Universidad Pontificia Bolivariana

Vigilada Mineducación

Maestría en Ciencias Naturales y Matemáticas

Clase 14 - Cálculo Avanzado de Varias Variables

Mg: Julián Uribe Castañeda

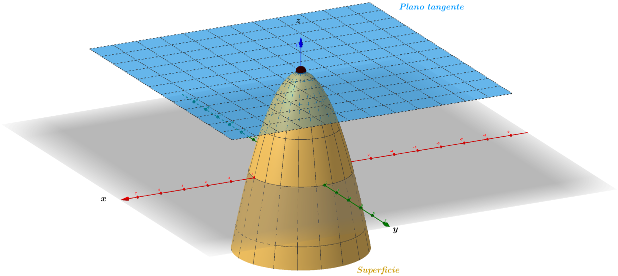
Magister en ciencias: Matemáticas.

12 de enero de 2023

Introducción

El objetivo de esta parte es definir la derivada de una función de varias variables $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ donde n y m son enteros positivos. Es de esperar que la derivada de una función de varias variables sea un objeto más complicado que la derivada de una función de una sola variable escalar.

Primero definiremos el concepto de derivadas parciales, el cual es una herramienta básica del cálculo de varias variables y luego intentaremos comprender una noción aceptable de diferenciabilidad por medio de la geometría de planos tangentes a superficies que están descritas por medio de gráficas de funciones.



Recordar (definición de diferenciabilidad para funciones de la forma $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$).

Sea $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función y $c\in(a,b)$, entonces decimos que f es diferenciable en c, si el siguiente limite existe:

$$\boxed{\lim_{x\mapsto c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}.}$$

En este caso, denotamos este limite como $f'(c)$.

Observación (definición de diferenciabilidad para funciones de la forma $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$).

Si $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función con $c\in(a,b)$, entonces:

$$f \text{ es diferenciable en } c \iff \lim_{x\mapsto c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c)$$

$$f \text{ es diferenciable en } c \iff \lim_{x\mapsto c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c)=0$$

$$f \text{ es diferenciable en } c \iff \lim_{x\mapsto c}\frac{f(x)-[f(c)+f'(c)\cdot(x-c)]}{x-c}=0$$

De hecho esta última equivalencia será la más parecida a la definición de diferenciabilidad para funciones de varias variables.

Derivadas Parciales

Definición (derivadas parciales de una función $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ en un punto $a\in A$). Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una función y $a=(a_1,\dots,a_n)$ un punto interior de A, entonces definimos las derivadas parciales de f en a como los siguientes limites, si existen:

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
f_{x_1}(a):=\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{f(a+he_1)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{f(a_1+h,a_2,\dots,a_n)-f(a_1,a_2,\dots,a_n)}{h},\\
f_{x_2}(a):=\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{f(a+he_2)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{f(a_1,a_2+h,\dots,a_n)-f(a_1,a_2,\dots,a_n)}{h},\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\
f_{x_n}(a):=\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{f(a+he_n)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{f(a_1,a_2,\dots,a_n+h)-f(a_1,a_2,\dots,a_n)}{h}.
\end{array}
}
$$

Llamaremos a $f_{x_i}(a)$ la derivada parcial respecto a la variable x_i de f en a.

Ejemplo (derivadas parciales).

Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x,y)=x^2+y^2$. Calcular $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$.

Solución:

Para calcular estas derivadas parciales, solo tenemos que recordar la definición de derivada parcial como se muestra a continuación.

(✓) $$f_x(x,y)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{(x+h)^2+y^2-(x^2+y^2)}{h}=$$

$$=\lim_{h\mapsto 0}\frac{x^2+2xh+h^2+y^2-x^2-y^2}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{2x+h}{1}=2x.$$

(✓) $$f_y(x,y)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{x^2+(y+h)^2-(x^2+y^2)}{h}=$$

$$=\lim_{h\mapsto 0}\frac{x^2+y^2+2yh+h^2-x^2-y^2}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{2yh+h^2}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{2y+h}{1}=2y.$$

Nota (ejemplo anterior). En los cálculos anteriores hemos encontrado las derivadas parciales de f en todos los puntos (x,y) del plano cartesiano. Particularmente podemos determinar $f_x(1,2)$ y $f_y(0,4)$ simplemente reemplazando los valores de x y y en las expresiones que determinan a $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ como se muestra a continuación.

$$\begin{cases} f_x(1,2)=2(1)=2, \\ (x,y)=(1,2) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} f_y(0,4)=2(4)=8, \\ (x,y)=(0,4) \end{cases}$$

Observación (Cálculo de derivadas parciales).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de varias variables con $(x_1,\dots,x_n) \mapsto f(x_1,\dots,x_n)$ y $a=(a_1,\dots,a_n) \in Int(A)$. Si $i \in \{1,\dots,n\}$, definimos la función $g(x)=f(a_1,\dots,a_{i-1},x,a_{i+1},\dots,a_n)$ y es fácil notar que esta función satisface que:

(✓) $g(a_i)=f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\dots,a_n)=f(a)$.

