Cálculo en Varias Variables

Integrales Triples

Julián Uribe Castañeda

Universidad Nacional de Colombia

5 de abril de 2024

Integrales triples

Integrales triples

Observación (integrales triples).

Observación (integrales triples).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida como $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = w$.

Observación (integrales triples).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida como $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = w$.Entonces de la misma manera en que se definió la integral doble para una función de dos variables, definimos la integral triple de f sobre ciertas regiones del espacio.

Integrales triples

Observación (integrales triples).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida como $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = w$.Entonces de la misma manera en que se definió la integral doble para una función de dos variables, definimos la integral triple de f sobre ciertas regiones del espacio.

De esta manera, si tratamos de generalizar los conceptos previamente vistos para obtener una definición satisfactoria de integral triple, tendríamos que:

Observación (integrales triples).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida como $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = w$.Entonces de la misma manera en que se definió la integral doble para una función de dos variables, definimos la integral triple de f sobre ciertas regiones del espacio.

De esta manera, si tratamos de generalizar los conceptos previamente vistos para obtener una definición satisfactoria de integral triple, tendríamos que:

> La integral triple de f sobre una región $E \subseteq \mathbb{R}^3$ debería de ser el
> "volumen de dimensión 4" de aquel objeto en $\mathbb{R}^4$ que se encuentra
> debajo del conjunto $\text{Gráfica}(f) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : w = f(x,y,z),\ (x,y,z) \in E\}$
> y encima del hiperplano $w = 0$.

Observación (integrales triples).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida como $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = w$.Entonces de la misma manera en que se definió la integral doble para una función de dos variables, definimos la integral triple de f sobre ciertas regiones del espacio.

De esta manera, si tratamos de generalizar los conceptos previamente vistos para obtener una definición satisfactoria de integral triple, tendríamos que:

> La integral triple de f sobre una región $E \subseteq \mathbb{R}^3$ debería de ser el "volumen de dimensión 4" de aquel objeto en $\mathbb{R}^4$ que se encuentra debajo del conjunto $\text{Gráfica}(f) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : w = f(x,y,z),\ (x,y,z) \in E\}$ y encima del hiperplano $w = 0$.

De esta manera si denotamos "volumen de dimensión 4" por $\iiint\limits_E f(x,y,z)\ dV$, entonces tenemos las siguientes propiedades:

Teorema (Fubini).

Teorema (Fubini).

Supongamos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida como

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = w.$$

Si $[a, b] \times [c, d] \times [e, f] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \; c \leq y \leq d, \; e \leq z \leq f\} \subseteq A$, entonces:

Teorema (Fubini).

Supongamos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida como

$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = w.$$

Si $[a,b]\times[c,d]\times[e,f] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ e \le z \le f\} \subseteq A$, entonces:

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} f(x,y,z)\ dV =$$

Teorema (Fubini).

Supongamos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida como

$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = w.$$

Si $[a,b]\times[c,d]\times[e,f] = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ e \le z \le f\} \subseteq A$, entonces:

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} f(x,y,z)\ dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx =$$

Teorema (Fubini).

Supongamos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida como

$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = w.$$

Si $[a,b]\times[c,d]\times[e,f] = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a\le x\le b,\ c\le y\le d,\ e\le z\le f\} \subseteq A$, entonces:

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} f(x,y,z)\ dV = \int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,y,z)dz\,dy\,dx = \int_a^b\int_e^f\int_c^d f(x,y,z)dy\,dz\,dx =$$

Teorema (Fubini).

Supongamos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida como

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = w.$$

Si $[a, b] \times [c, d] \times [e, f] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ e \leq z \leq f\} \subseteq A$, entonces:

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} f(x,y,z)\ dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)dzdydx = \int_a^b \int_e^f \int_c^d f(x,y,z)dydzdx =$$

$$= \int_c^d \int_a^b \int_e^f f(x,y,z)dzdxdy =$$

Teorema (Fubini).

Supongamos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida como

$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = w.$$

Si $[a,b]\times[c,d]\times[e,f] = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a\le x\le b,\ c\le y\le d,\ e\le z\le f\} \subseteq A$, entonces:

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} f(x,y,z)\ dV = \int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,y,z)dzdydx = \int_a^b\int_e^f\int_c^d f(x,y,z)dydzdx =$$

$$= \int_c^d\int_a^b\int_e^f f(x,y,z)dzdxdy = \int_c^d\int_e^f\int_a^b f(x,y,z)dxdzdy =$$

Teorema (Fubini).

Supongamos que $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida como

$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = w.$$

Si $[a,b]\times[c,d]\times[e,f] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ e \le z \le f\} \subseteq A$, entonces:

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} f(x,y,z)\ dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)dz\,dy\,dx = \int_a^b \int_e^f \int_c^d f(x,y,z)dy\,dz\,dx =$$

$$= \int_c^d \int_a^b \int_e^f f(x,y,z)dz\,dx\,dy = \int_c^d \int_e^f \int_a^b f(x,y,z)dx\,dz\,dy = \int_e^f \int_a^c \int_c^d f(x,y,z)dy\,dx\,dz =$$

Teorema (Fubini).

Supongamos que $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida como

$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = w.$$

Si $[a,b]\times[c,d]\times[e,f] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ e \leq z \leq f\} \subseteq A$, entonces:

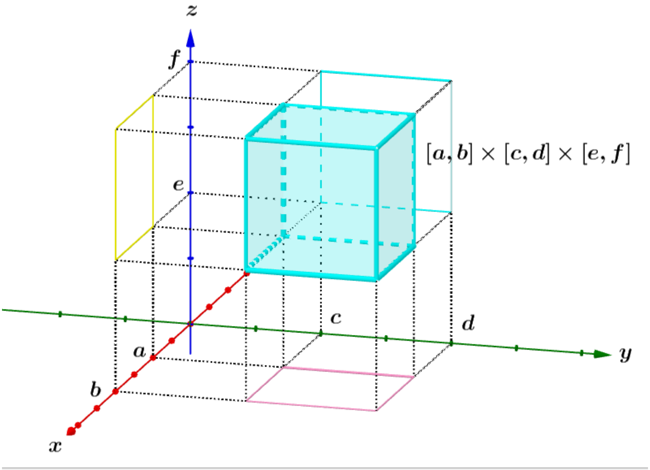
$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} f(x,y,z)\ dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \int_a^b \int_e^f \int_c^d f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx =$$

$$= \int_c^d \int_a^b \int_e^f f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy = \int_c^d \int_e^f \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy = \int_e^f \int_a^b \int_c^d f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz =$$

$$= \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Gráficamente el conjunto $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d,\ e\leq z\leq f\}$ se ve como:

Gráficamente el conjunto $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d,\ e\leq z\leq f\}$ se ve como:



Ejemplo (aplicación teorema de Fubini).

Ejemplo (aplicación teorema de Fubini).

Hallar $\iiint\limits_E x^2 e^y + xyz \ dV$ donde $E = [-2,3] \times [0,1] \times [0,5]$.

Ejemplo (aplicación teorema de Fubini).

Hallar $\displaystyle\iiint_E x^2e^y + xyz\ dV$ donde $E = [-2,3]\times[0,1]\times[0,5]$.

Solución:

Ejemplo (aplicación teorema de Fubini).

Hallar $\iiint\limits_E x^2 e^y + xyz \; dV$ donde $E = [-2,3] \times [0,1] \times [0,5]$.

Solución:

$$\iiint\limits_E x^2 e^y + xyz \; dV =$$

Ejemplo (aplicación teorema de Fubini).

Hallar $\iiint\limits_E x^2 e^y + xyz \; dV$ donde $E = [-2,3] \times [0,1] \times [0,5]$.

Solución:

$$\iiint\limits_E x^2 e^y + xyz \; dV = \int_{-2}^{3} \int_{0}^{1} \int_{0}^{5} x^2 e^y + xyz \; dz\, dy\, dx =$$

Ejemplo (aplicación teorema de Fubini).

