Universidad Pontifica Bolivariana

Cálculo Avanzado de Varias Variables

Julián Uribe Castañeda

Conexidad - Parte (2)

5 de febrero de 2025

Topología en $\mathbb{R}^n$ - conexidad (continuación).

Teorema (las funciones continuas mandan conexos en conexos).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua y A es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$, entonces $f(A)$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^m$.

Demostración:

Supongamos por reducción al absurdo que $f(A)$ es un subconjunto disconexo de $\mathbb{R}^n$, entonces existen abiertos U y V en $\mathbb{R}^m$ tales que

$$\begin{cases} f(A) \cap U \neq \emptyset \text{ y } f(A) \cap V \neq \emptyset, \\ \\ f(A) \subseteq U \cup V, \\ \\ U \cap V = \emptyset. \end{cases}$$

Como f es continua, se tiene que $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son conjuntos abiertos en A, y por tanto existen abiertos L y M en $\mathbb{R}^n$ tales que $f^{-1}(U) = L \cap A$ y $f^{-1}(V) = M \cap A$. Si $a, b \in A$ satisfacen que $f(a) \in U$ y $f(b) \in V$ (esto es posible ya que $f(A) \cap U \neq \emptyset$ y $f(A) \cap V \neq \emptyset$), entonces

$$\begin{cases} a \in f^{-1}(U) = L \cap A \text{ y } b \in f^{-1}(V) = M \cap A, \\ A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = (A \cap L) \cup (A \cap M) \subseteq L \cup M, \\ \emptyset = f^{-1}(\emptyset) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = A \cap L \cap M. \end{cases}$$

De lo anterior, tenemos que A satisface las siguientes condiciones

$$\begin{cases} A\cap L\neq\emptyset \text{ y } A\cap M\neq\emptyset, \\ \\ A\cap L\cap M=\emptyset, \\ \\ A\subseteq L\cup M \end{cases}$$

de donde, por (problema 3 - clase 12) tenemos que A debe ser un conjunto disconexo, lo cual va en contra de nuestra hipótesis. Así, es necesario que $f(A)$ sea un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^m$.

∎

Corolario (teorema del valor intermedio).

Sea $f: A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua y sean $a,b\in A$ tales que $f(a)<r<f(b)$. Si A es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$, entonces existe $x_0\in A$ tal que $f(x_0)=r$.

Demostración:

Por el teorema previo tenemos que $f(A)$ es un subconjunto conexo de números reales y además por un teorema anterior tenemos que los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos de números reales. Así, tenemos que $f(A)$ es un intervalo de números reales el cual satisface que $r\in[f(a),f(b)]\subseteq f(A)$, lo cual implica que existe $x_0\in A$ tal que $f(x_0)=r$.

∎

Problemas.

(1) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Demostrar que A es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ si y sólo sí no existe una función continua $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(A) = \{f(a) \in \mathbb{R} : a \in A\} = \{0,1\}$.

(2) Sea $f : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua la cual satisface que $f([0,1]) = [0,1]$. Demostrar que existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

Ayuda:

Consideremos la función $g : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$g(x) = x - f(x)$$

para cada $x \in [0,1]$. Entonces es fácil notar que

$$\begin{cases} g(0) = 0 - f(0) = -f(0) \leq 0, \\ \\ g(1) = 1 - f(1) \geq 0. \end{cases}$$

Por otro lado, tenemos que

- ⋆ Si $g(0) = 0$, entonces $f(0) = 0$.
- ⋆ Si $g(1) = 0$, entonces $f(1) = 1$.

⋆ Si $g(0) \neq 0$ y $g(1) \neq 0$, entonces $g(0) < 0 < g(1)$ lo cual implica por el teorema del valor intermedio que existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $g(x_0) = 0$, pero esto es equivalente a tener que $f(x_0) = x_0$.

De esta manera, el anterior análisis muestra que existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

(3) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto arco conexo y sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua. Demostrar que $f(A)$ es un conjunto arco conexo en $\mathbb{R}^n$.

Ayuda:

Sean $x, y \in f(A)$, entonces existen $a, b \in A$ tales que $f(a) = x$ y $f(b) = y$. Como A es arco conexo, existe una función continua $\alpha : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{cases} \alpha([0,1]) = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\} \subseteq A, \\ \alpha(0) = a \text{ y } \alpha(1) = b. \end{cases}$$

Definimos $r = f \circ \alpha$, entonces es fácil notar que

$$\begin{cases} r([0,1]) = (f \circ \alpha)([0,1]) = f(\alpha([0,1])) \subseteq f(A), \\ \\ r(0) = (f \circ \alpha)(0) = f(\alpha(0)) = f(a) = x \text{ y } r(1) = (f \circ \alpha)(1) = f(\alpha(1)) = f(b) = y. \end{cases}$$

De esta manera, tenemos que $f(A)$ es un conjunto arco conexo en $\mathbb{R}^n$.