(✓) $g(a_i+h)=f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},\dots,a_n)$.

(✓) $f_{x_i}(a)=\lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{f(a_1,\dots,a_i+h,\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_i,\dots,a_n)}{h}=\lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{g(a_i+h)-g(a_i)}{h}=g'(a_i)$.

Por lo tanto, este análisis demuestra que para determinar a $f_{x_i}(a)$ se consideran las variables $x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$ constantes $(x_1=a_1,\ x_2=a_2,\dots,x_{i-1}=a_{i-1},\ x_{i+1}=a_{i+1},\dots,x_n=a_n)$ y se deriva respecto a x_i con las reglas usuales de cálculo diferencial, siempre que se pueda hacer.

Ejemplo (Cálculo de derivadas parciales).

Si $f(x,y,z)=xy^2+sin(z^3)+e^z$, determinar las derivadas parciales de f y encontrar $f_z(0,0,\pi)$.

Solución:

Usando la observación anterior, podemos inferir que:

(✓) $f_x(x,y,z)=(xy^2+sin(z^3)+e^z)_x=(xy^2)_x+(sin(z^3))_x+(e^z)_x=y^2+0+0=y^2$.

$(\checkmark)$ $f_y(x,y,z) = (xy^2 + sin(z^3) + e^z)_y = (xy^2)_y + (sin(z^3))_y + (e^z)_y = 2xy + 0 + 0 = 2xy.$

$(\checkmark)$ $f_z(x,y,z) = (xy^2 + sin(z^3) + e^z)_z = (xy^2)_z + (sin(z^3))_z + (e^z)_z = 0 + cos(z^3) \cdot (3z^2) + e^z =$
$= 3z^2 cos(z^3) + e^z.$

Y por otro lado, para determinar el valor de $f_z(0,0,\pi)$ simplemente reemplazamos en la descripción algebraica de $f_z(x,y,z)$ como se muestra a continuación.

$(\checkmark)$ Si $f_z(x,y,z) = 3z^2 cos(z^3) + e^z$, entonces $\begin{cases} f_z(0,0,\pi) = 3\pi^2 cos(\pi^3) + e^\pi, \\ (x,y,z) = (0,0,\pi). \end{cases}$

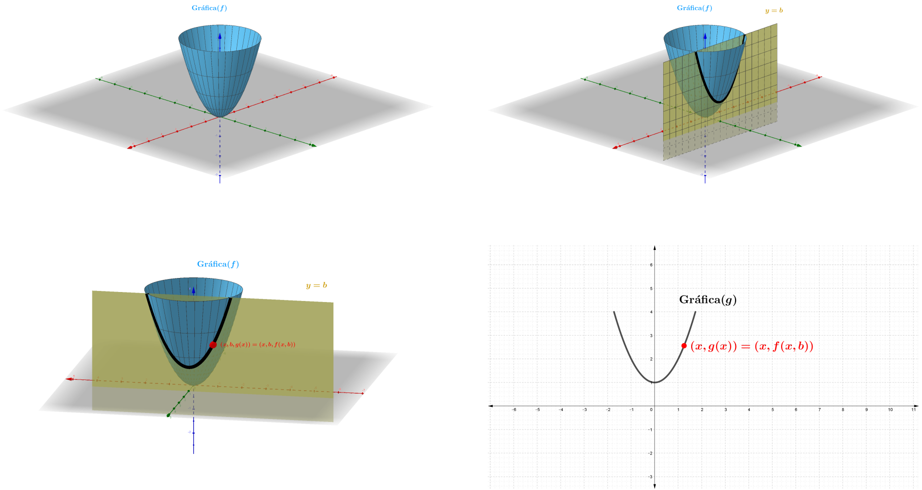
Observación (interpretación geométrica de las derivadas parciales para funciones de la forma $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$).

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función la cual satisface que $f_x(a,b)$ y $f_y(a,b)$ existen, entonces naturalmente surge la siguiente pregunta:

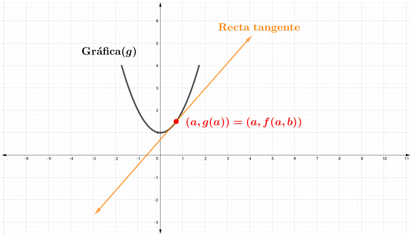
¿Cuál es la interpretación de las derivadas parciales de f en (a,b) respecto a la Gráfica(f)?

