Maestría en Ciencias Naturales y Matemáticas

Clase 7 - Cálculo Avanzado de Varias Variables

Mg: Julián Uribe Castañeda

UPB

28 de febrero de 2023

Definición (función continua en un punto).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función y $a \in A$. Decimos que f es continua en a, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\boxed{\text{Si } x \in B(a,\delta) \cap A, \text{ entonces } f(x) \in B(f(a),\varepsilon).}$$

Observación (definición anterior).

En la definición anterior no mostramos las diferencias de las bolas abiertas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^n$. Es decir que al escribir x, a, $f(x)$ y $f(a)$ como:

$$\begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n), \\ \\ a = (a_1, \dots, a_n) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} f(x) = (y_1, \dots, y_m), \\ \\ f(a) = (b_1, \dots, b_m) \end{cases}$$

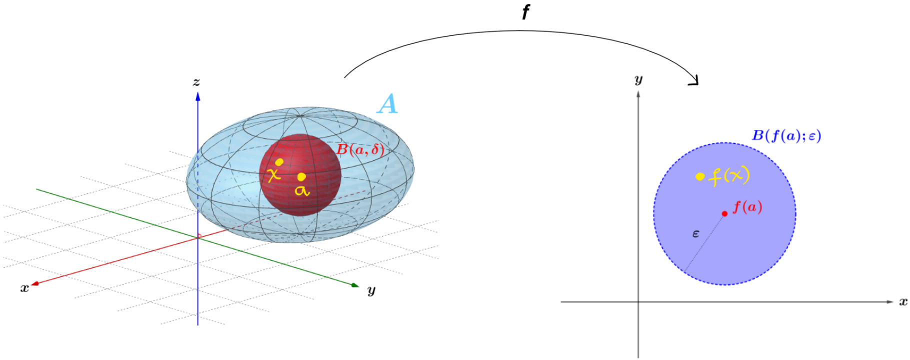
Entonces

$$\begin{cases} x \in B(a,\delta) \cap A & \Leftrightarrow \ \|x - a\| < \delta \ \text{ y } \ x \in A \ \Leftrightarrow \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} < \delta \ \text{ y } \ x \in A, \\ \\ f(x) \in B(f(a),\varepsilon) & \Leftrightarrow \ \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (y_j - b_j)^2} < \varepsilon. \end{cases}$$

Por lo tanto, la definición anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

Dada una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $a \in A$, decimos que f es continua en a, si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\text{Si } \|x - a\| < \delta \text{ y } x \in A, \text{ entonces } \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$



Nota (definición anterior).

Diremos además que una función $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en A, si f es continua en cada punto $a \in A$.

Teorema (propiedades de funciones continuas).

Sean $f, g: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $a \in A$ y $r \in \mathbb{R}$. Entonces

(1) La función $rf: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$(rf)(x) := rf(x)$$

para cada $x \in A$ es continua en a.

(2) La función $f + g: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

para cada $x \in A$ es continua en a.

(3) La función $f - g: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$(f-g)(x) := f(x) - g(x)$$

para cada $x \in A$ es continua en a.

(4) La función $f \cdot g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

para cada $x \in A$ es continua en a.

(5) Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, entonces la función $\dfrac{f}{g} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

para cada $x \in A$ es continua en a.

Demostración:

(1) Como f es continua en a, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{Si } \|x - a\| < \delta \text{ y } x \in A, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{|r| + 1}.$$

De esta manera, se tiene que

$$|rf(x) - rf(a)| = |r\ [f(x) - f(a)]\ | = |r| \cdot |f(x) - f(a)| < |r| \left(\frac{\varepsilon}{|r| + 1}\right) = \left(\frac{|r|}{|r| + 1}\right) \varepsilon < \varepsilon.$$

Lo anterior muestra que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{Si } \|x-a\| < \delta \text{ y } x \in A, \text{ entonces } |rf(x) - rf(a)\ | < \varepsilon$$

lo cual significa que $rf : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en a.

