parcial (2).

(1) Sea $f(x) = x^5 + \dfrac{163}{1+x^2+\text{sen}^2(x)}$,

entonces f satisface las siguientes propiedades:

(✓) $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

(✓) $f(0) = 163$.

(✓) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

por lo tanto, para $M = 119$, existe un $R < 0$ tal que si $x < R$, entonces $f(x) < 119$.

Así, por el teorema del valor intermedio tenemos que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = M = 119$.

---

(2) $\int_{\mathcal{C}} F \cdot n \, ds = \int_{\mathcal{C}} (M, N) \cdot (dy, -dx)$

$= \int_{\mathcal{C}} M dy - N dx = \int_{\mathcal{C}} -N dx + M dy$

$$= \int_{\mathscr{C}} (-N, M) \cdot ds = \iint_A \frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dy}\, dA$$

$$= \iint_A \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}\right) \cdot (M, N)\, dA =$$

$$= \iint_A \nabla \cdot F\, dA.$$

cuidado

$$\int_{\mathscr{C}} F \cdot ds = \int_{\mathscr{C}} (M, N) \cdot ds = \iint_A \frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\, dA \quad \left(\begin{matrix}\text{Green}\\ \text{Stokes}\end{matrix}\right)$$

$$\int_{\mathscr{C}} F \cdot n\, ds = \iint_A \nabla \cdot F\, dA \quad \left(\begin{matrix}\text{Green}\\ \text{Gauss}\end{matrix}\right)$$

En este caso, tenemos que:

(v) $F(x,y) = (y^2 + x^3, y^3 - x^2)$

$$\begin{cases} \nabla \cdot F = \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}\right)(y^2 + x^3, y^3 - x^2) = \\ = \frac{d}{dx}(y^2 + x^3) + \frac{d}{dy}(y^3 - x^2) = \\ = 3x^2 + 3y^2 = 3(x^2 + y^2). \end{cases}$$

De esta manera, tenemos que:

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_{\mathscr{C}} F\circ n\, ds = \iint_A \nabla\circ F\, dA = \\ &= \iint_{x^2+y^2\leq 1} 3(x^2+y^2)\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r(3r^2)\, dr d\theta \\ &= 6\pi \int_0^1 r^3 dr = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}}$$

---

(3) Empezamos notando las siguientes cosas:

(✓) $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$

para $|x|<1$.

(✓) $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ para $|x|<1$.

(✓) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \tan^{-1}(x)$.

(✓) $\displaystyle\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \tan^{-1}(x)$.

para todo $x\in\mathbb{R}$ con $|x|<1$

(v) $\displaystyle\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt =$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ con $|x|<1$

Lo anterior, demuestra que

$$\begin{cases} \tan^{-1}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \\ \text{para todo } x \in \mathbb{R} \text{ con } |x|<1 \end{cases}$$

---

(4) Los vectores

$$\{u_1-u_2, u_2-u_3, \ldots, u_{k-1}-u_k, u_k-u_1\}$$

Son lineal/ dependientes, ya que al tomar $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, tenemos que:

$$\boxed{c_1(u_1-u_2)+c_2(u_2-u_3)+\cdots+c_k(u_k-u_1)=0}$$

(5) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & h \\ 2 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2+3R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3+h \\ 0 & 4 & 4 \end{array}\right]$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3+h \\ 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3+h \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3+h \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2+2R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5+h \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

lo anterior implica que, si $h=-5$, entonces:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

por lo tanto, tenemos que:

$$\boxed{V_3 \in gen(V_1, V_2) \iff h=-5}$$

---

(6)

(a) Supongamos que $c, d \in \mathbb{R}$ y $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ con $i \in \{0,1,2\}$, entonces:

$$S\left(c\sum_{i=0}^{2} a_i x^i + d\sum_{i=0}^{2} b_i x^i\right) =$$

$$= S\left(\sum_{i=0}^{2} (ca_i + db_i)x^i\right) =$$

$$=(ca_0+db_0)+\left(ca_1+db_1+ca_2+db_2\right)x+$$
$$+\left(2(ca_0+db_0)-3(ca_1+db_1)\right)x^2$$

$$= c\left(a_0+a_1x+(2a_0-3a_1)x^2\right)+$$
$$d\left(b_0+b_1x+(2b_0-3b_1)x^2\right)$$

$$= c\cdot S\left(\sum_{i=0}^{2} a_i x^i\right)+d\cdot S\left(\sum_{i=0}^{2} b_i x^i\right).$$

Esto demuestra que S manda combinaciones lineales en combinaciones lineales, lo cual significa que $\underline{\underline{S}}$ es transformación lineal.

(b) Como S es inyectiva y $\mathcal{P}_2$ es de dimensión finita, entonces S es un isomorfismo y particularmente $\text{Imagen}(S) = \mathcal{P}_2$.

(7)

(a)

(v) $E_{-1}=\{x\in\mathbb{R}^3 / (A+I)(x)=0\}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{escalonando}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}= y\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

por lo tanto, tenemos que:

$$E_{-1}=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

y además, si $u=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, entonces:

$$u-\text{proy}_v\, u=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4/5 \\ 2 \\ -2/5 \end{pmatrix}$$

y de esta manera:

$$E_{-1} = \text{gen}\left\{ v,\ u - \text{proy}_v\, u \right\} =$$

$$= \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4/5 \\ 2 \\ -2/5 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ es base ortogonal de E_{-1}.

(r) $E_5 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / (A - 5I)x = 0 \right\}.$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} x = 2z \\ y = z \\ z = z \end{array}$$

lo anterior demuestra que:

$$\boxed{\begin{array}{l} E_5 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \\ \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ es base ortogonal de } E_5 \end{array}}$$

(b) para empezar, normalizamos las bases de E_{-1} y E_5.

(✓) $\left\{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{30} \end{pmatrix}\right\}$ es una base ortonormal para E_{-1}.

(✓) $\left\{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}\right\}$ es una base ortonormal para E_5.

Así, al tomar las matrices Q y D como:

$$Q=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

entonces $A=QDQ^T$.