Universidad Pontificia Bolivariana

Maestría en Ciencias Naturales y Matemáticas

Clase 15 - Cálculo Avanzado de Varias Variables

Mg: Julián Uribe Castañeda

Magister en ciencias: Matemáticas.

15 de diciembre de 2022

Plano Tangente y Diferenciabilidad

Para empezar, empecemos recordando la noción de derivada en cálculo de una variable. Sea $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función y $c\in(a,b)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

$$f \text{ es diferenciable en } c \iff \lim_{x\mapsto c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c)$$

$$f \text{ es diferenciable en } c \iff \lim_{x\mapsto c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c)=0$$

$$f \text{ es diferenciable en } c \iff \lim_{x\mapsto c}\frac{f(x)-[f(c)-f'(c)\cdot(x-c)]}{x-c}=0$$

$$f \text{ es diferenciable en } c \iff \lim_{x\mapsto c}\frac{f(x)-[f(c)+f'(c)\cdot(x-c)]}{|x-c|}=0$$

Ahora, de la última equivalencia descrita de diferenciabilidad, podemos decir que la función $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida como

$$\begin{aligned} h:\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longrightarrow h(x)=f(c)+f'(c)\cdot(x-c)\end{aligned}$$

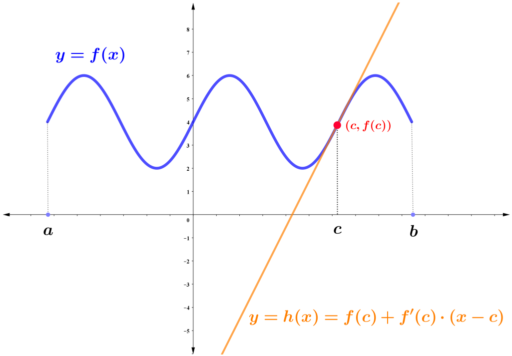
satisface que:

(✓) $h'(c) = f'(c)$.

(✓) $h(c) = f(c) + f'(c) \cdot (c - c) = f(c)$.

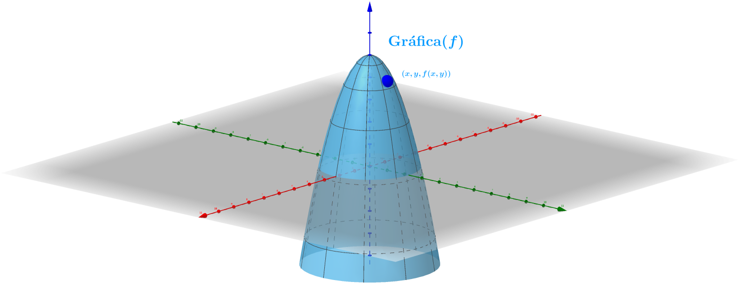
(✓) La gráfica de h representa una recta, la cual es llamada la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(c, f(c))$.

(✓) Las funciones f y h son muy cercanas alrededor de $x = c$. Esto quiere decir que $f(x) \approx h(x)$ para x cercano a c.



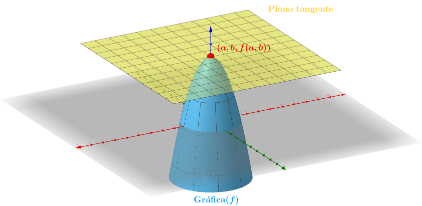
Observación (plano tangente). Supongamos que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función y $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Recordemos además que la gráfica de f es el descrito como:

$$\text{Gráfica}(f) = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$



Por lo tanto, el punto $(a,b,f(a,b))$ es un punto de la gráfica de f y teniendo en cuenta la definición de diferenciabilidad para funciones de una variable mostrada anteriormente, surge la siguiente pregunta:

¿Cuál debería de ser la ecuación plano tangente a la gráfica de f en el punto $(a, b, f(a, b))$?

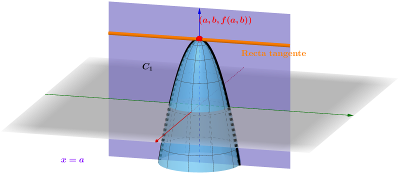


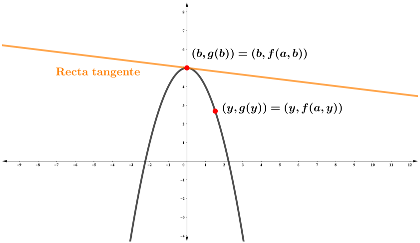
Para responder esta pregunta, notemos las siguientes cosas.

