Maestría en Ciencias Naturales y Matemáticas

Clase 1 - Cálculo Avanzado de Varias Variables

Mg: Julián Uribe Castañeda

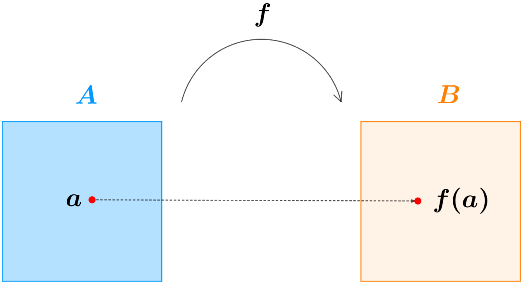
UPB

15 de diciembre de 2022

Definición (función).

Sean A y B conjuntos no vacíos, entonces una función f de A hasta B es una relación entre A y B que cumple la siguiente condición:

Cada $a \in A$ está relacionado con un único elemento $f(a) \in B$.



Y denotamos a esta función como $f : A \longrightarrow B$.

Nota (funciones).

En este parte trabajaremos con funciones $f: A \longrightarrow B$ con A y B subconjuntos de espacios Euclídeos, es decir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Además tenemos que:

($\checkmark$) El conjunto A es llamado el dominio de la función $f: A \longrightarrow B$ y escribimos $A = Dom(f)$.

($\checkmark$) El conjunto B es llamado el codominio de la función $f: A \longrightarrow B$ y escribimos $B = Codom(f)$.

($\checkmark$) El rango de $f: A \longrightarrow B$ es el conjunto $\{f(x) \in B : x \in A\}$ y lo denotamos por $Ran(f)$.

Observación (tipos de funciones a trabajar).

En la practica trabajaremos con funciones reales conocidas de cálculo diferencial e integral y para encontrar el dominio, codominio y rango de una función dada, bastara verificar donde la función tiene sentido. Es decir nosotros sabemos que algunas funciones reales tienen dominios específicos (por ejemplo la función $h(x) = \sqrt{x}$ tiene dominio $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$) y con estas restricciones tenemos que garantizar que nuestra función tiene sentido algebraico. Para ser más claro, consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo (funciones).

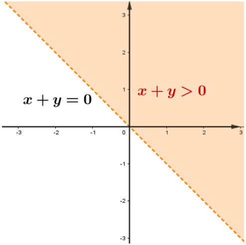
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la función definida como

$$f(x,y) = (xy, ln(x+y), cosx)$$

entonces determinar $A = Dom(f)$.

Solución:

Debido a que el único problema que tiene f se presenta en su segunda componente $ln(x+y)$, entonces es fácil notar que el dominio de f es:



$$\boxed{Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y>0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\}.}$$

Para realizar el dibujo de $Dom(f)$, es importante notar que la recta $x+y=0$ divide al plano en dos semiplanos que se describen por medio de las ecuaciones $x+y>0$ y $x+y<0$. En este caso el semiplano pintado con color naranja representa el semiplano $x+y>0$ el cual es precisamente el dominio de nuestra función.

Ejemplo (funciones).

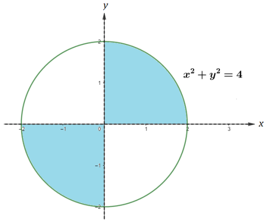
Sea $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la función definida como

$$g(x,y) = (\sqrt{4-x^2-y^2}, ln(xy), sinx)$$

entonces determinar $A = Dom(g)$.

Solución:

Debido a que g tiene problemas en la primera componente $\sqrt{4-x^2-y^2}$ y en la segunda componente $ln(xy)$, entonces es fácil notar que el dominio de g esta dado por:



$$Dom(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4 \text{ y } xy > 0\} =$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4 \text{ y } x,y > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4 \text{ y } x,y < 0\}.$$

De esta manera, el análisis previo muestra que el dominio de g se describe geométricamente como el conjunto de puntos pintados de color azul en la figura anterior.

Ejemplo (funciones).

Sea $h : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la función definida como

$$h(x,y) = \left(1, cos^{-1}\left(\frac{x}{x+y}\right), x^2 + y\right)$$

entonces determinar $A = Dom(h)$.

