Parcial (4).

(1) Tomando $w=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$ y $z=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-2\end{pmatrix}$ se tiene que:

$$\{u,v,w,z\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

es una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$.

---

(2) $$T\left(\sum_{i=0}^{3}a_i x^i\right)=\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{3}a_i\\ \sum_{i=1}^{3}i a_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0+a_1+a_2+a_3\\ a_1+2a_2+3a_3\end{pmatrix}.$$

(a) Sea $\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, entonces al tomar $p(x)=r-sx+sx^2$ tenemos que

$$T(p(x))=\begin{pmatrix}r-s+s\\-s+2s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}$$

lo cual implica que T es sobre y así imagen$(T)=\mathbb{R}^2$.

(b) Empecemos notando que:

$$(r)\quad \begin{pmatrix} a_0+a_1+a_2+a_3 \\ a_1+2a_2+3a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}.$$

$$(r)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{escalonando}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= a_2 + 2a_3 \\ a_1 &= -2a_2 - 3a_3 \\ a_2 &= a_2 \\ a_3 &= a_3 \end{aligned}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

De esta manera, tenemos que

$$\begin{cases} \ker(T) = \langle 1-2x+x^2,\ 2-3x+x^3 \rangle, \\ B = \{1-2x+x^2,\ 2-3x+x^3\} \text{ es base } \ker(T) \end{cases}$$

(3)

(a) Tomando bases para V y W, podemos suponer sin perdida de generalidad que $V = \mathbb{R}^n$ y $W = \mathbb{R}^m$ para $m, n \in \mathbb{N}$. por lo tanto, tenemos una transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $n < m$ y por el teorema del rango, tenemos que:

$$n = \text{Dim}(\text{Imagen}(T)) + \text{Dim}(\ker(T))$$

lo cual implica que $\text{Dim}(\text{Imagen}(T)) \leq n$ y por este motivo, no es posible que bajo la condición de que $n < m$, T sea sobreyectiva, ya que:

T es sobre $\iff \text{Dim}(\text{imagen}(T)) = m$
$m = \text{Dim}(\text{imagen}(T)) \leq n < m$

lo cual es imposible $m < m$

(b) De manera análoga, si $m < n$, entonces $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ no puede ser inyectiva, ya que:

T es inyectiva $\iff \text{Dim}(\ker(T)) = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} T \text{ es inyectiva} \iff n = \text{Dim}(\text{Imagen}(T)) \\ \\ \text{Dim}(\text{Imagen}(T)) \leq m < n \end{array}}$$

no es posible que $n < n$

---

(4)

(a) A es invertible.

por teorema, tenemos que A es diagonalizable, ya que tiene 3 valores propios distintos reales. Así, existe una matriz invertible P y una matriz diagonal D, tal que:

$$A = PDP^{-1}$$

y como

$$|A| = |D| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(1) = \frac{-1}{4} \neq 0$$

entonces A es invertible.

(b)

- Valores propios de A^{-1}.

$$\left(Ax = \lambda x \iff A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x \right)$$

Los valores propios de A^{-1} son

$$\left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3} \right\} = \{-2, 2, 1\}.$$

- Valores propios de A^2.

$$\left(Ax = \lambda x \iff A^2x = \lambda^2 x \right)$$

Los valores propios de A son

$$\{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1\right\} = \left\{\frac{1}{4}, 1\right\}$$

- Valores propios de $A+3I$

$$\left((A+3I)(x) = A(x) + 3x = (\lambda+3)x \right)$$

Los valores propios de $A+3I$ son

$$\{\lambda_1+3, \lambda_2+3, \lambda_3+3\} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{2}+3, \frac{1}{2}+3, 1+3\right\} = \left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, 4\right\}$$

(c) $p(\lambda) = -\left(\lambda - \frac{1}{4}\right)^2 (\lambda - 1)$.

