Maestría en Ciencias Naturales y Matemáticas

Clase 9 - Cálculo Avanzado de Varias Variables

Mg: Julián Uribe Castañeda

UPB

20 de febrero de 2024

Definición (limite de una función en un punto).

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función de varias variables, $a \in ac(A)$ y $L \in \mathbb{R}^m$. Decimos que el limite de f cuando x tiende a a es L, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\boxed{\text{Si } x \in B^*(a,\delta) \cap A, \text{ entonces } f(x) \in B(L,\varepsilon).}$$

Observación (definición anterior).

En la definición anterior no mostramos las diferencias de las bolas abiertas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^n$. Es decir que al escribir x, a, $f(x)$ y L como:

$$\begin{cases} x = (x_1, \ldots, x_n), \\ a = (a_1, \ldots, a_n) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} f(x) = (y_1, \ldots, y_m), \\ L = (l_1, \ldots, l_m) \end{cases}$$

entonces

$$\begin{cases} x \in B^*(a,\delta)\cap A & \Leftrightarrow\ 0<\|x-a\|<\delta \text{ y } x\in A \ \Leftrightarrow\ 0<\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2}<\delta \text{ y } x\in A, \\ f(x)\in B(L,\varepsilon) & \Leftrightarrow\ \|f(x)-L\|<\varepsilon\ \Leftrightarrow\ \sqrt{\sum_{j=1}^{m}(y_j-l_j)^2}<\varepsilon. \end{cases}$$

Por lo tanto, la definición anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

Dada una función $f: A\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $a\in A$ y $L\in\mathbb{R}^m$, decimos que el limite de f cuando x tiende a $\underline{a}$ es L, si para todo $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$ tal que:

$$\text{Si } 0<\|x-a\|<\delta \text{ y } x\in A, \text{ entonces } \|f(x)-L\|<\varepsilon.$$

En este caso escribimos $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x)=L$.

Nota (definición anterior).

El siguiente muestra algunas propiedades elementales de limites de funciones de varias variables. La demostración de este resultado es similar a la prueba dada para funciones continuas y se deja como ejercicio.

Teorema (propiedades de limites de funciones).

Sean $f,g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funciones de varias variables, $a \in ac(A)$ y $L, M \in \mathbb{R}^m$. Si f y g satisfacen que:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longmapsto a} f(x) = L, \\ \\ \lim\limits_{x \longmapsto a} g(x) = M \end{cases}$$

entonces:

(1) La función $rf : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida como $(rf)(x) := rf(x)$ Para cada $x \in A$ satisface que:

$$\lim_{x \longmapsto a} rf(x) = r \lim_{x \longmapsto a} f(x) = rL.$$

(2) La función $f + g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida como $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ para cada $x \in A$ satisface que:

$$\lim_{x \longmapsto a} (f+g)(x) = \lim_{x \longmapsto a} f(x) + \lim_{x \longmapsto a} g(x) = L + M.$$

(3) La función $f - g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida como $(f-g)(x) := f(x) - g(x)$ para cada $x \in A$ satisface que:

$$\lim_{x \longmapsto a} (f-g)(x) = \lim_{x \longmapsto a} f(x) - \lim_{x \longmapsto a} g(x) = L - M.$$

(4) $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x)=L \iff \begin{cases} \text{para toda sucesión } \{x_n\}_{n=1}^{+\infty}\subseteq A-\{a\} \text{ con } \lim\limits_{n\mapsto+\infty} x_n=a, \\ \\ \text{se tiene que } \lim\limits_{n\mapsto+\infty} f(x_n)=L. \end{cases}$

(5) Si $f^1,\ldots,f^m : A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ son funciones tales que $f(x)=(f^1(x),\ldots,f^m(x))$ para cada $x\in A$ y $L=(l_1,\ldots,l_m)$ entonces:

$$\lim_{x\mapsto a} f(x)=L \iff \begin{cases} \text{para cada } \ i\in\{1,\ldots,m\} \text{ se tiene que} \\ \\ \lim\limits_{x\mapsto a} f^i(x)=l_i. \end{cases}$$

(6) Si $f,g : A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ entonces la función $(f\cdot g) : A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ definida como $(f\cdot g)(x):=f(x)\cdot g(x)$ para cada $x\in A$ satisface que:

$$\lim_{x\mapsto a}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\mapsto a} f(x)\cdot\lim_{x\mapsto a} g(x)=L\cdot M.$$

(7) Si $f,g : A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)\neq 0$ para todo $x\in A$ y $M\neq 0$ entonces la función $\dfrac{f}{g} : A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ definida como $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x):=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ para cada $x\in A$ satisface que:

$$\lim_{x\mapsto a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim\limits_{x\mapsto a} f(x)}{\lim\limits_{x\mapsto a} g(x)}=\frac{L}{M}.$$

Ejemplo (limites de funciones).

Hallar los siguientes limites:

(1) $$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^x-1)(e^{2y}-1)}{xy}.$$

(2) $$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{e^{xy}sin(4xy)}{xy}.$$

(3) $$\lim_{(x,y)\mapsto(1,0)} \frac{ln(x)sin(3y)}{xy-y}.$$

(4) $$\lim_{(x,y)\mapsto(1,1)} \frac{x^3-y^3}{x-y}.$$

Solución:

(1) Notemos inicialmente que:

($\checkmark$) $$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^x-1)(e^{2y}-1)}{xy} = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^x-1)}{x}\cdot\frac{(e^{2y}-1)}{y}.$$

($\checkmark$) Si $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^x-1)}{x}$ y $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^{2y}-1)}{y}$ existen entonces:

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^x-1)}{x}\cdot\frac{(e^{2y}-1)}{y} = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^x-1)}{x} \cdot \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^{2y}-1)}{y}.$$

$(\checkmark)$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^x-1)}{x} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{e^x-1}{x} \underset{L'Hôpital}{=} \lim_{x\mapsto 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1.$

$(\checkmark)$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^{2y}-1)}{y} = \lim_{y\mapsto 0} \frac{e^{2y}-1}{y} \underset{L'Hôpital}{=} \lim_{y\mapsto 0} \frac{2e^{2y}}{1} = 2e^0 = 2.$

De esta forma, el anterior análisis implica que:

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^x-1)(e^{2y}-1)}{xy} = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^x-1)}{x} \cdot \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(e^{2y}-1)}{y} = 1\cdot 2 = 2.$$

(2) Para este literal empecemos observando las siguientes cosas:

$(\checkmark)$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{e^{xy}\sin(4xy)}{xy} = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} e^{xy} \cdot \frac{\sin(4xy)}{xy}.$

$(\checkmark)$ Si $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} e^{xy}$ y $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{\sin(4xy)}{xy}$ existen, entonces:

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{e^{xy}\sin(4xy)}{xy} = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} e^{xy} \cdot \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{\sin(4xy)}{xy}.$$

$(\checkmark)$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} e^{xy} = e^{0\cdot 0} = e^0 = 1$, ya que la función $f(x,y) = e^{xy}$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

$(\checkmark)$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{sin(4xy)}{xy} = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} 4\, \frac{sin(4xy)}{4xy} = 4 \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{sin(4xy)}{4xy}$. Además, es tenemos que:

$$\begin{cases} (x,y)\mapsto(0,0) \;\Rightarrow\; u = 4xy \mapsto 0, \\ \\ \displaystyle\lim_{u\mapsto 0} \frac{sin(u)}{u} = 1. \end{cases}$$