Solución:

En este caso es fácil notar que el único problema de h se encuentra en la segunda componente $cos^{-1}\left(\frac{x}{x+y}\right)$. Por lo tanto, el dominio de h es el conjunto de puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ los cuales satisfacen que: $-1 \leq \frac{x}{x+y} \leq 1$, ya que la función $r(x) = cos^{-1}(x)$ tiene dominio $[-1,1]$ $(-1 \leq x \leq 1)$. Ahora, notemos que:

$$-1 \leq \frac{x}{x+y} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{x}{x+y}\right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{(x+y)^2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 \leq (x+y)^2, \\ x+y \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \leq x^2 + 2xy + y^2, \\ x+y \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq 2xy + y^2, \\ x+y \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq y(2x+y), \\ x+y \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = y(2x+y) \ \text{ o } \ 0 < y(2x+y), \\ x+y \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = y(2x+y), \\ x+y \neq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 0 < y(2x+y), \\ x+y \neq 0 \end{cases}$$

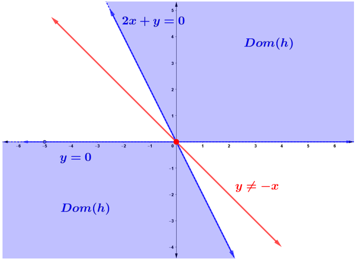
Además, al simplificar un poco las expresiones anteriores se tienen las siguientes equivalencias:

$$(\checkmark)\ \begin{cases} 0 = y(2x+y), \\ x+y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = y, \\ x+y \neq 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 0 = 2x+y, \\ x+y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 2x+y = 0, \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$(\checkmark)\ \begin{cases} 0 < y(2x+y), \\ x+y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0,\ 2x+y > 0 \\ y \neq -x \end{cases} \text{ o } \begin{cases} y < 0,\ 2x+y < 0 \\ y \neq -x \end{cases}$$

De esta manera, es fácil notar que el dominio de h se describe como $Dom(h) = B \cup C$, donde:

$$\begin{cases} B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y = 0 \text{ y } x \neq 0) \text{ o } (2x+y = 0 \text{ y } x \neq 0)\}, \\ C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y > 0 \text{ y } 2x+y > 0 \text{ y } y \neq -x) \text{ o } (y < 0 \text{ y } 2x+y < 0 \text{ y } y \neq -x)\} \end{cases}$$



Ejemplo (funciones).

Sea $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ la función definida como:

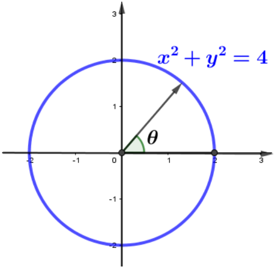
$$F(\theta)=(2cos\theta,2sin\theta)$$

entonces describir el rango de F.

Solución:

Para empezar, notemos que:

$$Rango(F)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x,y)=(2cos\theta,2sin\theta)\}=$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x=2cos\theta,\ y=2sin\theta\}$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x}{2}=cos\theta,\ \frac{y}{2}=sin\theta\right\}=$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1\right\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2=4\}.$$



Ejemplo (funciones).

Sea $F : [0,\pi] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la función definida como

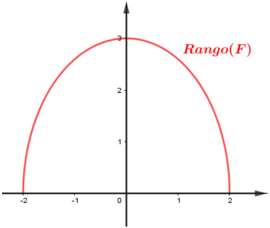
$$F(\theta) = (2cos\theta, 3sin\theta)$$

para todo $\theta \in [0,\pi]$. Describir el rango de F.

