Maestría en Ciencias Naturales y Matemáticas

Clase 8 - Cálculo Avanzado de Varias Variables

Mg: Julián Uribe Castañeda

UPB

17 de julio de 2023

Definición (tipos de cubrimiento y compacidad).

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Un cubrimiento de X es una colección de subconjuntos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\boxed{X \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha.}$$

Además diremos que:

(✓) Si $I \subseteq J$ y $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es también un cubrimiento de X, entonces diremos que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un subcubriento de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ que cubre a X.

(✓) Si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un subcubriento de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ que cubre a X con finitos elementos, entonces diremos que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un subcubrimiento finito de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ que cubre a X.

(✓) En el caso de que para cada $\alpha \in J$ el conjunto U_α es abierto en $\mathbb{R}^n$, llamaremos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ un cubrimiento abierto de X.

(✓) Diremos que X es un conjunto compacto, si para todo cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de X, existe un subcubrimiento finito $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_m}\}$ que cubre a X. Es decir que

$$\boxed{\begin{cases} X \subseteq \displaystyle\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha, \\ \\ U_\alpha \text{ es abierto para cada } \alpha \in J \end{cases} \Rightarrow \text{ Existe } \{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_m}\} \subseteq \{U_\alpha\}_{\alpha\in J} \text{ con } X \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{\alpha_i}.}$$

Teorema (Heine - Borel).

El intervalo cerrado $[a,b]$ es compacto.

Demostración:

Si $U=\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es un cubrimiento abierto de $[a,b]$, entonces definimos el conjunto A como:

$$A=\{x\in[a,b]:[a,x] \text{ es cubierto por un número finito de elementos en } U\}.$$

Entonces es fácil notar que

($\checkmark$) $A\neq\emptyset$, ya que $a\in A$.

($\checkmark$) A es acotado superiormente por b.

Así A tiene una mínima cota superior (supremo) que denotaremos por c. Para finalizar esta prueba, vamos a verificar las siguientes cosas:

(1) Si $c=\text{Supremo}(A)$, entonces $c\in A$.

(2) $c=b$.

De esta manera, por (1), (2) y la definición de A tendremos que $[a,b]$ es compacto.

Prueba de (1): Como $c\in[a,b]\subseteq\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha$, entonces existe $U_\beta\in\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ tal que $c\in U_\beta$. Así, existe $\varepsilon>0$ tal que $c\in B(c;\varepsilon)=(c-\varepsilon,c+\varepsilon)\subseteq U_\beta$. De esto podemos notar que

($\checkmark$) $c > a$, ya que $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subseteq U_\beta$.

($\checkmark$) Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $a \leq c-\varepsilon$ y de esta manera, por caracterización del supremo existe $x \in A$ tal que $c-\varepsilon < x$. Por lo tanto, existe $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_m}\} \subseteq \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ tal que $[0,x] \subseteq U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_m}$ y así

$$[a,c] = [a,x] \cup [x,c] \subseteq [a,x] \cup (c-\varepsilon, c+\varepsilon) = [a, c+\varepsilon) \subseteq U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_m} \cup U_\beta$$

lo cual muestra que $c \in A$.

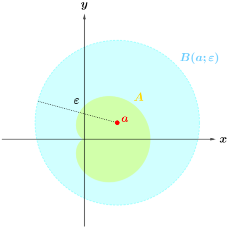
Prueba de (2): Debido a que $[a, c+\varepsilon) \subseteq U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_m} \cup U_\beta$, entonces de la definición de A y c, es necesario que $c = b$.

■

Definición (conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$).

Sea A un conjunto en $\mathbb{R}^n$. Decimos que A es un conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$, si existe $a \in A$ y $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\boxed{A \subseteq B(a;\varepsilon).}$$



Nota (definición anterior).

Podemos interpretar a un conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$, como un conjunto que "no se extiende infinitamente" y por este mismo motivo lo podemos "atrapar" en una bola abierta con un radio lo suficientemente grande.

Lema (equivalencia de conjuntos acotados).