Hallar $\iiint\limits_E x^2 e^y + xyz \; dV$ donde $E = [-2,3] \times [0,1] \times [0,5]$.

Solución:

$$\iiint\limits_E x^2 e^y + xyz \; dV = \int_{-2}^{3} \int_{0}^{1} \int_{0}^{5} x^2 e^y + xyz \; dz\, dy\, dx =$$

$$= \int_{-2}^{3} \int_{0}^{1} x^2 e^y \left(z\Big|_0^5 \right) + xy \left(\left. \frac{z^2}{2} \right|_0^5 \right) dy\, dx =$$

Ejemplo (aplicación teorema de Fubini).

Hallar $\displaystyle\iiint_E x^2e^y + xyz \ dV$ donde $E = [-2,3]\times[0,1]\times[0,5]$.

Solución:

$$\iiint_E x^2e^y + xyz \ dV = \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1}\int_{0}^{5} x^2e^y + xyz \ dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1} x^2e^y\left(z\big|_0^5\right) + xy\left(\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^5\right) \ dy\,dx = \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1} 5x^2e^y + \frac{25}{2}xy \ dy\,dx =$$

Ejemplo (aplicación teorema de Fubini).

Hallar $\iiint\limits_E x^2e^y + xyz \;dV$ donde $E = [-2,3]\times[0,1]\times[0,5]$.

Solución:

$$\iiint\limits_E x^2e^y + xyz \;dV = \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1}\int_{0}^{5} x^2e^y + xyz \;dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1} x^2e^y\left(z\big|_0^5\right) + xy\left(\frac{z^2}{2}\bigg|_0^5\right) dy\,dx = \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1} 5x^2e^y + \frac{25}{2}xy \;dy\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{3} 5x^2\left(e^y\big|_0^1\right) + \frac{25}{2}x\left(\frac{y^2}{2}\bigg|_0^1\right) dx =$$

Ejemplo (aplicación teorema de Fubini).

Hallar $\iiint\limits_E x^2e^y + xyz \ dV$ donde $E = [-2,3] \times [0,1] \times [0,5]$.

Solución:

$$\iiint\limits_E x^2e^y + xyz \ dV = \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1}\int_{0}^{5} x^2e^y + xyz \ dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1} x^2e^y\left(z\Big|_0^5\right) + xy\left(\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^5\right) \ dy\,dx = \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1} 5x^2e^y + \frac{25}{2}xy \ dy\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{3} 5x^2\left(e^y\Big|_0^1\right) + \frac{25}{2}x\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1\right) dx = \int_{-2}^{3} 5x^2(e-1) + \frac{25}{2}x\left(\frac{1}{2}\right) dx =$$

Ejemplo (aplicación teorema de Fubini).

Hallar $\iiint\limits_E x^2e^y + xyz \; dV$ donde $E = [-2,3]\times[0,1]\times[0,5]$.

Solución:

$$\iiint\limits_E x^2e^y + xyz \; dV = \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1}\int_{0}^{5} x^2e^y + xyz \; dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1} x^2e^y\left(z\big|_0^5\right) + xy\left(\frac{z^2}{2}\bigg|_0^5\right) dy\,dx = \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1} 5x^2e^y + \frac{25}{2}xy \; dy\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{3} 5x^2\left(e^y\big|_0^1\right) + \frac{25}{2}x\left(\frac{y^2}{2}\bigg|_0^1\right)dx = \int_{-2}^{3} 5x^2(e-1) + \frac{25}{2}x\left(\frac{1}{2}\right)dx =$$

$$= 5(e-1)\left(\frac{x^3}{3}\bigg|_{-2}^{3}\right) + \frac{25}{4}\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_{-2}^{3}\right) =$$

Ejemplo (aplicación teorema de Fubini).

Hallar $\iiint\limits_E x^2e^y + xyz \; dV$ donde $E = [-2,3]\times[0,1]\times[0,5]$.

Solución:

$$\iiint\limits_E x^2e^y + xyz \; dV = \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1}\int_{0}^{5} x^2e^y + xyz \; dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1} x^2e^y\left(z\big|_0^5\right) + xy\left(\frac{z^2}{2}\bigg|_0^5\right) dy\,dx = \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1} 5x^2e^y + \frac{25}{2}xy \; dy\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{3} 5x^2\left(e^y\big|_0^1\right) + \frac{25}{2}x\left(\frac{y^2}{2}\bigg|_0^1\right) dx = \int_{-2}^{3} 5x^2(e-1) + \frac{25}{2}x\left(\frac{1}{2}\right) dx =$$

$$= 5(e-1)\left(\frac{x^3}{3}\bigg|_{-2}^{3}\right) + \frac{25}{4}\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_{-2}^{3}\right) = 5(e-1)\left(\frac{27}{3}+\frac{8}{3}\right) + \frac{25}{4}\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right) =$$

Ejemplo (aplicación teorema de Fubini).

Hallar $\displaystyle\iiint\limits_E x^2e^y + xyz\ dV$ donde $E = [-2,3]\times[0,1]\times[0,5]$.

Solución:

$$\iiint\limits_E x^2e^y + xyz\ dV = \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1}\int_{0}^{5} x^2e^y + xyz\ dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1} x^2e^y\left(z\Big|_0^5\right) + xy\left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^5\right) dy\,dx = \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1} 5x^2e^y + \frac{25}{2}xy\ dy\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{3} 5x^2\left(e^y\Big|_0^1\right) + \frac{25}{2}x\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right) dx = \int_{-2}^{3} 5x^2(e-1) + \frac{25}{2}x\left(\frac{1}{2}\right) dx =$$

$$= 5(e-1)\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{3}\right) + \frac{25}{4}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{3}\right) = 5(e-1)\left(\frac{27}{3}+\frac{8}{3}\right) + \frac{25}{4}\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right) = \frac{175}{3}(e-1) + \frac{125}{8}.$$

Ejemplo (aplicación teorema de Fubini).

Hallar $\displaystyle\iiint\limits_E x^2e^y + xyz \ dV$ donde $E = [-2,3]\times[0,1]\times[0,5]$.

Solución:

$$\iiint\limits_E x^2e^y + xyz \ dV = \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1}\int_{0}^{5} x^2e^y + xyz \ dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1} x^2e^y\left(z\big|_0^5\right) + xy\left(\frac{z^2}{2}\bigg|_0^5\right) \ dy\,dx = \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1} 5x^2e^y + \frac{25}{2}xy \ dy\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{3} 5x^2\left(e^y\big|_0^1\right) + \frac{25}{2}x\left(\frac{y^2}{2}\bigg|_0^1\right)dx = \int_{-2}^{3} 5x^2(e-1) + \frac{25}{2}x\left(\frac{1}{2}\right)dx =$$

$$= 5(e-1)\left(\frac{x^3}{3}\bigg|_{-2}^{3}\right) + \frac{25}{4}\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_{-2}^{3}\right) = 5(e-1)\left(\frac{27}{3}+\frac{8}{3}\right) + \frac{25}{4}\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right) = \frac{175}{3}(e-1) + \frac{125}{8}.$$

Se puede comprobar fácilmente que $\displaystyle\iiint\limits_E x^2e^y + xyz \ dV$ también se puede hacer cambiando el orden de integración correspondiente y el resultado es el mismo.

Observación (Integral triple).

Observación (Integral triple).

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida como $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = w$.

Observación (Integral triple).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida como $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = w$. Supongamos que deseamos integrar f sobre una región en el espacio E que tenga volumen y sea diferente a un paralelepípedo.

Observación (Integral triple).

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida como $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = w$. Supongamos que deseamos integrar f sobre una región en el espacio E que tenga volumen y sea diferente a un paralelepípedo.Entonces si denotamos esta integral como $\iiint\limits_E f(x,y,z)\ dV$, surge la siguiente pregunta:

Observación (Integral triple).

