Universidad Nacional de Colombia

Cálculo en Varias Variables

Julián Uribe Castañeda

Doctorado en ciencias: Matemáticas

8 de marzo de 2024

Máximos y mínimos de funciones de varias variables.

Definición (máximos y mínimos de funciones de varias variables).

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de varias variables y $x_0 \in A$, entonces:

(1) Decimos que x_0 es un máximo local para f, si existe $r > 0$ tal que:

$$\begin{cases} f(x) \leq f(x_0), \\ \text{para todo } x \in B(x_0, r) \cap A. \end{cases}$$

(2) Decimos que x_0 es un mínimo local para f , si existe $r > 0$ tal que:

$$\begin{cases} f(x) \geq f(x_0), \\ \text{para todo } x \in B(x_0, r) \cap A. \end{cases}$$

(3) Decimos que x_0 es un máximo global para f, si:

$$\begin{cases} f(x) \leq f(x_0), \\ \text{para todo } x \in A. \end{cases}$$

(4) Decimos que x_0 es un mínimo global para f, si:

$$\begin{cases} f(x) \geq f(x_0), \\ \text{para todo } x \in A. \end{cases}$$

Ejemplo (máximos y mínimos de funciones de varias variables).

Sea $f(x,y)=x^2+y^2$, entonces $(0,0)$ es un mínimo absoluto para f, ya que:

$$\boxed{f(0,0)=0^2+0^2=0\leq x^2+y^2=f(x,y) \quad\Rightarrow\quad f(0,0)\leq f(x,y) \text{ para cada } (x,y)\in\mathbb{R}^2.}$$

Ejemplo (máximos y mínimos de funciones de varias variables).

Sea $f(x,y)=-x^4-y^2$, entonces $(0,0)$ es un máximo absoluto para f, ya que:

$$x^4+y^2\geq 0 \quad\Rightarrow\quad -x^4-y^2\leq 0.$$

$$f(x,y)=-x^4-y^2\leq 0=-0^4-0^2=f(0,0) \quad\Rightarrow\quad f(x,y)\leq f(0,0) \text{ para cada } (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

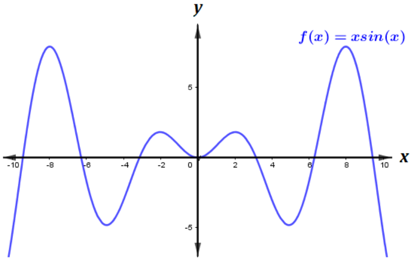
Observación (localidad y globalidad).

Cabe resaltar que si una función tiene un máximo (mínimo) absoluto un punto, entonces tiene un máximo (mínimo) local en el mismo punto. Pero si una función tiene un máximo (mínimo) local en un punto, esto no implica que tenga un máximo (mínimo) absoluto en este punto. Para ilustrar esto último, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo (máximos y mínimos de funciones de varias variables).

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida como $f(x)=x sin(x)$. Verificar que f tiene un mínimo local en $x=0$, pero $x=0$ no es un mínimo absoluto.

Solución: Notemos primero que la gráfica de f se describe de la siguiente manera:



Así, por medio de la gráfica de f, tenemos que f tiene un mínimo local en $x=0$, pero $x=0$ no es un mínimo absoluto. De hecho sin usar la gráfica de la función, podemos darnos cuenta que:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} sin(x)\geq 0 \text{ para } x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right) & \Rightarrow & x sin(x)\geq 0 \text{ para } x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right), \\ sin(x)\leq 0 \text{ para } x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right] & \Rightarrow & x sin(x)\geq 0 \text{ para } x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right]. \end{array}}$$

Por lo tanto $xsin(x) \geq 0$ para $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y de esta manera tenemos que:

$$\boxed{f(x) = xsin(x) \geq 0 = 0 \cdot sin(0) = f(0) \text{ para } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),}$$

lo cual significa que $x = 0$ es un mínimo local para f. Además $x = 0$ no es el mínimo absoluto de la función ya que se pueden encontrar valores de x donde f tiene valores más pequeños $\left(\text{por ejemplo } x = \frac{3\pi}{2}\right)$.