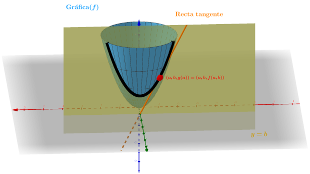
Para responder a esta pregunta, notemos que:

(✓) La gráfica de la función $g(x) = f(x, b)$ se puede identificar con la intersección del plano $y = b$ y la Gráfica(f) como se muestra en las siguientes figuras.

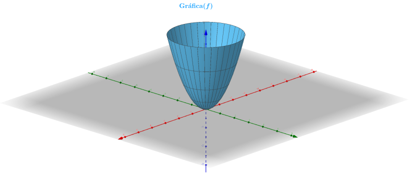


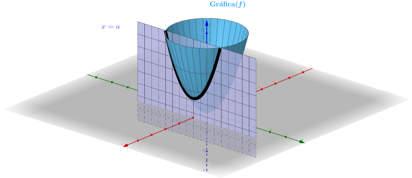
($\checkmark$) La función $g(x) = f(x,b)$ satisface que $f_x(a,b) = g'(a)$, lo cual significa que la derivada parcial $f_x(a,b)$ es la pendiente de la recta tangente a la intersección del plano $y = b$ y la Gráfica(f) en el punto $(a,b,f(a,b))$.

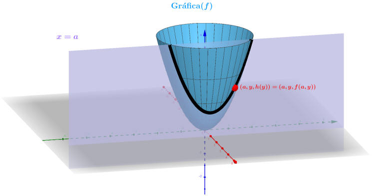


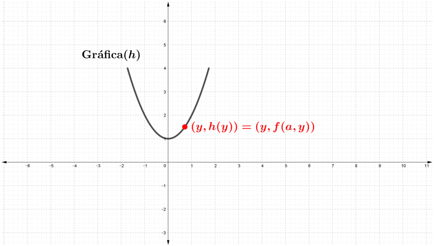


($\checkmark$) La gráfica de la función $h(y) = f(a,y)$ se puede identificar con la intersección del plano $x = a$ y la Gráfica(f) como se muestra en las siguientes figuras.

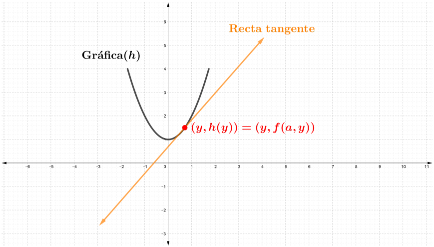


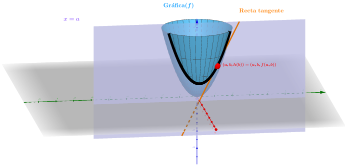






$(\checkmark)$ La función $h(y) = f(a, y)$ satisface que $f_y(a, b) = h'(b)$, lo cual significa que la derivada parcial $f_y(a, b)$ es la pendiente de la recta tangente a la intersección del plano $x = a$ y la Gráfica(f) en el punto $(a, b, f(a, b))$.





Nota (derivadas parciales). En ocasiones para calcular las derivadas parciales de una función de varias variables es necesario recurrir a la definición, ya que posiblemente el punto donde se quiere encontrar la derivada parcial tiene algún tipo de “irregularidad”.

Ejemplo (derivadas parciales de una función con una “irregularidad”).

Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Encontrar las derivadas parciales de f en todos los puntos.

Solución:

Para empezar, notamos que:

$(\checkmark)$ Si $(x,y)\neq(0,0)$, entonces $f(x,y)=\dfrac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2}$ y por tanto las derivadas parciales de f son:

- $f_x(x,y)=\left(\dfrac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2}\right)_x=\dfrac{(3x^2y-y^3)_x(x^2+y^2)-(x^2+y^2)_x(3x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^2}=$

$$= \frac{6xy(x^2+y^2)-2x(3x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{8xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

- $$f_y(x,y) = \left(\frac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2}\right)_y = \frac{(3x^2y-y^3)_y(x^2+y^2)-(x^2+y^2)_y(3x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{(3x^2-3y^2)(x^2+y^2)-2y(3x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^4-6x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

($\checkmark$) Si $(x,y)=(0,0)$, entonces nos vemos obligados a aplicar la definición de derivada parcial, ya que precisamente en $(x,y)=(0,0)$ la función f tiene una irregularidad.