Solución:

Para empezar, notemos que:

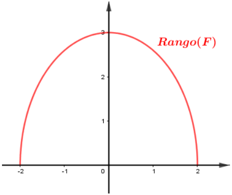
$$\begin{aligned}
Rango(F) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = (2cos\theta, 3sin\theta),\ 0 \le \theta \le \pi\} = \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2cos\theta,\ y = 3sin\theta,\ 0 \le \theta \le \pi\} = \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{2} = cos\theta,\ \frac{y}{3} = sin\theta,\ 0 \le \theta \le \pi\right\} = \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1,\ 0 \le \theta \le \pi\right\} = \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,\ 0 \le \theta \le \pi\right\} = \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,\ y \ge 0\right\}.
\end{aligned}$$



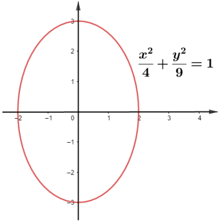
De esta manera tenemos que

$$Rango(F) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,\ y \geq 0 \right\}$$

lo que corresponde a la mitad superior de la elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1.$



También es importante aclarar que si el dominio de F cambia, entonces podremos obtener diferentes partes de la elipse completa $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1.$



Ejemplo (funciones).

Sea $G:[0,2\pi]\times\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ la funcion definida como:

$$G(\theta,t)=(2cos\theta,2sin\theta,0)$$

para cada $(\theta,t)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R}$. Describir el rango de G.

Solución:

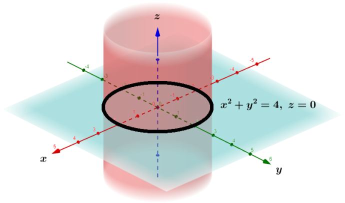
Recordando la definición de rango de una función y simplificando un poco tenemos que:

$$\boxed{\begin{aligned}
&Rango(G)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=(2cos\theta,2sin\theta,0),\ (\theta,t)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R}\}=\\
&=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x=2cos\theta,\ y=2sin\theta,\ z=0,\ \theta\in[0,2\pi],\ t\in\mathbb{R}\}=\\
&=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3:x=2cos\theta,\ y=2sin\theta,\ \theta\in[0,2\pi]\}=\\
&=\left\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3:\frac{x}{2}=cos\theta,\ \frac{y}{2}=sin\theta,\ \theta\in[0,2\pi]\right\}=\\
&=\left\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3:\ \left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1,\ \theta\in[0,2\pi]\right\}=\\
&=\left\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2=4,\ \theta\in[0,2\pi]\right\}=\left\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2=4\right\}.
\end{aligned}}$$

De esta manera, el rango de G consiste de los puntos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tales que

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=0 \end{cases}$$

En este caso el rango de G se puede interpretar como la circunferencia mostrada en la siguiente figura.



Cabe destacar que si no tuviéramos ninguna restricción sobre la variable z, entonces el rango de G gráficamente sería todo el cilindro mostrado en la figura anterior.

Ejemplo (funciones).

Sea $F:[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\subseteq\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ la función definida como

$$F(r,\theta,z)=(rcos\theta,rsin\theta,z)$$

para todo $(r,\theta,z)\in[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$. Describir el rango de F.

Solución:

Recordemos que:

$$Rango(F)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=(rcos\theta,rsin\theta,z),\ (r,\theta,z)\in[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\}=$$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x=rcos\theta,\ y=rsin\theta,\ z=z,\ r\in[0,1],\ \theta\in[0,2\pi],\ z\in[0,\pi]\}=$$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x=rcos\theta,\ y=rsin\theta,\ z=z,\ 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq z\leq\pi\}=$$

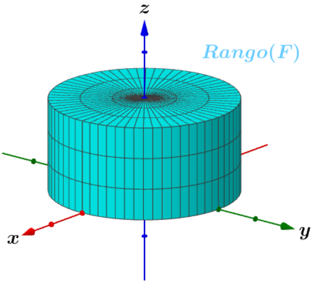
$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(rcos\theta)^2+(rsin\theta)^2=r^2,\ 0\leq r\leq 1,\ 0\leq z\leq\pi\}=$$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2=r^2,\ 0\leq r\leq 1,\ 0\leq z\leq\pi\}=$$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq z\leq\pi\}$$

Por lo tanto, el rango de F es un cilindro sólido el cual es mostrado en la figura del lado.

$$Rango(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq \pi\}.$$



Ejemplo (funciones).

Sea $F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la función definida como

$$F(\theta,\phi)=(cos\theta\sin\phi, sin\theta\sin\phi, cos\phi)$$

para cada $(\theta,\phi)\in\mathbb{R}^2$. Describir el rango de F.

