parcial (5).

(1) Sea $T: V \to V$ una transformación lineal tal que $T \circ T = T$, entonces:

(✓) para todo $u \in V$, se tiene que $u = (u - T(u)) + T(u)$.

(✓) $T(u - T(u)) = T(u) - T^2(u) =$
$= T(u) - T(u) = 0$, lo cual implica que $u - T(u) \in \text{Nucleo}(T)$.

(✓) $T(u) \in \text{Imagen}(T)$.

(✓) si $w \in \text{Nucleo}(T) \cap \text{Imagen}(T)$, entonces:

$$\begin{cases} w = T(s) & \text{para algún } s \in V, \\ w = T^2(s) = T(w) = 0. \end{cases}$$

Lo cual implica que:

$$\text{Nucleo}(T) \cap \text{Imagen}(T) = \{0\}.$$

De esta manera, el argumento

anterior prueba que para todo $u \in V$, se tiene que:

$$\begin{cases} \text{Nucleo}(T) \cap \text{Imagen}(T) = \{0\}, \\ u = (u - T(u)) + T(u), \\ u - T(u) \in \text{Nucleo}(T) \text{ y } T(u) \in \text{Imagen}(T). \end{cases}$$

lo cual significa que

$$\boxed{V = \text{Nucleo}(T) \oplus \text{Imagen}(T)}$$

---

(2)

(a) El polinomio caracteristico de A está dado por:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)(-16+\lambda^2+12) + 6(4+\lambda-6)$$
$$-6(6+3\lambda-12)$$

$$= (5-\lambda)(\lambda^2-4) + 6(\lambda-2) - 6(3\lambda-6)$$
$$= 5\lambda^2 - 20 - \lambda^3 + 4\lambda + 6\lambda - 12 - 18\lambda + 36$$

$= -\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4.$

$$\boxed{\begin{array}{l} p(\lambda) = -(\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4) \\ \text{polinomio caracteristico} \end{array}}$$

(b) para encontrar los ceros de $p(\lambda)$, notamos que:

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4 & \lambda-2 \\ \cline{2-2} -\lambda^3+2\lambda^2 \qquad\qquad & \lambda^2-3\lambda+2 \\ \hline -3\lambda^2+8\lambda \quad\;\; & \\ +3\lambda^2-6\lambda \quad\;\; & \\ \hline 2\lambda-4 & \\ -2\lambda+4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda+2)$$
$$=(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1)=(\lambda-2)^2(\lambda-1).$$

Así, los valores propios de A, son $\lambda=1$ y $\lambda=2$.

(c) Empecemos encontrando bases para E_1 y E_2.

(r) Base para E_1.

$$A-1\cdot I=\begin{pmatrix}4&-6&-6\\-1&3&2\\3&-6&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{op. elem}}$$

$$\begin{pmatrix}1&-3&-2\\2&-3&-3\\3&-6&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{op. elem}}\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&3&1\\0&3&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{op. elem}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1/3\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1/3\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff \begin{aligned}x&=z\\y&=-\tfrac{1}{3}z\\z&=z\end{aligned}$$

$$\boxed{E_1=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}.}$$

(r) Base para E_2.

$$A-2I=\begin{pmatrix}3&-6&-6\\-1&2&2\\3&-6&-6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff \begin{aligned}x&=2y+2z\\y&=y\\z&=z\end{aligned}$$

$$\boxed{E_2 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.}$$

Luego al tomar las matrices D y P como:

$$\boxed{\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ P &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}}$$

entonces $A = PDP^{-1}$.

---

(3)

(a)

(r) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix} / x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ es subespacio de V.

$$W_1 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

por teoria, se tiene W_1 es un subespacio de V, ya que W_1 es generado por un conjunto de elementos en V.

(v) $W_2=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -a & c\end{pmatrix} / a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ es subespacio de V.

$$W_2=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

por teoria, se tiene W_2 es un Subespacio de V, ya que W_2 es generado por un conjunto de elementos en V.

(b) Si $a_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $a_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $b_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $b_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $b_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, entonces:

(v) $W_1=\text{gen}\{a_1,a_2,a_3\}$ y $\{a_1,a_2,a_3\}$ son lineal/ independientes, entonces $\text{Dim}(W_1)=3$.

(r) $W = \text{gen}\{b_1, b_2, b_3\}$ y $\{b_1, b_2, b_3\}$ son lineal/ independientes, entonces $\text{Dim}(W_2) = 3$.

(r) $W_1 + W_2 = \text{gen}\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\} = M_{2\times2}(\mathbb{R})$, entonces $\text{Dim}(W_1 + W_2) = 4$.

(r) $\text{Dim}(W_1 \cap W_2) = \text{Dim}(W_1) + \text{Dim}(W_2) - \text{Dim}(W_1 + W_2)$
$= 3 + 3 - 4 = 2$.

---

(4)

(a) f es continua en $(0,0)$.

$$\begin{cases} 0 \leq |f(x,y)| \leq |x|, \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0. \end{cases}$$

lo cual implica por el teorema de estricción que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$

y así $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

(b) f no es diferenciable en $(0,0)$.

