Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín
Posgrados en Matemáticas - Admisión Semestre 2021-01
Prueba de Conocimientos

Nombre: ____ **Documento:** ____________________

Instrucciones. La evaluación es individual y tiene una duración de 3 horas. No se permite el uso de libros, notas o apuntes. Es muy importante que cada ejercicio sea resuelto en forma clara y precisa. Por favor apague su teléfono celular.

Sección I: Cálculo

1. El Teorema del Valor Intermedio de Cálculo en una variable dice lo siguiente:
   Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) < k < f(b)$, entonces existe algún x en $[a, b]$ tal que $f(x) = k$.
   Teniendo en cuenta este teorema explique por qué existe algún número x tal que

$$x^5 + \frac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 119.$$

2. Recuerde que un *campo vectorial* en una región R del plano es una función $\overrightarrow{F}$ que asocia un vector a cada punto (x, y) de R. El campo $\overrightarrow{F}$ se describe mediante dos funciones escalares P y Q, llamadas las *componentes escalares* de $\overrightarrow{F}$:

$$\overrightarrow{F}(x, y) = P(x, y)\,\overrightarrow{i} + Q(x, y)\,\overrightarrow{j}\,, \quad (x, y) \in R. \tag{1}$$

   Una versión del *Teorema de Green* establece que si $\mathcal{A}$ es una subregión de R cuya frontera es una curva cerrada simple C, suave por tramos, entonces

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, ds = \int\int_{\mathcal{A}} \nabla \cdot \overrightarrow{F}\, dA, \tag{2}$$

   donde $\overrightarrow{n}$ es el normal exterior a lo largo de la frontera C, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ y "$\cdot$" es el producto escalar o producto punto entre vectores.
   Teniendo en cuenta la información anterior, suponga ahora que C es la circunferencia de radio 1 y centro en $(0, 0)$, y sea $\overrightarrow{F}$ el campo vectorial dado por

$$\overrightarrow{F}(x, y) = (y^2 + x^3)\,\overrightarrow{i} + (y^3 - x^2)\,\overrightarrow{j}\,.$$

   Calcule $\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, ds$.

3. Recuerde que una serie de potencias se puede derivar e integrar término a término en su intervalo abierto de convergencia. Sabemos que la serie geométrica está dada por

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\,, \quad |x| < 1.$$

   Explique por qué la función tangente inversa, arctan, tiene serie de potencias

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n - 1}, \quad |x| < 1.$$

Sección II: Álgebra Lineal

1. Sean $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_k}$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que $\{\mathbf{u_1} - \mathbf{u_2}, \mathbf{u_2} - \mathbf{u_3}, \ldots, \mathbf{u_{k-1}} - \mathbf{u_k}, \mathbf{u_k} - \mathbf{u_1}\}$ es un conjunto de vectores linealmente dependiente.

2. ¿Para cuáles valores de h está v_3 en $\text{gen}(v_1, v_2)$?

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ h \\ 6 \end{bmatrix}.$$

3. Sea $\mathcal{P}_2$ el espacio de los polinomios en una variable, de grado menor o igual a 2, con coeficientes reales. Considere la transformación $S : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida como

$$S(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 + (a_1 + a_2)x + (2a_0 - 3a_1)x^2.$$

   (a) Muestre que la transformación es lineal.

   (b) Calcule el Núcleo y la Imagen de S.

4. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Se sabe que los valores propios de A son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 5$.

   (a) Encuentre una base ortogonal de vectores propios de A.

   (b) Descomponga $A = QDQ^T$ donde D sea una matriz diagonal y Q una matriz ortogonal.