- $$f_x(0,0) = \lim_{h\mapsto 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\mapsto 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\mapsto 0}\frac{\frac{3h^2(0)-(0)^3}{h^2+0^2}-0}{h} =$$

$$= \lim_{h\mapsto 0}\frac{0}{h^3} = 0.$$

- $$f_y(0,0) = \lim_{h\mapsto 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\mapsto 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\mapsto 0}\frac{\frac{3(0)^2(h)-(h)^3}{(0)^2+h^2}-0}{h} =$$

$$= \lim_{h\mapsto 0}\frac{-h^3}{h^3} = -1.$$

Del anterior análisis, podemos concluir que:

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{8xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases} \quad \text{y} \quad f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^4-6x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ -1 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Derivadas Parciales de Orden Superior

Hasta el momento, en nuestro estudio de la diferenciación hemos considerado solo derivadas parciales de primer orden. No obstante, es fácil imaginar el cálculo de derivadas parciales de segundo y tercer orden por medio de iterar el proceso de diferenciación respecto a una variable, mientras todas las demás permanecen constantes.

Ejemplo (derivadas parciales de orden superior).

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y,z)=x^2y+zcos(x)$. Determinar las derivadas parciales de primer orden y segundo orden de f.

Solución:

$(\checkmark)$ Las derivadas parciales de primer orden de f son:

- $f_x(x,y,z)=(x^2y+zcos(x))_x=2xy-zsin(x)$.

- $f_y(x,y,z) = (x^2y + zcos(x))_y = x^2$.
- $f_z(x,y,z) = (x^2y + zcos(x))_z = cos(x)$.

($\checkmark$) Las derivadas parciales de segundo orden son:

- $(f_x)_x(x,y,z) = (2xy - zsin(x))_x = 2y - zcos(x)$.
- $(f_x)_y(x,y,z) = (2xy - zsin(x))_y = 2x$.
- $(f_x)_z(x,y,z) = (2xy - zsin(x))_z = -sin(x)$.
- $(f_y)_x(x,y,z) = (x^2)_x = 2x$.
- $(f_y)_y(x,y,z) = (x^2)_y = 0$.
- $(f_y)_z(x,y,z) = (x^2)_z = 0$.
- $(f_z)_x(x,y,z) = (cos(x))_x = -sin(x)$.
- $(f_z)_y(x,y,z) = (cos(x))_y = 0$.
- $(f_z)_z(x,y,z) = (cos(x))_z = 0$.

De la misma manera podemos encontrar las derivadas parciales de orden 3 y demás ordenes.

Notación (derivadas parciales de orden superior). Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de varias variables con

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Entonces para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ escribiremos

$$\boxed{f_{x_i x_j} := (f_{x_i})_{x_j}}$$

siempre que la derivada parcial $(f_{x_i})_{x_j}$ exista. De forma análoga para $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ escribimos:

$$\boxed{f_{x_{i_1} x_{i_2} \ \ldots \ x_{i_k}} := (\cdots(f_{x_{i_1}})_{x_{i_2}} \cdots)_{x_{i_k}}}$$

siempre que la derivada parcial $(\cdots(f_{x_{i_1}})_{x_{i_2}} \cdots)_{x_{i_k}}$ de orden k exista.

Ejemplo (derivadas parciales de orden superior).

Sea $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como $f(x,y,z)=x^3y+sin(xz)$. Encontrar f_{xyz}.

Solución:

Para empezar, recordemos que $f_{xyz}=((f_x)_y)_z=(f_{xy})_z$ de donde:

($\checkmark$) $f_x(x,y,z)=(x^3y+sin(xz))_x=3x^2y+zcos(xz)$.

($\checkmark$) $f_{xy}(x,y,z)=(f_x)_y(x,y,z)=(3x^2y+zcos(xz))_y=3x^2$.

($\checkmark$) $f_{xyz}(x,y,z)=(f_{xy})_z(x,y,z)=(3x^2)_z=0$.

Así, del análisis previo tenemos que $f_{xyz}(x,y,z)=0$.

Observación (derivadas parciales de orden superior). El lector puede notar de los ejemplos anteriores que aparentemente existe una relación entre las derivadas parciales mixtas de segundo orden, la cual es:

$$f_{xy}=f_{yx},\ f_{xz}=f_{zx} \text{ y } f_{zy}=f_{yz}.$$

De hecho bajo ciertas condiciones que se describirán en el siguiente teorema, se tendrá la igualdad de las derivadas parciales mixtas, pero antes de probar este teorema es necesario recordar algunos conceptos de cálculo diferencial.

Teorema (teorema del valor medio).

Sea $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), entonces existe un punto $c\in(a,b)$ tal que:

$$\boxed{f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.}$$

Lema.

Sea $f:[a,a+h]\times[b,b+k]\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ una función que satisface que:

(1) $a,b\in\mathbb{R}$ y $h,k>0$.