Nota (relación entre máximos y mínimos con la derivada de una función).

Recordemos que en cálculo diferencial, tenemos el siguiente resultado:

Teorema.

Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x_0 \in (a, b)$. Si f tiene un máximo local ó un mínimo local en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

Entonces es natural preguntarse

¿cuál sería el resultado análogo para funciones de varias variables?

El siguiente teorema nos responde esta pregunta.

Teorema (relación entre los extremos locales de una función con la diferenciabilidad).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x_0 \in A$. Si f tiene un máximo local ó un mínimo local en x_0, entonces $f_{x_1}(x_0) = 0, \ldots, f_{x_n}(x_0) = 0$ $(\nabla f(x_0) = (0, \ldots, 0))$.

Ejemplo (comprobación del teorema).

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida como $f(x,y) = x^2 + y^2$. Entonces

$$f_x(x,y) = 2x \quad \text{y} \quad f_y(x,y) = 2y,$$

lo cual implica que

$$f_x(0,0) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(0,0) = 0.$$

Además en un ejemplo anterior se probó que $(0,0)$ es el mínimo absoluto de f y por tanto el teorema anterior nos dice que $f_x(0,0) = 0$ y $f_y(0,0) = 0$, lo que comprueba el cálculo hecho previamente.

Observación (reciproco del teorema anterior).

Es importante notar que el reciproco del teorema anterior en general es falso. Es decir que es posible encontrar funciones $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables con $f_{x_1}(x_0) = 0, \ldots, f_{x_n}(x_0) = 0$ $(\nabla f(x_0) = (0, \ldots, 0))$ y x_0 no es un máximo ni mínimo local para f. El siguiente ejemplo muestra esta situación.

Ejemplo (máximos y mínimos de funciones de varias variables).

Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida como $f(x,y)=x^2-y^2$. Verificar que $f_x(0,0)=0$ y $f_y(0,0)=0$, pero $(x,y)=(0,0)$ no es un máximo ni un mínimo local.

Solución:

Si calculamos las derivadas parciales de f, tenemos

$$f_x(x,y)=(x^2-y^2)_x=2x \quad \text{y} \quad f_y(x,y)=(x^2-y^2)_y=-2y,$$

lo cual implica que

$$f_x(0,0)=0 \ \text{ y } \ f_y(0,0)=0.$$

Para ver que $(0,0)$ no es máximo ni mínimo local para f, notemos que dado un número $r>0$ podemos encontrar puntos (a,b) y (c,d) en $B((0,0);r)$ tales que:

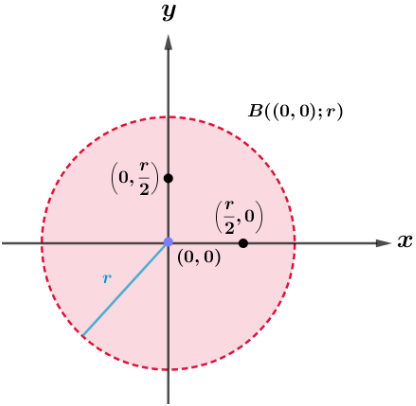
$f(0,0)<f(a,b)$ (esto implica que $(0,0)$ no puede ser un máximo local).

$f(0,0)>f(c,d)$ (esto implica que $(0,0)$ no puede ser un mínimo local).

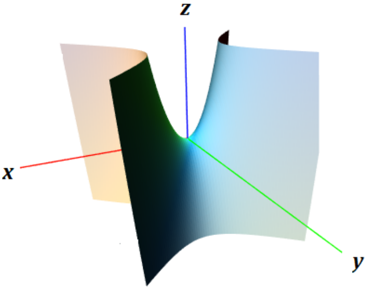
En efecto, si tomamos $(a,b)=\left(\frac{r}{2},0\right)$ y $(c,d)=\left(0,\frac{r}{2}\right)$, entonces ambos puntos se encuentran en $B((0,0);r)$ (¿por qué?) y además:

(✓) $f(a,b)=f\left(\frac{r}{2},0\right)=\frac{r^2}{4}>0=0^2-0^2=f(0,0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(0,0)<f(a,b)}$.