(2) Como f y g son continuas en a, entonces dado $\varepsilon > 0$, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$\begin{cases} \text{Si } \|x-a\| < \delta_1 \text{ y } x \in A, \text{entonces } |f(x) - f(a)| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \\ \\ \text{Si } \|x-a\| < \delta_2 \text{ y } x \in A, \text{entonces } |g(x) - g(a)| < \dfrac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

De esta manera, al tomar $\delta := \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ tenemos que si $\|x-a\| < \delta$ y $x \in A$, entonces:

$$\Big|[f(x)+g(x)] - [f(a)+g(a)]\Big| = \Big|[f(x)-f(a)] + [g(x)-g(a)]\Big| \leq \Big|f(x)-f(a)\Big| + \Big|g(x)-g(a)\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así, hemos probado que

$$\text{Si } \|x-a\| < \delta \text{ y } x \in A, \text{ entonces } \Big|[f(x)+g(x)] - [f(a)+g(a)]\Big| < \varepsilon$$

lo que significa que $f+g$ es continua en a.

(3) La prueba es similar a (2).

(4) Dado $x \in A$, notemos inicialmente que

$$\left|f(x)g(x)-f(a)g(a)\right| \leq \left|g(x)\right| \cdot \left|f(x)-f(a)\right| + \left|f(a)\right| \cdot \left|g(x)-g(a)\right|.$$

Esto se debe a que

$$\left|f(x)g(x)-f(a)g(a)\right| = \left|f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)\right| =$$

$$= \left|g(x)[f(x)-f(a)]+f(a)[g(x)-g(a)]\right| \leq \left|g(x)[f(x)-f(a)]\right| + \left|f(a)[g(x)-g(a)]\right| =$$

$$= \left|g(x)\right| \cdot \left|f(x)-f(a)\right| + \left|f(a)\right| \cdot \left|g(x)-g(a)\right|.$$

Ahora dado $\varepsilon > 0$, debido a la continuidad de f y g en a, existen $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$ tales que:

⊙ Si $\|x-a\| < \delta_1$ y $x \in A$, entonces $\left|f(x)-f(a)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2\left(1+\left|g(a)\right|\right)}$.

⊚ Si $\|x-a\| < \delta_2$ y $x \in A$, entonces $\left|g(x)-g(a)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2\left(1+\left|f(a)\right|\right)}$.

⊛ Si $\|x-a\| < \delta_3$ y $x \in A$, entonces $\left|g(x)-g(a)\right| < 1$.

Además de ⊛ podemos decir que $\left|g(x)\right| < 1 + \left|g(a)\right|$, ya que:

$$\left|g(x)\right| = \left|[g(x)-g(a)]+g(a)\right| \leq \left|g(x)-g(a)\right| + \left|g(a)\right| < 1 + \left|g(a)\right|.$$

De esta manera, si tomamos $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, entonces para cada $x \in A$ con $\|x-a\| < \delta$, se tiene que

$$\left|f(x)g(x)-f(a)g(a)\right| \leq \left|g(x)\right| \cdot \left|f(x)-f(a)\right| + \left|f(a)\right| \cdot \left|g(x)-g(a)\right| \leq$$

$$\leq \left(1+\left|g(a)\right|\right) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2\left(1+\left|g(a)\right|\right)}\right) + \left|f(a)\right| \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2\left(1+\left|f(a)\right|\right)}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así, el argumento dado anteriormente prueba que

$$\text{Si } \|x-a\| < \delta \text{ y } x \in A, \text{ entonces } \left|f(x)g(x)-f(a)g(a)\right| < \varepsilon$$

lo cual significa que $f \cdot g$ es continua en a.