($\checkmark$) Si consideremos la intersección del plano $x = a$ con la Gráfica(f), entonces la ecuación de la recta tangente a la curva C_1 dada por $C_1 = \text{Gráfica}(f) \cap \text{Plano}(x = a)$ en el punto $(a, b, f(a, b))$ es:

$$L_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = t \cdot D_1 + (a, b, f(a, b)) \text{ con } t \in \mathbb{R}\}.$$
$$L_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = t \cdot (0, 1, f_y(a, b)) + (a, b, f(a, b)) \text{ con } t \in \mathbb{R}\}.$$

Esto se debe a que la curva C_1 la podemos interpretar como la gráfica de la función $z = g(y)$ con $g(y) = f(a, y)$ como se muestra en los siguientes dibujos.





De esta manera, es fácil notar que las ecuaciones que describen a la recta tangente a la curva C_1 son:

$$\begin{cases} z = f(a,b) + f_y(a,b)\cdot(y-b), \\ \\ x = a. \end{cases}$$

Y con estas ecuaciones mostramos que los puntos $(a,b,f(a,b))$ y $(a,1+b,f(a,b)+f_y(a,b))$ se encuentran en la recta L_1 y por tanto un vector director para la recta L_1 es:

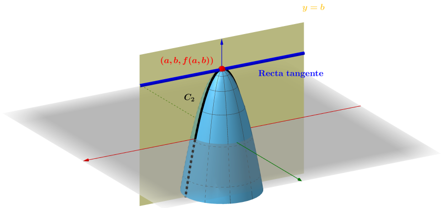
$$D_1 = (a,1+b,f(a,b)+f_y(a,b)) - (a,b,f(a,b)) = (0,1,f_y(a,b)).$$

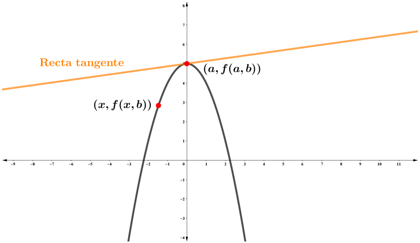
Así, la ecuación vectorial paramétrica de la recta L_1 es:

$$(x,y,z) = t\cdot(0,1,f_y(a,b)) + (a,b,f(a,b)).$$

($\checkmark$) Si consideremos la intersección del plano $y=b$ con la Gráfica(f), entonces la ecuación de la recta tangente a la curva C_2 dada por $C_2 = \text{Gráfica}(f) \cap \text{Plano}(y=b)$ en el punto $(a,b,f(a,b))$ es:

$$L_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = t \cdot D + (a,b,f(a,b)) \text{ con } t \in \mathbb{R}\}.$$
$$L_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = t \cdot (1,0,f_x(a,b)) + (a,b,f(a,b)) \text{ con } t \in \mathbb{R}\}.$$





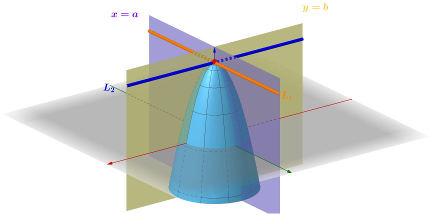
La prueba de este resultado es similar a la prueba del literal anterior.

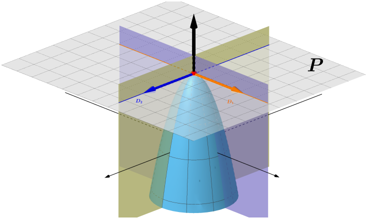
($\checkmark$) Existe un único plano P que contiene las rectas L_1 y L_2, y este plano es el plano tangente a la gráfica de la función f en el punto $(a,b,f(a,b))$.

($\checkmark$) Tomando los vectores directores D_1 y D_2 de las rectas L_1 y L_2 respectivamente, tenemos que el vector n descrito como:

$$n = D_1 \times D_2 = det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & f_y(a,b) \\ 1 & 0 & f_x(a,b) \end{bmatrix} = (f_x(a,b), f_y(a,b), -1)$$

es un vector normal del plano P.





Así, el plano P se describe como el conjunto de puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que:

$$n \bullet [(x,y,z) - (a,b,f(a,b))] = 0 \iff (f_x(a,b), f_y(a,b), -1) \bullet (x-a, y-b, z-f(a,b)) = 0$$
$$n \bullet [(x,y,z) - (a,b,f(a,b))] = 0 \iff f_x(a,b)\cdot(x-a) + f_y(a,b)\cdot(y-b) - (z-f(a,b)) = 0$$
$$n \bullet [(x,y,z) - (a,b,f(a,b))] = 0 \iff z = f(a,b) + f_x(a,b)\cdot(x-a) + f_y(a,b)\cdot(y-b)$$

Por lo tanto, hemos probado que si $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales en el punto (a,b) y la gráfica de f tiene un plano tangente P en el punto $(a,b,f(a,b))$, entonces el plano P se describe como:

$$\boxed{z = f(a,b) + f_x(a,b)\cdot(x-a) + f_y(a,b)\cdot(y-b)}$$

Además, si consideramos la función $h:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$h(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)\cdot(x-a) + f_y(a,b)\cdot(y-b)$$

entonces la función h satisface las siguientes propiedades:

(✓) $h(a,b) = f(a,b)$.