(2) Las seguntas derivadas parciales f_{xy} y f_{yx} existen en $[a,a+h]\times[b,b+k]$.

Si definimos la función g como $g(h,k)=f(a+h,b+k)-f(a+h,b)-f(a,b+k)+f(a,b)$, entonces existen $(p_1,q_1),(p_2,q_2)\in(a,a+h)\times(b,b+k)$ tal que:

$$\begin{cases} f_{xy}(p_1,q_1)=\dfrac{g(h,k)}{hk}, \\ \\ f_{yx}(p_2,q_2)=\dfrac{g(h,k)}{hk}. \end{cases}$$

Demostración.

Afirmación (1): Existen $(p_1,q_1)\in(a,a+h)\times(b,b+k)$ tal que $f_{xy}(p_1,q_1)=\dfrac{g(h,k)}{hk}$.

Para verificar esta afirmación, notemos las siguientes cosas:

($\checkmark$) Si $r(t)=f(t,b+k)-f(t,b)$, entonces $r'(t)=f_x(t,b+k)-f_x(t,b)$.

($\checkmark$) $g(h,k)=[f(a+h,b+k)-f(a+h,b)]-[f(a,b+k)-f(a,b)]=r(a+h)-r(a)$ y por el teorema del valor medio tenemos que existe $p_1\in(a,a+h)$ tal que:

$$g(h,k)=r(a+h)-r(a)=r'(p_1)h=[f_x(p_1,b+k)-f_x(p_1,b)]h.$$

($\checkmark$) Si $s(t)=f_x(p_1,t)$, entonces $s'(t)=f_{xy}(p_1,t)$.

($\checkmark$) Debido a que $g(h,k)=[f_x(p_1,b+k)-f_x(p_1,b)]h=[s(b+k)-s(b)]h$, entonces por el teorema del valor medio tenemos que existe $q_1\in(b,b+k)$ tal que:

$$g(h,k)=[s(b+k)-s(b)]h=s'(q_1)hk=f_{xy}(p_1,q_1)hk.$$

El anterior análisis muestra que $f_{xy}(p_1,q_1)=\dfrac{g(h,k)}{hk}$.

Afirmación (2): Existen $(p_2,q_2)\in(a,a+h)\times(b,b+k)$ tal que $f_{yx}(p_2,q_2)=\dfrac{g(h,k)}{hk}$.

Para mostrar la veracidad de esta afirmación, notemos las siguientes cosas:

($\checkmark$) Si $r(t)=f(a+h,t)-f(a,t)$, entonces $r'(t)=f_y(a+h,t)-f_y(a,t)$.

($\checkmark$) $g(h,k)=[f(a+h,b+k)-f(a,b+k)]-[f(a+h,b)-f(a,b)]=r(b+k)-r(b)$ y por el teorema del valor medio tenemos que existe $q_2\in(b,b+k)$ tal que

$$g(h,k)=r(b+k)-r(b)=r'(q_2)k=[f_y(a+h,q_2)-f_y(a,q_2)]k.$$

($\checkmark$) Si $s(t)=f_y(t,q_2)$, entonces $s'(t)=f_{yx}(t,q_2)$.

($\checkmark$) Debido a que $g(h,k)=[f_y(a+h,q_2)-f_y(a,q_2)]k=[s(a+h)-s(a)]k$, entonces por el teorema del valor medio tenemos que existe $p_2\in(a,a+h)$ tal que:

$$g(h,k)=[s(a+h)-s(a)]k=s'(p_2)hk=f_{yx}(p_2,q_2)hk.$$

El anterior análisis muestra que $f_{yx}(p_2,q_2)=\dfrac{g(h,k)}{hk}$.

■

Teorema (Clairaut - igualdad derivadas parciales mixtas).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes condiciones:

(1) A es un conjunto abierto.

(2) Las derivadas parciales de segundo orden f_{xy} y f_{yx} son continuas en A.

Entonces $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ para todo $(a,b) \in A$.

Demostración.