$(\checkmark)$ $f(c,d) = f\left(0, \frac{r}{2}\right) = -\frac{r^2}{4} < 0 = 0^2 - 0^2 = f(0,0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(0,0) > f(c,d)}.$



Así $(0,0)$ no es máximo ni mínimo local. Este resultado también se puede ilustrar en la gráfica de la función $f(x,y) = x^2 - y^2$.



Gráfica(f)

$f(x,y)=x^2-y^2$

Ejercicio (maximos y minimos de funciones de varias variables).

Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y)=x^3+y^3$. Entonces:

(1) Comprobar que $f_x(0,0)=0$ y $f_y(0,0)=0$.

(2) Demostrar que $(0,0)$ no es máximo ni mínimo local para f.

Nota (máximos, mínimos y derivadas).

Es posible tener funciones donde las derivadas parciales en un punto no existen y en este punto puede ser un máximo ó mínimo local. Para ilustrar esto, consideremos el siguiente ***Ejemplo.***

Ejemplo (máximos y mínimos de funciones de varias variables).

Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$. Entonces

(1) Encontrar las derivadas parciales de f en un punto arbitrario $(x,y)\neq(0,0)$.

(2) Mostrar que $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$ no existen.

(3) Verificar que $(x,y)=(0,0)$ es un mínimo absoluto para f.

Solución:

(1) Es fácil notar que las derivadas parciales de f en puntos $(x,y)\neq(0,0)$ son:

(✓) $$f_x(x,y)=\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)_x=\left((x^2+y^2)^{1/3}\right)_x=\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^{2/3}}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}\right).$$

(✓) $$f_y(x,y)=\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)_y=\left((x^2+y^2)^{1/3}\right)_y=\frac{1}{3}\left(\frac{2y}{(x^2+y^2)^{2/3}}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{y}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}\right).$$

Es claro que estas derivadas parciales están definidas en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

(2) Del computo hecho en la parte (1), se tiene que no podemos evaluar (0,0) en las formulas obtenidas de f_x y f_y. Por tanto, tenemos que verificar si estas derivadas parciales se pueden encontrar por medio de la definición.

$(\checkmark)$ $f_x(0,0) = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{\sqrt[3]{h^2} - 0}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{h^{2/3}}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} h^{-1/3} = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{1}{h^{1/3}}$ no existe.

$(\checkmark)$ $f_y(0,0) = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{\sqrt[3]{h^2} - 0}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{h^{2/3}}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} h^{-1/3} = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{1}{h^{1/3}}$ no existe.

(3) Para ver que (0,0) es un mínimo absoluto de f, notemos que para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que:

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2} \geq 0 = \sqrt[3]{0^2 + 0^2} = f(0,0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x,y) \geq f(0,0)}.$$

Observación (máximos y mínimos de una función de varias variables).

De los resultados y ejemplos anteriores, tenemos que para determinar los máximos y mínimos de una función, existen dos clases de puntos muy importantes que nos pueden ayudar en esta busqueda, los cuales son:

$(\checkmark)$ Los puntos $a \in \mathbb{R}^n$ tales que $f_{x_1}(a) = 0, \ldots, f_{x_n}(a) = 0$.

$(\checkmark)$ Los puntos $a \in \mathbb{R}^n$ tales que para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $f_{x_i}(a)$ no existe.

Esta clase de puntos serán de suma importancia para nuestro estudio de máximos y mínimos de funciones de varias variables.

Definición (punto crítico de funciones de varias variables).

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $a \in A$. Decimos que a es un punto crítico de f, si $f_{x_1}(a) = 0, \ldots, f_{x_n}(a) = 0$ ($\nabla f(x_0) = (0, \ldots, 0)$) ó alguna derivada parcial de f no existe en a.