(5) Dado $x \in A$, notemos inicialmente que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right| \leq \frac{\left|f(x)-f(a)\right|}{\left|g(x)\right|} + \frac{\left|f(a)\right|}{\left|g(a)\right|} \cdot \frac{\left|g(x)-g(a)\right|}{\left|g(x)\right|}.$$

Esto se debe a que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right| = \left|\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)}\right| = \left|\frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)}\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)}{g(x)g(a)}\right) - \left(\frac{f(a)g(x)-f(a)g(a)}{g(x)g(a)}\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)}{g(x)g(a)}\right| + \left|\frac{f(a)g(x)-f(a)g(a)}{g(x)g(a)}\right| =$$

$$= \frac{|g(a)|}{|g(x)g(a)|}\cdot|f(x)-f(a)| + \frac{|f(a)|}{|g(x)g(a)|}\cdot|g(x)-g(a)| = \frac{|f(x)-f(a)|}{|g(x)|} + \frac{|f(a)|}{|g(a)|}\cdot\frac{|g(x)-g(a)|}{|g(x)|}.$$

Ahora dado $\varepsilon > 0$, debido a la continuidad de f y g en a, existen $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$ tales que:

⊙ Si $\|x-a\| < \delta_1$ y $x \in A$, entonces $|f(x)-f(a)| < \dfrac{\varepsilon|g(a)|}{4}$.

⊙ Si $\|x-a\| < \delta_2$ y $x \in A$, entonces $|g(x)-g(a)| < \dfrac{\varepsilon|g(a)|^2}{4(1+|f(a)|)}$.

⊛ Si $\|x-a\| < \delta_3$ y $x \in A$, entonces $|g(x)-g(a)| < \dfrac{|g(a)|}{2}$.

Además de ⊛ podemos decir que $|g(x)| > \dfrac{|g(a)|}{2}$, ya que:

$$|g(x)| = |g(a)-[g(a)-g(x)]| \geq |g(a)| - |g(a)-g(x)| =$$

$$= |g(a)| - |g(x)-g(a)| \geq |g(a)| - \frac{|g(a)|}{2} = \frac{|g(a)|}{2}.$$

De esta manera, si tomamos $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, entonces para cada $x \in A$ con $\|x-a\| < \delta$, se tiene que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right| \leq \frac{|f(x)-f(a)|}{|g(x)|} + \frac{|f(a)|}{|g(a)|} \cdot \frac{|g(x)-g(a)|}{|g(x)|} <$$

$$< \frac{\frac{\varepsilon|g(a)|}{4}}{\frac{|g(a)|}{2}} + \frac{|f(a)|}{|g(a)|} \cdot \frac{\frac{\varepsilon|g(a)|^2}{4(1+|f(a)|)}}{\frac{|g(a)|}{2}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|f(a)|}{1+|f(a)|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así, el argumento dado previamente prueba que

$$\text{Si } \|x-a\| < \delta \text{ y } x \in A, \text{ entonces } \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right| < \varepsilon$$

lo cual significa que $\dfrac{f}{g}$ es continua en a.

$\blacksquare$

Nota (funciones continuas).

Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una función, $a \in A$ y $a \in ac(A)$ entonces:

$$\boxed{f \text{ es continua en } a \iff \lim_{x \longmapsto a} f(x) = f(a).}$$

Ejemplo (las funciones constantes son funciones continuas).

Sea $c \in \mathbb{R}^m$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la función definida como

$$f(x) = c$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces f es continua en $\mathbb{R}^n$.

Razón:

Sean $a \in \mathbb{R}^n$ un punto arbitrario y $\varepsilon > 0$. Si $\delta := \varepsilon$, entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x - a\| < \delta = \varepsilon$ se tiene que

$$\|f(x) - f(a)\| = \|c - c\| = \|O_m\| = 0 < \varepsilon$$

lo cual prueba que f es continua en a, ya que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ $(\delta = \varepsilon)$ tal que:

$$\text{Si } \|x - a\| < \delta \text{ y } x \in \mathbb{R}^n, \text{ entonces } \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Además como f es continua en un punto arbitrario $a \in \mathbb{R}^n$, tenemos que f es continua en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo (la funciones proyección son funciones continuas).

Sean $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots x_n) = x_i$$

para cada $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces f es continua en $\mathbb{R}^n$.

Razón:

Sean $a = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$, entonces tenemos que:

($\checkmark$) $\left|f(x) - f(a)\right| = \left|f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)\right| = |x_i - a_i|$.

($\checkmark$) $|x_i - a_i| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j)^2} = \left\|(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)\right\| = \|x - a\|$.