(✓) $h_x(x,y) = h_x(a,b) = f_y(a,b)$ y $h_y(x,y) = h_y(a,b) = f_y(a,b)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(✓) Si la gráfica de f tiene un plano tangente en el punto $(a,b,f(a,b))$ y existen las derivadas parciales de f en (a,b), entonces la gráfica de h es el plano tangente a la gráfica de f.

Observación (diferenciabilidad para funciones de dos variables). Recordemos que si $f:[a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función y $c \in (a,b)$, entonces:

(✓) Si f es diferenciable en c, entonces la función $h(x) = f(c) + f'(c)\cdot(x-c)$ satisface que la gráfica de h es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$.

($\checkmark$) f es diferenciable en c $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{x\mapsto c}\frac{f(x)-h(x)}{|x-c|}=\lim_{x\mapsto c}\frac{f(x)-[f(c)+f'(c)\cdot(x-c)]}{|x-c|}=0.$

A continuación mostramos en una tabla algunas propiedades geométricas relacionadas con la tangencia entre funciones de una y dos variables.

Función	Tangencia en el punto	aproximación al punto
$f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$h(x)=f(c)+f'(c)\cdot(x-c)$	$\lvert x-c\rvert$
$f:A\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$	$h(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$	$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

Es por este motivo que definimos diferenciabilidad para funciones de 2 variables de la siguiente manera.

Definición (diferenciabilidad para funciones de la forma $f:A\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$).

Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ una función y (a,b) es un punto interior de A, entonces decimos que f es diferenciable en (a,b), si:

($\checkmark$) $f_x(a,b)$ y $f_y(a,b)$ existen.

($\checkmark$) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(a,b)}\frac{f(x,y)-\left[f(a,b)+f_x(a,b)\cdot(x-a)+f_y(a,b)\cdot(y-b)\right]}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0.$

Además, en que caso en que f es diferenciable en (a,b), decimos que la función $h(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)\cdot(x-a)+f_y(a,b)\cdot(y-b)$ es la aproximación lineal de f en el punto (a,b).

Observación (definición de diferenciabilidad para funciones de dos variables).
La condición (2) de la definición anterior la podemos cambiar por la siguiente condición:

$$\lim_{(h,k)\mapsto(0,0)} \frac{f(a+h,b+k)-\left[f(a,b)+f_x(a,b)\cdot h+f_y(a,b)\cdot k\right]}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

realizando las sustituciones $x=a+h$ e $y=b+k$.

Ejemplo (diferenciabilidad de funciones de dos variables).

Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ una función definida como $f(x,y)=x^2+y^2+1$. Verificar si f es diferenciable en el punto $(x,y)=(2,1)$.

Solución:

Para verificar si f es diferenciable en el punto $(x,y)=(2,1)$, notemos que:

($\checkmark$) Las derivadas parciales de f en $(x,y)=(2,1)$ son:

$$\begin{cases} f_x(x,y)=(x^2+y^2+1)_x=2x & \Rightarrow \quad f_x(2,1)=2(2)=4, \\ f_y(x,y)=(x^2+y^2+1)_y=2y & \Rightarrow \quad f_y(2,1)=2(1)=2. \end{cases}$$

($\checkmark$) Ahora, examinando el limite dado en la definición de diferenciabilidad, tenemos que

$$\lim_{(h,k)\mapsto(0,0)} \frac{f(2+h,1+k)-\left[f(2,1)+f_x(2,1)\cdot h+f_y(2,1)\cdot k\right]}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\mapsto(0,0)} \frac{(2+h)^2+(1+k)^2+1-(6+4h+2k)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\mapsto(0,0)} \frac{4+4h+h^2+1+2k+k^2+1-6-4h-2k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\mapsto(0,0)} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\mapsto(0,0)} \sqrt{h^2+k^2} = 0.$$

El anterior análisis muestra que f es diferenciable en $(x,y)=(2,1)$.

Ejercicio. Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como $f(x,y)=x^2+y^2+1$ y $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Demostrar que la función f es diferenciable en (a,b).