De esta manera, tenemos que:

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{sin(4xy)}{4xy} = \lim_{u\mapsto 0} \frac{sin(u)}{u} = 1, \\ \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{sin(4xy)}{xy} = 4 \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{sin(4xy)}{4xy} = 4. \end{cases}$$

$(\checkmark)$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{e^{xy} sin(4xy)}{xy} = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} e^{xy} \cdot \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{sin(4xy)}{xy} = 1\cdot 4 = 4.$

Por lo tanto concluimos que:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{e^{xy} sin(4xy)}{xy} = 4.}$$

(3) Para estudiar el comportamiento de este limite, veamos las siguientes cosas:

(✓) $$\lim_{(x,y)\mapsto(1,0)} \frac{ln(x)sin(3y)}{xy-y} = \lim_{(x,y)\mapsto(1,0)} \frac{ln(x)sin(3y)}{(x-1)y}.$$

(✓) $$\lim_{(u,y)\mapsto(0,0)} \frac{ln(u+1)}{u} = \lim_{u\mapsto 0} \frac{ln(u+1)}{u} \underset{L'Hôpital}{=} \lim_{u\mapsto 0} \frac{\frac{1}{u+1}}{1} = \frac{1}{0+1} = 1.$$

(✓) $$\lim_{(u,y)\mapsto(0,0)} \frac{sin(3y)}{y} = \lim_{y\mapsto 0} \frac{sin(3y)}{y} \underset{L'Hôpital}{=} \lim_{y\mapsto 0} \frac{3cos(3y)}{1} = 3(1) = 3.$$

(✓) Haciendo el cambio de variable $u = x-1$, tenemos que:

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(1,0)} \frac{ln(x)sin(3y)}{(x-1)y} = \lim_{(u,y)\mapsto(0,0)} \frac{ln(u+1)sin(3y)}{uy} = \\ \displaystyle = \lim_{(u,y)\mapsto(0,0)} \frac{ln(u+1)}{u} \cdot \frac{sin(3y)}{y} = \lim_{(u,y)\mapsto(0,0)} \frac{ln(u+1)}{u} \cdot \lim_{(u,y)\mapsto(0,0)} \frac{sin(3y)}{y} = 1 \cdot 3 = 3. \end{cases}$$

De esta manera concluimos que:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\mapsto(1,0)} \frac{ln(x)sin(3y)}{xy-y} = 3.}$$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(1,1)} \dfrac{x^3-y^3}{x-y} = \lim\limits_{(x,y)\mapsto(1,1)} \dfrac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x-y} = \lim\limits_{(x,y)\mapsto(1,1)} x^2+xy+y^2 = 3.$

Nota (otras técnicas para encontrar limites).

En algunas ocasiones no podremos encontrar el limite de una función de varias variables por medio de manipulaciones algebraicas y propiedades de funciones continuas. Para este tipo de limites usaremos otras técnicas para garantizar su existencia, como por ejemplo *trayectorias* ó algún tipo de *cambio de variable en el limite* (como por ejemplo cambio de variable a coordenadas polares ó cambio de variable a coordenadas esféricas). Por este motivo, empezamos describiendo estos conceptos.

Definición (trayectorias en $\mathbb{R}^n$).

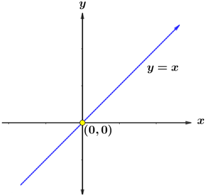
Sean $a\in\mathbb{R}^n$ y $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Decimos que un subconjunto T de $\mathbb{R}^n$ es una trayectoria en A sobre el punto a, si:

$$\boxed{\text{Existe una sucesión } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (T\cap A)-\{a\} \text{ tal que } \lim_{n\mapsto\infty} x_n = a.}$$

Ejemplo (trayectorias).

La recta $y = x$ es una trayectoria sobre el punto $(0,0)$. Más precisamente esta trayectoria se describe algebraicamente como:

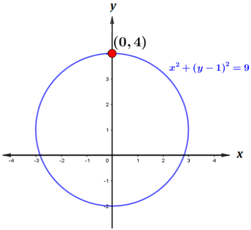
$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\} = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}.$$



Ejemplo (trayectorias).

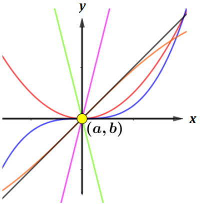
La circunferencia $x^2 + (y-1)^2 = 9$ es una trayectoria sobre el punto $(0,4)$. Más precisamente esta trayectoria se describe algebraicamente como:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 = 9\}.$$



Observación (trayectorias en $\mathbb{R}^n$).

Cabe resaltar que dado un punto $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, existen infinitas trayectorias en $\mathbb{R}^2$ que pasan por este punto.



Lo mismo sucede para cualquier punto $x_0\in\mathbb{R}^n$ con $n\geq 2$.

Definición (trayectorias y limites).

Sean $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una función de varias variables, $T\subseteq\mathbb{R}^n$ y $x_0\in ac(T)$. Si T es una trayectoria en A sobre x_0 y $L\in\mathbb{R}$, entonces decimos que el limite cuando x tiende a x_0 de f sobre T es L, si para todo $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$ tal que:

$$\boxed{\text{Si } \begin{cases} 0<\|x-x_0\|<\delta \\ x\in T \end{cases} \quad \text{entonces} \quad |f(x)-L|<\varepsilon}$$

En este caso escribimos $\lim\limits_{\substack{x\longmapsto x_0\\ x\in T}} f(x)=L$.

Ejemplo (trayectorias y limites).

Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{Si} \quad (x,y)\neq(0,0),\\[2ex] 0 & \text{Si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

entonces:

(1) Hallar $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} f(x,y)$.

(2) Hallar $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=0}} f(x,y)$.

(3) Hallar $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} f(x,y)$.

Solución:

(1) $$\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} \frac{xx}{x^2+x^2}=\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2}{x^2+x^2}=$$
$$=\lim_{x\mapsto 0}\frac{x^2}{2x^2}=\lim_{x\mapsto 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \frac{1}{2}.}$$

$$(2)\quad \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=0}} \frac{x\,0}{x^2+0^2} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x\mapsto 0} 0 = 0.$$

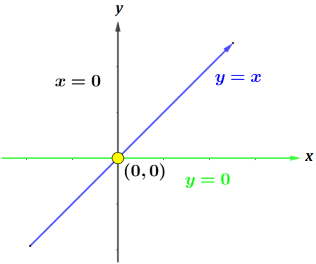
$$\boxed{\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = 0.}$$

$$(3)\quad \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} \frac{0y}{0^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\mapsto 0} 0 = 0.$$

$$\boxed{\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = 0.}$$

Observación (ejemplos anteriores).

Es importante notar que en cada una de estas trayectorias pasa por el punto (0,0).



Para ser más preciso, es importante recordar que $\lim\limits_{\substack{x \mapsto x_0 \\ x \in T}} f(x)$ solo tiene sentido, si "*nos podemos acercar a x_0 por medio de puntos sobre T*", para luego mirar el comportamiento de f en estos puntos. Por ejemplo, no tendría sentido escribir $\lim\limits_{\substack{(x,y) \mapsto (0,0) \\ y = x+1}} f(x,y)$, ya que mediante la trayectoria $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x+1\}$ no nos podemos acercar al punto (0,0).

Nota (siguiente teorema).

