# Parcial (1).

(1) $S: P_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$S(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a \end{pmatrix}$$

$$S(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

(a) $S$ es transformación lineal.

Si definimos $S': \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como $S'\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, entonces es fácil notar que:

| $S$ es transf. lineal | $\Longleftrightarrow$ | $S'$ es transf. lineal |
|---|---|---|

pero $S'$ es una transformación lineal, ya que $S'$ es la transformación inducida por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Encontrar Nucleo(S).

$$S(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{r} b+c=0 \\ a=0 \end{array}} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} a=0 \\ b=b \\ c=-b \end{array}}$$

por lo tanto, el Nucleo(S) se describe como:

$$\text{Nucleo}(S)=\{0+bx-bx^2 / b\in\mathbb{R}\}$$

$$\text{Nucleo}(S)=\{b(x-x^2) / b\in\mathbb{R}\}$$

$$\text{Nucleo}(S)=\langle x-x^2\rangle.$$

(c) ¿S es sobreyectiva?

S es sobreyectiva, ya que dado $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ y al tomar

$p(x)=b_0+(a_0-b_0)x$, se tiene que:

$$\begin{cases} p(1)=b_0+(a_0-b_0)=a_0 \\ p(0)=b_0 \end{cases}$$

(2)

(a) para empezar, notamos que:

(r) Los valores propios de T son $2, 1, -5$.

(r) $$\begin{cases} Mg(2) = 1 \\ Mg(1) = 1 \\ Mg(-5) = 2 \end{cases}$$

(r) por teorema, tenemos que $[T]$ es diagonalizable si y sólo si los valores propios son reales y la suma de las mult. geométricas es $n$ ($n =$ dim. dom. T).
De esta manera, tenemos que T es diagonalizable, ya que:

$$\begin{cases} 2, 1, -5 \text{ son reales} \\ Mg(2) + Mg(1) + Mg(-5) = 4 \end{cases}$$

Ahora, para determinar las matrices $P$ y $D$ tales que $[T]=PDP^{-1}$ con $D$ diagonal, tenemos que:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

(b) En este caso, tenemos que:

$$\boxed{\begin{aligned} T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} &= 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \\ T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} &= 1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= -5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= -5\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}}$$

Lo cual implica que si

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\},$$

entonces

$$\boxed{[T]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-5&0\\0&0&0&-5\end{pmatrix}}$$

---

(3) Como $A$ es diagonalizable, entonces existen $P$ invertible y $D$ diagonal tal que:

$$A=PDP^{-1}.$$

por lo tanto:

$$A \text{ es invertible} \iff |A|=|D|\neq 0$$

$$|D|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \quad \left(\begin{array}{l}\lambda_1,\ldots,\lambda_n \text{ son los}\\ \text{elementos de la}\\ \text{diagonal de } D\end{array}\right)$$

$$|D|\neq 0 \iff \text{para todo } i,\ \lambda_i\neq 0.$$

Así, el argumento anterior prueba que si $A$ es diagonalizable, entonces

$$\boxed{A \text{ es invertible}} \iff \boxed{\text{para todo } i,\ \lambda_i \neq 0}$$

teniendo en cuenta que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de $A$.

(4) sean $c, d \in \mathbb{R}$ tales que:

$$c(u+v) + d(u-v) = 0$$

entonces al simplificar, tenemos que:

$$c(u+v) + d(u-v) = 0$$

$$(c+d)u + (c-d)v = 0$$

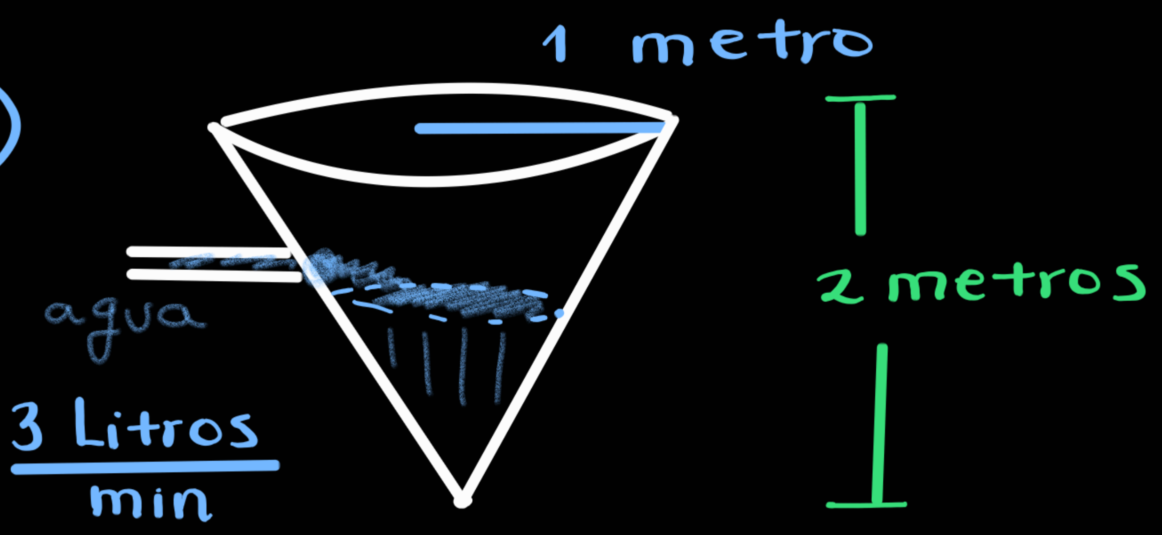
y como $\{u, v\}$ son LI, entonces

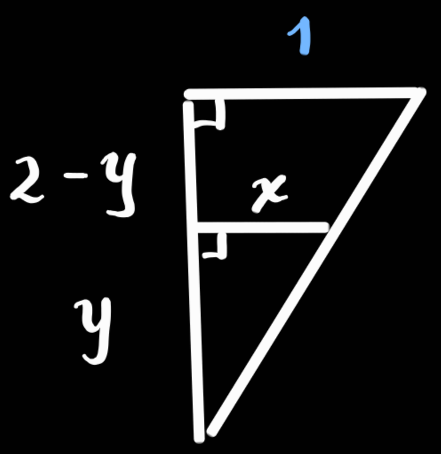
$$\begin{cases} c+d = 0 \\ c-d = 0 \end{cases}$$

lo cual implica clara/ que $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Esto demuestra que $\{u+v, u-v\}$ son LI.

---

(5)




$$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{1}{2}} \iff \boxed{x = \frac{y}{2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Volumen agua}(y) &= V(y) = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \\ &= \frac{\pi x^2 \cdot y}{3} = \frac{\pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 \cdot y}{3} = \frac{\pi y^3}{12}. \end{aligned}}$$

Lo cual implica que:

$$\boxed{V(y) = \frac{\pi y^3}{12}}$$

Así, tenemos que:

(r) $\qquad \dfrac{dV}{dt} = 3$

(r) $\qquad \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dt} = 3.$

(✓) $\frac{dv}{dy} = \left(\frac{\pi y^3}{12}\right)' = \frac{\pi y^2}{4}$.

(✓) $\frac{dv}{dy}(1) = \frac{\pi}{4}$.

De esta manera, tenemos que la razón de cambio del nivel del agua está dado por:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{dv}{dy}} = \frac{3}{\frac{\pi}{4}} = \frac{12}{\pi}}$$

---

(6) como $g(x) = \int_0^{x^3+1} f(t)\,dt$, entonces:

(✓) $g'(x) = 3x^2 \cdot f(x^3+1)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$(f(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 1)$.

