Maestría en Ciencias Naturales y Matemáticas

Clase 5 - Cálculo Avanzado de Varias Variables

Mg: Julián Uribe Castañeda

UPB

15 de diciembre de 2022

Topología en $\mathbb{R}^n$ - Puntos de acumulación y clausura de un conjunto

Definición (bola agujereada).

Sea $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una métrica en $\mathbb{R}^n$, $a\in\mathbb{R}^n$ y $\varepsilon>0$. Entonces definimos la bola agujereada en $\mathbb{R}^n$ con centro a y radio ε como

$$\boxed{B_d^*(a;\varepsilon):=\{x\in\mathbb{R}^n:0<d(a,x)<\varepsilon\}=B_d(a;\varepsilon)-\{a\}.}$$

Definición (punto de acumulación de un conjunto).

Sea $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una métrica en $\mathbb{R}^n$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$ y $x_0\in\mathbb{R}^n$. Decimos que x_0 es un punto de acumulación de A relativo a la métrica d, si para todo $\varepsilon>0$, tenemos que

$$\boxed{B_d^*(a;\varepsilon)\cap A\neq\emptyset.}$$

Y denotaremos los puntos de acumulación de A como $ac(A)$.

Definición (clausura de un conjunto).

Sea $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una métrica en $\mathbb{R}^n$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Definimos la clausura de A como el siguiente conjunto

$$\boxed{\overline{A}=\{a\in\mathbb{R}^n:B_d(a;\varepsilon)\cap A\neq\emptyset \text{ para todo } \varepsilon>0\}.}$$

Observación (definiciones anteriores).

(1) $A \subseteq \overline{A}$.

Si $a \in A$, entonces $a \in B_d(a;\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$. Además $a \in B_d(a;\varepsilon) \cap A$ para todo $\varepsilon > 0$ implicando que $a \in \overline{A}$.

(2) $ac(A) \subseteq \overline{A}$.

Si $a \in ac(A)$, entonces $B_d^*(a;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$, lo cual implica que $a \in B_d(a;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$, ya que $B_d^*(a;\varepsilon) \cap A \subseteq B_d(a;\varepsilon) \cap A$. Así, tenemos que $a \in \overline{A}$.

(3) $\overline{A} = ac(A) \cup A$.

Supongamos que $a \in \overline{A}$, entonces podemos decir que $a \in ac(A)$ ó $a \notin ac(A)$. Si $a \notin ac(A)$ entonces debe existir $\varepsilon > 0$ tal que $B_d^*(a;\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Pero al tener $a \in \overline{A}$ tenemos también que $B_d(a;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y así

$$B_d(a;\varepsilon) \cap A = \left(B_d^*(a;\varepsilon) \cup \{a\}\right) \cap A = \left(B_d^*(a;\varepsilon) \cap A\right) \cup (\{a\} \cap A) = \emptyset \cup (\{a\} \cap A) = \{a\} \cap A = \begin{cases} \{a\} & \text{si } a \in A, \\ \emptyset & \text{si } a \notin A \end{cases}$$

lo cual muestra que $a \in A$. Lo anterior nos dice que si $a \in \overline{A}$, entonces $a \in ac(A)$ ó $a \in A$, y esto es equivalente a tener que $\overline{A} \subseteq ac(A) \cup A$. Además como ya sabíamos que $ac(A) \cup A \subseteq \overline{A}$, entonces concluimos que $\overline{A} = ac(A) \cup A$.

Nota (siguiente teorema).

El siguiente teorema nos dice una de las características principales de la clausura de un conjunto.

Teorema (la clausura de un conjunto es un conjunto cerrado).

Sea $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una métrica sobre $\mathbb{R}^n$ y $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Entonces $\overline{A}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica d.

Demostración:

Para probar que $\overline{A}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$, es suficiente probar que $\left(\overline{A}\right)^c$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Sea $a\in\left(\overline{A}\right)^c$, entonces por definición de $\overline{A}$, tenemos que debe existir $\varepsilon>0$ tal que

$$B_d(a;\varepsilon)\cap A=\emptyset.$$

Por lo tanto $B_d(a;\varepsilon)\subseteq\left(\overline{A}\right)^c$, ya que:

(✓) Para cada $x\in B_d(a;\varepsilon)$, existe $\delta_x>0$ tal que $B_d(x;\delta_x)\subseteq B_d(a;\varepsilon)$.

(✓) $B_d(x;\delta_x)\cap A\subseteq B_d(a;\varepsilon)\cap A=\emptyset$, lo que implica que $B_d(x;\delta_x)\cap A=\emptyset$ para cada $x\in B_d(a;\varepsilon)$. Así, es necesario que $B_d(a;\varepsilon)\subseteq\left(\overline{A}\right)^c$.