Además al tomar $\delta := \varepsilon$, se tiene que si $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x - a\| < \delta$, entonces

$$\left|f(x) - f(a)\right| \leq \|x - a\| < \varepsilon.$$

De donde, tenemos que f es continua en $a \in \mathbb{R}^n$, ya que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ $(\delta = \varepsilon)$ tal que

$$\text{Si } \|x - a\| < \delta \text{ con } x \in \mathbb{R}^n, \text{ entonces } \left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon.$$

Y como a es un punto arbitrario de $\mathbb{R}^n$ se tiene que f es continua en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo (las funciones polinómicas son funciones continuas).

Las funciones polinómicas se describen de la siguiente manera:

(✓) Las funciones polinómicas de una variable son funciones $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ que se describen como:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

con $x\in\mathbb{R}$ y $a_0,\ldots,a_n$ constantes reales fijas. Los siguientes son algunos ejemplos de polinomios de una variable:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x)=2x^4+x^2-12x+6,\\ f(x)=2x^3+5x^2-x+20,\\ f(x)=-x^4+15. \end{array}}$$

(✓) Las funciones polinómicas de dos variables son funciones $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ que se describen como:

$$f(x,y)=\sum_{i,j}a_{(i,j)}x^iy^j=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{(i,j)}x^iy^j$$

con $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ y $\{a_{(i,j)}:0\leq i\leq n,\ 0\leq j\leq m\}$ es una colección finita de números reales fijos. Los siguientes son algunos ejemplos de funciones polinomicas de 2 variables:

$$f(x,y) = 2xy + x^2y^3 - 12x^4y,$$
$$f(x,y) = 2x^2y^3 + 5x^2y^8 - x^4 + y,$$
$$f(x,y) = 8xy + 5y^8 - x^4 + 6.$$

($\checkmark$) Las funciones polinómicas de n variables son funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que se describen como:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{(i_1,\ldots,i_n)} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} = \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{i_n=0}^{m_n} a_{(i_1,\ldots,i_n)} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

con $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\{a_{(i_1,\ldots,i_n)} : 0 \leq i_1 \leq m_1, \ldots, 0 \leq i_n \leq m_n\}$ es una colección finita de números reales fijos. Los siguientes son algunos ejemplos de funciones polinómicas de varias variables:

$$f(x,y,z) = 2xyz + x^2y^3z^6 - 12x^4z + 20,$$
$$f(x,y,z) = 2x^2y^3z + 5x^2y^8 - x^4 + z + 10,$$
$$f(x,y,z,w) = 8x^2yzw^5 + 5y^8 - x^4w.$$

Entonces las funciones polinómicas son funciones continuas en $\mathbb{R}^n$ debido al ejemplo anterior y el teorema anterior.

Ejemplo (algunas funciones continuas adicionales).

Vamos a suponer que las siguientes funciones son continuas en el conjunto respectivo.

(1) $f(x) = sin(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$.

(2) $f(x) = cos(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$.

(3) $f(x) = a^x$ con $a > 0$ es una función continua en $\mathbb{R}$.

(4) $f(x) = ln(x)$ es una función continua en $(0, +\infty)$.

(5) $f(x) = \sqrt[2n]{x}$ es una función continua en $[0, +\infty)$ para $n \in \mathbb{N}$.

(6) $f(x) = \sqrt[2n-1]{x}$ es una función continua en $\mathbb{R}$ para $n \in \mathbb{N}$.

La prueba de la continuidad de estas funciones se puede ver en [Apostol, 1991] y [Spivak, 1988].

Definición (función racional de n variables).

Una función racional de n variables es una función que se escribe de la forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde P y Q son funciones polinómicas de n variables.

Ejemplo (las funciones racionales son funciones continuas).

Sea $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional de n variables con P y Q funciones polinómicas de n variables. Entonces f es continuas en $A = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \neq 0\}$.

Razón:

Esto es consecuencia debido a que el cociente de funciones continuas es una función continua, siempre que el denominador no se anule y las funciones polinómicas son continuas en todas partes.

Nota (siguientes teoremas).

Los siguientes teoremas muestran dos maneras equivalentes de definir continuidad. Estas maneras son:

(✓) Usando sucesiones.