Ejemplo (diferenciabilidad de funciones de dos variables).

Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{Si} \quad (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{Si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

entonces

(1) Demostrar que f no es continua en $(0,0)$.

(2) Demostrar que f no es diferenciable en $(0,0)$.

Solución:

(1) Para empezar, recordemos la noción de continuidad.

$$\boxed{f \text{ es continua en } (0,0) \iff \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y)=f(0,0).}$$

Además, podemos notar que

($\checkmark$) $$\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} \frac{xx}{x^2+x^2}=\lim_{x\mapsto 0}\frac{x^2}{2x^2}=\lim_{x\mapsto 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

$(\checkmark)$ $\lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=0}} \dfrac{x0}{x^2+0^2} = \lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{0}{x^2} = \lim\limits_{x\mapsto 0} 0 = 0.$

El anterior análisis muestra que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} f(x,y) \neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=0}} f(x,y)$, lo cual implica que

$\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y)$ no existe y así f no es continua en $(0,0)$.

(2) Para analizar la diferenciabilidad de f en el punto $(0,0)$, notemos las siguientes cosas.

$(\checkmark)$ las derivadas parciales de f en $(0,0)$ son:

- $f_x(0,0) = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{\dfrac{h\cdot\ 0}{h^2+0^2}-0}{h} = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{0}{h} = 0.$
- $f_y(0,0) = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{\dfrac{0\cdot\ h}{0^2+h^2}-0}{h} = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{0}{h} = 0.$

$(\checkmark)$ Ahora, examinando el limite dado en la definición de diferenciabilidad, tenemos que:

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{f(x,y)-\left[f(0,0)+f_x(0,0)\cdot(x-0)+f_y(0,0)\cdot(y-0)\right]}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{\dfrac{xy}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Además, el limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ no existe, ya que

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{x^2}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{x^2}{2^{\frac{3}{2}}(x^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}(x^2)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}|x|} = +\infty, \\ \displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} \frac{0\cdot y}{(0^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{y\mapsto} \frac{0}{|y|^3} = 0. \end{cases}$$

El anterior análisis muestra que f no es diferenciable en $(0,0)$.

Nota (relación entre continuidad y diferenciabilidad). En cálculo de una variable tenemos que si una función no es continua en un punto, entonces esta función no puede ser diferenciable en el mismo punto. El ejemplo anterior nos muestra un fenómeno similar, en donde una función de dos variables no es continua y tampoco diferenciable en el sentido descrito previamente. Debido a que la noción de diferenciabilidad para funciones de varias variables se definió a partir de ideas similares a las de calculo de una variable, no será extraño que tengamos un resultado similar para este contexto. El siguiente teorema muestra la relación entre diferenciabilidad y continuidad para funciones de dos variables.

Teorema (diferenciable $\Rightarrow$ continua).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en (a,b), entonces f es continua en (a,b).

Demostración.

Para empezar, notemos las siguientes cosas:

($\checkmark$) f es continua en (a,b) $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(x,y) - f(a,b) = 0$.

($\checkmark$) $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(a,b)} \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = 0$.

($\checkmark$) $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(a,b)} f_x(a,b)\cdot(x-a) + f_y(a,b)\cdot(y-b) = 0$.

($\checkmark$) $f(x,y) - f(a,b) - [f_x(a,b)\cdot(x-a) + f_y(a,b)\cdot(y-b)] =$

$$= \left(\frac{f(x,y) - \left[f(a,b) + f_x(a,b)\cdot(x-a) + f_y(a,b)\cdot(y-b)\right]}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\right)\cdot\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right).$$

Por lo tanto, como f es diferenciable en (a,b) y $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(a,b)} f_x(a,b)\cdot(x-a) + f_y(a,b)\cdot(y-b) = 0$, entonces:

$$\lim_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(x,y)-f(a,b)-[f_x(a,b)\cdot(x-a)+f_y(a,b)\cdot(y-b)]=$$

$$=\lim_{(x,y)\mapsto(a,b)}\left(\frac{f(x,y)-\left[f(a,b)+f_x(a,b)\cdot(x-a)+f_y(a,b)\cdot(y-b)\right]}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\right)\cdot\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)=$$

$$=\lim_{(x,y)\mapsto(a,b)}\frac{f(x,y)-\left[f(a,b)+f_x(a,b)\cdot(x-a)+f_y(a,b)\cdot(y-b)\right]}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\cdot\lim_{(x,y)\mapsto(a,b)}\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=$$
0.