Lo anterior muestra que para todo $a \in \left(\overline{A}\right)^c$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(a;\varepsilon) \subseteq \left(\overline{A}\right)^c$. Es decir que $\left(\overline{A}\right)^c$ es un conjunto abierto.

■

Nota (siguiente teorema).

El siguiente teorema demuestra que dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la clausura de A es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A.

Teorema (propiedad caracteristica de la clausura).

Sea $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una métrica sobre $\mathbb{R}^n$ y $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\boxed{\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq C \subseteq \mathbb{R}^n \\ C \text{ cerrado}}} C.}$$

Demostración:[a]

Para probar que $\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq C \subseteq \mathbb{R}^n \\ C \text{ cerrado}}} C$, es necesario verificar que:

[a] Todo esto es respecto a la métrica d.

(1) $\overline{A} \subseteq \bigcap_{\substack{A \subseteq C \subseteq \mathbb{R}^n \\ C \text{ cerrado}}} C.$

(2) $\bigcap_{\substack{A \subseteq C \subseteq \mathbb{R}^n \\ C \text{ cerrado}}} C \subseteq \overline{A}.$

Prueba de (1): Sea $a \in \overline{A}$ y C un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$ tal que $A \subseteq C$. Veamos que $a \in C$. Si $a \notin C$, entonces $a \in C^c$ que es abierto, y por tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_d(a;\varepsilon) \subseteq C^c \iff B_d(a;\varepsilon) \cap C = \emptyset.$$

Pero esto es imposible, puesto que:

$$\begin{cases} B_d(a;\varepsilon) \cap A \subseteq B_d(a;\varepsilon) \cap C = \emptyset & \text{ya que } A \subseteq C, \\ \\ B_d(a;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset & \text{ya que } a \in \overline{A}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_d(a;\varepsilon) \cap A = \emptyset, \\ \\ B_d(a;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Esto muestra que $a \in C$ y así $\overline{A} \subseteq \bigcap_{\substack{A \subseteq C \subseteq \mathbb{R}^n \\ C \text{ cerrado}}} C.$

Prueba de (2): Como ya probamos que $\overline{A}$ es un conjunto cerrado y $A \subseteq \overline{A}$, entonces es claro que $\bigcap_{\substack{A \subseteq C \subseteq \mathbb{R}^n \\ C \text{ cerrado}}} C \subseteq \overline{A}.$

■

Corolario (equivalencias de conjuntos cerrados).

Sea $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una métrica sobre $\mathbb{R}^n$ y $A\subseteq\mathbb{R}^n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) A es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica d.

(2) $\overline{A}=A$.

(3) $ac(A)\subseteq A$.

Demostración:

Para probar este resultado, es suficiente verificar que (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) y (3) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que A es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica d. Entonces es sencillo notar las siguientes cosas:

($\checkmark$) $\overline{A}=\bigcap\limits_{\substack{A\subseteq C\subseteq\mathbb{R}^n\\ C\text{ cerrado}}} C$, esto es consecuencia del teorema anterior.

($\checkmark$) $\bigcap\limits_{\substack{A\subseteq C\subseteq\mathbb{R}^n\\ C\text{ cerrado}}} C\subseteq A$, esto se debe a que A es cerrado y $A\subseteq A$.

Así, tenemos que $\overline{A}\subseteq A$ y ya sabíamos que $A\subseteq\overline{A}$, lo cual prueba que $\overline{A}=A$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supongamos que $\overline{A}=A$, entonces como $\overline{A}=ac(A)\cup A$, tenemos que $ac(A)\cup A=A$ y esto implica que $ac(A)\subseteq A$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que $ac(A)\subseteq A$, entonces $A=ac(A)\cup A=\overline{A}$ y $\overline{A}$ es cerrado, lo cual implica que A es un conjunto cerrado.

$\blacksquare$

Ejemplo ($ac(A)=ac(\overline{A})$).

Sea $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una métrica sobre $\mathbb{R}^n$ y $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Probar que $ac(A)=ac(\overline{A})$.

Solución:

Para probar que $ac(A)=ac(\overline{A})$ es suficiente verificar que

(1) $ac(A)\subseteq ac(\overline{A})$.

(2) $ac(\overline{A})\subseteq ac(A)$.