El siguiente teorema nos muestra la relación entre la existencia de un limite y los limites usando trayectorias.

Teorema (relación entre limites y trayectorias).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, $x_0 \in ac(A)$ y $L \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\boxed{\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = L} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c}\text{Para toda trayectoria } T \text{ en } A \text{ sobre } x_0\text{, se tiene que} \\ \displaystyle\lim_{\substack{x \mapsto x_0 \\ x \in T}} f(x) = L\end{array}}$$

Demostración:

Esto se debe a que la continuidad de una función en un punto es equivalente a continuidad por sucesiones.

■

Corolario (relación entre limites y trayectorias).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in ac(A)$. Si T_1 y T_2 son trayectorias en A sobre x_0 tales que:

$$\boxed{\lim_{\substack{x \mapsto x_0 \\ x \in T_1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \mapsto x_0 \\ x \in T_2}} f(x)}$$

entonces $\lim_{x \mapsto x_0} f(x)$ no existe.

Demostración:

Se sigue inmediatamente del teorema previo

■

Ejemplo (aplicación corolario anterior).

Verificar que los siguientes limites no existen usando trayectorias adecuadas:

(1) $\displaystyle \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

(2) $\displaystyle \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4+y^2}$.

(3) $\displaystyle \lim_{(x,y)\mapsto(1,0)} \frac{y^2 ln(x)}{2(x-1)^3-y^3}$.

(4) $\displaystyle \lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)} \frac{e^{xyz}-y^3-1}{x^2+y^2+(z-1)^2}$.

Solución:

La idea de este ejemplo es tratar de encontrar trayectorias distintas que tengan limites correspondientes diferentes, para así aplicar el corolario anterior. De esta forma tenemos que:

(1) Consideremos las trayectorias $x=0$ y $y=x$, entonces:

(✓) $\displaystyle \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} \frac{0y}{0^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\mapsto0} 0 = 0.$

(✓) $\displaystyle \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} \frac{xx}{x^2+x^2} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\mapsto0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\mapsto0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

De esto tenemos que $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ no existe.

(2) Consideremos las trayectorias $x=0$ y $y=x^2$, entonces:

$$(\checkmark) \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2y}{2x^4+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} \frac{0^2y}{2(0)^4+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=0}} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\mapsto 0} 0 = 0.$$

$$(\checkmark) \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^2y}{2x^4+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^2x^2}{2x^4+(x^2)^2} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^4}{2x^4+x^4} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{x^4}{3x^4} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

De esto tenemos que $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} \dfrac{x^2y}{2x^4+y^2}$ no existe.

(3) Consideremos las trayectorias $x=1$ y $y=x-1$, entonces:

$$(\checkmark) \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(1,0)\\ x=1}} \frac{y^2\, ln(x)}{2(x-1)^3-y^3} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(1,0)\\ x=1}} \frac{y^2\, ln(1)}{2(1-1)^3-y^3} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(1,0)\\ x=1}} \frac{0}{-y^3} = \lim_{y\mapsto 0} 0 = 0.$$

(✓)

$$\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(1,0)\\ y=x-1}} \frac{y^2\, ln(x)}{2(x-1)^3-y^3} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(1,0)\\ y=x-1}} \frac{(x-1)^2\, ln(x)}{2(x-1)^3-(x-1)^3} = \lim_{\substack{(x,y)\mapsto(1,0)\\ y=x-1}} \frac{(x-1)^2\, ln(x)}{(x-1)^3} = \lim_{x\mapsto 1} \frac{ln(x)}{x-1}$$

$$\underset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\mapsto 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1.$$

De esto tenemos que $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(1,0)} \dfrac{y^2 \ln(x)}{2(x-1)^3 - y^3}$ no existe.

(4) Consideremos las trayectorias T_1 y T_2 dadas por:

$$\begin{cases} T_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=0\}, \\ T_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y,\ z=1\} \end{cases}$$

entonces

$$(\checkmark) \lim_{\substack{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)\\ (x,y,z)\in T_1}} \frac{e^{xyz}-y^3-1}{x^2+y^2+(z-1)^2} = \lim_{\substack{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)\\ y=0}} \frac{e^{xyz}-y^3-1}{x^2+y^2+(z-1)^2} =$$

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)\\ y=0}} \frac{e^{x0z}-0^3-1}{x^2+0^2+(z-1)^2} = \lim_{\substack{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)\\ y=0}} \frac{1-0-1}{x^2+(z-1)^2} = 0.$$

$$(\checkmark) \lim_{\substack{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)\\ (x,y,z)\in T_2}} \frac{e^{xyz}-y^3-1}{x^2+y^2+(z-1)^2} = \lim_{\substack{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)\\ x=y,\ z=1}} \frac{e^{xyz}-y^3-1}{x^2+y^2+(z-1)^2} =$$

$$= \lim_{\substack{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)\\ x=y,\ z=1}} \frac{e^{x(x)(1)}-x^3-1}{x^2+x^2+(1-1)^2} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{e^{x^2}-1}{2x^2} - \lim_{x\mapsto 0} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{e^{x^2}-1}{2x^2} - \lim_{x\mapsto 0} \frac{x}{2} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{e^{x^2}-1}{2x^2} - 0$$

$$= \lim_{x\mapsto 0} \frac{e^{x^2}-1}{2x^2} \underset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\mapsto 0} \frac{2xe^{x^2}}{4x} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{e^{x^2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

De esto tenemos que $\lim\limits_{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)} \dfrac{e^{xyz}-y^3-1}{x^2+y^2+(z-1)^2}$ no existe.

Nota (ejemplos anteriores).

Hay que tener presente que es posible encontrar funciones de varias variables, tales que los limites sobre infinitas trayectorias coinciden, pero el limite podría no existir. Por este motivo, hay que tener mucho cuidado con el uso de las trayectorias para determinar la existencia de un limite. Para entender esto un poco mejor, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo (limites y trayectorias).

Sea $f(x,y) = \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$, entonces:

(1) Verificar que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = 0$, donde m es un numero real cualquiera.

(2) Mostrar que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=y^2}} f(x,y) = \dfrac{1}{8}$.

(3) Demostrar que $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y)$ no existe.

Solución:

(1) $$\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}=\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^4(mx)^4}{(x^2+(mx)^4)^3}=\lim_{x\mapsto 0} \frac{m^4x^8}{(x^2+m^4x^4)^3}=$$

$$=\lim_{x\mapsto 0} \frac{m^4x^8}{(x^2(1+m^4x^2)\ )^3}=\lim_{x\mapsto 0} \frac{m^4x^8}{x^6(1+m^4x^2\ )^3}=\lim_{x\mapsto 0} \frac{m^4x^2}{(1+m^4x^2\ )^3}=\frac{m^4(0)^2}{(1+m^4(0)^2\ )^3}=\frac{0}{1}=0.$$

(2) $$\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=y^2}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=y^2}} \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}=\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ x=y^2}} \frac{(y^2)^4y^4}{(\ (y^2)^2+y^4)^3}=\lim_{y\mapsto 0} \frac{y^{12}}{2^3y^{12}}=\frac{1}{8}.$$

(3) El limite no existe ya que existen trayectorias distintas con limites diferentes (aquí usamos los literales (1) y (2)).

Observación (trayectoria y limites).