(4) Sean A y B subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$. Si $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g: B \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ son funciones continuas en A y B respectivamente las cuales satisfacen que $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$. Demostrar que la función $h: (A \cup B) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida como

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

es una función continua en $A \cup B$.

Ayuda:

Primero es sencillo notar que h está bien definida (es decir que en efecto h es una función). Por otro lado, para probar que h es continua en $A \cup B$ es suficiente probar que para cada conjunto cerrado D en $\mathbb{R}^m$ se tiene que $h^{-1}(D)$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$ por (problema 4 - clase 7). De esta manera, si D es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^m$, entonces

(a) $h^{-1}(D) \cap A = f^{-1}(D)$.

(b) $h^{-1}(D) \cap B = g^{-1}(D)$.

(c) $h^{-1}(D) = [h^{-1}(D)] \cap [A \cup B] = [h^{-1}(D) \cap A] \cup [h^{-1}(D) \cap B] = f^{-1}(D) \cup g^{-1}(D)$.

De lo anterior se tiene que $h^{-1}(D) = f^{-1}(D) \cup g^{-1}(D)$ para todo conjunto cerrado D en $\mathbb{R}^m$, además como f y g son continuas, se tiene que $f^{-1}(D)$ y $g^{-1}(D)$ son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$ y por tanto $h^{-1}(D) = f^{-1}(D) \cup g^{-1}(D)$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$ (la unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado).

Definición (camino en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$): Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $a, b \in A$. Entonces un camino en A de a hasta b es una función continua $\alpha : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha(0) = a$, $\alpha(1) = b$ y $\alpha([0,1]) \subseteq A$.

(5) Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\alpha : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un camino en A con $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$. Demostrar que la función $\beta : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida como

$$\beta(t) = \alpha(1-t)$$

con $t \in [0,1]$, es un camino en A desde b hasta a.

(6) Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ son caminos en A con $\alpha(1) = \beta(0)$. Demostrar que la función $(\alpha * \beta) : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida como

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \\ \beta(2t-1) & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es un camino en A desde $\alpha(0)$ hasta $\beta(1)$.

Ayuda:

Notemos inicialmente que

- $\alpha * \beta$ está bien definida en $t = \dfrac{1}{2}$, ya que

$$\alpha\left(2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\alpha(1)=\beta(0) \quad \text{y} \quad \beta\left(2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)=\beta(0)=\alpha(1).$$

⋆ $\alpha*\beta$ está bien definida en $[0,1]$, ya que

$$\begin{cases} \text{si } 0\leq t\leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow 0\leq 2t\leq 1 \Rightarrow \alpha(2t) \text{ está bien definida,} \\ \\ \text{si } \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1 \Rightarrow 0\leq 2t-1\leq 1 \Rightarrow \beta(2t-1) \text{ está bien definida} \end{cases}$$

y el único problema de $\alpha*\beta$ es aparentemente $t=\frac{1}{2}$, pero ya vimos previamente que en este punto $\alpha*\beta$ está bien definida.

⋆ $\alpha*\beta$ es continua en $[0,1]$.

Para verificar esto, notemos que las funciones $f:\left[0,\frac{1}{2}\right]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ y $g:\left[\frac{1}{2},1\right]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ definidas como

$$\begin{cases} f(t)=\alpha(2t) & \text{para } 0\leq t\leq \dfrac{1}{2}, \\ \\ g(t)=\beta(2t-1) & \text{para } \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1 \end{cases}$$

son funciones continuas. Además $f\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha(1)=\beta(0)=g\left(\frac{1}{2}\right)$ y por lo tanto el problema 2.7.4 nos dice que la función

$$(\alpha*\beta)(t)=\begin{cases}\alpha(2t) & \text{si } 0\leq t\leq \frac{1}{2},\\ \beta(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2}\leq t\leq 1\end{cases}=\begin{cases}f(t) & \text{si } 0\leq t\leq \frac{1}{2},\\ g(t) & \text{si } \frac{1}{2}\leq t\leq 1\end{cases}$$

es una función continua en $\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},1\right]=[0,1]$.

⋆ $\alpha*\beta$ satisface que $(\alpha*\beta)([0,1])\subseteq A$.