Sea A un conjunto en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$A \text{ es acotado en } \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Existe } M > 0 \text{ tal que para todo} \\ x \in A \text{ se tiene que } \|x\| < M. \end{cases}$$

Demostración:

"$\Rightarrow$" Supongamos que A es acotado en $\mathbb{R}^n$. Entonces existen $\varepsilon > 0$ y $a \in A$ tales que $A \subseteq B(a; \varepsilon)$. Es decir que para cada $x \in A$, tenemos que

$$\|x - a\| < \varepsilon.$$

De esta forma, para cada $x \in A$ podemos decir que

$$\|x\| = \|(x - a) + a\| \leq \|x - a\| + \|a\| < \varepsilon + \|a\|.$$

De esta manera al tomar $M := \varepsilon + \|a\|$, obtenemos que $\|x\| < M$ para cada $x \in A$.

"$\Leftarrow$" Supongamos que existe $M>0$ tal que para todo $x\in A$ se tiene que $\|x\|<M$. Entonces dado $a\in A$ un punto fijo, tenemos que para todo $x\in A$

$$\|x-a\|\leq\|x\|+\|a\|<M+\|a\|.$$

Así, al tomar $\varepsilon:=M+\|a\|$ tenemos que para todo $x\in A$

$$\|x-a\|<\varepsilon.$$

Lo cual prueba que $A\subseteq B(a;\varepsilon)$ y así A es acotado en $\mathbb{R}^n$.

■

Lema ($\mathbb{R}^n$ es un espacio topológico Hausdorff).

Dados $a,b\in\mathbb{R}^n$ con $a\neq b$, tenemos que existe $\delta>0$ tal que $B(a;\delta)\cap B(b;\delta)=\emptyset$.

Demostración:

Sea $\delta=\dfrac{\|a-b\|}{2}$, entonces $B(a;\delta)\cap B(b;\delta)=\emptyset$, ya que de lo contrario existiría $c\in B(a;\delta)\cap B(b;\delta)$ y así

$$\|a-b\|=\|(a-c)+(c-b)\|\leq\|a-c\|+\|c-b\|<\frac{\|a-b\|}{2}+\frac{\|a-b\|}{2}=\|a-b\|$$

lo muestra que $\|a-b\|<\|a-b\|$, pero esto es imposible.

■

Teorema (compacto en $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ cerrado y acotado).

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\boxed{A \text{ es compacto } \Rightarrow A \text{ es cerrado y acotado en } \mathbb{R}^n.}$$

Demostración:

Supongamos que A es compacto, entonces deseamos probar las siguientes cosas:

(1) A es acotado en $\mathbb{R}^n$.

(2) A es cerrado.

Prueba de (1): Consideremos la colección de conjuntos $\{B(O;m) : m \in \mathbb{N}\}$. Entonces esta colección es un cubrimiento abierto de R^n (en particular es un cubrimiento abierto de A). Entonces por la compacidad de A, existen $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ tales que:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(O;m_i).$$

Ahora, si tomamos $M = \max\{m_1, \ldots, m_k\}$, tenemos que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(O;m_i) = B(O;M)$$

lo cual prueba que A es un conjunto acotado.

Prueba de (2): Para verificar que A es cerrado, se probará que A^c es abierto. Dado $a \in A^c$ fijo, tenemos que para todo $x \in A$, existe $\delta_x > 0$ tal que $B(a;\delta_x) \cap B(x;\delta_x) = \emptyset$ (lema previo). Por otro lado, es fácil notar que

$$A \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x;\delta_x)$$

y por compacidad de A, tenemos que existe $x_1, \ldots, x_m \in A$ tal que

$$A \subseteq B(x_1;\delta_{x_1}) \cup \cdots \cup B(x_m;\delta_{x_m}).$$

De esta manera, al tomar $\varepsilon := \text{mín}\{\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_m}\}$, se tiene que

(✓) $B(a;\varepsilon) \cap B(x_i;\delta_{x_i}) = \emptyset$ para $1 \leq i \leq m$.

(✓) $B(a;\varepsilon) \cap \left[B(x_1;\delta_{x_1}) \cup \cdots \cup B(x_m;\delta_{x_m})\right] = \emptyset$.

(✓) $B(a;\varepsilon) \cap A \subseteq B(a;\varepsilon) \cap \left[B(x_1;\delta_{x_1}) \cup \cdots \cup B(x_m;\delta_{x_m})\right] = \emptyset$, lo cual implica que $B(a;\varepsilon) \cap A = \emptyset$.