Es posible encontrar funciones de varias variables, tales que el limite sobre cualquier trayectoria que "imaginemos" sobre un punto dado exista y de como resultado el mismo número real. En este caso, es natural pensar que el limite debe de existir y para probar que el limite de una función de varias variables existe, es necesario simplificar o usar alguna de las propiedades ya obtenidas o usar la definición de limite. Tratemos de entender esta situación con el siguiente ejemplo.

Ejemplo (limites y trayectorias).

Sea $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$, entonces:

(1) Verificar que $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=0$, donde m es una constante cualquiera.

(2) Verificar que $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x^n}} f(x,y)=0$, donde $n\geq 1$.

Solución:

(1) $$\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2(mx)^2}{x^2+(mx)^2}=\lim_{x\mapsto 0}\frac{m^2x^4}{x^2(1+m^2)}=$$

$$=\frac{m^2}{1+m^2}\lim_{x\mapsto 0} x^2=\lim_{x\mapsto 0}\frac{m^2x^4}{x^2(1+m^2)}=\frac{m^2}{1+m^2}\lim_{x\mapsto 0} 0=0.$$

(2) $$\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x^n}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x^n}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\ y=x^n}} \frac{x^2(x^n)^2}{x^2+(x^n)^2}=\lim_{x\mapsto 0}\frac{x^2x^{2n}}{x^2(1+x^{2n-2})}=$$

$$=\lim_{x\mapsto 0}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n-2}}=\frac{0}{1+0}=0.$$

De lo anterior tenemos que el limite de f por diferentes tipos de trayectoria sobre el punto $(0,0)$ existen y su valor correspondiente es cero. Adicionalmente, el lector puede notar que cualquier otra trayectoria que use sobre $(0,0)$, tendrá como limite cero.

Observación (trayectorias y limites).

De los dos ejemplos previos, surge una pregunta natural, la cual es:

> ¿Cómo probar la existencia de el limite de una función sin usar la definición original de limite?

Algunas posibles soluciones a esta pregunta, están dadas en los siguientes teoremas.

Teorema (cambio de variable a coordenadas polares para el limite).

Supongamos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que satisface las siguientes condiciones:

($\checkmark$) $A = B^*((0,0),k)$ para algún $k > 0$.

($\checkmark$) Existen funciones reales de una variable g y h tales que para todo $r > 0$ y $\theta \in [0,2\pi]$ se tiene que:

$$f(rcos(\theta), rsin(\theta)) = g(r) \cdot h(\theta).$$

($\checkmark$) Las funciones g y h satisfacen que:

$$\begin{cases} h \text{ es una función acotada,} \\ \lim\limits_{r \longmapsto 0^+} g(r) = 0 \end{cases}$$

entonces $\lim\limits_{(x,y) \longmapsto (0,0)} f(x,y) = 0$ y para cada $\theta \in [0,2\pi]$ se tiene que $\lim\limits_{r \longmapsto 0^+} f(rcos(\theta), rsin(\theta)) = 0$.

Demostración:

(1) Vamos a probar que $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y)=0$ usando la definición original de limite. Para esto, entonces notaremos las siguientes cosas:

(✓) Debido a que h es acotada, entonces existe $M>0$ tal que para todo $\theta\in[0,2\pi]$ se tiene que

$$|h(\theta)|\le M.$$

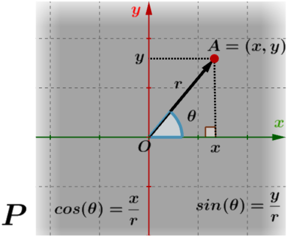
(✓) Como $\lim\limits_{r\mapsto 0^+} g(r)=0$, entonces dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que para todo $0<r<\delta$, se tiene que

$$|g(r)|<\frac{\varepsilon}{M}.$$

(✓) Sea $\varepsilon>0$, entonces si $0<\|(x,y)-(0,0)\|=\|(x,y)\|<\delta$, entonces al tomar a r y θ como:

$$r=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\theta=\begin{cases} tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{Si } y\ge 0,\ x>0,\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{Si} y>0,\ x=0,\\ \pi+tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{Si } y\neq 0,\ x<0,\\ \dfrac{3\pi}{2} & \text{Si } y<0,\ x=0,\\ 2\pi+tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{Si } y\le 0,\ x<0.\end{cases}$$



Se tiene que $r > 0$ y además que $x = rcos(\theta)$ y $y = rsin(\theta)$ (se deja esto para verificar como ejercicio). De donde, tenemos que:

$$\boxed{|f(x,y)| = |f(rcos(\theta), rsin(\theta))| = |g(r)\cdot h(\theta)| = |g(r)\cdot h(\theta)| = |g(r)|\cdot|h(\theta)| < \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)\cdot M = \varepsilon.}$$

De esta manera, hemos probado que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \| (x,y)-(0,0)\| < \delta$, entonces $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$, pero esto significa precisamente que $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y) = 0$.

(2) Se deja como ejercicio al lector probar que para cada $\theta \in [0, 2\pi]$ se tiene que $\lim\limits_{r\mapsto 0^+} f(rcos(\theta), rsin(\theta)) = 0$.

■

Corolario (cambio de variable a coordenadas polares para el limite).

Supongamos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función y $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ satisfacen las siguientes condiciones:

($\checkmark$) $A = B^*((a,b),k)$ para algún $k > 0$.

($\checkmark$) Existen funciones reales de una variable g y h y un número real L tales que para todo $r > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi]$ se tiene que:

$$f(a + rcos(\theta), b + rsin(\theta)) = g(r)\cdot h(\theta) + L.$$

($\checkmark$) Las funciones g y h satisfacen que:

$$\begin{cases} h \text{ es una función acotada,} \\ \lim\limits_{r \mapsto 0^+} g(r) = 0 \end{cases}$$

entonces $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(x,y) = L$ y además para cada $\theta \in [0,2\pi]$ se tiene que $\lim\limits_{r\mapsto 0^+} f(a+rcos(\theta), b+rsin(\theta)) = L$.

Demostración:

(1) Empezaremos probando que $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(x,y) = L$. Para probar esto, consideremos la función $J : B^*((0,0),k) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$J(x,y) = f(a+x, b+y) - L$$

para todo $(x,y) \in B^*((0,0),k)$. Entonces es fácil ver que J satisface las condiciones del teorema anterior y por tanto, tenemos que $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} J(x,y) = 0$. Además, de este resultado, podemos inferir las siguientes observaciones:

($\checkmark$) $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} J(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(a+x,b+y) - L = \left[\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(a+x,b+y)\right] - L = 0.$

($\checkmark$) $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(a+x,b+y) = \lim\limits_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(x,y).$

($\checkmark$) $\left[\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(a+x,b+y)\right] - L = \left[\lim\limits_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(x,y)\right] - L = 0.$

De esta manera, dado que $\left[\lim_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(x,y)\right] - L = 0$, entonces esto implica que

$$\lim_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(x,y) = L.$$

(2) Se deja como ejercicio al lector probar que para cada $\theta \in [0,2\pi]$ se tiene que $\lim_{r\mapsto 0^+} f(a + rcos(\theta), b + rsin(\theta)) = L$.

■

Teorema (cambio de variable a coordenadas polares para el limite).