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida como $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = w$. Supongamos que deseamos integrar f sobre una región en el espacio E que tenga volumen y sea diferente a un paralelepípedo.Entonces si denotamos esta integral como $\iiint\limits_E f(x,y,z)\ dV$, surge la siguiente pregunta:

¿Cómo encontrar $\iiint\limits_E f(x,y,z)\ dV$ computacionalmente?

Observación (Integral triple).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida como $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = w$. Supongamos que deseamos integrar f sobre una región en el espacio E que tenga volumen y sea diferente a un paralelepípedo.Entonces si denotamos esta integral como $\iiint\limits_E f(x,y,z)\ dV$, surge la siguiente pregunta:

$$\boxed{\text{¿Cómo encontrar } \iiint\limits_E f(x,y,z)\ dV \text{ computacionalmente?}}$$

Una respuesta parcial a esta pregunta será primero definir la integral triple para regiones elementales en el espacio (como en el caso de integrales dobles) y luego describir otro tipo de regiones.

Definición (Regiones elementales en el espacio).

Definición (Regiones elementales en el espacio).

(✓) Decimos que un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^3$ es una región de tipo 1, si E se puede escribir como:

Definición (Regiones elementales en el espacio).

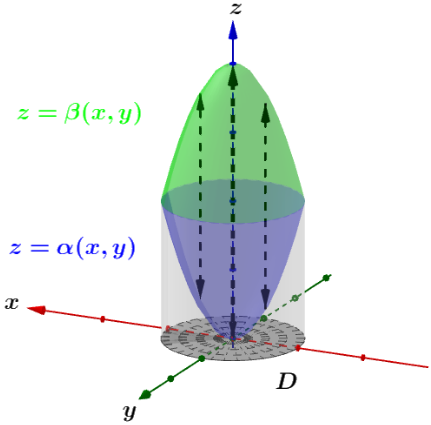
($\checkmark$) Decimos que un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^3$ es una región de tipo 1, si E se puede escribir como:

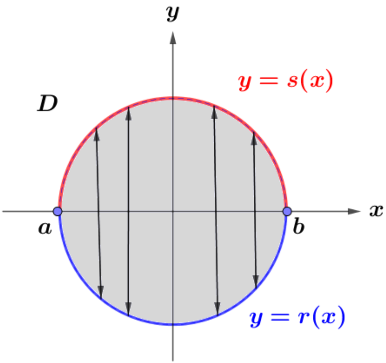
(a) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ r(x) \leq y \leq s(x),\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}.$

Definición (Regiones elementales en el espacio).

(✓) Decimos que un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^3$ es una región de tipo 1, si E se puede escribir como:

(a) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ r(x) \leq y \leq s(x),\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}.$





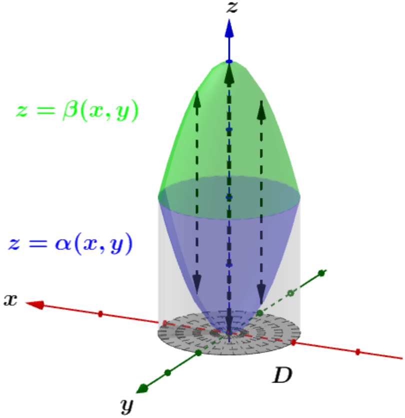
o se puede escribir como:

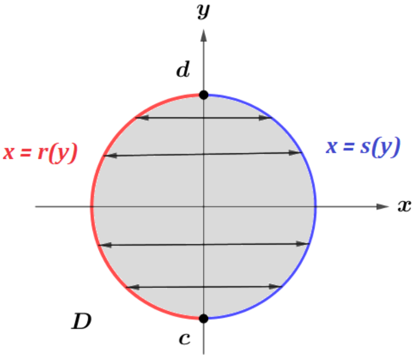
o se puede escribir como:

(b) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq y \leq d,\ r(y) \leq x \leq s(y),\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}.$

o se puede escribir como:

(b) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq y \leq d,\ r(y) \leq x \leq s(y),\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}.$





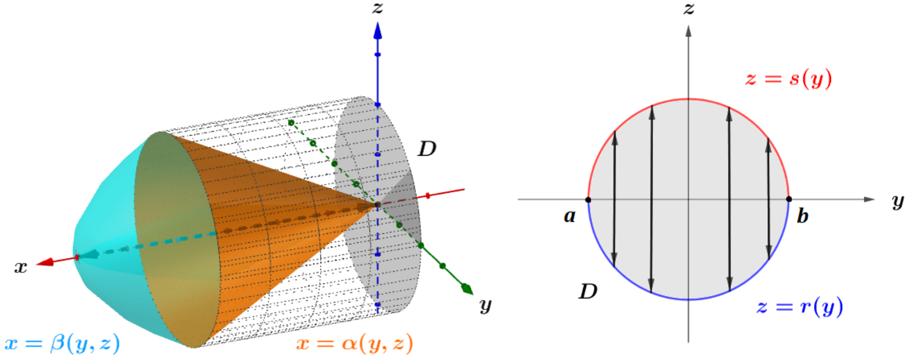
($\checkmark$) Decimos que un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^3$ es una región de tipo 2, si E se puede escribir como:

($\checkmark$) Decimos que un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^3$ es una región de tipo 2, si E se puede escribir como:

(a) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq y \leq b,\ r(y) \leq z \leq s(y),\ \alpha(y,z) \leq x \leq \beta(y,z)\}.$

(✓) Decimos que un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^3$ es una región de tipo 2, si E se puede escribir como:

(a) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq y \leq b,\ r(y) \leq z \leq s(y),\ \alpha(y,z) \leq x \leq \beta(y,z)\}.$



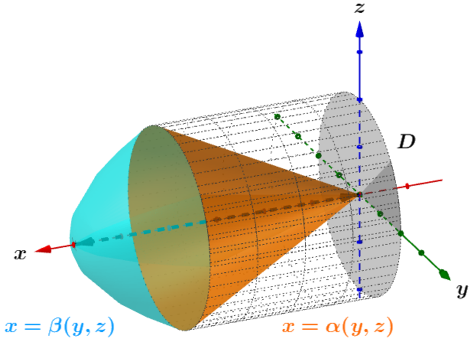
o se puede escribir como:

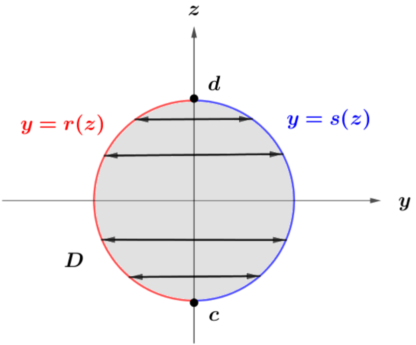
o se puede escribir como:

(b) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : c\leq z\leq d,\ r(z)\leq y\leq s(z),\ \alpha(y,z)\leq x\leq \beta(y,z)\}.$

o se puede escribir como:

(b) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : c\leq z\leq d,\ r(z)\leq y\leq s(z),\ \alpha(y,z)\leq x\leq \beta(y,z)\}$.





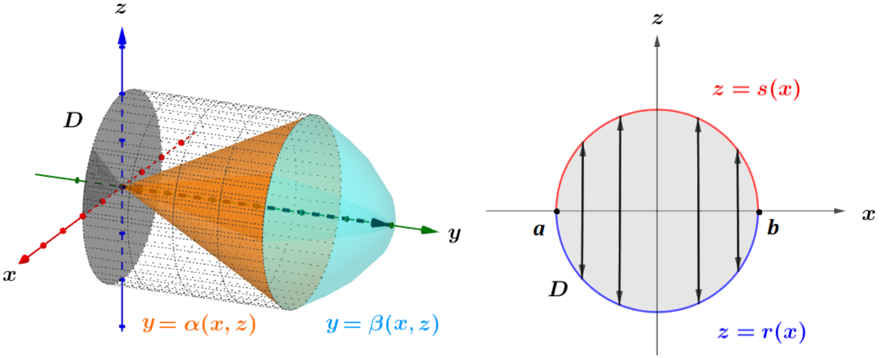
($\checkmark$) Decimos que un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^3$ es una región de tipo 3, si E se puede escribir como:

($\checkmark$) Decimos que un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^3$ es una región de tipo 3, si E se puede escribir como:

(a) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ r(x) \leq z \leq s(x),\ \alpha(x,z) \leq y \leq \beta(x,z)\}.$

(√) Decimos que un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^3$ es una región de tipo 3, si E se puede escribir como:

(a) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ r(x) \le z \le s(x),\ \alpha(x,z) \le y \le \beta(x,z)\}$.