Solución:

Para empezar, notemos que:

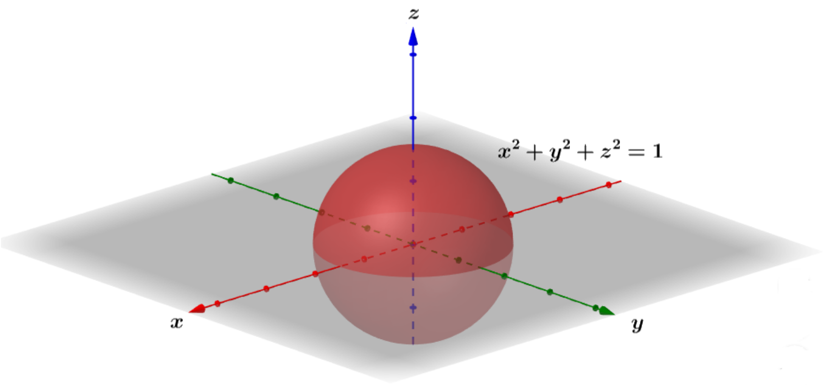
$$\begin{cases} Rango(F) & =\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=(cos\theta\sin\phi, sin\theta\sin\phi, cos\phi),\ (\theta,\phi)\in\mathbb{R}^2\}= \\ Rango(F) & =\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x=cos\theta\sin\phi,\ y=cos\theta\, sin\phi,\ z=cos\phi\}. \end{cases}$$

Entonces podemos notar que los puntos del rango de F satisfacen que $x^2+y^2+z^2=1$, ya que:

$$\boxed{\begin{aligned} & x^2+y^2+z^2=(cos\theta\sin\phi)^2+(cos\theta\, sin\phi)^2+(cos\phi)^2= \\ & =cos^2\theta\, sin^2\phi+cos^2\theta\, sin^2\phi+cos^2\phi=sin^2\phi(cos^2\theta+sin^2\theta)+cos^2\phi= \\ & =sin^2\phi+cos^2\phi=1. \end{aligned}}$$

Además, la ecuación $x^2+y^2+z^2=1$ corresponde a la ecuación de la esfera de radio 1 con centro en (0,0,0).

$$Rango(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$



Cabe destacar además que si el dominio de F no es todo $\mathbb{R}^2$, entonces el rango de F simplemente será una parte de esta esfera, pero si el dominio de F fuera $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$, entonces el rango de F seria la misma esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Problemas.

(1) Sea $F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la función definida como:

$$F(x,y,z) = \left(\sqrt{36 - x^2 - y^2}, ln(z+1) - ln(5-z), \frac{z}{x^2 - y^2}\right).$$

Si $A = Dom(F)$, entonces

(a) Describir A.

(b) Describir $int(A)$ y verificar si A es abierto.

(c) Describir $ac(A)$ y verificar si A es cerrado.

(2) Sea $F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la función definida por

$$F(x,y,z) = \left(\sqrt{25 - x^2 - y^2}, ln(z) - ln(5-z), \frac{z}{x^2 + y^2}\right).$$

Si $A = Dom(F)$, entonces

(a) Describir A.

(b) Describir $int(A)$ y verificar si A es abierto.

(c) Describir $ac(A)$ y verificar si A es cerrado.

(3) Sea $F : [0,2\pi] \times [0,\pi] \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la función que está definida como

$$F(\theta,\phi) = (2cos\theta \sin\phi, 3sin\theta \sin\phi, cos\phi).$$

Describir el rango de F.

(4) Sea $F : [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,\pi] \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la función que está definida como

$$F(\rho,\theta,\phi) = (\rho\, cos\theta \sin\phi, \rho\, sin\theta \sin\phi, \rho\, cos\phi).$$

Describir el rango de F.

(5) Sea $F : [0,1] \times [0,\pi] \times [0,\pi/2] \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la función que está definida como

$$F(\rho,\theta,\phi) = (\rho\, cos\theta \sin\phi - 2, \rho\, sin\theta \sin\phi + 3, \rho\, cos\phi - 5).$$

Describir el rango de F.