Supongamos que $f : B^*((a,b),k) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función con $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ y $k > 0$, la cual satisface alguna de las siguientes propiedades:

(1) Existen $\theta_1, \theta_2 \in [0,2\pi]$ y $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{cases} \lim_{r\mapsto 0^+} f(a + rcos(\theta_1), b + rsin(\theta_1)) = L_1, \\ \\ \lim_{r\mapsto 0^+} f(a + rcos(\theta_2), b + rsin(\theta_2)) = L_2, \\ \\ L_1 \neq L_2. \end{cases}$$

(2) Existe $\theta_1 \in [0,2\pi]$ tal que $\lim_{r\mapsto 0^+} f(a + rcos(\theta_1), b + rsin(\theta_1))$ no existe.

Entonces $\lim_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(x,y)$ no existe.

Demostración:

(1) Empezaremos probando que si el literal (1) se cumple, entonces $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(x,y)$ no existe.

Para esto, consideremos las trayectorias T_1 y T_2 en $\mathbb{R}^2$ sobre el punto (a,b) dadas por:

$$\begin{cases} T_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x = a + r\cos(\theta_1), y = b + r\sin(\theta_1), r \geq 0\}, \\ \\ T_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x = a + r\cos(\theta_2), y = b + r\sin(\theta_2), r \geq 0\} \end{cases}$$

Entonces T_1 y T_2 satisfacen lo siguiente

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(a,b)\\ (x,y)\in T_1}} f(x,y) = \lim\limits_{r\mapsto 0^+} f(a + r\cos(\theta_1), b + r\sin(\theta_1)) = L_1, \\ \\ \lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(a,b)\\ (x,y)\in T_2}} f(x,y) = \lim\limits_{r\mapsto 0^+} f(a + r\cos(\theta_2), b + r\sin(\theta_2)) = L_2. \end{cases}$$

De donde, debido a que $L_1 \neq L_2$ concluimos que

$$\lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(a,b)\\ (x,y)\in T_1}} f(x,y) \neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\mapsto(a,b)\\ (x,y)\in T_2}} f(x,y),$$

y por un teorema anterior, podemos concluir que $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(x,y)$ no existe.

(2) Es similar a (1) y se deja de ejercicio al lector.

$\blacksquare$

Ejemplo (cambio de variable coordenadas polares).

Verificar si los siguientes limites existen usando coordenadas polares.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}.$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^3+2x^2+xy^2+2y^2}{x^2+y^2}.$

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(4,5)} \frac{(x-4)^3\ (y-5)^2}{(x-4)^2+(y-5)^2}.$

Solución:

(1) Si $f(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$, entonces:

$$f(rcos(\theta),rsin(\theta))=\frac{(rcos\theta)^3-(rsin\theta)^3}{r^2}=\frac{(cos^3\theta-sin^3\theta)r^3}{r^2}=r(cos^3(\theta)-sin^3(\theta))$$

lo cual implica que $f(rcos(\theta),rsin(\theta))=g(r)\cdot h(\theta)$ con $g(r)=r$ y $h(\theta)=cos^3(\theta)-sin^3(\theta)$, y además:

- ⋆ La función $g(r)=r$ satisface que $\displaystyle\lim_{r\mapsto0^+} g(r)=\lim_{r\mapsto0^+} r=0.$

⋆ La función $h(\theta) = cos^3(\theta) - sin^3(\theta)$ es acotada (ejercicio).

Por lo tanto, el teorema anterior nos dice que $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0$.

(2) Si $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, entonces:

(✓) $f(rcos(\theta), rsin(\theta)) = \dfrac{(rcos\theta)(rsin\theta)}{r^2} = \dfrac{r^2 cos(\theta) sin(\theta)}{r^2} = cos(\theta) sin(\theta)$.

(✓) Si tomamos $\theta = 0$, tenemos que $f(rcos(0), rsin(0)) = cos(0) sin(0) = 0$ y además:

$$\lim_{r\mapsto 0^+} f(rcos(0), rsin(0)) = \lim_{r\mapsto 0^+} 0 = 0.$$

(✓) Si tomamos $\theta = \frac{\pi}{4}$, tenemos que $f\left(rcos\left(\frac{\pi}{4}\right), rsin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$ y además:

$$\lim_{r\mapsto 0^+} f\left(rcos\left(\frac{\pi}{4}\right), rsin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \lim_{r\mapsto 0^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

De esta forma, por el teorema previo concluimos que $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ no existe, ya que $\lim\limits_{r\mapsto 0^+} f(rcos(0), rsin(0)) \neq \lim\limits_{r\mapsto 0^+} f\left(rcos\left(\frac{\pi}{4}\right), rsin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

(3) Si $f(x,y)=\dfrac{x^3+2x^2+xy^2+2y^2}{x^2+y^2}$, entonces:

(✓) $f(rcos(\theta),rsin(\theta))=\dfrac{(rcos\theta)^3+2(rcos\theta)^2+(rcos\theta)(rsin\theta)^2+2(rsin\theta)^2}{r^2}=$

$=\dfrac{r^2\left(rcos^3\theta+2cos^2\theta+rcos\theta\, sin^2\theta+2sin^2\theta\right)}{r^2}=rcos^3\theta+2cos^2\theta+rcos\theta\, sin^2\theta+2sin^2\theta=$

$=r(cos^3\theta+cos\theta\, sin^2\theta)+2.$

Lo anterior implica que $f(rcos(\theta),rsin(\theta))=g(r)\cdot h(\theta)+2$ con $h(\theta)=cos^3(\theta)+cos(\theta)sin^2(\theta)$ y $g(r)=r$; y además:

- ⋆ La función $g(r)=r$ satisface que $\lim\limits_{r\mapsto 0^+} g(r)=\lim\limits_{r\mapsto 0^+} r=0$.
- ⋆ La función $h(\theta)=cos^3(\theta)+cos(\theta)sin^2(\theta)$ es acotada (ejercicio).

Por lo tanto, un teorema previo nos dice que

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^3+2x^2+xy^2+2y^2}{x^2+y^2}=2.$$

(4) Sea $f(x,y)=\dfrac{(x-4)^3\ (y-5)^2}{(x-4)^2+(y-5)^2}$, entonces:

(✓) $f(4+rcos(\theta),5+rsin(\theta))=\dfrac{(rcos\theta)^3(rsin\theta)^2}{r^2cos^2\theta+r^2sin^2\theta}=\dfrac{r^5cos^3\theta\, sin^2\theta}{r^2}=r^3cos^3\theta\, sin^2\theta.$

Lo anterior implica que $f(4+rcos(\theta),5+rsin(\theta))=g(r)\cdot h(\theta)$ con $h(\theta)=cos^3\theta\, sin^2\theta$ y $g(r)=r^3$; y además:

⋆ La función $g(r)=r^3$ satisface que $\lim\limits_{r\mapsto 0^+} g(r)=\lim\limits_{r\mapsto 0^+} r^3=0$.

⋆ La función $h(\theta)=cos^3(\theta)sin^2(\theta)$ es acotada (ejercicio).

De esta manera, concluimos que $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} \dfrac{(x-4)^3\ (y-5)^2}{(x-4)^2+(y-5)^2}=0$, ya que f satisface las hipótesis de un teorema previo.

Teorema (cambio de variable a coordenadas esféricas para el limite).

Supongamos que $f: A\subseteq\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que satisface las siguientes condiciones:

(✓) $A=B^*((0,0,0),k)$ para algún $k>0$.