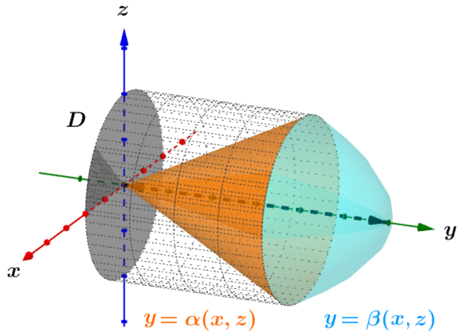
o se puede escribir como:

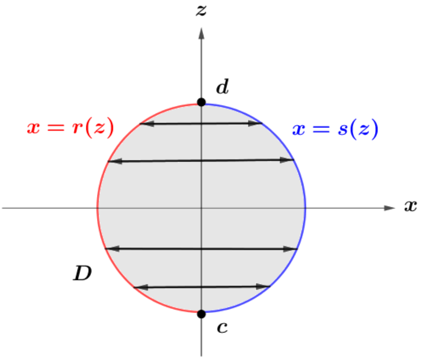
o se puede escribir como:

(b) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : c\leq z\leq d,\ r(z)\leq x\leq s(z),\ \alpha(x,z)\leq y\leq \beta(x,z)\}.$

o se puede escribir como:

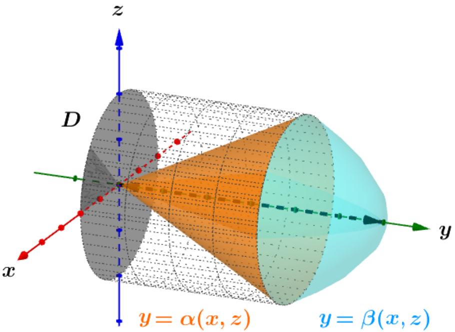
(b) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq z \leq d,\ r(z) \leq x \leq s(z),\ \alpha(x,z) \leq y \leq \beta(x,z)\}.$

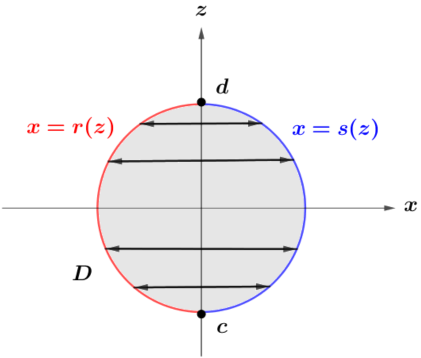




o se puede escribir como:

(b) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : c\leq z\leq d,\ r(z)\leq x\leq s(z),\ \alpha(x,z)\leq y\leq\beta(x,z)\}$.





$(\checkmark)$ Decimos que un conjunto $E\subseteq\mathbb{R}^3$ es una región de tipo 4, si es de tipo 1,2 y 3.

Teorema (Integración sobre regiones elementales).

Teorema (Integración sobre regiones elementales).

Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces:

Teorema (Integración sobre regiones elementales).

Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces:

($\checkmark$) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ r(x) \leq y \leq s(x),\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$ (tipo 1) entonces:

Teorema (Integración sobre regiones elementales).

Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces:

($\checkmark$) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ r(x) \leq y \leq s(x),\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$ (tipo 1) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV =$$

Teorema (Integración sobre regiones elementales).

Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces:

(✓) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ r(x) \leq y \leq s(x),\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$ (tipo 1) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \int_a^b \int_{r(x)}^{s(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\ dz\,dy\,dx.$$

Teorema (Integración sobre regiones elementales).

Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces:

($\checkmark$) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ r(x) \leq y \leq s(x),\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$ (tipo 1) entonces:

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\ dV = \int_a^b \int_{r(x)}^{s(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\ dzdydx.$$

($\checkmark$) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq y \leq d,\ r(y) \leq x \leq s(y),\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$ (tipo 1) entonces:

Teorema (Integración sobre regiones elementales).

Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces:

($\checkmark$) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ r(x) \le y \le s(x),\ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$ (tipo 1) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \int_a^b \int_{r(x)}^{s(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\ dz\,dy\,dx.$$

($\checkmark$) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \le y \le d,\ r(y) \le x \le s(y),\ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$ (tipo 1) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV =$$

Teorema (Integración sobre regiones elementales).

Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces:

($\checkmark$) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ r(x) \leq y \leq s(x),\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$ (tipo 1) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \int_a^b \int_{r(x)}^{s(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\ dzdydx.$$

($\checkmark$) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq y \leq d,\ r(y) \leq x \leq s(y),\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$ (tipo 1) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\ dzdxdy.$$

Teorema (Integración sobre regiones elementales).

Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces:

($\checkmark$) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ r(x) \leq y \leq s(x),\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$ (tipo 1) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \int_a^b \int_{r(x)}^{s(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\ dzdydx.$$

($\checkmark$) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq y \leq d,\ r(y) \leq x \leq s(y),\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$ (tipo 1) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\ dzdxdy.$$

($\checkmark$) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq y \leq b,\ r(y) \leq z \leq s(y),\ \alpha(y,z) \leq x \leq \beta(y,z)\}$ (tipo 2) entonces:

Teorema (Integración sobre regiones elementales).

Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces:

($\checkmark$) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ r(x) \leq y \leq s(x),\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$ (tipo 1) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \int_a^b \int_{r(x)}^{s(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\ dz\,dy\,dx.$$

($\checkmark$) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq y \leq d,\ r(y) \leq x \leq s(y),\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$ (tipo 1) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\ dz\,dx\,dy.$$

($\checkmark$) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq y \leq b,\ r(y) \leq z \leq s(y),\ \alpha(y,z) \leq x \leq \beta(y,z)\}$ (tipo 2) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV =$$

Teorema (Integración sobre regiones elementales).

Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces:

($\checkmark$) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ r(x) \leq y \leq s(x),\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$ (tipo 1) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \int_a^b \int_{r(x)}^{s(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\ dz\,dy\,dx.$$

($\checkmark$) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq y \leq d,\ r(y) \leq x \leq s(y),\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$ (tipo 1) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\ dz\,dx\,dy.$$

($\checkmark$) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq y \leq b,\ r(y) \leq z \leq s(y),\ \alpha(y,z) \leq x \leq \beta(y,z)\}$ (tipo 2) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \int_a^b \int_{r(y)}^{s(y)} \int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x,y,z)\ dx\,dz\,dy.$$

($\checkmark$) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq z \leq d,\ r(z) \leq y \leq s(z),\ \alpha(y,z) \leq x \leq \beta(y,z)\}$ (tipo 2) entonces:

$(\checkmark)$ Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq z \leq d,\ r(z) \leq y \leq s(z),\ \alpha(y,z) \leq x \leq \beta(y,z)\}$ (tipo 2) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV =$$

($\checkmark$) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \le z \le d,\ r(z) \le y \le s(z),\ \alpha(y,z) \le x \le \beta(y,z)\}$ (tipo 2) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} \int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x,y)\ dx\,dy\,dz.$$

(✓) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq z \leq d,\ r(z) \leq y \leq s(z),\ \alpha(y,z) \leq x \leq \beta(y,z)\}$ (tipo 2) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} \int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x,y)\ dx\,dy\,dz.$$