Dado $(a,b) \in A$, debido a que A es un conjunto abierto, existe $h > 0$ tal que $[a, a+h] \times [b, b+h] \subseteq A$, y por el lema anterior, tenemos que existen $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \in [a, a+h] \times [b, b+h]$ tales que:

$$f_{xy}(p_1, q_1) = f_{yx}(p_2, q_2).$$

y luego al tomar el limite cuando h tiende a cero tenemos que:

$$\begin{cases} \lim\limits_{h \mapsto 0} f_{xy}(p_1, q_1) = \lim\limits_{h \mapsto 0} f_{yx}(p_2, q_2), \\ \\ \lim\limits_{h \mapsto 0} f_{xy}(p_1, q_1) = f_{xy}\left(\lim\limits_{h \mapsto 0}(p_1, q_1)\right) = f_{xy}\left(\lim\limits_{h \mapsto 0} p_1, \lim\limits_{h \mapsto 0} q_1\right) = f_{xy}(a,b), \\ \\ \lim\limits_{h \mapsto 0} f_{yx}(p_2, q_2) = f_{yx}\left(\lim\limits_{h \mapsto 0}(p_2, q_2)\right) = f_{yx}\left(\lim\limits_{h \mapsto 0} p_2, \lim\limits_{h \mapsto 0} q_2\right) = f_{yx}(a,b). \end{cases}$$

Lo cual muestra que $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.

■

Observación (siguiente teorema). Sea $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la función definida como:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longrightarrow \pi(x_1, \ldots, x_n) := (x_i, x_j) \end{aligned}$$

Entonces π satisface que envia conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ a conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^2$. Esto significa que si B es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$, entonces $\pi(B)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$. Un resultado un poco más general es dejado como ejercicio al final de la sección.

Prueba.

Sea B un subconjunto abierto en $\mathbb{R}^n$, entonces $\pi(B)$ se describe como:

$$\pi(B) = \{\pi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^2 : (x_1, \ldots, x_n) \in B\} = \{(x_i, x_j) \in \mathbb{R}^2 : (x_1, \ldots, x_n) \in B\}.$$

Por lo tanto, dado $(a_i, a_j) \in \pi(B)$, tenemos que existe $(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n) \in B$ tal que $\pi(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n) = (a_i, a_j)$. Además, como B es abierto es fácil notar que existe un $\delta > 0$ tal que $(a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times \cdots \times (a_n - \delta, a_n + \delta) \subseteq B$, lo cual implica que

$$\begin{cases} \pi[(a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times \cdots \times (a_n - \delta, a_n + \delta)] \subseteq \pi(B), \\ \\ \pi[(a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times \cdots \times (a_n - \delta, a_n + \delta)] = (a_i - \delta, a_i + \delta) \times (a_i - \delta, a_i + \delta). \end{cases}$$

De esta manera, el anterior análisis muestra que $(a_i, a_j) \in (a_i - \delta, a_i + \delta) \times (a_i - \delta, a_i + \delta) \subseteq \pi(B)$ y como $(a_i - \delta, a_i + \delta) \times (a_i - \delta, a_i + \delta)$ es abierto en $\mathbb{R}^2$ y (a_i, a_j) es un punto arbitrario en $\pi(B)$, entonces $\pi(B)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$.

Corolario (Clairaut - igualdad derivadas parciales mixtas - caso general).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida como

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

que satisface las siguientes condiciones:

(1) A es un conjunto abierto.

(2) Existen $x_i, x_j \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ tales que $f_{x_i x_j}$ y $f_{x_j x_i}$ son continuas en A.

Entonces $f_{x_i x_j}(a_1, \ldots, a_n) = f_{x_j x_i}(a_1, \ldots, a_n)$ para todo $(a_1, \ldots, a_n) \in A$.

Demostración.

Sean $(a_1, \ldots, a_n) \in A$ y $B = \pi(A)$, donde π es la función proyección mostrada en la observación anterior, entonces definimos la función $g : B \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$g : B \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_i, x_j) \longrightarrow g(x_i, x_j) = f(a_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, a_n)$$

Entonces es fácil notar que g satisface las siguientes condiciones:

(✓) $g_{x_i x_j}(a_i, a_j) = f_{x_i x_j}(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n)$.

(✓) $g_{x_j x_i}(a_i, a_j) = f_{x_j x_i}(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n)$.

Y como B es abierto y las derivadas parciales de segundo orden mixtas de g son continuas, entonces por el teorema anterior tenemos que $g_{x_i x_j}(a_i, a_j) = g_{x_j x_i}(a_i, a_j)$, lo cual implica que $f_{x_i x_j}(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = f_{x_j x_i}(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n)$.

■

Nota (teorema anterior).

Hay que tener en cuenta que es posible que las derivadas parciales mixtas sean diferentes (no se satisfacen todas las hipótesis del teorema anterior). Para entender esto, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo (derivadas parciales mixtas).

Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0), \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Entonces

(1) Calcular $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.

(2) Calcular $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ con $(x,y)\neq(0,0)$.

(3) Describir $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$.

(4) Demostrar que f_x y f_y son continuas en $\mathbb{R}^2$.

(5) Demostrar que $f_{xy}(0,0)$ y $f_{yx}(0,0)$ existen y $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$.