(✓) Usando conjuntos abiertos de los espacios Euclídeos.

Teorema (continuidad en términos de conjuntos abiertos).

Sea $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función, entonces:

$$f \text{ es continua en } \mathbb{R}^n \iff \begin{cases} \text{para cada abierto } U \subseteq \mathbb{R}^m \text{ se tiene que } f^{-1}(U) \\ \text{es un conjunto abierto en } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Demostración:

"$\Rightarrow$" Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un abierto. Si verificamos que todos los puntos de $f^{-1}(U)$ son puntos interiores de $f^{-1}(U)$, entonces $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto. De esta manera al tomar $a \in f^{-1}(U)$ se tiene que $f(a) \in U$ y al ser U un conjunto abierto, debe existir $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(a);\varepsilon) \subseteq U$. Además, debido a la continuidad de f en a, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a;\delta)) \subseteq B(f(a);\varepsilon) \subseteq U$ y así $B(a;\delta) \subseteq f^{-1}(U)$ lo cual muestra que a es un punto interior de $f^{-1}(U)$.

"$\Leftarrow$" Sea $a \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$. Como $f^{-1}[B(f(a);\varepsilon)]$ es abierto y $a \in f^{-1}[B(f(a);\varepsilon)]$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $B(a;\delta) \subseteq f^{-1}[B(f(a);\varepsilon)]$. Así tenemos que $f(B(a;\delta)) \subseteq B(f(a);\varepsilon)$, lo cual prueba que f es continua en a y como a es un punto arbitrario de $\mathbb{R}^n$ se tiene que f es continua en $\mathbb{R}^n$.

$\blacksquare$

Definición (subconjuntos abiertos de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$).

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $U \subseteq A$. Decimos que U es abierto en A, si para todo $a \in U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a;\varepsilon) \cap A \subseteq U$.

Nota (siguiente teorema).

La prueba del siguiente teorema es completamente análoga al teorema anterior y se deja como ejercicio.

Teorema (continuidad en términos de conjuntos abiertos).

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función, entonces:

$$f \text{ es continua en } A \iff \begin{cases} \text{para cada abierto } U \subseteq \mathbb{R}^m \text{ se tiene que } f^{-1}(U) \\ \text{es un conjunto abierto en } A. \end{cases}$$

■

Teorema (continuidad en términos de sucesiones).

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función y $a \in A$, entonces:

$$f \text{ es continua en } a \iff \begin{cases} \text{para toda sucesión } \{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq A \text{ con } \lim\limits_{n \mapsto +\infty} x_n = a, \\ \\ \text{se tiene que } \lim\limits_{n \mapsto +\infty} f(x_n) = f(a). \end{cases}$$

Demostración:

"$\Rightarrow$" Supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq A$ con $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} x_n = a$. Entonces dado $\varepsilon > 0$, debido a la continuidad de f existe $\delta > 0$ tal que

$$f\left[B(a;\delta)\cap A\right] \subseteq B(f(a);\varepsilon)$$

Además como $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} x_n = a$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(a;\delta)\cap A$ para todo $n \geq N$ y así

$$f(x_n) \in B(f(a);\varepsilon)$$

para todo $n \geq N$. De donde, concluimos que $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x_n) = f(a)$.

"$\Leftarrow$" Vamos a probar por reducción al absurdo que f es continua en a. Si f no es continua en a, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ se tiene que:

$$f\left[B(a;\delta)\cap A\right] \nsubseteq B(f(a);\varepsilon).$$

En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$f\left(B\left(a;\frac{1}{n}\right)\cap A\right) \nsubseteq B(f(a);\varepsilon) \iff f\left(B\left(a;\frac{1}{n}\right)\cap A\right) \cap \left(B(f(a);\varepsilon)\right)^c \neq \emptyset.$$

Así, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq A$ tal que:

($\checkmark$) $x_n \in B\left(a;\frac{1}{n}\right)\cap A$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(✓) $f(x_n) \in f\left(B\left(a;\frac{1}{n}\right)\cap A\right)\cap (B(f(a);\varepsilon))^c$ para cada $n\in\mathbb{N}$.

