Universidad Pontificia Bolivariana

Vigilada Mineducación

Maestría en Ciencias Naturales y Matemáticas

Clase 2 - Cálculo Avanzado de Varias Variables

Mg: Julián Uribe Castañeda

UPB

15 de diciembre de 2022

Topología en $\mathbb{R}^n$ - Métricas en $\mathbb{R}^n$

Definición (métrica en $\mathbb{R}^n$).

Una métrica sobre $\mathbb{R}^n$ es una función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones:

(1) Para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, tenemos que $d(x,y) \geq 0$. Además

$$\begin{cases} d(x,y) = 0 & \text{si } x = y, \\ \\ d(x,y) > 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

(2) Para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, tenemos que $d(x,y) = d(y,x)$.

(3) Para cada $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, tenemos que $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Notación (definición anterior).

En la definición anterior, las condiciones (2) y (3) se le suele dar la siguiente nomenclatura:

($\checkmark$) Si una función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface (2), decimos que d es simétrica.

($\checkmark$) Si una función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface (3), decimos que d satisface la desigualdad triangular.

Nota (definición anterior).

Es importante tener en cuenta que $\mathbb{R}^n$ tiene muchas métricas diferentes. A continuación mostramos algunos ejemplos de métricas.

Ejemplo (métrica Euclídea).

Sea $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

para cada $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Verificar que d es una métrica en $\mathbb{R}^n$.

Solución.

Para mostrar que d es una métrica en $\mathbb{R}^n$ tenemos que verificar que d satisface las condiciones (1), (2) y (3) de la definición de métrica.

Prueba de (1). Para cada $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$ y cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=i}^{n} (x_i - y_i)^2} \geq \sqrt{(x_i - y_i)^2} = |x_i - y_i| \geq 0.$$

Por lo tanto, si $d(x,y)=0$ entonces

$$0 \leq |x_i - y_i| \leq d(x,y) = 0 \iff |x_i - y_i| = 0 \iff x_i - y_i = 0 \iff x_i = y_i$$

de donde, podemos concluir que

$$\boxed{\begin{array}{c} d(x,y)=0 \;\Rightarrow\; \text{para cada } i \in \{1,\dots,n\} \text{ se tiene que } x_i = y_i \iff (x_1,\dots,x_n) = (y_1,\dots,y_n). \\ d(x,y)=0 \;\Rightarrow\; x=y. \end{array}}$$

Además es sencillo probar que si $x=y$, entonces $d(x,y)=0$, y así:

$$\boxed{d(x,y)=0 \iff x=y.}$$

Ahora como $d(x,y) \geq 0$ concluimos que:

$$\begin{cases} d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=i}^{n} (x_i - y_i)^2} = 0 & \text{si } x = y, \\ d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=i}^{n} (x_i - y_i)^2} > 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Prueba de (2): Para cada $x=(x_1,\ldots,x_n)$ y $y=(y_1,\ldots,y_n)$ en $\mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=i}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=i}^{n}(y_i-x_i)^2}=d(y,x).$$

$$d(x,y)=d(y,x).$$

Prueba de (3): Para cada $x,y,z\in\mathbb{R}^n$, tenemos que:

$$d(x,y)=\|x-y\|=\|(x-z)+(z-y)\|\underset{(*)}{\leq}\|x-z\|+\|z-y\|=d(x,z)+d(z,y),$$

donde la desigualdad $(*)$ es consecuencia de la desigualdad triangular probada anteriormente.

Ejemplo (métrica del supremo).

Sea $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida como

$$d(x,y)=\|x-y\|_s=\max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|$$

para cada $x=(x_1,\ldots,x_n),y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. Verificar que d es una métrica en $\mathbb{R}^n$.

Solución:

Para mostrar que d es una métrica en $\mathbb{R}^n$ tenemos que verificar que d satisface las condiciones (1), (2) y (3) de la definición de métrica.

Prueba de (1): Para cada $x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)$ en $\mathbb{R}^n$ y cada $i\in\{1,\ldots,n\}$ tenemos que:

$$d(x,y)=\|x-y\|_s=\max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|\geq=|x_i-y_i|\geq 0.$$

Por lo tanto, si $d(x,y)=0$ entonces

$$0\leq|x_i-y_i|\leq d(x,y)=0 \;\Leftrightarrow\; |x_i-y_i|=0 \;\Leftrightarrow\; x_i-y_i=0 \;\Leftrightarrow\; x_i=y_i$$

de donde, podemos concluir que

$$d(x,y)=0 \;\Rightarrow\; \text{para cada } i\in\{1,\ldots,n\} \text{ se tiene que } x_i=y_i \;\Leftrightarrow\; (x_1,\ldots,x_n)=(y_1,\ldots,y_n).$$

$$d(x,y)=0 \;\Rightarrow\; x=y.$$

Además es sencillo probar que si $x=y$, entonces $d(x,y)=0$, y así:

$$\boxed{d(x,y)=0 \;\Leftrightarrow\; x=y.}$$

Ahora como $d(x,y)\geq 0$, concluimos que:

$$\begin{cases} d(x,y) = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| = 0 & \text{si } x = y, \\ \\ d(x,y) = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| > 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Prueba de (2): Para cada $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$d(x,y) = \|x - y\|_s = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| = \max_{1\leq i\leq n} |y_i - x_i| = \|y - x\|_s = d(y,x).$$

$$d(x,y) = d(y,x).$$

Prueba de (3): Para cada $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, tenemos que:

$$d(x,y) = \|x - y\|_s = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| = \max_{1\leq i\leq n} |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)| \underset{(*)}{\leq}$$

$$\leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i - z_i| + \max_{1\leq i\leq n} |z_i - y_i| =$$

$$= \|x - z\|_s + \|z - y\|_s = d(x,z) + d(z,y).$$

donde la desigualdad $(*)$ es consecuencia de la desigualdad triangular probada anteriormente.

Problemas.

(1) Supongamos que $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ es una métrica sobre $\mathbb{R}^n$ y sea $r>0$. Demostrar que la función $r\cdot d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ definida como

$$(r\cdot d)(x,y):=r\cdot d(x,y)$$

para cada $x,y\in\mathbb{R}^n$ es una métrica en $\mathbb{R}^n$.

(2) Supongamos que $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ es una métrica sobre $\mathbb{R}^n$. Si $D:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ es la función definida por

$$D(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

para cada $x,y\in\mathbb{R}^n$. Demostrar que D es una métrica en $\mathbb{R}^n$.

(3) Sea $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida como

$$d(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } x\neq y,\\ 0 & \text{si } x=y.\end{cases}$$

Demostrar que d es una métrica en $\mathbb{R}^n$.

Nota: Esta métrica es llamada la métrica discreta en $\mathbb{R}^n$.

(4) Sea $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por

$$d(x,y)=\|x-y\|_p:=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

para todo $x=(x_1,\ldots,x_n)$ y $y=(y_1,\ldots,y_n)$ en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que d es una métrica en $\mathbb{R}^n$.