Universidad Nacional de Colombia- Sede Medellín, Escuela de Matemáticas
Examen de Admisión Posgrado en Matemática.
Semestre 02-2022, 09 de Junio de 2022.
Duración: 3 horas

Nombre y Cc:

Calificación: 1 ____; 2 ____; 3 ____; 4 ____; 5 ____; 6 ____; **Total:** ____

Instrucciones. No está permitido el uso de calculadora ni de cualquier otro tipo de aparato electrónico, incluyendo teléfonos móviles, los cuales deben permanecer apagados durante el tiempo de duración del examen. Tampoco está permitido hacer preguntas a las personas encargadas de la vigilancia.

Primera Parte: Algebra Lineal

1. Suponga que V es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$, de los números reales. Sea $T \in \hom_{\mathbb{R}}(V, V)$, una transformación lineal idempotente, es decir $T \circ T = T$. Demuestre que

$$V = \operatorname{Nu}(T) \oplus \operatorname{Im}(T),$$

donde $\operatorname{Nu}(T)$ denota el núcleo de T e $\operatorname{Im}(T)$ denota la imagen de T.

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$. Halle:

   (a) El polinomio característico de A.

   (b) Los valores propios de A y bases para los espacios propios de A.

   (c) Una matriz invertible P y una matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.

3. Sea $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden 2×2 sobre el campo $\mathbb{R}$, de los números reales. Sea W_1 el conjunto de las matrices en V de la forma

$$\begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix}$$

y sea W_2 el conjunto de las matrices en V de la forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix}.$$

   (a) Demostrar que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V.

   (b) Hallar las dimensiones de W_1, W_2, $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$.

Segunda Parte: Cálculo

En esta segunda parte, escoja sólo tres puntos, marcando claramente los de su elección.

4. Suponga que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0), \\ \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Pruebe que existe la derivada direccional de f en $(0, 0)$ con respecto a cualquier vector $U = (a, b)$ y cálculela.

¿Es f continua en $(0, 0)$?

¿ Es f diferenciable en $(0, 0)$?

Justifique sus respuestas.

5. Encuentre un punto en el plano $\{(x,y,z) : 2x+3y-z=5\}$ de $\mathbb{R}^3$ que sea lo más cercano al origen.

6. (a) Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en el intervalo I. Si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in I$, entonces pruebe que para todo $x, y \in I$ se verifica que $|f(y) - f(x)| \leq k\,|y-x|$.

   (b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f(tx) = tf(x)$ para todos $t, x \in \mathbb{R}$. Pruebe que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

7. (a) Dado $a > 0$ defina inductivamente la sucesión $(x_n)_n$ mediante

$$x_1 = \sqrt{a} \quad \text{y} \quad x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}.$$

   Pruebe que la sucesión $(x_n)_n$ es convergente y halle su límite.

   (b) Considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

   Responda las siguientes preguntas justificando claramente sus respuestas.
   ¿Es la serie absulutamente convergente?
   ¿Es la serie convergente?