(✓) Existen funciones reales $g(\rho)$, $h(\phi,\theta)$ y un número real L tales que para todo $\rho>0$, $\theta\in[0,2\pi]$ y $\phi\in[0,\pi]$ se tiene que:

$$f(\rho cos(\theta)sin(\phi),\rho sin(\theta)sin(\phi),\rho cos(\phi))=g(\rho)\cdot h(\phi,\theta).$$

(✓) Las funciones g y h satisfacen que:

$$\begin{cases} h \text{ es una función acotada,} \\ \lim\limits_{\rho\mapsto 0^+} g(\rho)=0 \end{cases}$$

entonces $\lim\limits_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} f(x,y,z)=0$ y para cada $\theta\in[0,2\pi]$ y cada $\phi\in[0,\phi]$ se tiene que $\lim\limits_{\rho\mapsto 0^+} f(\rho cos(\theta)sin(\phi),\rho sin(\theta)sin(\phi),\rho cos(\phi))=0$.

Corolario (cambio de variable a coordenadas esféricas para el limite).

Supongamos que $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que satisface las siguientes condiciones:

($\checkmark$) $A = B^*((a,b,c),k)$ para algún $k > 0$.

($\checkmark$) Existen funciones reales $g(\rho)$, $h(\phi,\theta)$ y un número real L, tales que para todo $\rho > 0$, $\theta \in [0,2\pi]$ y $\phi \in [0,\pi]$ se tiene que:

$$f(a+\rho cos(\theta)sin(\phi), b+\rho sin(\theta)sin(\phi), c+\rho cos(\phi)) = g(\rho)\cdot h(\phi,\theta) + L.$$

($\checkmark$) Las funciones g y h satisfacen que:

$$\begin{cases} h \text{ es una función acotada,} \\ \lim\limits_{\rho \mapsto 0^+} g(\rho) = 0 \end{cases}$$

entonces $\lim\limits_{(x,y,z)\mapsto(a,b,c)} f(x,y,z) = L$ y para cada $\theta \in [0,2\pi]$ y cada $\phi \in [0,\phi]$ se tiene que $\lim\limits_{\rho \mapsto 0^+} f(a+\rho cos(\theta)sin(\phi), b+\rho sin(\theta)sin(\phi), c+\rho cos(\phi)) = L.$

Demostración:

La prueba de estos dos resultados son bastante parecidas a las hechas anteriormente para coordenadas polares, por ese motivo dejamos como ejercicio al lector la prueba de estos resultados.

■

Teorema (cambio de variable a coordenadas esféricas para el limite).

Supongamos que $f : B^*((a,b,c),k) \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función con $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ y $k > 0$, la cual satisface alguna de las siguientes propiedades:

(1) Existen $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$, $\phi_1, \phi_2 \in [0, \pi]$ y $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\rho \mapsto 0^+} f(a + \rho\, cos\theta_1 sin\phi_1, b + \rho\, sin\theta_1 sin\phi_1, c + \rho\, cos\phi_1) = L_1, \\ \\ \lim\limits_{r \mapsto 0^+} f(a + \rho\, cos\theta_2 sin\phi_2, b + \rho\, sin\theta_2 sin\phi_2, c + \rho\, cos\phi_2) = L_2, \\ \\ L_1 \neq L_2. \end{cases}$$

(2) Existen $\theta_1 \in [0, 2\pi]$ y $\phi_1 \in [0, \pi]$ tal que $\lim\limits_{\rho \mapsto 0^+} f(a + \rho\, cos\theta_1 sin\phi_1, b + \rho\, sin\theta_1 sin\phi_1, c + \rho\, cos\phi_1)$ no existe.

Entonces $\lim\limits_{(x,y,z) \mapsto (a,b,c)} f(x, y, c)$ no existe.

Demostración:

(1) Empezaremos probando que si el literal (1) se cumple, entonces $\lim\limits_{(x,y) \mapsto (a,b,c)} f(x, y, z)$ no existe. Para esto, consideremos las trayectorias T_1 y T_2 en $\mathbb{R}^3$ sobre el punto (a, b, c) dadas por:

$$\begin{cases} T_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = a + \rho cos\theta_1 sin\phi_1, y = b + \rho sin\theta_1 sin\phi_1, z = c + \rho cos\phi_1,\ \rho \geq 0\}, \\ \\ T_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = a + \rho cos\theta_2 sin\phi_2, y = b + \rho sin\theta_2 sin\phi_2, z = c + \rho cos\phi_2,\ \rho \geq 0\} \end{cases}$$

Entonces T_1 y T_2 satisfacen lo siguiente

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{(x,y,z) \mapsto (a,b,c) \\ (x,y,z) \in T_1}} f(x,y,z) = \lim\limits_{\rho \mapsto 0^+} f(a + \rho cos\theta_1 sin\phi_1, b + \rho sin\theta_1 sin\phi_1, c + \rho cos\phi_1) = L_1, \\ \\ \lim\limits_{\substack{(x,y,z) \mapsto (a,b,c) \\ (x,y,z) \in T_2}} f(x,y,z) = \lim\limits_{r \mapsto 0^+} f(a + \rho cos\theta_2 sin\phi_2, b + \rho sin\theta_2 sin\phi_2, c + \rho cos\phi_2) = L_2. \end{cases}$$

De donde, debido a que $L_1 \neq L_2$ concluimos que

$$\lim_{\substack{(x,y,z) \mapsto (a,b,c) \\ (x,y,z) \in T_1}} f(x,y,z) \neq \lim_{\substack{(x,y,z) \mapsto (a,b,c) \\ (x,y,z) \in T_2}} f(x,y,z),$$

y por un teorema anterior, podemos concluir que $\lim\limits_{(x,y,z) \mapsto (a,b,c)} f(x,y,z)$ no existe.

(2) Es similar a (1) y se deja de ejercicio al lector.

■

Ejemplo (cambio de variable coordenadas esféricas).

Verificar si los siguientes limites existen usando coordenadas esféricas.

(1) $\lim\limits_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2+z^2}$.

(2) $\lim\limits_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

(3) $\lim\limits_{(x,y,z)\mapsto(0,0,1)} \dfrac{x^2y(z-1)^2}{(x^2+y^2+(z-1)^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Solución:

(1) Si $f(x,y,z)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2+z^2}$, entonces:

($\checkmark$) $f(\rho\cos\theta\sin\phi,\rho\sin\theta\sin\phi,\rho\cos\phi)=\dfrac{(\rho\cos\theta\sin\phi)(\rho\sin\theta\sin\phi)^2}{\rho^2}=\dfrac{\rho^3\cos\theta\sin^2\theta\sin^3\phi}{\rho^2}=$

$=\rho\cos\theta\sin^2\theta\sin^3\phi$.

Lo anterior implica que $f(\rho\cos\theta\sin\phi,\rho\sin\theta\sin\phi,\rho\cos\phi)=g(\rho)\cdot h(\phi,\theta)$ con $g(r)=\rho$ y $h(\phi,\theta)=\cos\theta\sin^2\theta\sin^3\phi$; y además:

- La función $g(\rho)=\rho$ satisface que $\lim\limits_{\rho\mapsto 0^+} g(\rho)=\lim\limits_{\rho\mapsto 0^+}\rho=0$.

$\star$ La función $h(\phi,\theta) = cos\theta sin^2\theta sin^3\phi$ es acotada (ejercicio).

Así, concluimos que $\lim\limits_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim\limits_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2+z^2} = 0$, ya que f satisface las condiciones del teorema anterior.

