# Maestría en Ciencias Naturales y Matemáticas

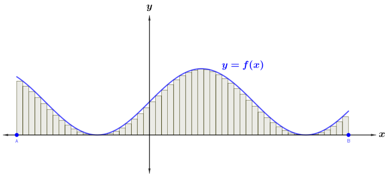
## Clase 1 - Cálculo Avanzado de Varias Variables

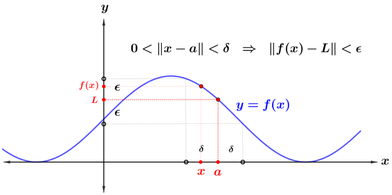
Mg: Julián Uribe Castañeda

UPB

15 de diciembre de 2022

Históricamente, las primeras ideas topológicas provienen del concepto de límite y de la completitud de un espacio métrico, y se manifestaron principalmente en la crisis de los pitagóricos, ante la aparición de números irracionales. El primer acercamiento concreto de la topología es al concepto de límite y al método de exhaución de Arquímedes para la integral de una función sobre un intervalo cerrado.




La aparición del análisis matemático en el siglo XVII puso en evidencia la necesidad de formalizar los conceptos de proximidad y continuidad, y la incapacidad de la geometría para tratar este tema. Fue precisamente la fundamentación del cálculo infinitesimal, así como los intentos de formalizar el concepto de variedad en Geometría los que impulsaron la aparición de la topología a finales del siglo XIX y principios del XX.

# Topología en $\mathbb{R}^n$ - Historia

Se suele dar origen a la topología con la solución del problema de los puentes de Königsberg por parte de Euler en 1735. Ciertamente, la solución de Euler del problema utiliza una forma de pensar totalmente topológica, y nos lleva a la característica de Euler, el primer invariante de la topología algebraica, pero sería muy arriesgado decir que en ese preciso momento apareció la topología. La situación es exactamente análoga a la del cálculo del área de un circulo por Arquímedes.

El término topología fue usado por primera vez por Johann Benedict Listing en 1836 en una carta a su antiguo profesor de la escuela primaria, Müller, y posteriormente en su libro Vorstudien zur Topologie ('Estudios previos a la topología'), publicado en 1847. Anteriormente se la denominaba analysis situs. Maurice Fréchet introdujo el concepto de espacio métrico en 1906.

# *Topología en $\mathbb{R}^n$ - Definiciones básicas y propiedades*

Para comenzar, empezaremos explorando algunas definiciones necesarias para describir nuestro marco teórico.

***Definición (Espacio euclídeo $n$-dimensional).***

Definimos el espacio euclídiano $n$-dimensional $\mathbb{R}^n$ como

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.}$$

En ocasiones los puntos de $\mathbb{R}^n$ los llamamos vectores ó $n$-tuplas.

***Definición (suma y multiplicación por escalar).***

Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$ definimos:

(1) La suma de $x$ y $y$ como

$$\boxed{x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).}$$

(2) El producto escalar de $r$ con $x$ como

$$\boxed{r \cdot x = r \cdot (x_1, \dots, x_n) := (rx_1, \dots, rx_n).}$$

***Ejemplo (suma y multiplicación por escalar).***

(1) Si $x = (1,2,4)$ y $y = (3,-4,8)$ son vectores en $\mathbb{R}^3$, entonces

$$x + y = (1,2,4) + (3,-4,8) = (1+3, 2-4, 4+8) = (4,-2,12).$$

(2) Si $x = (9,-10,15,\pi)$ es un vector en $\mathbb{R}^4$, entonces

(a) $2 \cdot x = 2 \cdot (9,-10,15,\pi) = (12,-20,30,2\pi)$.

(b) $-11 \cdot x = -11 \cdot (9,-10,15,\pi) = (-99,110,-165,-11\pi)$.

***Observación (definiciones anteriores).***

(1) Si $r$ es un número real diferente de cero y $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces en ocasiones escribimos el vector $\frac{1}{r} \cdot x$ como $\frac{x}{r}$.

(2) Dado $x \in \mathbb{R}^n$, decimos que $x$ es un vector unitario, si $\|x\| = 1$.

(3) El vector en $\mathbb{R}^n$ que tiene todas las componentes cero lo denotaremos por $O = (0, \cdots, 0)$.

(4) Si $x$ es un vector en $\mathbb{R}^n$ con $x \neq O$ (el vector $x$ es no nulo), entonces es fácil notar que $\frac{x}{\|x\|}$ es un vector unitario.