(d) Existen escalares c_1, c_2, c_3 tales que $x = c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3$ y además:

$$A^n x = A^n (c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3) =$$

$$= c_1 \lambda_1^n V_1 + c_2 \lambda_2^n V_2 + c_3 \lambda_3^n V_3$$

$$= c_1 \left(\frac{-1}{2}\right)^n V_1 + c_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + c_3 (1)^n V_3.$$

Así, se tiene que:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A^n x = c_3 V_3.}$$

---

(5) sea $f(x) = 1 - x + x \cdot \ln(x)$, entonces:

(✓) $f(1) = 0$.

(✓) $f'(x) = -1 + \ln(x) + 1 = \ln(x)$

(✓) $f'(x) = \ln(x) > 0$ para $x > 1$,
$f'(x) = \ln(x) < 0$ para $0 < x < 1$,
$f'(x) = 0$ para $x = 1$.

Así, por el criterio de la primera derivada, tenemos que $x=1$ es un mínimo local y así, podemos garantizar que:

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) < f(x) \\ 0 < 1 - x + x \ln(x) \end{array}\right. \quad \text{para todo } x \geq 1$$

y esta desigualdad es equivalente a las siguientes desigualdades.

$$\begin{cases} x-1 < x\ln(x) & \text{para todo } x\geq 1, \\ x < (x+1)\ln(x+1) & \text{para todo } x\geq 0. \end{cases}$$

(b) La ecuación dada es equivalente a la siguiente:

$$\begin{cases} \ln(1+x) = x\ln(k), \\ \text{para } k\in(1,e). \end{cases}$$

Sea $f(x) = \ln(1+x) - x\ln(k)$, entonces notamos las siguientes cosas:

(✓) $f(0) = 0$.

(✓) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \ln(k)$.

(✓) $f'(x) = 0 \iff x = \dfrac{1-\ln(k)}{\ln(k)}$.

(✓) $f'(x) > 0 \iff x < \dfrac{1-\ln(k)}{\ln(k)}$

(✓) $f'(x) < 0 \iff x > \dfrac{1-\ln(k)}{\ln(k)}$

El argumento anterior prueba que f tiene un máximo local en $x_0 = \dfrac{1-\ln(k)}{\ln(k)}$ debido al criterio de la primera derivada.

por otro lado, tenemos que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) - x\ln(k)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) - \ln(k)^x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+x}{k^x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{\ln(k)\cdot k^x}\right) = -\infty.$$

De donde, podemos concluir que f toma su valor máximo absoluto en x_0, y por el teorema del valor intermedio se tiene que f toma todos los valores del intervalo $(-\infty, f(x_0))$ exacta/ una vez en el intervalo $(x_0, +\infty)$

puesto que f es inyectiva en $(0,+\infty)$.

por otro lado $f(0)=0\leq f(x_0)$, lo cual implica que f toma el valor de $\underline{\underline{0}}$ exacta/ una vez en el intervalo $(0,+\infty)$

Esto demuestra precisa/ que para todo $K\in(1,e)$ la ecuación

$$(1+x)^{1/x}=K$$

posee solo una solución para $x>0$.

---

(6)

(a) Sea $f(x)=(1+x)^{1/2}$, entonces:

($\checkmark$) $f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$.

($\checkmark$) $f''(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-3/2}$.

($\checkmark$) $f'''(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)(1+x)^{-5/2}$.

$$f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$$

(✓) $0 \leq f'''(x) \leq \frac{3}{8}$ para todo $x \geq 0$.

(✓) $P_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} x^2 =$

$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$.