Prueba de (1): Sea $a\in ac(A)$, entonces para todo $\varepsilon>0$ tenemos que

$$B^*(a;\varepsilon)\cap A\neq\emptyset.$$

Además como $A\subseteq\overline{A}$, tenemos que

$$B^*(a;\varepsilon)\cap A\subseteq B^*(a;\varepsilon)\cap\overline{A}$$

lo cual implica que $B^*(a;\varepsilon)\cap\overline{A}\neq\emptyset$ y así $a\in\overline{A}$. Esto muestra que $ac(A)\subseteq ac(\overline{A})$.

Prueba de (2): Dado $a\in ac(\overline{A})$, veamos que $a\in ac(A)$. Si $a\notin ac(A)$, entonces por la definición de punto de acumulación, debe existir $\varepsilon>0$ tal que

$$\begin{cases} B^*(a;\varepsilon)\cap\overline{A}\neq\emptyset & \text{ya que } a\in ac(\overline{A}), \\ \\ B^*(a;\varepsilon)\cap A=\emptyset & \text{ya que } a\notin ac(A). \end{cases}$$

Por lo tanto, si $x\in B^*(a;\varepsilon)\cap\overline{A}$, entonces es necesario que $x\in ac(A)$ (recordar que $\overline{A}=ac(A)\cup A$). Además como $x\in B^*(a;\varepsilon)$, es fácil probar que existe $\delta>0$ tal que $B^*(x;\delta)\subseteq B^*(a;\varepsilon)$ y por lo tanto:

$$\begin{cases} B^*(x;\delta)\cap A\subseteq B^*(a;\varepsilon)\cap A=\emptyset & \text{ya que } B^*(x;\delta)\subseteq B^*(a;\varepsilon), \\ \\ B^*(x;\delta)\cap A\neq\emptyset & \text{ya que } x\in ac(A). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B^*(x;\delta)\cap A=\emptyset, \\ \\ B^*(x;\delta)\cap A\neq\emptyset \end{cases}$$

lo cual es imposible. De esta forma, es necesario que $a\in ac(A)$ y así $ac(\overline{A})\subseteq ac(A)$.

Ejemplo (puntos de acumulación).

Suponiendo que $\mathbb{R}$ tiene la métrica Euclídea, hallar los puntos de acumulación de los siguientes conjuntos:

(1) $A=\mathbb{Z}=\{x\in\mathbb{R}: x \text{ es un número entero}\}$.

(2) $B=(0,1)=\{x\in\mathbb{R}: 0<x<1\}$.

(3) $C=\mathbb{Q}=\{x\in\mathbb{R}: x \text{ es un número racional}\}$.

(4) $D=\left\{x\in\mathbb{R}: x=\dfrac{1}{2^n} \text{ para algún } n\in\mathbb{N}\right\}$.

(5) $E=\left\{x\in\mathbb{R}: x=\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{5^m} \text{ con } n,m\in\mathbb{N}\right\}$.

Solución:

(1) $ac(A)=\emptyset$.

(2) $ac(B)=[0,1]=\{x\in\mathbb{R}: 0\leq x\leq 1\}$.

(3) $ac(C)=\mathbb{R}$.

(4) $ac(D)=\{0\}$.

(5) $ac(E)=\left\{x\in\mathbb{R}: x=\dfrac{1}{2^n} \text{ con } n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}: x=\dfrac{1}{5^m} \text{ con } m\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$.

La verificación de estos hechos se dejan como ejercicio.

Ejemplo (puntos de acumulación).

Suponiendo que $\mathbb{R}^2$ tiene la métrica Euclídea, hallar los puntos de acumulación de los siguientes conjuntos:

(1) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

(2) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}$.

(3) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \text{ es un número racional y } -2 < y \leq 3\}$.

(4) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \dfrac{1}{2^n} \text{ y } y = \dfrac{1}{3^m} \text{ para } n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Solución:

(1) $ac(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(2) $ac(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$.

(3) $ac(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq 3\}$.

(4) $ac(D) = \{(0,0)\}$.

La verificación de estos hechos se dejan como ejercicio.

Problemas.

(1) Suponiendo que $\mathbb{R}$ tiene la métrica Euclídea, verificar si los siguientes conjuntos son cerrados respecto a esta métrica:

(a) $A = \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es un número entero}\}$.

(b) $B = (0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$.

(c) $C = \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es un número racional}\}$.

(d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{1}{2^n} \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\right\}$.

(e) $E = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{5^m} \text{ con } n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

(2) Suponiendo que $\mathbb{R}^2$ tiene la métrica Euclídea, verificar si los siguientes conjuntos son cerrados respecto a esta métrica:

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

(b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}$.

(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \text{ es un número racional y } -2 < y \leq 3\}$.

(d) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \dfrac{1}{2^n} \text{ y } y = \dfrac{1}{3^m} \text{ para } n, m \in \mathbb{N}\right\}$.