***Definición (producto interior y norma).***

Sean $x=(x_1,\dots,x_n)$ y $y=(y_1,\dots,y_n)$ en $\mathbb{R}^n$. Definimos

(1) El producto interior entre $x$ y $y$ como:

$$\boxed{x \bullet y = (x_1,\dots,x_n) \bullet (y_1,\dots,y_n) := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.}$$

(2) La magnitud (ó norma) de $x$ como:

$$\boxed{\|x\| := \sqrt{x \bullet x} = \sqrt{(x_1,\dots,x_n) \bullet (x_1,\dots,x_n)} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.}$$

***Teorema (propiedades - suma y producto escalar).***

Sean $x,y,z \in \mathbb{R}^n$ y $r,s \in \mathbb{R}$, entonces:

(1) $x+y=y+x$.

(2) $x+(y+z)=(x+y)+z$.

(3) $r\cdot(x+y)=r\cdot x+r\cdot y$.

(4) $(r+s)\cdot x=r\cdot x+s\cdot x$.

(5) $r\cdot(s\cdot x)=(r\cdot s)\cdot x$.

(6) $x+O=x$ y $r\cdot O=O$.

***Demostración.*** Se deja al lector.

***Teorema (propiedades - producto interior y magnitud).***

Sean $x,y,z\in\mathbb{R}^n$ y $r\in\mathbb{R}$, entonces:

(1) $x\bullet y=y\bullet x$.

(2) $x\bullet(y+z)=x\bullet y+x\bullet z$.

(3) $r\cdot(x\bullet y)=(r\cdot x)\bullet y=x\bullet(r\cdot y)$.

(4) $\|x+y\|^2=\|x\|^2+2x\bullet y+\|y\|^2$.

(5) $|x\bullet y|\leq\|x\|\cdot\|y\|$ (desigualdad de Cauchy- Schwarz).

(6) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (desigualdad triangular).

***Demostración.***

Supongamos que $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$ y $z=(z_1,\ldots,z_n)$ entonces

(1) $x\bullet y=(x_1,\ldots,x_n)\bullet(y_1,\ldots,y_n)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\sum_{i=1}^{n}y_ix_i=(y_1,\ldots,y_n)\bullet(x_1,\ldots,x_n)=y\bullet x$.

(2) $x\bullet(y+z)=(x_1,\ldots,x_n)\bullet[(y_1,\ldots,y_n)+(z_1,\ldots,z_n)]=(x_1,\ldots,x_n)\bullet(y_1+z_1,\ldots,y_n+z_n)=$

$=\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i+z_i)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+x_iz_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}x_iz_i=x\bullet y+x\bullet z$.

(3) Se deja como ejercicio al lector.

(4) En virtud de (1) y (2), tenemos que

$$\|x+y\|^2=(x+y)\bullet(x+y)=(x+y)\bullet x+(x+y)\bullet y=x\bullet(x+y)+y\bullet(x+y)=$$

$$=x\bullet x+x\bullet y+y\bullet x+y\bullet y=\|x\|^2+x\bullet y+x\bullet y+\|y\|^2=\|x\|^2+2x\bullet y+\|y\|^2.$$

(5) Para probar que $|x\bullet y|\leq\|x\|\cdot\|y\|$, notemos que:

($\checkmark$) Si $x=O=(0,\ldots,0)$ o $y=O=(0,\ldots,0)$, entonces la desigualdad es cierta.

($\checkmark$) Si $x\neq O=(0,\ldots,0)$ y $y\neq O=(0,\ldots,0)$, entonces:

$$|x\bullet y|\leq\|x\|\cdot\|y\| \iff \frac{|x\bullet y|}{\|x\|\cdot\|y\|}\leq 1 \iff \left|\frac{x\bullet y}{\|x\|\cdot\|y\|}\right|\leq 1 \iff \left|\frac{x}{\|x\|}\bullet\frac{y}{\|y\|}\right|\leq 1$$

Así, es suficiente probar que $\left|\frac{x}{\|x\|}\bullet\frac{y}{\|y\|}\right|\leq 1$ y para esto usaremos la propiedad (4) de la siguiente manera:

$$0\leq\left\|\frac{x}{\|x\|}\pm\frac{y}{\|y\|}\right\|^2=\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|^2\pm 2\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\bullet\left(\frac{y}{\|y\|}\right)+\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\|^2=1\pm 2\frac{x\bullet y}{\|x\|\cdot\|y\|}+1=2\pm 2\frac{x\bullet y}{\|x\|\cdot\|y\|}$$

y así,

$$0\leq 2\pm 2\frac{x\bullet y}{\|x\|\cdot\|y\|} \iff \mp\frac{x\bullet y}{\|x\|\cdot\|y\|}\leq 1 \iff \left|\frac{x}{\|x\|}\bullet\frac{y}{\|y\|}\right|\leq 1 \iff |x\bullet y|\leq\|x\|\cdot\|y\| .$$

(6) Para probar que $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$, es suficiente notar que:

$$\boxed{\begin{array}{c} \|x+y\| \leq \|x\|+\|y\| \iff \|x+y\|^2 \leq (\|x\|+\|y\|)^2 \iff \\ \|x\|^2+2x\bullet y+\|y\|^2 \leq \|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2 \iff x\bullet y \leq \|x\|\cdot\|y\|. \end{array}}$$

Pero esta última desigualdad es cierta, ya que $x\bullet y \leq |x\bullet y| \leq \|x\|\cdot\|y\|$.