(6) ¿Qué condición no satisface f en el teorema Clairaut, para que falle la igualdad en las derivadas parciales mixtas?

Solución:

(1) Debido a que $(0,0)$ es un punto donde la función f tiene un posible problema, entonces se deben calcular las derivadas parciales por medio de la definición.

$(\checkmark)$ $f_x(0,0) = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{\dfrac{h \cdot 0(h^2 - 0^2)}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{0}{h} = 0.$

$(\checkmark)$ $f_y(0,0) = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{\dfrac{0 \cdot h(0^2 - h^2)}{0^2 + h^2} - 0}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{0}{h} = 0.$

(2) Debido a que $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ para $(x,y) \neq (0,0)$, entonces para calcular las derivadas parciales de f en puntos $(x,y) \neq (0,0)$, es suficiente derivar respecto a una variable considerando la otra constante como se muestra a continuación.

$(\checkmark)$ $f_x(x,y) = \left(\dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \right)_x = \dfrac{(x^2 + y^2) \cdot (xy(x^2 - y^2))_x - (xy(x^2 - y^2)) \cdot (x^2 + y^2)_x}{(x^2 + y^2)^2} =$

$$= \frac{(x^2 + y^2) \cdot (3x^2 y - y^3) - (x^3 y - xy^3) \cdot (2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^4 y - x^2 y^3 + 3x^2 y^3 - y^5 - 2x^4 y + 2x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^4 + 4x^2 y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y((x^2 + y^2)^2 - 2y^4)}{(x^2 + y^2)^2} = y - \frac{2y^5}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$(\checkmark)$ $f_y(x,y) = \left(\dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \right)_y = \dfrac{(x^2 + y^2) \cdot (xy(x^2 - y^2))_y - (xy(x^2 - y^2)) \cdot (x^2 + y^2)_y}{(x^2 + y^2)^2} =$

$$=\frac{(x^2+y^2)\cdot(x^3-3xy^2)-(x^3y-xy^3)\cdot(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^5-3x^3y^2+x^3y^2-3xy^4-2x^3y^2+2xy^4}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x(2x^4-(x^2+y^2)^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x^5}{(x^2+y^2)^2}-x.$$

(3) Debido a los literales (1) y (2), podemos decir que las derivadas parciales f_x y f_y de la función f se describen como:

$$f_x(x,y)=\begin{cases} y-\dfrac{2y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{Si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{Si } (x,y)=(0,0), \end{cases} \quad \text{y} \quad f_y(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2x^5}{(x^2+y^2)^2}-x & \text{Si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{Si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

(4) Para verificar en que conjunto son continuas las funciones f_x y f_y notemos que:

(✓) $f_x(x,y)=\dfrac{y((x^2+y^2)^2-2y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ y $f_y(x,y)=\dfrac{x(2x^4-(x^2+y^2)^2)}{(x^2+y^2)^2}$ para cada $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

(✓) $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$.

Lo anterior implica que f_x y f_y son funciones continuas en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, ya que tanto f_x como f_y son cocientes de funciones continuas en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ y los denominadores correspondientes no se anulan en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

Ahora, solo falta verificar si f_x y f_y son continuas en $(0,0)$. En este caso, como $(0,0)$ es un punto donde las funciones se reescriben, entonces la continuidad se verifica usando la definición de continuidad como se muestra a continuación.

(✓) $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} f_x(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} y - \dfrac{2y^5}{(x^2+y^2)^2} = \lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} y - \lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} \dfrac{2y^5}{(x^2+y^2)^2} = 0-0 = 0 = f_x(0,0)$.

(✓) $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} f_y(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} \dfrac{2x^5}{(x^2+y^2)^2} - x = \lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} \dfrac{2x^5}{(x^2+y^2)^2} - \lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} x = 0-0 = 0 = f_y(0,0)$.

Por lo tanto $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} f_x(x,y) = f_x(0,0)$ y $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} f_y(x,y) = f_y(0,0)$, lo que significa que f_x y f_y son funciones continuas en $(0,0)$. Además, como ya habíamos probado que f_x y f_y son funciones continuas en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, se tiene que f_x y f_y son funciones continuas en $\mathbb{R}^2$.

(5) Encontremos los valores de $f_{xy}(0,0)$ y $f_{yx}(0,0)$. Para esto usaremos la descripción de las derivadas parciales f_x y f_y que encontramos anteriormente.