De esta manera, hemos construido una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}\subseteq A$ tal que:

$$\lim_{n\mapsto+\infty} x_n = a \text{ y } f(x_n)\notin B(f(a);\varepsilon) \text{ para todo } n\in\mathbb{N}$$

lo cual implica que $f(x_n) \underset{n\mapsto+\infty}{\nrightarrow} f(a)$, pero esto va en contra de nuestra hipótesis. Lo anterior muestra que f es continua en a.

■

Teorema (la compuesta de funciones continuas es una función continua).

Sea $f: A\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g: B\subseteq\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^p$ funciones que satisfacen las siguientes condiciones:

(✓) $f(A)\subseteq B$.

(✓) f es continua en $a\in A$.

(✓) g es continua en $f(a)\in B$.

Entonces $g\circ f$ es una función continua en a.

Demostración:

Para la prueba de este teorema usaremos sucesiones. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq A$ una sucesión tal que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} x_n = a$, entonces:

(1) $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} f(x_n) = f(a)$, esto es debido a la continuidad de f en a.

(2) $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} g[f(x_n)] = g[f(a)]$, esto es debido a la continuidad de g en $f(a)$ y (1).

Pero (2) es equivalente a tener que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(a)$. Así, hemos probado que

$$\text{Si } \{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq A \text{ es una sucesión con } \lim_{n \mapsto +\infty} x_n = a, \text{ entonces } \lim_{n \mapsto +\infty} (g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(a)$$

lo cual significa que $g \circ f$ es continua en a.

■

Ejemplo (aplicación teorema anterior).

(1) Si $H(x,y) = sin(2xy + x^4y^2)$, entonces H es continua en $\mathbb{R}^2$ ya que $H = g \circ f$, con $f(x,y) = 2xy + x^4y^2$ y $g(x) = sin(x)$.

(2) Si $H(x,y) = 20cos\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$, entonces H es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ya que $H = g \circ f$, con $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ y $g(x) = 20cos(x)$ las cuales continuas en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y en $\mathbb{R}$ respectivamente.

Teorema (componentes y continuidad).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la función definida como:

$$x \mapsto f(x) = (f^1(x), \ldots, f^m(x))$$

para cada $x \in A$, con $f^1 : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \ldots, f^m : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones. Entonces

$$\boxed{f \text{ es continua en } a \in A \iff f^1, \ldots, f^m \text{ son continuas en } a.}$$

Demostración:

"$\Rightarrow$" Supongamos que f es continua en a. Entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{Si } \|x - a\| < \delta \text{ y } x \in A, \text{ entonces } \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Además, tenemos que:

($\checkmark$) $f(x) - f(a) = (f^1(x), \ldots, f^m(x)) - (f^1(a), \ldots, f^m(a)) = (f^1(x) - f^1(a), \ldots, f^m(x) - f^m(a))$.

($\checkmark$) $|f^i(x) - f^i(a)| \leq \|f(x) - f(a)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (f^j(x) - f^j(a))^2}$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Por lo tanto, tenemos que para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{Si } \|x - a\| < \delta \text{ y } x \in A, \text{ entonces } |f^i(x) - f^i(a)| < \varepsilon$$

lo cual prueba que $f^1,\ldots,f^m$ son continuas en a.

"$\Leftarrow$" Supongamos ahora que $f^1,\ldots,f^m$ son continuas en a. Entonces dado $\varepsilon>0$, existen $\delta_1>0,\ldots,\delta_m>0$ tales que

$$\text{Si } \|x-a\|<\delta_j \text{ y } x\in A, \text{ entonces } |f^j(x)-f^j(a)|<\frac{\varepsilon}{m}$$

para $j\in\{1,\ldots,m\}$. Ahora, notemos que:

($\checkmark$) $\|f(x)-f(a)\|=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(f^j(x)-f^j(a))^2}\leq\sum_{j=1}^{m}|f^j(x)-f^j(a)|.$