■

***Observación (algunas características de $\mathbb{R}^n$).***

(1) Con las operaciones de suma y multiplicación por escalar definidas anteriormente, tenemos que $\mathbb{R}^n$ tiene estructura de espacio vectorial real sobre el campo de números reales $\mathbb{R}$.

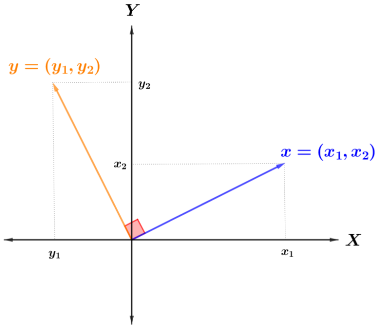
(2) La base estándar de $\mathbb{R}^n$ es $e_1,\ldots,e_n$ donde:

$$\boxed{\begin{array}{c} e_1=(1,0,0,\ldots,0,0), \\ e_2=(0,1,0,\ldots,0,0), \\ \vdots \\ e_n=(0,0,0,\ldots,0,1). \end{array}}$$

Es decir que para todo $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\boxed{x=x_1\cdot e_1+\cdots+x_n\cdot e_n.}$$

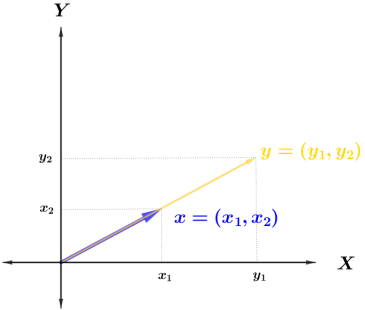
(3) Sean $x=(x_1,\ldots,x_n)$ y $y=(y_1,\ldots,y_n)$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Decimos que $x$ y $y$ son vectores ortogonales, si $x\bullet y=0$. Esta definición tiene sentido ya que en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ se puede probar que:




$$\boxed{\text{El ángulo entre dos vectores } x \text{ y } y \text{ es } 90^\circ \iff x\bullet y=0.}$$

Se deja como ejercicio al lector, verificar el resultado anterior en $\mathbb{R}^2$.

$(4)$ Sean $x=(x_1,\ldots,x_n)$ y $y=(y_1,\ldots,y_n)$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Decimos que $x$ y $y$ son vectores paralelos (tienen la misma dirección), si existe $r\geq 0$ tal que $x=r\cdot y$ ó $y=r\cdot x$. Esta definición tiene sentido ya que en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ se puede probar que:




$$\boxed{x \text{ y } y \text{ tienen la misma dirección} \iff \text{Existe } r\geq 0 \text{ tal que } x=r\cdot y \text{ ó } y=r\cdot x.}$$

Se deja como ejercicio al lector, verificar el resultado anterior en $\mathbb{R}^2$.

$(5)$ Similarmente decimos que $x=(x_1,\ldots,x_n)$ y $y=(y_1,\ldots,y_n)$ son antiparalelos (tienen dirección contraria), si existe $r\leq 0$ tal que $x=r\cdot y$ ó $y=r\cdot x$.

## *Ejemplo (opcional).*

Dados $x=(x_1,\dots,x_n), y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, hallar el valor exacto de $\|x\|^2\cdot\|y\|^2-(x\bullet y)^2$.

## *Solución:*

Para hallar el valor exacto de $\|x\|^2\cdot\|y\|^2-(x\bullet y)^2$, notemos inicialmente que:

$$(\checkmark)\ (x\bullet y)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2 \overset{=}{\text{ejercicio}} \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n}(x_iy_i)\cdot(x_jy_j) \overset{=}{\text{ejercicio}} \sum_{\substack{i=1\\ j=1\\ i=j}}^{n}(x_iy_i)\cdot(x_jy_j)+\sum_{\substack{i=1\\ j=1\\ i\neq j}}^{n}(x_iy_i)\cdot(x_jy_j)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)\cdot(x_iy_i)+\sum_{i\neq j}^{n}(x_iy_i)\cdot(x_jy_j)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i^2+\sum_{i\neq j}^{n}(x_iy_i)\cdot(x_jy_j).$$

$$(\checkmark)\ \|x\|^2\cdot\|y\|^2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right) \overset{=}{\text{ejercicio}} \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n}x_i^2y_j^2 \overset{=}{\text{ejercicio}} \sum_{\substack{i=1\\ j=1\\ i=j}}^{n}x_i^2y_j^2+\sum_{\substack{i=1\\ j=1\\ i\neq j}}^{n}x_i^2y_j^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i^2+\sum_{i\neq j}^{n}x_i^2y_j^2.$$