De esta manera, tenemos que $B(a;\varepsilon) \subseteq A^c$ y como a es un punto arbitrario de A^c, concluimos que A^c es abierto.

■

Recordar (caracterización de supremo e infimo).

Sea A un conjunto no vacío de números reales, entonces:

(1) Si A es un conjunto acotado superiormente, tenemos que

$$L = \text{supremo}(A) \iff \begin{cases} \text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } a \in A \text{ tal que} \\ \\ \star\ x \leq L \text{ para todo } x \in A, \\ \star\ L - \varepsilon < a. \end{cases}$$

(2) Si A es un conjunto acotado inferiormente, tenemos que

$$M = \text{infimo}(A) \iff \begin{cases} \text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } b \in A \text{ tal que} \\ \\ \star\ M \leq x \text{ para todo } x \in A, \\ \star\ b < M + \varepsilon. \end{cases}$$

Nota (siguiente lema).

El siguiente lema, muestra que el supremo y el infimo de un conjunto lo podemos interpretar en términos de sucesiones. La demostración de este lema se deja como ejercicio al lector.

Lema (caracterización del supremo e ínfimo).

(1) Si A es un conjunto acotado superiormente, entonces

$$L = \text{supremo}(A) \iff \begin{cases} \text{Existe } \{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq A \ \text{ tal que} \\ \\ \star \ x \leq L \text{ para todo } x \in A, \\ \star \ \lim\limits_{n \mapsto +\infty} x_n = L. \end{cases}$$

(2) Si A es un conjunto acotado inferiormente, entonces

$$M = \text{infimo}(A) \iff \begin{cases} \text{Existe } \{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq A \ \text{ tal que} \\ \\ \star \ M \leq x \text{ para todo } x \in A, \\ \star \ \lim\limits_{n \mapsto +\infty} x_n = L. \end{cases}$$

■

Lema (caracterización de la clausura en términos de sucesiones).

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces:

$$\boxed{a \in \overline{A} \iff \text{existe una sucesión } \{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq A \ \text{ tal que } \lim_{n \mapsto +\infty} x_n = a.}$$

Demostración:

"$\Rightarrow$" Supongamos que $a \in \overline{A}$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que $B(a;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. En particular, tenemos que $B\left(a; \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in B\left(a; \frac{1}{n}\right) \cap A$ y es sencillo notar que

(✓) $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq A$.

(✓) $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} x_n = a$.

"$\Leftarrow$" Supongamos que existe $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq A$ tal que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} x_n = a$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in B(a;\varepsilon) \cap A$$

para todo $n \geq N$. En particular $B(a;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y así $a \in \overline{A}$.

■

Teorema (existencia de valores extremos en conjuntos compactos en $\mathbb{R}$).

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto compacto, $L = \text{supremo}(A)$ y $M = \text{infimo}(A)$, entonces $L, M \in A$.

Demostración:

Como A es compacto, entonces por teorema anterior tenemos que A es acotado y así $L = \text{supremo}(A)$ y $M = \text{infimo}(A)$ son números reales fijos. Además, por el lema anterior existen sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq A$, $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq A$ tales que

$$\lim_{n \mapsto +\infty} x_n = L \text{ y } \lim_{n \mapsto +\infty} y_n = M.$$

Por otro lado, como A es compacto, entonces por teorema anterior A es cerrado y así $\overline{A} = A$. De esta manera, el lema anterior nos dice que $L, M \in \overline{A} = A$.

■

Teorema (las funciones continuas envian compactos en compactos).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función que satisface las siguientes condiciones:

($\checkmark$) f es continua en A.

($\checkmark$) A es compacto.

Entonces $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^m : y = f(x) \text{ para algún } x \in A\}$ es compacto en $\mathbb{R}^m$.