- $f_{xy}(0,0) = (f_x)_y(0,0) = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{h - \dfrac{2h^5}{(0^2+h^2)^2} - 0}{h} = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{h-2h}{h} = 1-2 = -1.$
- $f_{yx}(0,0) = (f_y)_x(0,0) = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{\dfrac{2h^5}{(h^2+0^2)^2} - h - 0}{h} = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{2h-h}{h} = 2-1 = 1.$

El anterior análisis muestra que $f_{xy}(0,0)$ y $f_{yx}(0,0)$ existen y además que $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

(6) Es posible que las personas se pregunten

> ¿Por qué es posible que las derivadas parciales mixtas sean distintas,
>
> si hemos probado previamente que ellas son iguales?

Lo que ocurre es que la igualdad de las derivadas parciales mixtas es garantizada si las derivadas parciales mixtas son continuas en un conjunto abierto, y esto es precisamente en lo que falla nuestra función. Para verificar esto, se calculan primero las derivadas parciales mixtas de f y obtenemos los siguientes resultados.

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-y^6 - 9x^2y^4 + 9x^4y^2 + x^6}{(x^2+y^2)^3} & \text{Si } (x,y) \neq (0,0), \\ -1 & \text{Si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_{yx}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^4} & \text{Si } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{Si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Y se puede probar que f_{xy} y f_{yx} no son continuas en $(0,0)$.

Problemas.

(1) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables, entonces:

(a) Si $f(x,y) = xsin(y^2)$, entonces determinar las derivadas parciales de f.

(b) Hallar $\lim_{h \mapsto 0} \dfrac{xsin(y+h)^2 - xsin(y^2)}{h}$.

(2) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables, entonces:

(a) Si $f(x,y,z) = 2y^3 cos(xyz)$, entonces determinar las derivadas parciales de f.

(b) Hallar $\lim_{h \mapsto 0} \dfrac{2(y+h)^3 cos(x(y+h)z) - 2y^3 cos(xyz)}{h}$.

(c) Hallar $\lim_{h \mapsto 0} \dfrac{2y^3 cos(xy(z+h)) - 2y^3 cos(xyz)}{h}$.

(3) Supongamos que $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $\mathbb{R}$, entonces:

(a) Si $h(z) = \int_0^z g(t)dt$, entonces determinar $h'(z)$.

(b) Si $s:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}$ y $h(z)=\int\limits_{0}^{s(z)} g(t)dt$, entonces determinar $h'(z)$.

(c) Si $l,s:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ son funciones diferenciables en $\mathbb{R}$ y $h(z)=\int\limits_{l(z)}^{s(z)} g(t)dt$, entonces determinar $h'(z)$.

Ayudas: Para esta parte, notaremos las siguientes cosas:

- $h(z)=\int\limits_{l(z)}^{s(z)} g(t)dt=\int\limits_{0}^{s(z)} g(t)dt-\int\limits_{0}^{l(z)} g(t)dt.$
- $h'(z)=\left(\int\limits_{l(z)}^{s(z)} g(t)dt\right)'=\left(\int\limits_{0}^{s(z)} g(t)dt-\int\limits_{0}^{l(z)} g(t)dt\right)'=\left(\int\limits_{0}^{s(z)} g(t)dt\right)'-\left(\int\limits_{0}^{l(z)} g(t)dt\right)'.$
- Si $j(z)=\int\limits_{0}^{z} g(t)dt$ y $m(z)=\int\limits_{0}^{s(z)} g(t)dt$, entonces $m(z)=j(s(z))$ y además $m'(z)=j'(s(z))\cdot s'(z)$.

(d) Si $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función definida como $f(x,y)=\int_x^y g(t)dt$, entonces hallar $f_y(x,y)$.

(e) Si $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función definida como $f(x,y)=\int_x^y g(t)dt$, entonces hallar $f_x(x,y)$.

(f) Si $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función definida por $f(x,y)=\int_{x+y^2}^{sin(xy^3)} g(t)dt$, entonces hallar $f_x(x,y)$.

(3) Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2 tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)-y^2 tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{Si } x\neq 0 \text{ y } y\neq 0, \\ 0 & \text{Si } x=0 \text{ o } y=0. \end{cases}$$

Entonces determinar $f_{xy}(0,0)$.

Ayudas:

⋆ Usar la definición original de derivada parcial.

⋆ Usar los tramos adecuados de la función f para las derivadas parciales.

(4) Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y-2 & \text{Si } x=10 \text{ y } y=1, \\ \\ 0 & \text{Si } x\neq 1 \text{ o } y\neq 1. \end{cases}$$

Entonces determinar $f_x(1,1)$ y $f_y(1,1)$.

(5) Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}+1 & \text{Si } (x,y)\neq(0,0), \\ \\ 0 & \text{Si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Entonces

(a) Determinar $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.

(b) Determinar $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ para $(x,y)\neq(0,0)$.

(c) Determinar f_x y f_y.