Además, tenemos que:

$$(x\bullet y)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i^2+\sum_{i\neq j}^{n}(x_iy_i)\cdot(x_jy_j)\overset{=}{\text{ejercicio}}\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i^2+\sum_{i<j}^{n}(x_iy_i)\cdot(x_jy_j)+\sum_{i>j}^{n}(x_iy_i)\cdot(x_jy_j)=$$

$$\overset{=}{\text{ejercicio}}\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i^2+\sum_{i<j}^{n}(x_iy_i)\cdot(x_jy_j)+\sum_{j>i}^{n}(x_jy_j)\cdot(x_iy_i)\overset{=}{\text{ejercicio}}\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i^2+\sum_{i<j}^{n}2(x_iy_i)\cdot(x_jy_j).$$

$$\|x\|^2\cdot\|y\|^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i^2+\sum_{i\neq j}^{n}x_i^2y_j^2\overset{=}{\text{ejercicio}}\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i^2+\sum_{i<j}^{n}x_i^2y_j^2+\sum_{i>j}^{n}x_i^2y_j^2=$$

$$\overset{=}{\text{ejercicio}}\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i^2+\sum_{i<j}^{n}x_i^2y_j^2+\sum_{j>i}^{n}x_j^2y_i^2\overset{=}{\text{ejercicio}}\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i^2+\sum_{i<j}^{n}x_i^2y_j^2+x_j^2y_i^2.$$

De donde,

$$\|x\|^2\cdot\|y\|^2-(x\bullet y)^2=\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i^2+\sum_{i<j}^{n}x_i^2y_j^2+x_j^2y_i^2\right]-\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i^2+\sum_{i<j}^{n}2(x_iy_i)\cdot(x_jy_j)\right]=$$

$$=\sum_{i<j}^{n}x_i^2y_j^2+x_j^2y_i^2-\sum_{i<j}^{n}2(x_iy_i)\cdot(x_jy_j)=\sum_{i<j}^{n}x_i^2y_j^2+x_j^2y_i^2-2(x_iy_j)\cdot(x_jy_i)=\sum_{i<j}^{n}(x_iy_j-x_jy_i)^2.$$

*Conclusión:*

$$\|x\|^2\cdot\|y\|^2-(x\bullet y)^2=\sum_{i<j}^{n}(x_iy_j-x_jy_i)^2.$$

### *Nota (ejemplo anterior).*

El ejemplo anterior en particular prueba la desigualdad de Cauchy-Schwarz, ya que

$$|x \bullet y| \leq \|x\| \cdot \|y\| \iff |x \bullet y|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \iff \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - (x \bullet y)^2 \geq 0$$

pero $\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - (x \bullet y)^2 = \sum_{i<j}^{n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq 0$, lo cual muestra la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

### *Ejemplo (teorema de Pitágoras en $\mathbb{R}^n$).*

Supongamos que $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$ son vectores ortogonales en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

***Solución.***

Recordemos que

($\checkmark$) Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$ son vectores ortogonales, entonces $x \bullet y = 0$.

($\checkmark$) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2x \bullet y + \|y\|^2$.

De esta manera, tenemos que $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2x \bullet y + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \cdot 0 + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

# Problemas.

(1) Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ demostrar que $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

*Ayuda:* Usar el hecho de que $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2x \bullet y + \|y\|^2$.

(2) Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, demostrar que $x \bullet y = \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$.

*Ayuda:* Usar el hecho de que $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2x \bullet y + \|y\|^2$.

(3) Dados $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$, demostrar que $\left\| \sum\limits_{i=1}^{m} x_i \right\| \leq \sum\limits_{i=1}^{m} \|x_i\|$.

*Ayuda:* Usar la desigualdad triangular e inducción sobre $m$.

(4) Dados $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, demostrar que $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|}{n} \leq \|x\|$.

*Ayuda:* Notar que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $|x_i| \leq \|x\|$.

(5) Dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, demostrar que $\|x\| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

*Ayuda:* Usar la desigualdad triangular y el hecho de que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

(6) Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Demostrar que existe $M \geq 0$ tal que para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\|T(x)\| \leq M \cdot \|x\|$.

*Ayuda:* Usar la desigualdad triangular y el hecho de que $T(x) = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot T(e_i)$.

(7) Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Probar que $x \bullet y = \|x\| \cdot \|y\| \iff x$ y $y$ son vectores paralelos.

*Ayuda:* Ver la prueba de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y cambiar $\leq$ por $=$.

(8) Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ sí y sólo sí $x$ y $y$ son paralelos.

*Ayuda:* Notar que:

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff \|x+y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \iff \|x\|^2 + 2x \bullet y + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2.$$