Maestría en Ciencias Naturales y Matemáticas

Clase 4 - Cálculo Avanzado de Varias Variables

Mg: Julián Uribe Castañeda

UPB

15 de diciembre de 2022

Topología en $\mathbb{R}^n$ - Equivalencia de métricas

Definición (métricas equivalentes en $\mathbb{R}^n$).

Sean $d_1, d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ métricas en $\mathbb{R}^n$. Decimos que d_1 y d_2 son métricas equivalentes, si existen $\alpha, \beta > 0$ tales que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\boxed{\alpha \cdot d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta \cdot d_1(x,y).}$$

Nota (métricas en $\mathbb{R}^n$).

(1) Si $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es la métrica Euclídea para $\mathbb{R}^n$, entonces denotaremos las bolas abiertas en $\mathbb{R}^n$ simplemente como $B(a;\varepsilon)$.

(2) Usualmente cuando decimos que un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, debemos suponer que estamos trabajando con la métrica Euclídea ó con una métrica específica que se esté considerando.

(3) La importancia de las métricas equivalentes, es que ellas generan los mismos conjuntos abiertos (ya veremos por que esta afirmación es cierta).

(4) Aunque en este curso trabajaremos principalmente con la métrica Euclídea en $\mathbb{R}^n$, es importante tener en consideración la existencia de otras métricas en $\mathbb{R}^n$ las cuales son de suma importancia en matemáticas.

Ejemplo (la métrica Euclídea y la métrica del supremo son equivalentes).

Sean d_1 y d_2 las métricas Euclídea y del supremo respectivamente en $\mathbb{R}^n$, entonces para todo $x,y\in\mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot d_1(x,y)\leq d_2(x,y)\leq d_1(x,y).}$$

Solución:

Dados $x=(x_1,\ldots,x_n)$ y $y=(y_1,\ldots,y_n)$ vectores en $\mathbb{R}^n$, tenemos que:

(✓) $d_1(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$.

(✓) $d_2(x,y)=\max\limits_{1\leq j\leq n}|x_j-y_j|$.

Además, podemos notar las siguientes cosas:

(1) $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\max\limits_{1\leq j\leq n}|x_j-y_j|\right)^2}=\sqrt{n\cdot\left(\max\limits_{1\leq j\leq n}|x_j-y_j|\right)^2}=\sqrt{n}\cdot\max\limits_{1\leq j\leq n}|x_j-y_j|$. Esto implica que

$$d_1(x,y)\leq\sqrt{n}\cdot d_2(x,y)\ \Rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot d_1(x,y)\leq d_2(x,y).$$

(2) Existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $d_2(x,y) = \max\limits_{1 \le j \le n} |x_j - y_j| = |x_k - y_k|$ y por tanto

$$d_2(x,y) = |x_k - y_k| = \sqrt{(x_k - y_k)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = d_1(x,y) \;\Rightarrow\; d_2(x,y) \le d_1(x,y).$$

Así, de (1) y (2) tenemos que

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le d_1(x,y).}$$

Esto en particular nos muestra que d_1 y d_2 son métricas equivalentes en $\mathbb{R}^n$.

Nota (métricas Equivalentes).

Es importante notar que no todas las métricas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes (problema 1.3.2). Pero las métricas que son equivalentes describen los mismos conjuntos abiertos como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema (equivalencia de métricas $\Rightarrow$ los mismos abiertos).

Supongamos que d_1 y d_2 son métricas equivalentes en $\mathbb{R}^n$ y $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\boxed{U \text{ es abierto en } \mathbb{R}^n \text{ bajo la métrica } d_1 \iff U \text{ es abierto en } \mathbb{R}^n \text{ bajo la métrica } d_2.}$$

Demostración.

Sean $\alpha, \beta > 0$ tales que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\boxed{\alpha \cdot d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta \cdot d_1(x,y).}$$

Entonces para demostrar este teorema es necesario verificar las siguientes afirmaciones:

"$\Rightarrow$" Si U es abierto en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica d_1, entonces U es abierto en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica d_2.

"$\Leftarrow$" Si U es abierto en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica d_2, entonces U es abierto en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica d_1.

De esta forma, tenemos que

"$\Rightarrow$" Supongamos que U es abierto en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica d_1 y probemos que U es abierto en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica d_2.