(2) Si $f(x,y,z) = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, entonces:

($\checkmark$) $f(\rho cos\theta sin\phi, \rho sin\theta sin\phi, \rho cos\phi) = \dfrac{\rho cos\theta sin\phi + \rho sin\theta sin\phi}{\sqrt{\rho^2}} = cos\theta sin\phi + sin\theta sin\phi$.

($\checkmark$) Si tomamos $\theta_1 = 0$ y $\phi_1 = 0$, entonces:

$$\begin{cases} f(\rho cos(0)sin(0), \rho sin(0)sin(0), \rho cos(0)) = cos(0)sin(0) + sin(0)sin(0) = 0, \\ \\ \lim\limits_{\rho\mapsto 0^+} f(\rho cos(0)sin(0), \rho sin(0)sin(0), \rho cos(0)) = \lim\limits_{\rho\mapsto 0^+} 0 = 0. \end{cases}$$

($\checkmark$) Si tomamos $\theta_2 = \dfrac{\pi}{4}$ y $\phi_2 = \dfrac{\pi}{4}$, entonces:

$$\begin{cases} f\left(\rho cos\left(\frac{\pi}{4}\right) sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \rho sin\left(\frac{\pi}{4}\right) sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \rho cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + sin\left(\frac{\pi}{4}\right) sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \\ \lim\limits_{\rho\mapsto 0^+} f\left(\rho cos\left(\frac{\pi}{4}\right) sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \rho sin\left(\frac{\pi}{4}\right) sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \rho cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \lim\limits_{\rho\mapsto 0^+} 1 = 1. \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que $\lim\limits_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim\limits_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ no existe, ya que

$$\begin{cases} \lim\limits_{\rho\mapsto 0^+} f(\rho\, cos(0) sin(0), \rho\, sin(0) sin(0), \rho\, cos(0)) \neq \\ \\ \lim\limits_{\rho\mapsto 0^+} f\left(\rho\, cos\left(\frac{\pi}{4}\right) sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \rho\, sin\left(\frac{\pi}{4}\right) sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \rho\, cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right). \end{cases}$$

(3) Si $f(x,y,z) = \dfrac{x^2yz^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, entonces:

(✓) $f(\rho\, cos\theta\, sin\phi, \rho\, sin\theta\, sin\phi, \rho\, cos\phi) = \dfrac{(\rho\, cos\theta\, sin\phi)^2(\rho\, sin\theta\, sin\phi)(\rho\, cos\phi)^2}{\rho^3} =$

$= \dfrac{\rho^5 cos^2\theta\, sin\theta\, sin^3\phi\, cos^2\phi}{\rho^3} = \rho^2 cos^2\theta\, sin\theta\, sin^3\phi\, cos^2\phi.$

Lo anterior implica que $f(\rho\, cos\theta\, sin\phi, \rho\, sin\theta\, sin\phi, \rho\, cos\phi) = g(\rho)\cdot h(\phi,\theta)$ con $g(r) = \rho^2$ y $h(\phi,\theta) = cos^2\theta\, sin\theta\, sin^3\phi\, cos^2\phi$; y además:

⋆ La función $g(\rho) = \rho^2$ satisface que $\lim\limits_{\rho\mapsto 0^+} g(\rho) = \lim\limits_{\rho\mapsto 0^+} \rho^2 = 0$.

⋆ La función $h(\phi,\theta) = cos^2\theta\, sin\theta\, sin^3\phi\, cos^2\phi$ es acotada (ejercicio).

Así, concluimos que $\lim\limits_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim\limits_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \dfrac{x^2yz^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$, ya que f satisface las condiciones del teorema anterior.

Nota (limites de funciones).

Existen otros cambios de variables que son muy útiles para encontrar limites de funciones pero aquí solo enunciamos los más usados. El siguiente teorema es también bastante útil para encontrar limites de funciones.

Teorema (estricción-sanduche).

Sean $f,g,h : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones, $x_0 \in ac(A)$ y $L \in \mathbb{R}$. Además se satisfacen las siguientes condiciones:

($\checkmark$) Para todo $x \in A$ se tiene que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

($\checkmark$) $\lim\limits_{x\mapsto x_0} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto x_0} h(x) = L$.

Entonces se tiene que $\lim\limits_{x\mapsto x_0} g(x) = L$.

Demostración:

Probaremos que $\lim_{x\longmapsto x_0} g(x)=L$ usando la definición $\varepsilon-\delta$. Así, dado $\varepsilon>0$, sabemos que existen $\delta_1,\delta_2>0$ tales que:

(✓) Si $\begin{cases} 0<||x-x_0||<\delta_1, \\ x\in A \end{cases}$ entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$.

(✓) Si $\begin{cases} 0<||x-x_0||<\delta_2, \\ x\in A \end{cases}$ entonces $|h(x)-L|<\varepsilon$.

(✓) $|f(x)-L|<\varepsilon \iff -\varepsilon+L<f(x)<\varepsilon+L$.

(✓) $|h(x)-L|<\varepsilon \iff -\varepsilon+L<h(x)<\varepsilon+L$.

(✓) Si $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, entonces para todo $\begin{cases} 0<||x-x_0||<\delta, \\ x\in A \end{cases}$ se tiene que $|f(x)-L|<\varepsilon$ y $|h(x)-L|<\varepsilon$; y además:

$$\boxed{-\varepsilon+L<f(x)\leq g(x)\leq h(x)<\varepsilon+L,}$$

lo cual implica que $-\varepsilon+L<g(x)<\varepsilon+L$; y esto equivale a tener que $|g(x)-L|<\varepsilon$. Así, hemos probado que para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que si $\begin{cases} 0<||x-x_0||<\delta, \\ x\in A \end{cases}$ entonces $|g(x)-L|<\varepsilon$, lo cual significa que $\lim_{x\longmapsto x_0} g(x)=L$.

Ejemplo (aplicación teorema previo).

Verificar si los siguientes limites existen usando el teorema de estricción.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \frac{x^2 sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

Solución:

(1) Notemos primero que $x^2 \leq x^2+y^2$ y $y^2 \leq x^2+y^2$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$. Así tenemos que:

$$\boxed{0 \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)\ (x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2}$$

para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. Por lo tanto, tenemos que:

(✓) $0 \leq \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq x^2+y^2$ para cada $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

(✓) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} x^2+y^2 = 0.$

Por tanto, el teorema de estricción nos dice que

$$\boxed{\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.}$$

(2) Notemos primero que $x^2 \leq x^2+y^2+z^2$ y $-1 \leq sin(*) \leq 1$ para todo $x,y,z \in \mathbb{R}$. Así tenemos que:

$$(\checkmark)\ -\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)\ \ (-1)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq \frac{x^2\ \ (-1)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq \frac{x^2 sin\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

$(\checkmark)$

$$\frac{x^2 sin\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq \frac{(x^2+y^2+z^2) sin\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ sin\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right).$$

$$(\checkmark)\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ sin\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot(1) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

De lo anterior tenemos que

$(\checkmark)$ $-\sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq \dfrac{x^2 sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ para cada $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$.

$(\checkmark)$ $\lim\limits_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} -\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \lim\limits_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 0$

lo cual implica por el teorema de estricción que

$$\boxed{\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \frac{x^2 sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0.}$$

Problemas.

(1) Demostrar que los siguientes limites no existen usando trayectorias.