($\checkmark$) Si tomamos a $\delta:=\text{mín}\{\delta_1,\ldots,\delta_m\}$, entonces para todo $x\in A$ con $\|x-a\|<\delta$ se tiene que

$$\|f(x)-f(a)\|\leq\sum_{j=1}^{m}|f^j(x)-f^j(a)|<\sum_{j=1}^{m}\frac{\varepsilon}{m}=\varepsilon.$$

De lo anterior, concluimos que para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ $(\delta=\text{mín}\{\delta_1,\ldots,\delta_m\})$ tal que

$$\text{Si } \|x-a\|<\delta \text{ y } x\in A, \text{ entonces } \|f(x)-f(a)\|<\varepsilon$$

lo que prueba que f es continua en a.

$\blacksquare$

Ejemplo (funciones continuas).

Sea $f(x,y,z)=\left(4sin\left(\frac{x+y^2}{z}\right), ln(16-x^2-y^2), \sqrt{x^2+y^2-4}\right)$. Encontrar el conjunto más grande donde f es continua.

Solución:

Según el teorema anterior, es suficiente verificar donde las componentes de f son continuas simultáneamente. Por lo tanto, si:

$$\begin{cases} f^1(x,y,z)=4sin\left(\frac{x+y^2}{z}\right), \\ \\ f^2(x,y,z)=ln(16-x^2-y^2), \\ \\ f^3(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-4}. \end{cases}$$

Entonces

(✓) f^1 es continua en $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\neq 0\}$.

(✓) f^2 es continua en $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 16-x^2-y^2>0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2<16\}$.

(✓) f^3 es continua en $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2-4\geq 0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 4\leq x^2+y^2\}$.

De esta manera, el conjunto más grande donde f es continua es

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 4\leq x^2+y^2<16,\ z\neq 0\}.$$

Problemas.

(1) Sea $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}^n$ y supongamos que existe $a\in\mathbb{R}^n$ tal que $f(a)>0$. Demostrar que existe $\delta>0$ tal que

$$f(x)>0$$

para cada $x\in B(a;\delta)$.

(2) Sean $A\subseteq\mathbb{R}^n$ y $U\subseteq A$. Demostrar que

$$U \text{ es abierto en } A \iff U=V\cap A \text{ para algún abierto } V \text{ en } \mathbb{R}^n.$$

Definición (conjunto cerrado): Sean $A\subseteq\mathbb{R}^n$ y $D\subseteq A$. Decimos que D es cerrado en A, si $A-D=\{x\in A : x\notin D\}$ es abierto en A.

(3) Sean $A\subseteq\mathbb{R}^n$ y $D\subseteq A$. Demostrar que

$$D \text{ es cerrado en } A \iff D=L\cap A \text{ para algún cerrado } L \text{ en } \mathbb{R}^n.$$

(4) Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función, entonces:

$$f \text{ es continua en } A \iff \begin{cases} \text{para cada cerrado } D\subseteq\mathbb{R}^m \text{ se tiene que } f^{-1}(D) \\ \text{es un conjunto cerrado en } A. \end{cases}$$

(5) Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua en A. Demostrar que para todo $b \in \mathbb{R}^m$, tenemos que

$$f^{-1}(\{b\}) = \{x \in A : f(x) = b\}$$

es un conjunto cerrado en A.

(6) Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Demostrar que

$$f \text{ es continua en } \mathbb{R}^n \iff \begin{cases} \text{para todo } B \subseteq \mathbb{R}^m \text{ se tiene que} \\ \\ f^{-1}(int(B)) \subseteq int\big(f^{-1}(B)\big). \end{cases}$$

(7) Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Demostrar que

$$f \text{ es continua en } \mathbb{R}^n \iff \begin{cases} \text{para todo } C \subseteq \mathbb{R}^n \text{ se tiene que} \\ \\ f(\overline{C}) \subseteq \overline{f(C)}. \end{cases}$$

(8) Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes propiedades:

⋆ f es continua en $x = 0$.

⋆ $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Demostrar que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x) = ax$.

Bibliografía

Apostol, T. M. (1991).
Calculus, Volume 1.
John Wiley & Sons.

Spivak, M. (1988).
Cálculo infinitesimal.
Reverté.