cdot b \in B(x;\varepsilon)$. Para esto, notemos que

$$\|(1-t)\cdot a+t\cdot b-x\| = \|[(1-t)\cdot a-(1-t)\cdot x]+[t\cdot b-t\cdot x]\| \leq \|(1-t)\cdot a+(1-t)\cdot x\|+\|t\cdot b-t\cdot x\| = (1-t)\|a-x\|+t\|b-x\| < (1-t)\varepsilon+t\varepsilon=\varepsilon$$

y de esta manera, tenemos que $t\cdot(b-a)+a\in B(x;\varepsilon)$ lo cual muestra que $B(x;\varepsilon)$ es convexo.

(8) Sea $a\in\mathbb{R}^n$ y $\varepsilon>0$. Demostrar que $B(x;\varepsilon)$ es un conjunto conexo en $\mathbb{R}^n$.

(9) Sea $a\in\mathbb{R}^n$ y $\varepsilon>0$. Demostrar que $B(x;\varepsilon)$ es un conjunto arco conexo en $\mathbb{R}^n$.

(10) Demostrar que $\mathbb{R}^n$ es un conjunto conexo.

Ayuda:

Si $O=(0,\ldots,0)$ es el vector nulo en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathbb{R}^n=\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B(O;m).$$

además $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} B(O;m)=B(O;1)\neq\emptyset$ y $B(O;m)$ es conexo para cada $m\in\mathbb{N}$, entonces el teorema 2.6.1 nos dice que $\mathbb{R}^n$ es conexo.