

**Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín**  
**Maestría en Ciencias – Matemática Aplicada**  
**Admisión Semestre 01-2019**  
**Prueba de Conocimientos**

Álgebra lineal

1. Sean  $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  y  $W = \{A \in M_{2 \times 2} \mid AD = DA\}$ .
  - a. Demuestre que  $W$  es un subespacio de  $M_{2 \times 2}$ .
  - b. Determine una base para  $W$ .
  - c. ¿Es  $W$  isomorfo al subespacio de polinomios de grado menor o igual que 2?

2. Sean

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

- Determine el complemento ortogonal de  $\text{gen}(v_1, v_2)$  y un vector  $v_3$  tal que  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ .
- Sea  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal que intercambia  $v_1$  y  $v_3$ , y que tiene  $v_2$  como un vector propio con valor propio -5. Determine  $[T]_B$ , la matriz de  $T$  en la base  $B$ .
- Escriba la matriz estándar de  $T$  como un producto de matrices, cada una dada explícitamente.

3. Sean  $U$  y  $W$  subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita  $V$ . Demuestre que

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

*Sugerencia:* Considere una base de  $U \cap W$ .

### Cálculo

1. Sin usar la regla de L'Hôpital evalúe el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\operatorname{sen}^2 x}$$

2. Para la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

- a) Determine dónde crece y donde decrece.
- b) Determine dónde es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo.
- c) Halle los extremos relativos.
- d) Halle las asíntotas (si las hay).
- e) Bosqueje la gráfica de la función.

3. Evalúe la integral

$$\int_1^4 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}}$$

4. Una caja rectangular sin tapa debe tener un área superficial de  $16 \text{ m}^2$ . Hallar, usando multiplicadores de Lagrange, las dimensiones que maximicen su volumen.