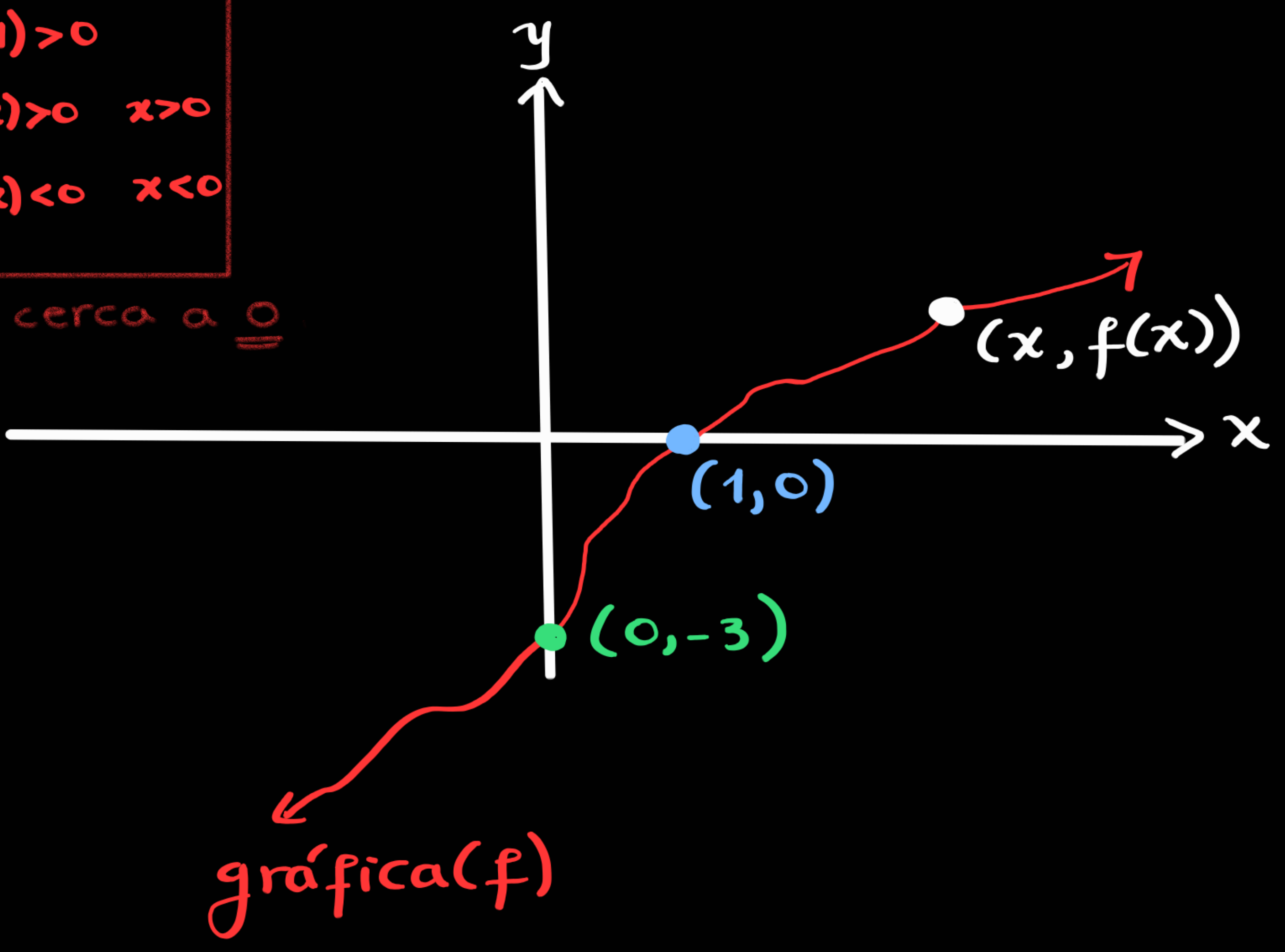
(✓) La gráfica de $f$ la podriamos interpretar de la siguiente manera:

$f'(1)>0$

$f(x)>0 \quad x>0$

$f(x)<0 \quad x<0$

$x$ cerca a $\underline{\underline{0}}$




(v) Debido a la gráfica de $f$ y a que $g'(x) = 3x^2 \cdot f(x^3+1)$, entonces tenemos que existe $\varepsilon > 0$, tal que:

$$\begin{cases} g'(x) > 0 & \text{para } x \in (0, \varepsilon), \\ g'(x) < 0 & \text{para } x \in (-\varepsilon, 0) \end{cases}$$

y por el criterio de la primera derivada, tenemos que $x=0$ es un punto donde $f$ alcanza un valor mínimo local. De hecho, es el único punto donde la función $g$ alcanza un extremo local, ya que $g$ es diferenciable en $\mathbb{R}$ y el único punto que satisface que $g'(x)=0$ es $x=0$.

(6) $$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^m+y^m}{x^2+y^2}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(v) $$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^m}{h^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}h^{m-2}\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right).$$

Además, debido a las desigualdades:

$$0\leq\left|h^{m-2}\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)\right|\leq|h|^{m-2}$$

entonces:

- Si $m-2>0$ $(m>2)$, entonces $f_x(0,0)=0$, debido al teorema de estricción.

- Si $m-2 \leq 0$, entonces $f_x(0,0)$ no existe.

(✓) por simetría, tenemos que

$$\boxed{f_y(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } m>2, \\ \text{no existe} & \text{si } m \leq 2. \end{cases}}$$

(✓) Si $m>2$, entonces:

$$\frac{f(x,y)-f_x(0,0)\cdot x - f_y(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{x^m+y^m}{(x^2+y^2)^{3/2}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

(✓) $$0 \leq \left| \frac{x^m+y^m}{(x^2+y^2)^{3/2}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{|x|^m}{|x|^3} + \frac{|y|^m}{|y|^3} = |x|^{m-3} + |y|^{m-3}.$$

Lo cual implica que por el teorema de estricción que si $m-3>0$, entonces:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^m+y^m}{(x^2+y^2)^{3/2}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0}$$

y además el limite no existe para $m-3 \leq 0$.