Sea $a \in U$, entonces como U es abierto bajo la métrica d_1, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{d_1}(a;\varepsilon) \subseteq U$. Entonces es fácil notar que $B_{d_2}(a;\alpha\cdot\varepsilon) \subseteq B_{d_1}(a;\varepsilon) \subseteq U$, ya que:

$$\text{Si } x \in B_{d_2}(a;\alpha\cdot\varepsilon) \;\Rightarrow\; \begin{cases} d_2(a,x) < \alpha\cdot\varepsilon, \\ \\ \alpha\cdot d_1(a,x) \leq d_2(a,x) \end{cases} \;\Rightarrow\; \alpha\cdot d_1(a,x) < \alpha\cdot\varepsilon$$

$$\alpha\cdot d_1(a,x) < \alpha\cdot\varepsilon \;\Rightarrow\; d_1(a,x) < \varepsilon \;\Rightarrow\; x \in B_{d_1}(a;\varepsilon) \subseteq U.$$

De esta forma $B_{d_2}(a;\alpha\cdot\varepsilon) \subseteq U$, y esto prueba que U es abierto en $\mathbb{R}^n$ respecto a la métrica d_2.

"$\Leftarrow$" Supongamos que U es abierto en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica d_2 y probemos que U es abierto en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica d_1.

Sea $a \in U$, entonces como U es abierto bajo la métrica d_2, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{d_2}(a;\varepsilon) \subseteq U$. Entonces es fácil notar que $B_{d_1}\left(a;\dfrac{\varepsilon}{\beta}\right) \subseteq B_{d_2}(a;\varepsilon) \subseteq U$, ya que:

$$\text{Si } x \in B_{d_1}\left(a; \frac{\varepsilon}{\beta}\right) \Rightarrow \begin{cases} d_1(a,x) < \dfrac{\varepsilon}{\beta}, \\ \\ d_2(a,x) \leq \beta \cdot d_1(a,x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta \cdot d_1(a,x) < \varepsilon, \\ \\ d_2(a,x) \leq \beta \cdot d_1(a,x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta \cdot d_1(a,x) < \varepsilon, \\ \\ d_2(a,x) \leq \beta \cdot d_1(a,x) \end{cases} \Rightarrow d_2(a,x) < \varepsilon \Rightarrow x \in B_{d_2}(a;\varepsilon) \subseteq U.$$

De esta forma $B_{d_1}\left(a; \frac{\varepsilon}{\beta}\right) \subseteq U$, y esto prueba que U es abierto en $\mathbb{R}^n$ respecto a la métrica d_1.

∎

Observación (idea del teorema anterior).

La idea de la prueba del teorema anterior, es notar que

$$B_{d_2}(a; \alpha \cdot \varepsilon) \subseteq B_{d_1}(a;\varepsilon) \subseteq B_{d_2}(a; \beta \cdot \varepsilon)$$

bajo el supuesto de que $\alpha \cdot d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta \cdot d_1(x,y)$ para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Corolario (relación entre la métrica Euclídea y la métrica del supremo).

Sean d_1 y d_2 las métricas Euclídea y del supremo respectivamente en $\mathbb{R}^n$. Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces:

$$\boxed{U \text{ es abierto en } \mathbb{R}^n \text{ bajo la métrica } d_1 \iff U \text{ es abierto en } \mathbb{R}^n \text{ bajo la métrica } d_2.}$$

Demostración:

Se sigue del ejemplo anterior y el teorema previamente probado.

■

Problemas.

(1) Sea $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ la métrica Euclídea sobre $\mathbb{R}^2$ definida como

$$d[(x_1,x_2),(y_1,y_2)]=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}.$$

Describir geométricamente $B((0,0);1)$.

(2) Sea $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ la métrica del supremo sobre $\mathbb{R}^2$ definida como

$$d[(x_1,x_2),(y_1,y_2)]=\text{máx}\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}.$$

Describir geométricamente $B_d((0,0);1)$.

(3) Sea $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ la métrica en $\mathbb{R}^2$ definida como

$$d[(x_1,x_2),(y_1,y_2)]=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|.$$

Describir geométricamente $B_d((0,0);1)$.

(4) Sea $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ la métrica discreta en $\mathbb{R}^n$ definida como:

$$d(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } x\neq y,\\ \\ 0 & \text{si } x=y.\end{cases}$$

Si $a\in\mathbb{R}^n$ y $\varepsilon>0$, entonces describir $B_d(a;\varepsilon)$.

(5) ¿Cómo son los conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ con la métrica discreta?

(6) Sea $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la métrica en $\mathbb{R}^n$ definida como:

$$d(x,y) = \|x-y\|_p := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

para todo $x=(x_1,\ldots,x_n)$ y $y=(y_1,\ldots,y_n)$ en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que d es una métrica equivalente a la métrica Euclídea.

(7) Demostrar que la métrica discreta en $\mathbb{R}^n$ no es equivalente a la métrica Euclídea.