(✓) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ r(x) \leq z \leq s(x),\ \alpha(x,z) \leq y \leq \beta(x,z)\}$ (tipo 3) entonces:

$(\checkmark)$ Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq z \leq d,\ r(z) \leq y \leq s(z),\ \alpha(y,z) \leq x \leq \beta(y,z)\}$ (tipo 2) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} \int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x,y)\ dx\,dy\,dz.$$

$(\checkmark)$ Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ r(x) \leq z \leq s(x),\ \alpha(x,z) \leq y \leq \beta(x,z)\}$ (tipo 3) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV =$$

($\checkmark$) Si $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : c\le z\le d,\ r(z)\le y\le s(z),\ \alpha(y,z)\le x\le\beta(y,z)\}$ (tipo 2) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV=\int_c^d\int_{r(y)}^{s(y)}\int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x,y)\ dx\,dy\,dz.$$

($\checkmark$) Si $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a\le x\le b,\ r(x)\le z\le s(x),\ \alpha(x,z)\le y\le\beta(x,z)\}$ (tipo 3) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV=\int_a^b\int_{r(x)}^{s(x)}\int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} f(x,y)\ dy\,dz\,dx.$$

$(\checkmark)$ Si $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : c\leq z\leq d,\ r(z)\leq y\leq s(z),\ \alpha(y,z)\leq x\leq\beta(y,z)\}$ (tipo 2) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV=\int_c^d\int_{r(y)}^{s(y)}\int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x,y)\ dx\,dy\,dz.$$

$(\checkmark)$ Si $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a\leq x\leq b,\ r(x)\leq z\leq s(x),\ \alpha(x,z)\leq y\leq\beta(x,z)\}$ (tipo 3) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV=\int_a^b\int_{r(x)}^{s(x)}\int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} f(x,y)\ dy\,dz\,dx.$$

$(\checkmark)$ Si $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : c\leq z\leq d,\ r(z)\leq x\leq s(z),\ \alpha(x,z)\leq y\leq\beta(x,z)\}$ (tipo 3) entonces:

(✓) Si $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : c\leq z\leq d,\ r(z)\leq y\leq s(z),\ \alpha(y,z)\leq x\leq\beta(y,z)\}$ (tipo 2) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV=\int_c^d\int_{r(y)}^{s(y)}\int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x,y)\ dx\,dy\,dz.$$

(✓) Si $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a\leq x\leq b,\ r(x)\leq z\leq s(x),\ \alpha(x,z)\leq y\leq\beta(x,z)\}$ (tipo 3) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV=\int_a^b\int_{r(x)}^{s(x)}\int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} f(x,y)\ dy\,dz\,dx.$$

(✓) Si $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : c\leq z\leq d,\ r(z)\leq x\leq s(z),\ \alpha(x,z)\leq y\leq\beta(x,z)\}$ (tipo 3) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV=$$

(✓) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq z \leq d,\ r(z) \leq y \leq s(z),\ \alpha(y,z) \leq x \leq \beta(y,z)\}$ (tipo 2) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} \int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x,y)\ dx\,dy\,dz.$$

(✓) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ r(x) \leq z \leq s(x),\ \alpha(x,z) \leq y \leq \beta(x,z)\}$ (tipo 3) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \int_a^b \int_{r(x)}^{s(x)} \int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} f(x,y)\ dy\,dz\,dx.$$

(✓) Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq z \leq d,\ r(z) \leq x \leq s(z),\ \alpha(x,z) \leq y \leq \beta(x,z)\}$ (tipo 3) entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \int_c^d \int_{r(z)}^{s(z)} \int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} f(x,y)\ dy\,dx\,dz.$$

Ejemplo (aplicación teorema anterior).

Ejemplo (aplicación teorema anterior).

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^3$ el tetraedro sólido con vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Encontrar $\displaystyle\iiint\limits_E 1+xy\ dV$.

Solución:

Ejemplo (aplicación teorema anterior).

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^3$ el tetraedro sólido con vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Encontrar $\displaystyle\iiint_E 1+xy \; dV$.

Solución:

Notemos primero que gráficamente nuestro conjunto a integrar tiene la forma:

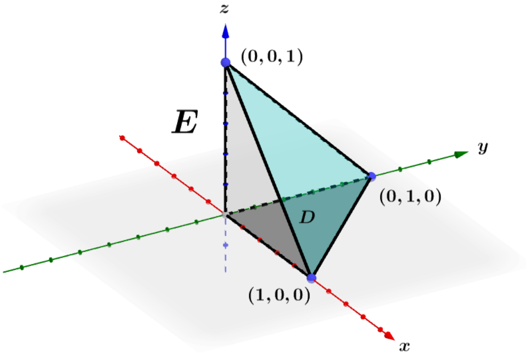
Ejemplo (aplicación teorema anterior).

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^3$ el tetraedro sólido con vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Encontrar

$$\iiint_E 1 + xy \; dV.$$

Solución:

Notemos primero que gráficamente nuestro conjunto a integrar tiene la forma:



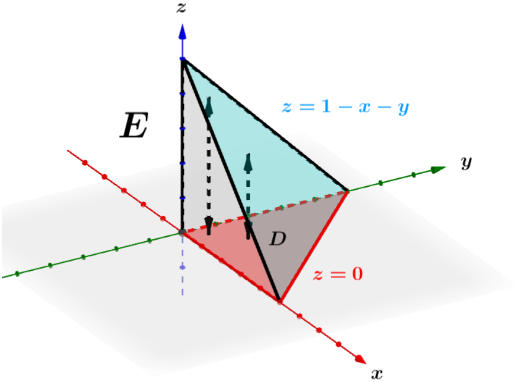
De lo anterior podemos notar que E se puede describir como:

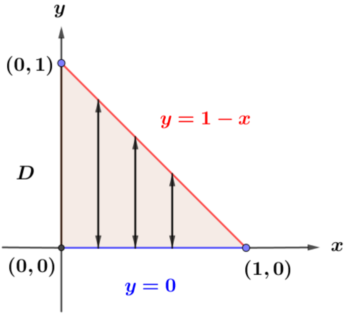
De lo anterior podemos notar que E se puede describir como:

$$\boxed{E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1-x,\ 0\leq z\leq 1-x-y\}}$$

De lo anterior podemos notar que E se puede describir como:

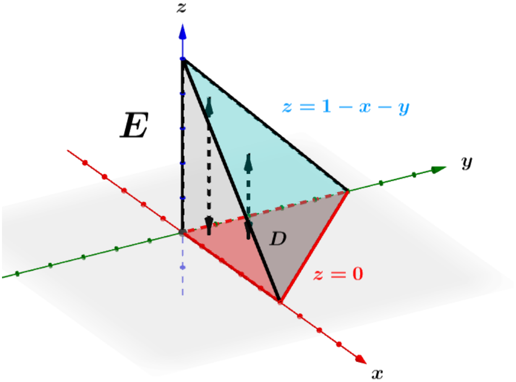
$$\boxed{E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le 1-x-y\}}$$

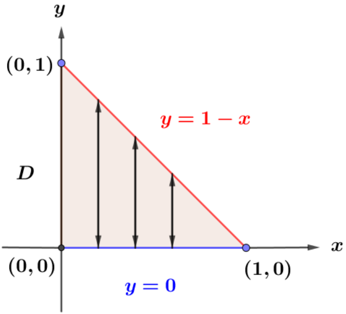




De lo anterior podemos notar que E se puede describir como:

$$\boxed{E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x,\ 0 \leq z \leq 1-x-y\}}$$