Demostración:

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una colección de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^m$ tal que $f(A) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$. Entonces por la continuidad de f tenemos que

$$f^{-1}(U_\alpha) \text{ es abierto en } A$$

para cada $\alpha \in J$. Así, existe una colección de abiertos $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ en $\mathbb{R}^n$ tales que

$$f^{-1}(U_\alpha) = V_\alpha \cap A$$

para cada $j \in J$. Además es fácil notar que $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ es un cubrimiento de A. En particular $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es un cubrimiento abierto de A y por compacidad de A existen $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in J$ (finitos) tales que

$$A \subseteq V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_k}.$$

De esta manera $A = \left[V_{\alpha_1} \cap A\right] \cup \cdots \cup \left[V_{\alpha_k} \cap A\right] = f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{\alpha_k})$ y por tanto

$$f(A) = f\left(f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{\alpha_k})\right) = f\left(f^{-1}(U_{\alpha_1})\right) \cup \cdots \cup f\left(f^{-1}(U_{\alpha_k})\right) \subseteq U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k}$$

lo cual prueba que $f(A) \subseteq U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k}$ y así $f(A)$ es compacto.

■

Corolario (valor extremo).

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre A que es compacto. Si $L = \text{supremo}(f(A))$ y $M = \text{infimo}(f(A))$, entonces $L, M \in f(A)$.

Demostración:

Se tiene de los dos teoremas previos.

■

Observación (corolario anterior).

El teorema anterior nos dice que dado un conjunto compacto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función continua $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces existen $a, b \in A$ tales que

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

para todo $x \in A$.

Problemas.

(1) Sea $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un punto fijo y sea $d_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$d_a(x) := \|x - a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2}$$

para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que d_a es una función continua en $\mathbb{R}^n$.

Ayuda: Demostrar que $\left|d_a(x) - d_a(y)\right| = \big|\|x - a\| - \|y - a\|\big| \leq \|x - y\|$ para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(2) Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $d_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como

$$d_A(x) = \text{infimo}\{\|x - a\| \in \mathbb{R} : a \in A\}$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que d_A es continua en $\mathbb{R}^n$.

Ayudas:

($\checkmark$) Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y para cada $\varepsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $d_A(x) > \|x - a\| - \varepsilon$.

($\checkmark$) Para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ y para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\left|d_A(x) - d_A(y)\right| < \|x - y\| + \varepsilon$$

lo cual implica que $\left|d_A(x) - d_A(y)\right| < \|x - y\|$.

(3) Supongamos que A es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Probar que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe $a_x \in A$ tal que

$$d_A(x) = \|x - a_x\|$$

donde d_A es la función definida en el problema anterior.

Ayudas:

(✓) Usar el hecho de que $d_A(x) = \text{infimo}\{\|x-a\| \in \mathbb{R} : a \in A\}$ es continua.

(4) Sean $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $\mathbb{R}^n$. Si A y B son conjuntos definidos como

(✓) $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq g(x)\}$.

(✓) $B = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq g(x)\}$.

Demostrar que A y B son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$.

Ayudas:

(✓) Si f y g son continuas en a, entonces $f - g$ es una función continua en a.

(✓) $[0, +\infty)$ y $(-\infty, 0]$ son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$.

(✓) $(f-g)^{-1}[0, +\infty) = A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq g(x)\}$ y $(f-g)^{-1}(-\infty, 0] = B = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq g(x)\}$.

(5) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que si $a \in ac(A)$, entonces $B^*(a;\varepsilon) \cap A$ tiene infinitos puntos.

Ayuda:

Suponer por reducción al absurdo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B^*(a;\varepsilon) \cap A = \{x_1, \ldots, x_k\}$ (finitos), tomar $\delta = \min\limits_{1 \leq i \leq k} \|x_i - a\|$ y luego demostrar que $B^*(a;\delta) \cap A = \emptyset$.

(6) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que

$$a \in ac(A) \iff \text{Existe una sucesión } \{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq A - \{a\} \text{ tal que } \lim_{n \mapsto +\infty} x_n = a.$$

(7) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y $B \subseteq A$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que B es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$.

Ayuda:

Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es un cubrimiento abierto de B, entonces $A \subseteq \left(\bigcup\limits_{\alpha \in J} U_\alpha \right) \cup B^c$ y por compacidad de A, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in J$ (finitos), tales que $A \subseteq \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} U_{\alpha_i} \right) \cup B^c$.

(8) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y $B \subseteq A$. Demostrar que si $ac(B) = \emptyset$, entonces B es un conjunto finito.

