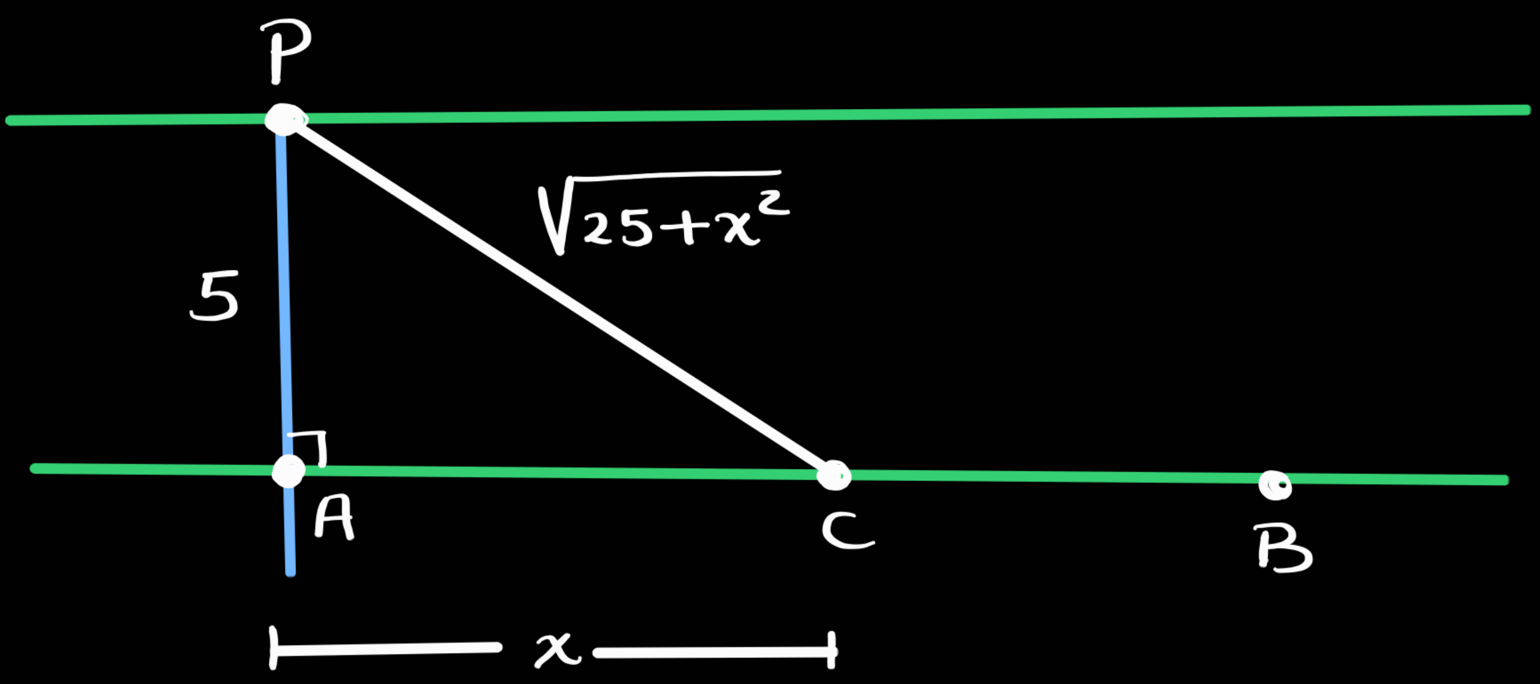
Parcial (7).

(1) Una persona en un bote está en un punto P a 5 km del punto A más cercano de la costa, la cual es una linea recta. La persona debe trasladarse a un punto B en la costa a 10 km de A. La persona puede remar a una velocidad de 3 km/h hacia un punto C en la playa entre A y B, y luego caminar hacia B a una velocidad de 6 km/h. sea x la distancia entre A y C.



¿ para qué valor de x se tiene un tiempo mínimo de recorrido?

¿cuál es este tiempo mínimo?

¿Qué distancia recorre en total?

Solución:

para empezar, notemos las siguientes cosas:

(r) $\text{Velocidad} = \dfrac{\text{Espacio}}{\text{tiempo}} \rightsquigarrow \text{tiempo} = \dfrac{\text{Espacio}}{\text{Velocidad}}$.

(r) Notación variables
$$\begin{cases} \text{Tiempo} \equiv t, \\ \text{Velocidad} \equiv v, \\ \text{Espacio} \equiv x. \end{cases}$$

(r) $t = (\text{tiempo rio}) + (\text{tiempo tierra})$

$$\text{tiempo rio} = \frac{\text{Espacio rio}}{\text{velocidad rio}} = \frac{\sqrt{25+x^2}}{3}$$

$$\text{tiempo tierra} = \frac{\text{Espacio tierra}}{\text{velocidad tierra}} = \frac{x}{6}.$$

$$\boxed{t = \frac{\sqrt{25+x^2}}{3} + \frac{10-x}{6}}$$

El tiempo es función de x.