Nota (puntos críticos).

Los puntos críticos se pueden interpretar como aquellos puntos donde la función "podría" tener un extremo relativo (máximo ó mínimo local).

Ejemplo (puntos críticos de funciones de varias variables).

Encontrar los puntos críticos de $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y + 5$.

Solución: Las derivadas parciales de f son $f_x(x,y) = 2x + y + 2$ y $f_y(x,y) = x + 2y - 2$. Así tenemos que los puntos críticos son aquellos puntos (x,y) que satisfacen lo siguiente:

$$\boxed{\begin{aligned} 2x + y + 2 = 0 \quad & (f_x(x,y) = 0), \\ x + 2y - 2 = 0 \quad & (f_y(x,y) = 0). \end{aligned}}$$

De la segunda ecuación tenemos que $x = -2y + 2$ y reemplazando esto en la primera ecuación, tenemos que $2x + y + 2 = 2(-2y + 2) + y + 2 = -3y + 6 = 0$ lo cual implica que $y = 2$ y $x = -2$. Así el único punto crítico de f es $(x,y) = (-2, 2)$.

Ejemplo (puntos críticos de funciones de varias variables)..

Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$. Verificar que $(0,0)$ es el único punto crítico de f.

Solución:

Anteriormente vimos que f satisface lo siguiente:

($\checkmark$) $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$ no existen. Esto muestra que $(0,0)$ es un punto crítico de f.

($\checkmark$) $f_x(x,y)=\frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}\right)$ y $f_y(x,y)=\frac{2}{3}\left(\frac{y}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}\right)$ para todo $(x,y)\neq(0,0)$. Lo cual implica que para todo $(x,y)\neq(0,0)$ se tiene que:

$$\boxed{\begin{gathered} f_x(x,y)=0 \text{ y } f_y(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{y}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}\right)=0, \\ f_x(x,y)=0 \text{ y } f_y(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \text{ y } y=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y)=(0,0) \end{gathered}}$$

lo cual no es posible. De esta forma, f solamente tiene un punto crítico, dado por $(0,0)$.

Nota (condiciones para tener un máximo ó mínimo local).

Recordemos que en cálculo diferencial, tenemos el siguiente resultado:

Teorema.

Supongamos que $f:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función de clase C^2 sobre (a,b) y $c\in(a,b)$ es un punto crítico de f, entonces:

(✓) Si $f''(c)>0$, entonces c es un mínimo local para f.

(✓) Si $f''(c)<0$, entonces c es un máximo local para f.

De esta manera, es natural preguntarse

¿cuál sería el resultado análogo para funciones de varias variables?

El siguiente teorema nos responderá esta pregunta, pero antes definimos algunas conceptos necesarios para el entendimiento de este resultado.

Definición (Matriz hessiana).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $a \in A$. Definimos la matriz hessiana de f en **a** como la siguiente matriz

$$Hf(a) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(a) & f_{x_1x_2}(a) & f_{x_1x_3}(a) & \dots & f_{x_1x_n}(a) \\ f_{x_2x_1}(a) & f_{x_2x_2}(a) & f_{x_2x_3}(a) & \dots & f_{x_2x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(a) & f_{x_nx_2}(a) & f_{x_nx_3}(a) & \dots & f_{x_nx_n}(a) \end{bmatrix}.$$

Probando que cada una de las componentes existe.

Ejemplo (matriz hessiana).

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x,y) = x^2 - 2xy + y$. Hallar la matriz $Hf(x,y)$.

Solución:

Notemos que las derivadas parciales de f son:

($\checkmark$) $f_x(x,y) = (x^2 - 2xy + y)_x = 2x - 2y$, $f_y(x,y) = (x^2 - 2xy + y)_y = -2x + 1$.