Este se debe a que los valores de α y β se encuentran en A.

De esta manera, el análisis anterior nos muestra que $\alpha*\beta$ es un camino en A desde $(\alpha*\beta)(0)=\alpha(0)$ hasta $(\alpha*\beta)(1)=\beta(1)$.

(7) Sea $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Demostrar que A es arco conexo si y sólo sí para cada $x,y\in A$ existe un camino en A desde x hasta y.

(8) Sea $A\subseteq\mathbb{R}^n$ y $a\in A$. Demostrar que A es arco conexo si y sólo sí para cada $x\in A$, existe una camino en A desde a hasta x.

(9) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $a \in A$. Demostrar que A es un conjunto arco conexo si y sólo sí $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{ existe un camino en } A \text{ desde } a \text{ hasta } x\}$.

(10) Sea A un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que A es arco conexo.

Ayuda:

Sea $a \in A$ un punto fijo. Entonces definimos los conjuntos U y V como

$$\begin{cases} U = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{ existe un camino en } A \text{ desde } a \text{ hasta } x\}, \\ \\ V = A - U = \{x \in A : \text{ no existe un camino en } A \text{ desde } a \text{ hasta } x\}. \end{cases}$$

De esta manera, afirmamos que

(a) $U \cup V = A$ y $U \cap V = \emptyset$.

(b) Existe $\delta > 0$ tal que $B(a;\delta) \subseteq U$.

(c) U es un conjunto abierto.

(d) V es un conjunto abierto.

(e) $A = U$ y $V = \emptyset$.

Prueba de (a): Es trivial de las definiciones de U y V.

Prueba de (b): Como A es abierto y $a \in A$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $B(a;\delta) \subseteq A$. Ahora, usando el hecho de que $B(a;\delta)$ es arco conexo (problema 2.6.9) y por el problema anterior tenemos que

$$\boxed{\begin{aligned} &B(a;\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{ existe un camino en } B(a;\delta) \text{ desde } a \text{ hasta } x\} \subseteq \\ &\subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \text{ existe un camino en } A \text{ desde } a \text{ hasta } x\} = U. \end{aligned}}$$

De esta manera, se tiene que $B(a;\delta) \subseteq U$.

Prueba de (c): Sea $x \in U = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{ existe un camino en } A \text{ desde } a \text{ hasta } x\}$, entonces existe un camino $r : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ en A desde a hasta x. Como A es abierto y $x \in A$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x;\varepsilon) \subseteq A$. Entonces afirmamos que $B(x;\varepsilon) \subseteq U$, ya que para cada $z \in B(x;\varepsilon)$, existe un camino $s : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ en $B(x;\varepsilon)$ desde x hasta z (esto se debe a que $B(x;\varepsilon)$ es arco conexo) y así definimos la función $\alpha : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$\alpha(t) = \begin{cases} r(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \\ s(2t-1) & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces por (problema 6 - clase 13) se tiene que α es continua en $[0,1]$ (de hecho $\alpha = r * s$) y además es fácil notar que α es un camino en A de a hasta z. Así, el análisis anterior muestra que $z \in U$ y por tanto $B(x;\varepsilon) \subseteq U$. Esto muestra que U es un conjunto abierto.

Prueba de (d): Sea $x \in V = \{x \in A : \text{ no existe un camino en } A \text{ desde } a \text{ hasta } x\}$, entonces como $x \in A$ y A es abierto, debe existir $\varepsilon > 0$ tal que $B(x;\varepsilon) \subseteq A$. Entonces afirmamos que $B(x;\varepsilon) \subseteq V$, ya si existiera $z \in B(x;\varepsilon)$ tal que $z \notin V$, entonces existiría un camino $r : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ en A desde a hasta z y como $B(x;\varepsilon)$ es arco conexo existe un camino $s : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ en $B(x;\varepsilon)$ desde z hasta x. Así $\alpha := r * s$ es un camino en A desde a hasta x, lo cual implica que $x \notin V$ ($x \in U$) lo cual es imposible. Por lo tanto, tenemos que $B(x;\varepsilon) \subseteq V$ y como x es arbitrario, se tiene que V es abierto.

Prueba de (e): Dado que $A = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$, entonces por la conexidad de A, se tiene que $A = U$ ó $A = V$. Pero debido a que $B(a;\delta) \subseteq U$, entonces es necesario que $A = U$.

De lo anterior, tenemos que $A = U = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{ existe un camino en } A \text{ desde } a \text{ hasta } x\}$ y (problema 9 - clase 13) nos dice que A tiene que ser arco conexo.