Además, como

$$\lim_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(x,y)-f(a,b)-[f_x(a,b)\cdot(x-a)+f_y(a,b)\cdot(y-b)]=\lim_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(x,y)-f(a,b),$$

entonces del anterior análisis podemos decir que

$$\lim_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(x,y)-f(a,b)=\lim_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(x,y)-f(a,b)-[f_x(a,b)\cdot(x-a)+f_y(a,b)\cdot(y-b)]=0.$$

Así, tenemos que $\lim_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(x,y)-f(a,b)=0$ y esto equivale a decir que f es continua en (a,b).

■

Corolario (no continua $\Rightarrow$ no diferenciable).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $(a,b) \in A$. Si f no es continua en (a,b) entonces f no es diferenciable (a,b).

Demostración.

Es inmediato del teorema anterior.

$\blacksquare$

Ejemplo (aplicación corolario anterior).

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función del ejemplo anterior, la cual está definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{Si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \text{Si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

entonces como f no es continua en $(0,0)$, por el corolario anterior se tiene que f no es diferenciable $(0,0)$. Así, no tenemos que usar la definición de diferenciabilidad para validar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$, solo tenemos que usar el corolario previo.

Observación (teorema anterior). Es posible que encontremos funciones $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que no son diferenciables en un punto (a,b), pero si son continuas en este mismo punto. Estas cosas son normales que ocurran ya que si una función es continua en un punto, esto no implica que que esta función sea diferenciable en ese punto. Para entender un poco mejor este comentario, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo (aplicación corolario anterior).

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función del ejemplo anterior, la cual está definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2|y|}{x^2+y^2} + x + 2y & \text{Si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \text{Si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

entonces

(1) Demostrar que f es continua en $(0,0)$.

(2) Encontrar las derivadas parciales de f en $(0,0)$.

(2) Demostrar que f no es diferenciable en $(0,0)$.

Solución:

(1) Para empezar notemos las siguientes cosas:

- $f(x,y) = \dfrac{x^2|y|}{x^2+y^2} + x + 2y$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$.
- $0 \leq \dfrac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \dfrac{(x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2} = |y|$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$, y además:

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} |y| = 0.$$

Por lo tanto, el teorema de estricción nos dice que $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} = 0$.

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} + x + 2y = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} + \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} x + 2y = 0 + 0 = 0.$
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} + x + 2y = 0 = f(0,0).$

Lo anterior muestra que $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, lo cual significa que f es continua en $(0,0)$.

(2) Para encontrar las derivadas parciales de f en $(0,0)$, es necesario usar la definición como se muestra a continuación.

- $$f_x(0,0)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{\dfrac{h^2|0|}{h^2+0^2}+h+2\cdot 0-0}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{h}{h}=1.$$
- $$f_y(0,0)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{\dfrac{0^2|h|}{0^2+h^2}+0+2\cdot h-0}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{2h}{h}=2.$$

(3) Para analizar la diferenciabilidad de f en el punto $(0,0)$, notamos que:

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\frac{f(x,y)-\left[f(0,0)+f_x(0,0)\cdot(x-0)+f_y(0,0)\cdot(y-0)\right]}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=$$

$$=\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\frac{f(x,y)-[0+1\cdot x+2\cdot y]}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\frac{\dfrac{x^2|y|}{x^2+y^2}+x+2y-x-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\frac{x^2|y|}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ahora, el limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\frac{x^2|y|}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ no existe, ya que:

$$
\begin{cases}
\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2|y|}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{x^2|x|}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{x^2|x|}{2^{\frac{3}{2}}(x^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{|x|}{2^{\frac{3}{2}}(x^2)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{|x|}{2^{\frac{3}{2}}|x|} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}, \\
\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2|y|}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} \frac{0^2|y|}{(0^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{y\mapsto 0} \frac{0}{|y|^3} = 0.
\end{cases}
$$

De esta manera, concluimos que f no es diferenciable en $(0,0)$.

Problemas.

(1) Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

para cada $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Demostrar que f no es diferenciable en $(x,y)=(0,0)$.

(2) Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{Si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{Si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Demostrar que f es diferenciable en $(x,y)=(0,0)$.

(3) Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{Si } (x,y)\neq(0,0), \\ 1 & \text{Si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Demostrar que f no es diferenciable en $(x,y)=(0,0)$.

(4) Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^4 sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)+5 & \text{Si } (x,y)\neq(0,0), \\ c & \text{Si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Determinar el valor de c que hace que f sea diferenciable en $(x,y)=(0,0)$.

(5) Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2 sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{Si } (x,y)\neq(0,0), \\ c & \text{Si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Entonces ¿Será posible determinar un valor para c, de tal manera que f sea diferenciable en $(x,y)=(0,0)$?