($\checkmark$) $f_{xx}(x,y) = (2x - 2y)_x = 2$, $f_{xy}(x,y) = (2x - 2y)_y = -2$, $f_{yx}(x,y) = (-2x+1)_x = -2$ y $f_{yy}(x,y) = (-2x+1)_y = 0$.

Lo anterior muestra que $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Notación (siguiente teorema).

Dada la matriz hessiana $Hf(a)$ definida previamente, definimos los números $d_1, \dots, d_n$ como:

$$d_1 = f_{x_1x_1}(a),$$

$$d_2 = det\begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(a) & f_{x_1x_2}(a) \\ f_{x_2x_1}(a) & f_{x_2x_2}(a) \end{bmatrix},$$

$$d_3 = det\begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(a) & f_{x_1x_2}(a) & f_{x_1x_3}(a) \\ f_{x_2x_1}(a) & f_{x_2x_2}(a) & f_{x_2x_3}(a) \\ f_{x_3x_1}(a) & f_{x_3x_2}(a) & f_{x_3x_3}(a) \end{bmatrix},$$

$$\vdots$$

$$d_n = det\begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(a) & f_{x_1x_2}(a) & f_{x_1x_3}(a) & \dots & f_{x_1x_n}(a) \\ f_{x_2x_1}(a) & f_{x_2x_2}(a) & f_{x_2x_3}(a) & \dots & f_{x_2x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(a) & f_{x_nx_2}(a) & f_{x_nx_3}(a) & \dots & f_{x_nx_n}(a) \end{bmatrix} = det(Hf(a)).$$

Estos números jugarán un papel muy importante en el estudio de máximo y mínimos locales para funciones de varias variables.

Teorema (Criterio de la matriz hessiana).

Supongamos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función con $f \in C^2(A,\mathbb{R})$ y $\mathbf{a} \in A$ satisface que $\nabla f(a) = (0,\ldots,0)$ (a es un punto crítico de f). Entonces

(1) Si $d_n \neq 0$ y $d_1,\ldots,d_n > 0$, entonces f tiene un mínimo local en $\mathbf{a}$.

(2) Si $d_n \neq 0$ y $\begin{cases} d_k < 0 & \text{si } \ k \ \text{ es impar,} \\ d_k > 0 & \text{si } \ k \ \text{ es par,} \end{cases}$ entonces f tiene un máximo local en $\mathbf{a}$.

(3) Si $d_n \neq 0$ y la secuencia $d_1,\ldots,d_n$ no cumple las condiciones de (1) y (2), entonces $\mathbf{a}$ no es un máximo ni mínimo local de f (esto suele llamarse un punto de silla).

Ejemplo (criterio de la matriz hessiana).

Usar el criterio de la matriz Hessiana para hallar los extremos locales (máximos y mínimos locales) de la función $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y + 5$.

Solución: Previamente vimos que el único punto crítico de f es $(x,y) = (-2,2)$. Además es fácil ver que las derivadas parciales de orden 2 son $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = f_{yx} = 1$ y $f_{yy} = 2$. Por lo tanto, la matriz hessiana de f en $(-2,2)$ es:

$$\boxed{Hf(-2,2) = \begin{bmatrix} f_{xx}(-2,2) & f_{xy}(-2,2) \\ f_{yx}(-2,2) & f_{yy}(-2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad d_1 = 2 \quad \text{y} \quad d_2 = det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3.}$$

Así, el criterio de la hessiana nos dice que $(-2,2)$ es un mínimo local para f.

Ejemplo (criterio de la matriz hessiana).

Usar el criterio de la matriz hessiana para hallar los extremos locales de la función $f(x,y,z) = x^3 + xy^2 + x^2 + y^2 + 3z^2$.