(✓) por teorema, tenemos que

$$\begin{cases} 0 \cdot \frac{x^{2+1}}{(2+1)!} \leq f(x) - P_2(x) \leq \frac{3}{8} \frac{x^{2+1}}{(2+1)!} \\ 0 \leq f(x) - P_2(x) \leq \frac{3}{8} \frac{x^3}{3!} \\ P_2(x) \leq f(x) \leq P_2(x) + \frac{x^3}{16} \end{cases}$$

por lo tanto, tenemos que:

$$\boxed{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \quad \text{para todo } x \geq 0.}$$

(b) Usando la desigualdad anterior, cambiando $\underline{x}$ por x^3 se tiene que:

$$\boxed{1+\frac{x^3}{2}-\frac{x^6}{8} \leq \sqrt{1+x^3} \leq 1+\frac{x^3}{2}-\frac{x^6}{8}+\frac{x^9}{16}}$$

para todo $x \geqslant 0$.

y al integrar obtenemos que:

$$\boxed{\int_0^1 1+\frac{x^3}{2}-\frac{x^6}{8}\,dx \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \leq \int_0^1 1+\frac{x^3}{2}-\frac{x^6}{8}+\frac{x^9}{16}\,dx}$$

donde:

- $\displaystyle\int_0^1 1+\frac{x^3}{2}-\frac{x^6}{8}\,dx = 1+\frac{1}{8}-\frac{1}{56}.$

- $\displaystyle\int_0^1 1+\frac{x^3}{2}-\frac{x^6}{4}+\frac{x^9}{16}\,dx = 1+\frac{1}{8}-\frac{1}{56}+\frac{1}{160}.$

Lo cual implica que

$$\boxed{1+\frac{1}{8}-\frac{1}{56} \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \leq 1+\frac{1}{8}-\frac{1}{56}+\frac{1}{160}}$$

---

(7) calcular $\displaystyle\iint_S F\cdot ds.$

(semi-elipsoide)

para empezar, notemos las

siguientes cosas:

(✓) Si $S' = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 / 2x^2+3y^2 \leq 6\}$ entonces $S \cup S'$ es una superficie cerrada y por el teorema de divergencia de Gauss, tenemos que:

$$\boxed{\begin{aligned}\iint_{S\cup S'} F \cdot ds &= \iint_S F \cdot ds + \iint_{S'} F \cdot ds \\ &= \iiint_E \nabla \cdot F \, dv\end{aligned}}$$

$$\boxed{\iint_S F \cdot ds = \iiint_E \nabla \cdot F \, dv - \iint_{S'} F \cdot ds}$$

donde:

(✓) $\nabla \cdot F =$

$$= \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}\right) \cdot \left(0, e^{\sin(xz)} + \tan(z), y^2\right)$$

$$= 0.$$

(✓) Una parametrización para S'

es:

$$\begin{cases} \alpha(y,x) = (x, y, 0) \\ 2x^2 + 3y^2 \leq 6 \end{cases}$$

(✓) $\alpha_y \times \alpha_x = (0,0,-1)$.

(✓) $F(\alpha(y,x)) \bullet (\alpha_y \times \alpha_x) =$

$$= (*, *, y^2) \bullet (0,0,-1) = -y^2.$$

(✓) $$\iint_{S'} F \bullet ds = \iint_{D} F(\alpha(y,x)) \bullet (\alpha_y \times \alpha_x)\, dA$$

$$\boxed{2x^2+3y^2 \leq 6 \iff \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 \leq 1}$$

$$= \iint_{D} -y^2\, dA = \sqrt{6} \iint_{D'} -(\sqrt{2}\, v)^2\, dA =$$

cambio Variable

$$u = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$v = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$= -2\sqrt{6} \int_0^{2\pi} \int_0^{1} r^3 \operatorname{sen}^2(\theta)\, dr\, d\theta =$$

$$\boxed{u = r\cos\theta, \quad v = r\operatorname{sen}\theta}$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\, d\theta = -\frac{\sqrt{6}\,\pi}{4}.$$

El anterior argumento muestra que:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\iint_S F\cdot ds = \iiint_E \nabla\cdot F\, dV - \iint_{S'} F\cdot ds \\ \displaystyle = 0 - \left(-\frac{\sqrt{6}\,\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}\,\pi}{4}. \end{array}\right.$$