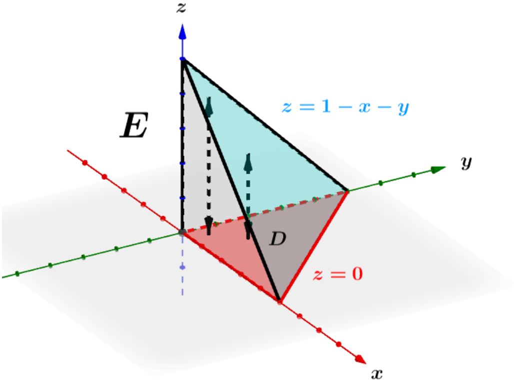


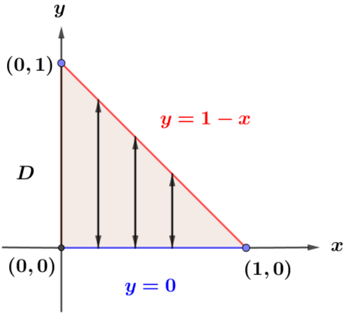


donde la cara azul del sólido tiene ecuación $x+y+z=1$, ya que es la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

De lo anterior podemos notar que E se puede describir como:

$$\boxed{E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1-x,\ 0\leq z\leq 1-x-y\}}$$





donde la cara azul del sólido tiene ecuación $x+y+z=1$, ya que es la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

De esta manera tenemos que:

$$\iiint_E 1 + xy \ dV =$$

$$\iiint_E 1 + xy \; dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1 + xy \; dz\,dy\,dx =$$

$$\iiint_E 1+xy\ dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1+xy\ dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+xy)\left(z\Big|_0^{1-x-y}\right)dy\,dx =$$

$$\iiint_E 1+xy \; dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1+xy \; dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+xy)\left(z\Big|_0^{1-x-y}\right) dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+xy)(1-x-y)\,dy\,dx =$$

$$\iiint_E 1+xy\ dV=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} 1+xy\ dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{1-x}(1+xy)\left(z\Big|_0^{1-x-y}\right)dy\,dx=$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}(1+xy)(1-x-y)\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{1-x}1-x-y+xy-x^2y-xy^2\,dy\,dx=$$

$$\iiint\limits_E 1+xy \; dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1+xy \; dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+xy)\left(z\Big|_0^{1-x-y}\right) dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+xy)(1-x-y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} 1-x-y+xy-x^2y-xy^2\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 (1-x)\left(y\Big|_0^{1-x}\right) + (-1+x-x^2)\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x}\right) - x\left(\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{1-x}\right) dx =$$

$$\iiint_E 1+xy\ dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1+xy\ dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+xy)\left(z\big|_0^{1-x-y}\right) dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+xy)(1-x-y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} 1-x-y+xy-x^2y-xy^2\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 (1-x)\left(y\big|_0^{1-x}\right) + (-1+x-x^2)\left(\frac{y^2}{2}\bigg|_0^{1-x}\right) - x\left(\frac{y^3}{3}\bigg|_0^{1-x}\right) dx =$$

$$\int_0^1 (1-x)(1-x) + \frac{(-1+x-x^2)(1-x)^2}{2} - \frac{x(1-x)^3}{3}\,dx =$$

$$\iiint_E 1+xy\ dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1+xy\ dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+xy)(\,z|_0^{1-x-y})\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+xy)(1-x-y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} 1-x-y+xy-x^2y-xy^2\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 (1-x)(\,y|_0^{1-x}) + (-1+x-x^2)\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x}\right) - x\left(\frac{y^3}{3}\Big|_0^{1-x}\right) dx =$$

$$\int_0^1 (1-x)(1-x) + \frac{(-1+x-x^2)(1-x)^2}{2} - \frac{x(1-x)^3}{3}\,dx =$$

$$\underset{u=1-x}{=} \quad -\int_1^0 u^2 + \frac{(-u-(1-u)^2)u^2}{2} - \frac{(1-u)u^3}{3}\,du =$$

$$\iiint_E 1+xy\ dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1+xy\ dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+xy)\left(z\big|_0^{1-x-y}\right) dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+xy)(1-x-y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} 1-x-y+xy-x^2y-xy^2\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 (1-x)\left(y\big|_0^{1-x}\right) + (-1+x-x^2)\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x}\right) - x\left(\frac{y^3}{3}\Big|_0^{1-x}\right) dx =$$

$$\int_0^1 (1-x)(1-x) + \frac{(-1+x-x^2)(1-x)^2}{2} - \frac{x(1-x)^3}{3}\,dx =$$

$$\underset{u=1-x}{=} \ -\int_1^0 u^2 + \frac{(-u-(1-u)^2)u^2}{2} - \frac{(1-u)u^3}{3}\,du = \int_0^1 u^2 + \frac{(-u-1+2u-u^2)u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{3}\,du =$$

$$\iiint_E 1+xy\ dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1+xy\ dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+xy)\left(z\Big|_0^{1-x-y}\right) dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+xy)(1-x-y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} 1-x-y+xy-x^2y-xy^2\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 (1-x)\left(y\Big|_0^{1-x}\right) + (-1+x-x^2)\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x}\right) - x\left(\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{1-x}\right) dx =$$

$$\int_0^1 (1-x)(1-x) + \frac{(-1+x-x^2)(1-x)^2}{2} - \frac{x(1-x)^3}{3}\,dx =$$

$$\underset{u=1-x}{=} \ -\int_1^0 u^2 + \frac{(-u-(1-u)^2)u^2}{2} - \frac{(1-u)u^3}{3}\,du = \int_0^1 u^2 + \frac{(-u-1+2u-u^2)u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{3}\,du =$$

$$\int_0^1 u^2 + \frac{u^3}{2} - \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{2} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{3}\,du =$$

$$\iiint\limits_E 1+xy\ dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1+xy\ dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+xy)\left(z\Big|_0^{1-x-y}\right) dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+xy)(1-x-y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} 1-x-y+xy-x^2y-xy^2\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 (1-x)\left(y\Big|_0^{1-x}\right) + (-1+x-x^2)\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x}\right) - x\left(\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{1-x}\right) dx =$$

$$\int_0^1 (1-x)(1-x) + \frac{(-1+x-x^2)(1-x)^2}{2} - \frac{x(1-x)^3}{3}\,dx =$$

$$\underset{u=1-x}{=}\ -\int_1^0 u^2 + \frac{(-u-(1-u)^2)u^2}{2} - \frac{(1-u)u^3}{3}\,du = \int_0^1 u^2 + \frac{(-u-1+2u-u^2)u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{3}\,du =$$

$$\int_0^1 u^2 + \frac{u^3}{2} - \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{2} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{3}\,du = \int_0^1 \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} - \frac{u^4}{6}\,du =$$

$$\iiint_E 1+xy\ dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1+xy\ dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+xy)\left(z\Big|_0^{1-x-y}\right) dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+xy)(1-x-y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} 1-x-y+xy-x^2y-xy^2\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 (1-x)\left(y\Big|_0^{1-x}\right) + (-1+x-x^2)\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x}\right) - x\left(\frac{y^3}{3}\Big|_0^{1-x}\right) dx =$$

$$\int_0^1 (1-x)(1-x) + \frac{(-1+x-x^2)(1-x)^2}{2} - \frac{x(1-x)^3}{3}\,dx =$$

$$\underset{u=1-x}{=} -\int_1^0 u^2 + \frac{(-u-(1-u)^2)u^2}{2} - \frac{(1-u)u^3}{3}\,du = \int_0^1 u^2 + \frac{(-u-1+2u-u^2)u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{3}\,du =$$

$$\int_0^1 u^2 + \frac{u^3}{2} - \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{2} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{3}\,du = \int_0^1 \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} - \frac{u^4}{6}\,du = \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{30} = \frac{20+5-4}{120} =$$

$$\iiint_E 1+xy\ dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1+xy\ dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+xy)(\, z|_0^{1-x-y})\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+xy)(1-x-y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} 1-x-y+xy-x^2y-xy^2\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 (1-x)(\, y|_0^{1-x}) + (-1+x-x^2)\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x}\right) - x\left(\frac{y^3}{3}\Big|_0^{1-x}\right) dx =$$

$$\int_0^1 (1-x)(1-x) + \frac{(-1+x-x^2)(1-x)^2}{2} - \frac{x(1-x)^3}{3}\,dx =$$

$$\underset{u=1-x}{=} \quad -\int_1^0 u^2 + \frac{(-u-(1-u)^2)u^2}{2} - \frac{(1-u)u^3}{3}\,du = \int_0^1 u^2 + \frac{(-u-1+2u-u^2)u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{3}\,du =$$

$$\int_0^1 u^2 + \frac{u^3}{2} - \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{2} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{3}\,du = \int_0^1 \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} - \frac{u^4}{6}\,du = \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{30} = \frac{20+5-4}{120} = \frac{21}{120}.$$

Observación (interpretación geométrica de la integral).