Solución:

Primero encontremos los puntos críticos de f. Para esto, necesitamos encontrar las derivadas parciales de f las cuales son

$$f_x(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2x, \quad f_y(x,y,z) = 2xy + 2y \quad \text{y} \quad f_z(x,y,z) = 6z.$$

Así los puntos críticos de f son los puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen las ecuaciones:

$$\boxed{\begin{array}{c} 3x^2 + y^2 + 2x = 0 \quad (f_x(x,y,z) = 0), \\ 2xy + 2y = 0 \quad (f_y(x,y,z) = 0), \\ 6z = 0 \quad (f_z(x,y,z) = 0). \end{array}}$$

La segunda ecuación nos dice que

$$2xy + 2y = 2y(x+1) = 0, \text{ lo cual implica que } y = 0 \;\text{ o }\; x = -1.$$

($\checkmark$) Si $y = 0$, entonces la primera ecuación nos dice que $3x^2 + 2x = x(3x+2) = 0$ y por tanto $x = 0$ ó $x = -\frac{2}{3}$.

$(\checkmark)$ Si $x=-1$, entonces la primera ecuación nos dice que $y^2+1=0$ lo cual es imposible.

Así tenemos que los únicos puntos críticos de f son $(0,0,0)$ y $\left(-\frac{2}{3},0,0\right)$. Por lo tanto, tenemos que:

$$Hf=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6x+2 & 2y & 0 \\ 2y & 2x+2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

$$Hf(0,0,0)=\begin{bmatrix} 6(0)+2 & 2(0) & 0 \\ 2(0) & 2(0)+2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

$$Hf\left(-\frac{2}{3},0,0\right)=\begin{bmatrix} 6\left(-\frac{2}{3}\right)+2 & 2(0) & 0 \\ 2(0) & 2\left(-\frac{2}{3}\right)+2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Lo anterior implica que:

$(\checkmark)$ $Hf(0,0,0)$ tiene $d_1=2$, $d_2=4$ y $d_3=24$. Lo cual prueba que $(0,0,0)$ es un mínimo local.

$(\checkmark)$ $Hf\left(-\frac{2}{3},0,0\right)$ tiene $d_1=-2$, $d_2=-\frac{4}{3}$ y $d_3=-8$. Lo cual prueba que $\left(-\frac{2}{3},0,0\right)$ es un punto de silla.

Problemas.

(1) Identifique y determine la naturaleza de los puntos criticos de las funciones dadas.

(a) $f(x,y) = 2xy - 2x^2 - 5y^2 + 4y - 2$.

(b) $g(x,y) = ln(x^2 + y^2 + 1)$.

(c) $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xy$.

(d) $i(x,y,z) = e^x(x^2 - y^2 - 2z^2)$.

(2) Sea $f(x,y) = \dfrac{2y^3 - 3y^2 - 36y + 2}{1 + 3x^2}$, entonces:

(a) Encontrar los puntos críticos de f.

(b) Identificar los extremos de f.

(3) Sea $f(x,y) = ax^2 + by^2$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, $b \neq 0$, entonces:

(a) Demostrar que el único punto critico de f es $(x,y) = (0,0)$.

(b) Determinar la naturaleza del punto critico $(x,y) = (0,0)$ de f en términos de a y b.

(4) Sea $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como $f(x_1,\ldots,x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ para cada $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, con $a_i \neq 0$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, entonces:

(a) Encontrar los puntos críticos de f.

(b) Determinar la naturaleza de los puntos críticos de f en términos de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

(5) Supongamos que una empresa está a cargo de la fabricación de 2 tipos de televisores. La función de ingresos en pesos está dada por

$$I(x,y) = 8x + 6y - x^2 - 2y^2 + 2xy$$

donde x denota la cantidad de equipos del modelo Sony vendidos y y es la cantidad de equipos del modelo Samsung que se venden, ambos en unidades de 100. Entonces determinar la cantidad de televisores que se deben vender de cada modelo para maximizar el ingreso resultante.

(6) La base de una pecera con volumen dado V está hecha de pizarra y los lados están hechos de vidrio. Si la pizarra cuesta cinco veces más (por unidad de área) que el vidrio y la pecera no tiene la parte superior. Entonces determinar las dimensiones x, y y z de la pecera que minimizan el costo de los materiales.