(a) $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} \dfrac{2y}{x^2+y^2}$.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} g(x,y)$, donde $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{Si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{Si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} h(x,y)$, donde $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2} & \text{Si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{Si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} j(x,y)$, donde $j(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4}+7 & \text{Si } (x,y) \neq (0,0), \\ 7 & \text{Si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} k(x,y)$, donde $k(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{Si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{Si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} l(x,y)$, donde $l(x,y)=\begin{cases}\dfrac{ysin(x^2)}{x^2+(y-1)^2} & \text{Si } (x,y)\neq(0,1),\\ 0 & \text{Si } (x,y)=(0,1).\end{cases}$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} m(x,y,z)$, donde $m(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz}{x^4+y^4+z^4} & \text{Si } (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 0 & \text{Si } (x,y,z)=(0,0,0).\end{cases}$

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\mapsto(1,2,-5)} \frac{(x-1)(y-2)(z+5)}{(x-1)^3+(y-2)^3+(z+5)^3}.$

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} n(x,y,z)$, donde $n(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2} & \text{Si } (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 0 & \text{Si } (x,y,z)=(0,0,0).\end{cases}$

(2) Encontrar el valor de los siguientes limites simplificando la expresión hasta llegar a limites de funciones conocidas.

(a) $$\lim_{(x,y)\mapsto(1,1)} \frac{x^2-1}{x-1}+\frac{y^2-1}{y-1}.$$

(b) $$\lim_{(x,y)\mapsto(1,1)} \frac{(x^3-1)(y^4-1)}{(x-1)(y^2-1)}.$$

(c) $$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{sin(x)sin(3y)}{2xy}.$$

(d) $$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(y^2+2y-3)(1-cos(x))}{x^2(y-1)}.$$

(e) $$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{(1-cos(2x))(cos(3y)-1)}{5x^2y}.$$

(f) $$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{sin^{-1}(2x)tan^{-1}(3y)}{xy}.$$

(g) $$\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} 2-\left(\frac{sin(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}\right).$$

(h) *Reto:* $$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{sin(x)-sin(y)}{sin(x-y)}.$$

(3) Verificar la existencia de los siguientes limites usando el cambio de variable a coordenadas polares.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{2x^2y+5x^2+5y^2}{x^2+y^2}.$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y)$, donde $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2+8\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{Si } (x,y)\neq(0,0), \\ 15 & \text{Si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(10,20)} g(x,y)$, donde $g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{5(x-10)(y-20)^2}{\sqrt{(x-10)^2+(y-20)^2}} & \text{Si } (x,y)\neq(10,20), \\ 8 & \text{Si } (x,y)=(10,20). \end{cases}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} h(x,y)$, donde $h(x,y)=\begin{cases} \left(\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) cos\left(\dfrac{x}{x^4+y^4}\right) & \text{Si } (x,y)\neq(0,0) \\ 13 & \text{Si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} (x^2+y^2)ln(x^2+y^2)+1.$

(4) Verificar la existencia de los siguientes limites usando el cambio de variable a coordenadas esféricas.

(a) $$\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \frac{2x^2yz}{x^2+y^2+z^2}.$$

(b) $\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,1,2)} f(x,y,z)$, donde:

$$f(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{2x^2(y-1)(z-2)+x^2+y^2+z^2-2y-4z+5}{x^2+(y-1)^2+(z-2)^2} & \text{Si } (x,y,z)\neq(0,1,2), \\ 15 & \text{Si } (x,y,z)=(0,1,2). \end{cases}$$

(c) $$\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} \left(\frac{sin^2(2x^2+3y^2+4z^2)}{2x^2+3y^2+4z^2}\right) cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right).$$

(d) $\lim_{(x,y,z)\mapsto(0,0,0)} h(x,y,z)$, donde $h(x,y,z)=\begin{cases} \left(\dfrac{6e^{x^2+y^2+z^2}-6}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) & \text{Si } (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 13 & \text{Si } (x,y,z)=(0,0,0). \end{cases}$

(e) $$\lim_{(x,y,z)\mapsto(1,2,3)} ((x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2)ln((x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2)+4.$$

(5) Hallar el valor de los siguientes limites usando el teorema de estricción.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}.$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y)$, donde $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{Si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{Si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} g(x,y)$, donde $g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2 sin(x^4+y^4)}{x^4+y^4}+5 & \text{Si } (x,y)\neq(0,0), \\ 5 & \text{Si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(1,2)} \frac{(x-1)^4 cos((x-1)^2+(y-2)^2)-(x-1)^4}{x^2+y^2-2x-4y+6}+10.$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} h(x,y)$, donde $h(x,y)=\begin{cases} (x+y)sin\left(\dfrac{1}{x}\right)sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & \text{Si } x\neq 0 \text{ y } y\neq 0, \\ 0 & \text{Si } x=0 \text{ o } y=0. \end{cases}$

(6) *Reto:* Supongamos que $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ y $L\in\mathbb{R}$ satisfacen las siguientes propiedades:

(✓) $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(a,b)=L$.

(✓) Los limites de una variable $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x,y)$ y $\lim\limits_{y\mapsto b} f(x,y)$ existen.

Entonces demostrar que $\lim\limits_{y\mapsto b}\left(\lim\limits_{x\mapsto a} f(x,y)\right)=\lim\limits_{x\mapsto a}\left(\lim\limits_{y\mapsto b} f(x,y)\right)=L$.

Ayuda: Vamos a probar que $\lim\limits_{y\mapsto b}\left(\lim\limits_{x\mapsto a} f(x,y)\right)=L$, la prueba de que $\lim\limits_{x\mapsto a}\left(\lim\limits_{y\mapsto b} f(x,y)\right)=L$ es similar. Para la prueba de nuestro resultado notaremos las siguientes cosas:

(✓) Si $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida como $g(y)=\lim\limits_{x\mapsto a} f(x,y)$, entonces dado $\varepsilon>0$, existe $\delta_1>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta_1$, entonces $|f(x,y)-g(y)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

(✓) Como $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(a,b)=L$, entonces para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta_2>0$ tal que si $0<\|\ (x,y)-(a,b)\ \|<\delta_2$, entonces $|f(x,y)-L|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

(✓) Definimos $\delta=\dfrac{\min\{\delta_1,\delta_2\}}{2}>0$.

(✓) Si $0<|x-a|<\delta$ y $0<|y-b|<\delta$, entonces $0<\|\ (x,y)-(a,b)\ \|<\sqrt{2}\delta<\delta_2$.

($\checkmark$) Si $0 < |y-b| < \delta$, entonces:

$$\begin{cases} \text{Si } 0 < |x-a| < \delta, \text{ entonces } 0 < \| \ (x,y)-(a,b) \ \| < \delta_2, \\ \\ \text{Si } 0 < \| \ (x,y)-(a,b) \ \| < \delta_2, \text{ entonces } |f(x,y)-L| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \\ \\ \text{Si } 0 < |x-a| < \delta, \text{ entonces } |g(y)-f(x,y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \\ \\ |g(y)-L| = |g(y)-f(x,y)+f(x,y)-L| \leq |g(y)-f(x,y)|+|f(x,y)-L| < \dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{cases}$$

Lo anterior implica que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |y-b| < \delta$, entonces $|g(y)-L| < \varepsilon$. Esto prueba que $\lim\limits_{y \mapsto b} g(y) = \lim\limits_{y \mapsto b}\left(\lim\limits_{x \mapsto a} f(x,y)\right) = L$.