$(\checkmark)$ $t'(x) = \dfrac{x}{3\sqrt{25+x^2}} - \dfrac{1}{6}.$

$(\checkmark)$ $t'(x) = 0 \iff$

$$6x = 3\sqrt{25+x^2}$$
$$4x^2 = 25+x^2$$
$$3x^2 = 25$$
$$x = \pm\frac{5}{\sqrt{3}}.$$

$(\checkmark)$ $x = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$ es un punto crítico

de $t(x) = \dfrac{\sqrt{25+x^2}}{3} + \dfrac{10-x}{6}.$

$(\checkmark)$ $t(0) = \dfrac{\sqrt{25}}{3} + \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{10}{3}.$

$$t(10) = \frac{\sqrt{125}}{3} = \frac{5\sqrt{5}}{3} > \frac{10}{3}.$$

$(\checkmark)$ $t\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{10}{3\sqrt{3}} + \dfrac{10 - \frac{5}{\sqrt{3}}}{6} =$

$$= \frac{10\sqrt{3}}{9} + \frac{5}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{18} = \frac{20\sqrt{3} - 5\sqrt{3}}{18} + \frac{5}{3}$$

$$= \frac{15\sqrt{3}}{18} + \frac{5}{3} = \frac{5}{6}\sqrt{3} + \frac{5}{3} = \frac{5}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$$

$$< \frac{5}{3}\left(\frac{\sqrt{4}}{2} + 1\right) = \frac{10}{3} < \frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

De esta manera, por el teorema del intervalo cerrado de cálculo diferencial, se tiene que $t(x)$ alcanza su valor mínimo absoluto en $x = \frac{5}{\sqrt{3}}$ en el intervalo $[0,10]$ y este valor mínimo absoluto está dado por $t\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) = \frac{5}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$.

por otro lado, la distancia recorrida es $\sqrt{25+\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2} + 10 - \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$.

---

(2) Supongamos que f es diferenciable en $\underline{\underline{a}}$ y g diferenciable en $f(a)$. Demostrar que:

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).}$$

Solución:

Supongamos que $f(a) = b$ y sean r y s las siguientes funciones:

$$r(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)-f'(a)\cdot(x-a)}{x-a} & \text{si } x\neq a, \\ 0 & \text{si } x=a \end{cases}$$

$$s(y)=\begin{cases} \dfrac{g(y)-g(b)-g'(b)\cdot(y-f(a))}{y-b} & \text{si } y\neq b, \\ 0 & \text{si } y=b \end{cases}$$

entonces r y s son funciones continuas en $x=a$ y $y=f(a)=b$ respectiva/. por otro lado, notemos que:

$(\checkmark)$ $(y-b)\cdot s(y)=g(y)-g(b)-g'(b)\cdot(y-b).$

$(\checkmark)$ $(x-a)\,r(x)=f(x)-f(a)-f'(a)\cdot(x-a).$

$(\checkmark)$ $$g(f(x))-g(b)-g'(f(a))\cdot f'(a)\cdot(x-a)=$$
$$=(f(x)-b)\,s(f(x))+g'(f(a))\cdot\big(f(x)-b-f'(a)\cdot(x-a)\big).$$

$$=\big(f(x)-b\big)\,s(f(x))+g'(f(a))\cdot(x-a)\,r(x)$$

$(\checkmark)$ $$\frac{g(f(x))-g(b)-g'(f(a))\cdot f'(a)\cdot(x-a)}{x-a}=$$

$$=\frac{(f(x)-b)\,s(f(x))+g'(f(a))\cdot(x-a)\,r(x)}{x-a}$$

$$=\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)s(f(x))+g'(f(a))\cdot r(x).$$

$(\checkmark)$ $$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(b)-g'(f(a))\cdot f'(a)\cdot(x-a)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)s(f(x))+g'(f(a))\cdot r(x)=$$

$$=f'(a)\cdot\lim_{x\to a}s(f(x))+g'(f(a))\cdot 0=$$

$$=f'(a)\cdot 0+g'(f(a))\cdot 0=0.$$

Lo anterior prueba que $g\circ f$ es diferenciable en $x=a$ con $(g\circ f)'(a)=g'(f(a))\cdot f'(a)$.

$\blacksquare$

(3) Empleando el teorema de Green, hallar el área encerrada por la curva

$$\left(x^{1/3}\right)^2+\left(y^{1/3}\right)^2=\left(a^{1/3}\right)^2$$

con $a>0$.