Observación (interpretación geométrica de la integral).

Es importante notar las siguientes propiedades de las integrales sencillas, dobles y triples:

Observación (interpretación geométrica de la integral).

Es importante notar las siguientes propiedades de las integrales sencillas, dobles y triples:

(1) $\displaystyle\int_{[a,b]} 1dx = b-a$ (longitud del intervalo $[a,b]$).

Observación (interpretación geométrica de la integral).

Es importante notar las siguientes propiedades de las integrales sencillas, dobles y triples:

(1) $\displaystyle\int_{[a,b]} 1dx = b - a$ (longitud del intervalo $[a,b]$).

(2) $\displaystyle\iint_{D} 1dA = \text{Área}(\text{D})$ donde D es una región elemental en el plano.

Observación (interpretación geométrica de la integral).

Es importante notar las siguientes propiedades de las integrales sencillas, dobles y triples:

(1) $\displaystyle\int_{[a,b]} 1dx = b-a$ (longitud del intervalo $[a,b]$).

(2) $\displaystyle\iint_D 1dA = \text{Área(D)}$ donde D es una región elemental en el plano.

(3) $\displaystyle\iiint_E 1dV = \text{Volumen(E)}$ donde E es una región elemental en el espacio.

Ejemplo (aplicación observación anterior).

Ejemplo (aplicación observación anterior).

Calcular el volumen del sólido $E \subseteq \mathbb{R}^3$ que está acotado por los paraboloides $z = 8 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

Ejemplo (aplicación observación anterior).

Calcular el volumen del sólido $E \subseteq \mathbb{R}^3$ que está acotado por los paraboloides $z = 8 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

Solución:

Ejemplo (aplicación observación anterior).

Calcular el volumen del sólido $E \subseteq \mathbb{R}^3$ que está acotado por los paraboloides $z = 8 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

Solución:

En este caso el volumen del sólido E lo podemos encontrar como:

Ejemplo (aplicación observación anterior).

Calcular el volumen del sólido $E \subseteq \mathbb{R}^3$ que está acotado por los paraboloides $z = 8 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

Solución:

En este caso el volumen del sólido E lo podemos encontrar como:

$$\text{Volumen}(E) = \iiint\limits_{E} 1 \; dV.$$

Ejemplo (aplicación observación anterior).

Calcular el volumen del sólido $E \subseteq \mathbb{R}^3$ que está acotado por los paraboloides $z = 8 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

Solución:

En este caso el volumen del sólido E lo podemos encontrar como:

$$\text{Volumen}(E) = \iiint_E 1 \, dV.$$

De esta manera lo único que hace falta es describir el sólido E en término de regiones elementales e integrar.

Ejemplo (aplicación observación anterior).

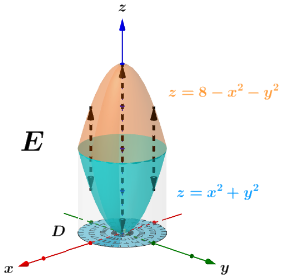
Calcular el volumen del sólido $E \subseteq \mathbb{R}^3$ que está acotado por los paraboloides $z = 8 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

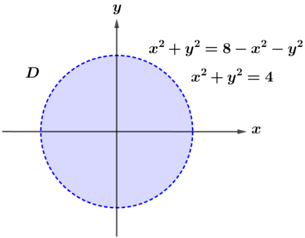
Solución:

En este caso el volumen del sólido E lo podemos encontrar como:

$$\text{Volumen}(E) = \iiint\limits_E 1 \; dV.$$

De esta manera lo único que hace falta es describir el sólido E en término de regiones elementales e integrar.





De esta manera, tenemos que la región E se describe como:

De esta manera, tenemos que la región E se describe como:

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:-2\leq x\leq 2,\ -\sqrt{4-x^2}\leq y\leq\sqrt{4-x^2},\ x^2+y^2\leq z\leq 8-x^2-y^2\}.$$

De esta manera, tenemos que la región E se describe como:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \leq x \leq 2,\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2},\ x^2+y^2 \leq z \leq 8-x^2-y^2\}.$$

Así el volumen pedido es:

De esta manera, tenemos que la región E se describe como:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \leq x \leq 2,\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2},\ x^2+y^2 \leq z \leq 8-x^2-y^2\}.$$

Así el volumen pedido es:

$$\text{Volumen}(E) =$$

De esta manera, tenemos que la región E se describe como:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \leq x \leq 2,\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2},\ x^2+y^2 \leq z \leq 8-x^2-y^2\}.$$

Así el volumen pedido es:

$$\text{Volumen}(E) = \iiint_E 1 \ dV =$$

De esta manera, tenemos que la región E se describe como:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \leq x \leq 2,\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2},\ x^2+y^2 \leq z \leq 8-x^2-y^2\}.$$

Así el volumen pedido es:

$$\text{Volumen}(E) = \iiint_E 1\ dV = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\ dz\,dy\,dx =$$

De esta manera, tenemos que la región E se describe como:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \leq x \leq 2,\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2},\ x^2+y^2 \leq z \leq 8-x^2-y^2\}.$$

Así el volumen pedido es:

$$\text{Volumen}(E) = \iiint_E 1\ dV = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\ dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (8-x^2-y^2)-(x^2+y^2)\,dy\,dx =$$

De esta manera, tenemos que la región E se describe como:

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -2\leq x\leq 2,\ -\sqrt{4-x^2}\leq y\leq\sqrt{4-x^2},\ x^2+y^2\leq z\leq 8-x^2-y^2\}.$$

Así el volumen pedido es:

$$\text{Volumen}(E)=\iiint_E 1\ dV=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\ dz\,dy\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(8-x^2-y^2)-(x^2+y^2)\,dy\,dx=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}8-2x^2-2y^2\,dy\,dx=$$

De esta manera, tenemos que la región E se describe como:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \leq x \leq 2,\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2},\ x^2+y^2 \leq z \leq 8-x^2-y^2\}.$$

Así el volumen pedido es:

$$\text{Volumen}(E) = \iiint_E 1\ dV = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\ dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (8-x^2-y^2)-(x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 8-2x^2-2y^2\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} (8-2x^2)\left(y\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\right) - 2\left(\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\right) dx = \int_{-2}^{2} 2(8-2x^2)\sqrt{4-x^2} - \frac{4}{3}(4-x^2)^{3/2}\,dx =$$

De esta manera, tenemos que la región E se describe como:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \leq x \leq 2,\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2},\ x^2+y^2 \leq z \leq 8-x^2-y^2\}.$$

Así el volumen pedido es:

$$\text{Volumen}(E) = \iiint_E 1\ dV = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\ dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (8-x^2-y^2)-(x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 8-2x^2-2y^2\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} (8-2x^2)\left(y\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\right) - 2\left(\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\right) dx = \int_{-2}^{2} 2(8-2x^2)\sqrt{4-x^2} - \frac{4}{3}(4-x^2)^{3/2}\,dx =$$

$$= 16\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx - 4\int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx - \frac{4}{3}\int_{-2}^{2} (4-x^2)^{3/2}\,dx.$$

De esta manera, tenemos que la región E se describe como:

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -2\le x\le 2,\ -\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2},\ x^2+y^2\le z\le 8-x^2-y^2\}.$$

Así el volumen pedido es:

$$\text{Volumen}(E)=\iiint\limits_E 1\ dV=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\ dz\,dy\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (8-x^2-y^2)-(x^2+y^2)\,dy\,dx=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 8-2x^2-2y^2\,dy\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{2}(8-2x^2)\left(y\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\right)-2\left(\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\right)dx=\int_{-2}^{2}2(8-2x^2)\sqrt{4-x^2}-\frac{4}{3}(4-x^2)^{3/2}\,dx=$$

$$=16\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx-4\int_{-2}^{2}x^2\sqrt{4-x^2}\,dx-\frac{4}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{3/2}\,dx.$$

Para terminar, encontremos los valores de

De esta manera, tenemos que la región E se describe como:

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:-2\leq x\leq 2,\ -\sqrt{4-x^2}\leq y\leq\sqrt{4-x^2},\ x^2+y^2\leq z\leq 8-x^2-y^2\}.$$

Así el volumen pedido es:

$$\text{Volumen}(E)=\iiint_E 1\ dV=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\ dz\,dy\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(8-x^2-y^2)-(x^2+y^2)\,dy\,dx=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}8-2x^2-2y^2\,dy\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{2}(8-2x^2)\left(y\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\right)-2\left(\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\right)dx=\int_{-2}^{2}2(8-2x^2)\sqrt{4-x^2}-\frac{4}{3}(4-x^2)^{3/2}\,dx=$$

$$=16\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx-4\int_{-2}^{2}x^2\sqrt{4-x^2}\,dx-\frac{4}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{3/2}\,dx.$$

Para terminar, encontremos los valores de $\displaystyle\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$, $\displaystyle\int_{-2}^{2}x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ y $\displaystyle\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{3/2}\,dx$.

Se puede ver fácilmente que:

Se puede ver fácilmente que:

$(\checkmark)$ $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\ dx =$

Se puede ver fácilmente que:

$(\checkmark)$ $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\ dx = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$

Se puede ver fácilmente que:

$(\checkmark)$ $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\;dx = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$

$(\checkmark)$ $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\;dx =$

Se puede ver fácilmente que:

$(\checkmark)$ $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\ dx = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$

$(\checkmark)$ $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\ dx = 2sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

Se puede ver fácilmente que:

$(\checkmark)$ $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\;dx = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$

$(\checkmark)$ $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\;dx = 2sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

$(\checkmark)$ $\displaystyle\int (4-x^2)^{3/2}\,dx =$

Se puede ver fácilmente que:

($\checkmark$) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\ dx = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$

($\checkmark$) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\ dx = 2sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

($\checkmark$) $\displaystyle\int (4-x^2)^{3/2} dx = 6sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5}{2}x\sqrt{4-x^2} - \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

Se puede ver fácilmente que:

$(\checkmark)$ $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\ dx = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$

$(\checkmark)$ $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\ dx = 2sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

$(\checkmark)$ $\displaystyle\int (4-x^2)^{3/2} dx = 6sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5}{2}x\sqrt{4-x^2} - \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

Entonces tenemos que:

Se puede ver fácilmente que:

($\checkmark$) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\ dx = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$

($\checkmark$) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\ dx = 2sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

($\checkmark$) $\displaystyle\int (4-x^2)^{3/2} dx = 6sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5}{2}x\sqrt{4-x^2} - \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

Entonces tenemos que:

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\ dx = 2\pi,$$

Se puede ver fácilmente que:

($\checkmark$) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\ dx = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$

($\checkmark$) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\ dx = 2sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

($\checkmark$) $\displaystyle\int (4-x^2)^{3/2} dx = 6sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5}{2}x\sqrt{4-x^2} - \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

Entonces tenemos que:

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\ dx = 2\pi,\quad \int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\ dx = 2\pi,$$

Se puede ver fácilmente que:

($\checkmark$) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\ dx = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$

($\checkmark$) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\ dx = 2sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

($\checkmark$) $\displaystyle\int (4-x^2)^{3/2} dx = 6sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5}{2}x\sqrt{4-x^2} - \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

Entonces tenemos que:

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\ dx = 2\pi,\ \int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\ dx = 2\pi,\ \int_{-2}^{2} (4-x^2)^{3/2} dx = 6\pi.$$

Se puede ver fácilmente que:

($\checkmark$) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\ dx = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$

($\checkmark$) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\ dx = 2sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

($\checkmark$) $\displaystyle\int (4-x^2)^{3/2}dx = 6sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5}{2}x\sqrt{4-x^2} - \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

Entonces tenemos que:

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\ dx = 2\pi, \quad \int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\ dx = 2\pi, \quad \int_{-2}^{2} (4-x^2)^{3/2}dx = 6\pi.$$

$\text{Volumen}(E) =$

Se puede ver fácilmente que:

$(\checkmark)$ $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\ dx = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$

$(\checkmark)$ $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\ dx = 2sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

$(\checkmark)$ $\displaystyle\int (4-x^2)^{3/2} dx = 6sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5}{2}x\sqrt{4-x^2} - \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

Entonces tenemos que:

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\ dx = 2\pi,\quad \int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\ dx = 2\pi,\quad \int_{-2}^{2} (4-x^2)^{3/2} dx = 6\pi.$$

$$\text{Volumen}(E) = 16\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2} dx - 4\int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2} dx - \frac{4}{3}\int_{-2}^{2} (4-x^2)^{3/2} dx =$$

Se puede ver fácilmente que:

($\checkmark$) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\ dx = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$

($\checkmark$) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\ dx = 2sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

($\checkmark$) $\displaystyle\int (4-x^2)^{3/2}dx = 6sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5}{2}x\sqrt{4-x^2} - \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

Entonces tenemos que:

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\ dx = 2\pi,\quad \int_{-2}^{2}x^2\sqrt{4-x^2}\ dx = 2\pi,\quad \int_{-2}^{2}(4-x^2)^{3/2}dx = 6\pi.$$

$$\text{Volumen}(E) = 16\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx - 4\int_{-2}^{2}x^2\sqrt{4-x^2}dx - \frac{4}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{3/2}dx = 16(2\pi) - 4(2\pi) - \frac{4}{3}(6\pi)$$

Se puede ver fácilmente que:

($\checkmark$) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\ dx = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$

($\checkmark$) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\ dx = 2sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

($\checkmark$) $\displaystyle\int (4-x^2)^{3/2} dx = 6sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5}{2}x\sqrt{4-x^2} - \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

Entonces tenemos que:

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\ dx = 2\pi,\ \int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\ dx = 2\pi,\ \int_{-2}^{2} (4-x^2)^{3/2} dx = 6\pi.$$

$$\text{Volumen}(E) = 16\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2} dx - 4\int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2} dx - \frac{4}{3}\int_{-2}^{2} (4-x^2)^{3/2} dx = 16(2\pi) - 4(2\pi) - \frac{4}{3}(6\pi)$$

$$\text{Volumen}(E) = 32\pi - 8\pi - 8\pi = 16\pi.$$

Problemas.

(1) Evalué las siguientes integrales iteradas.

(a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}}\int_0^{x}\int_0^{xz} x^2 sin(y)\ dy\ dz\ dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{1}\int_0^{2-x^2-y^2} xye^z\ dz\ dy\ dx.$

(2) Hallar $\displaystyle\iiint_E xy\ dV$, donde E es el sólido acotado por los cilindros $y = x^2$ y $x = y^2$ y los planos $z = 0$ y $z = x + y$.

(3) Hallar $\displaystyle\iiint_E y^2 dV$, donde E es el tetraedro sólido con vértices $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,2)$.

(4) Hallar $\displaystyle\iiint_E 2z dV$, donde E es el sólido acotado por el cilindro $y^2 + z^2 = 9$, los planos $x = 0$, $y = 3x$ y $z = 0$ en el primer octante.