Ayudas:

($\checkmark$) Para cada $b \in B$, existe $\varepsilon_b > 0$ tal que $B^*(b;\varepsilon_b) \cap B = \emptyset$, lo cual implica que $B(b;\varepsilon_b) \cap B = \{b\}$.

($\checkmark$) B es cerrado y como $B \subseteq A$, entonces B es compacto (problema 7).

($\checkmark$) $B \subseteq \bigcup_{b\in B} B(b;\varepsilon)$, lo cual implica por compacidad de B que existen $b_1,\dots,b_k \in B$ (finitos) tales que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(b_i;\varepsilon_{b_i})$.

($\checkmark$) $B = \bigcup_{i=1}^{k} B(b_i;\varepsilon_{b_i}) \cap B = \{b_1,\dots,b_k\}$.

(9) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y $\{x_m\}_{m=1}^{+\infty} \subseteq A$. Demostrar que existe una subsucesión $\{x_{m_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ de $\{x_m\}_{m=1}^{+\infty}$ que converge a un punto $a \in A$.

Ayudas:

Sea $B = \{x_m\}_{m=1}^{+\infty}$, entonces

(a) Si B es finito, entonces $B = \{b_1,\dots,b_p\}$. De esta manera, para cada $i \in \{1,\dots,p\}$ definimos

$$L_i = \{m \in \mathbb{N} : x_m = b_i\}.$$

Y debe de existir $j \in \{1,\dots,p\}$ tal que L_j es infinito. Con los indices de L_j formamos la subsucesión que converge (la convergencia es a b_j).

(*b*) Si B es infinito, entonces $ac(B) \neq \emptyset$ (problema 8). Si $a \in ac(B) \subseteq A$, entonces construimos la subsucesión $\{x_{m_k}\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq B$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x_{m_1} \in B^*(a,1) \cap B, \\ x_{m_2} \in B^*\left(a, \dfrac{1}{n}\right) \cap B, \text{ con } m_2 > m_1, \\ \quad \vdots \\ x_{m_{k+1}} \in B^*\left(a, \dfrac{1}{k+1}\right) \cap B, \text{ con } m_{k+1} > m_k. \end{cases}$$

La construcción anterior es posible por el problema (5).

(*c*) $\lim\limits_{k \mapsto +\infty} x_{m_k} = a$.

(10) Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes condiciones:

($\checkmark$) f es continua en $[a,b]$.

($\checkmark$) $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$.

Demostrar que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Ayudas:

($\checkmark$) Recordar la densidad de los racionales en los reales. Por lo tanto, para cada $x_0 \in [a,b] \cap \mathbb{Q}^c$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq [a,b] \cap \mathbb{Q}$ tal que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} x_n = x_0$.

($\checkmark$) Si $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq [a,b] \cap \mathbb{Q}$ satisface que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} x_n = x_0$, entonces $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} f(x_n) = f(x_0)$, ya que f es continua en x_0.

(11) Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ \\ 1-x & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

Probar que

(a) $f(f(x)) = x$ para todo $x \in [0,1]$.

(b) $f(x) + f(1-x) = x$ para todo $x \in [0,1]$.

(c) f es continua solo en $x = \dfrac{1}{2}$.

(d) $f([0,1]) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ con } x \in [0,1]\} = [0,1]$. Es decir que f toma todos los valores en el intervalo $[0,1]$.

(e) $f(x+y) - f(x) - f(y)$ es racional para todo $x, y \in [0,1]$.

(12) Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ es la función definida por

$$g(x)=\max_{y\in[a,x]} f(y)$$

para $x\in[a,b]$. Demostrar que g es continua en $[a,b]$.

Ayuda:

Si $x_1,x_2\in[a,b]$ con $x_1\leq x_2$, entonces

$$\max_{y\in[a,x_2]} f(y)-\max_{y\in[a,x_1]} f(y)=\max\left\{\max_{y\in[a,x_1]} f(y),\max_{y\in[x_1,x_2]} f(y)\right\}-\max_{y\in[a,x_1]} f(y)=$$

$$=\max\left\{0,\max_{y\in[x_1,x_2]} f(y)-\max_{y\in[a,x_1]} f(y)\right\}\leq\max\left\{0,\max_{y\in[x_1,x_2]} f(y)-f(x_1)\right\}.$$