Solución:

Sea $\alpha:[0,2\pi]\longrightarrow \mathbb{R}^2$ una parametrización de la curva dada con:

$$\begin{cases} \alpha(\theta)=(x,y)=a\left(\cos^3\theta,\operatorname{sen}^3\theta\right) \\ x^{1/3}=a^{1/3}\cos\theta \rightsquigarrow x=a\cos^3\theta \\ y^{1/3}=a^{1/3}\operatorname{sen}\theta \rightsquigarrow y=a\operatorname{sen}^3\theta \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \end{cases}$$

y sea

$$\boxed{F(x,y)=\Big(P(x),Q(x)\Big)=\left(-\frac{y}{2},\frac{x}{2}\right)}$$

entonces:

Área encerrada por la curva

$$= \iint_A 1\,dx\,dy =$$

$$= \iint_A \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\,dx\,dy =$$

$$= \int_\alpha F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(\alpha(\theta)) \cdot \alpha'(\theta)\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{a\,sen^3\theta}{2}, \frac{a\cos^3\theta}{2}\right) \cdot \left(-3a\cos^2\theta\,sen\,\theta,\ 3a\,sen^2\theta\cos\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} sen^4\theta\cos^2\theta + sen^2\theta\cos^4\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,sen^2\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} \frac{sen^2(2\theta)}{4}\,d\theta = \frac{3}{8}a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(4\theta)}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{3}{8}a^2\pi.$$

$$\begin{array}{|l|}\hline \text{Área encerrada por la curva} = \frac{3}{8}a^2\pi \\ \hline\end{array}$$

Álgebra Lineal.

(1) Sean $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0 \right\}$ y $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces:

(a) Muestre que H es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(b) Encuentre una base ortogonal para H.

(c) Encuentre $\text{proy}_H\, b$.

Solución:

(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in H \Leftrightarrow x - y + z = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

por lo tanto, el anterior argumento prueba que:

$$\boxed{H = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}}$$

y por un resultado de álgebra lineal, se tiene que H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(b) Una base para H es $\{V_1, V_2\} =$
$= \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ y una base ortogonal $\{u_1, u_2\}$ para H está dada por:

$$u_1 = V_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

$$u_2 = V_2 - \text{proy}_{u_1} V_2 = V_2 - \left(\frac{u_1 \bullet V_2}{\|u_1\|^2}\right) \cdot u_1 =$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1\end{pmatrix}.$$

De donde $\{u_1, u_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

es una base ortogonal para H.

(c) $\text{proy}_H b = \text{proy}_{u_1} b + \text{proy}_{u_2} b =$

$$= \frac{u_1 \bullet b}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 + \frac{u_2 \bullet b}{\|u_2\|^2} \cdot u_2 =$$

$$= \frac{2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3/2} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

---

(2) Sea $T: P_2 \to P_3$ una transformación lineal y $C = \{1, x, x^2\}$ y $D = \{1, x, x^2, x^3\}$ bases para P_2 y P_3 respectiva/ tal que la matriz de T respecto a B y C es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces:

(a) sea $p(x) = 2+2x+3x^2$, entonces hallar $T(p(x))$.

(b) Exprese $T(x^2)$ como combinación lineal de los elementos de la base $C = \{1, x, x^2, x^3\}$.

(c) ¿puede ser T isomorfismo?

Solución:

(a) para empezar, notemos que:

$$A[p(x)]_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} [2+2x+3x^2]_C$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0-3 \\ 4-4+3 \\ -2+6-3 \\ 2+2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

por lo tanto, tenemos que:

$$\boxed{T(p(x)) = -1+3x+x^2+7x^3}$$

(b) $T(x^2) = ?$

Sea $q(x) = x^2$, entonces:

$$A \cdot [q(x)]_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} [x^2]_C =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, tenemos que:

$$\boxed{T(x^2) = -1 \cdot 1 + 1 \cdot x - 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3}$$

(c) T no es isomorfismo, ya que si T fuera isomorfismo, entonces $\text{Dim}(P_2) = \text{Dim}(P_3)$, pero $\text{Dim}(P_2) = 3$ y $\text{Dim}(P_3) = 4$. Esto muestra que T no puede ser isomorfismo.

(3) Sea A una matriz de tamaño 3×3 tal que sus valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$ y sus respectivos espacios propios están dados por:

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ x - y - z = 0 \right\}$$

$$E_{\lambda_2} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

entonces:

(a) Encuentre una base para E_{λ_1} y E_{λ_2}.

(b) ¿A es diagonalizable? En caso afirmativo, encuentre matrices P invertible y D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$.

Solución:

(a) Empecemos notando las siguientes cosas:

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1} \Leftrightarrow x-y-z=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $E_{\lambda_1} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ y una base para E_{λ_1} es $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

- $E_{\lambda_2} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ y una base para E_{λ_2} es $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

(b) A es diagonalizable, ya que los valores propios de A son reales ($\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$) y además $\text{Dim}(E_{\lambda_1}) + \text{Dim}(E_{\lambda_2}) = 2+1 = 3$.

Adicional/ $A = PDP^{-1}$ con:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$