(v) $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

(v) $$\frac{f(x,y) - f_x(0,0)\cdot x - f_y(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

(v) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ no existe,

ya que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

$x=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{(2)^{3/2}\,|x|^3}$$ no existe

$y=x$

(c) Sea $u=(a,b)\neq(0,0)$, entonces:

$$D_u f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(ha,hb) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ha \cdot (ha)^2}{h(h^2a^2 + h^2b^2)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^3}{a^2+b^2} = \frac{a^3}{a^2+b^2}.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} D_u f(0,0) = \dfrac{a^3}{a^2+b^2} \\ u = (a,b) \end{array}}$$

---

(5) Usaremos multiplicadores de Lagrange, con:

$f(x,y) = x^2+y^2+z^2$ función a optimizar

$$\boxed{\begin{array}{l} g(x,y,z) = 2x+3y-z \\ g(x,y,z) = 5 \end{array}}$$

conjunto donde optimizamos

por lo tanto, al usar multiplicadores de Lagrange obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 5 \end{cases}$$

el cual describe las siguientes ecuaciones escalares.

$$\boxed{\begin{aligned} 2x &= \lambda(2) \\ 2y &= \lambda(3) \\ 2z &= \lambda(-1) \\ \\ 2x+3y-z &= 5 \end{aligned}} \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} &\frac{2x}{2} = \frac{2y}{3} = \frac{2z}{-1} \\ &x = x \\ &y = \frac{3}{2}x \\ &z = \frac{-1}{2}x \end{aligned}}$$

De donde:

$$\begin{cases} 2x+3y-z = 5, \\ 2x+3\left(\frac{3}{2}x\right)-\left(\frac{-1}{2}x\right) = 5, \\ \left(2+\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\right)x = 7x = 5 \longrightarrow x = \frac{5}{7}, \\ y = \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{15}{14}, \\ z = \frac{-1}{2}x = \frac{-1}{2}\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{-5}{14}. \end{cases}$$

Así, el único punto que satisface las condiciones del teorema de Multiplicadores de Lagrange es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7 \\ 15/14 \\ -5/14 \end{pmatrix}$

y se puede probar que en este punto la función f alcanza su valor mínimo absoluto sobre $g(x,y,z)=5$. Así, concluimos que la distancia del plano $2x+3y-z=5$ al origen es:

$$\boxed{\sqrt{\left(\frac{5}{7}\right)^2+\left(\frac{15}{14}\right)^2+\left(\frac{-5}{14}\right)^2}}$$

---

(6)

(a) La prueba es una consecuencia inmediata del teorema del valor medio. Sean $x, y \in I$, entonces:

(r) Si $x=y$, entonces
$|f(x)-f(y)|=0 \leq K|x-y|=0$.

(r) Si $x\neq y$, entonces existe r en $\{(1-t)x+ty \,/\, 0\leq t\leq 1\}$ tal que:

$$f(x)-f(y)=f'(r)\cdot(x-y)$$

y así, se tiene que:

$$\begin{cases} |f(x)-f(y)| = |f'(r)\cdot(x-y)| = \\ = |f'(r)|\cdot|x-y| \leq K\cdot|x-y|. \end{cases}$$

El argumento anterior prueba que $|f(x)-f(y)|\leq K|x-y|$ para todo $x,y\in I$.

(b) Sea $c=f(1)$, entonces:

$$\begin{cases} f(x)=f(x\cdot 1)=x\cdot f(1)=c\cdot x, \\ \text{para todo } x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

(7)

(a) Vamos a probar que $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ es una sucesión monotona creciente acotada por $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

<u>Afirmación:</u> para todo $n \geq 1$, se tiene que $0 < x_n \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4a}}{2}$.

<u>paso base</u> $(n=1)$.

$$0 < x_1 = \sqrt{a} = \frac{\sqrt{4a}}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4a}}{2}.$$

<u>Paso inductivo</u>

Supongamos que $0 \leq x_n \leq L$ con $L = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4a}}{2}$ $\left(L = \sqrt{a+L} \right)$, entonces:

$$\boxed{x_{n+1} = \sqrt{a+x_n} \leq \sqrt{a+L} = L,}$$

lo cual prueba la hipótesis inductiva y así se tiene que por inducción que $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ es una sucesión acotada superiormente por $L = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4a}}{2}$.

Afirmación: $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ es una sucesión creciente. Es decir $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

Paso base: $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}}$ y clara/ $x_1 \leq x_2$.

paso inductivo: Supongamos que $x_n \leq x_{n+1}$, entonces:

$$\boxed{x_{n+1} = \sqrt{a+x_n} \leq \sqrt{a+x_{n+1}} = x_{n+2}}$$

lo cual demuestra que $x_{n+1} \leq x_{n+2}$, mostrando así que el paso inductivo se satisface.

por lo tanto, hemos probado por inducción que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ es creciente.

por lo tanto, el argumento anterior muestra que $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ es una sucesión creciente acotada superior/ y por teoría se tiene que la sucesión converge a un número real M. Veamos que $M = L = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4a}}{2}$.

$$\lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{1 + x_n} =$$

$$= \sqrt{1 + \lim_{n \to +\infty} x_n} = \sqrt{1+M} = M.$$

por lo tanto $\underline{\underline{M}}$, satisface que $M = \sqrt{1+M}$ y despejando se tiene que $M = L = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4a}}{2}$.

formula del bachiller

(b)

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ converge?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n+1)-\ln(n)$$

$$= \left(\lim_{n\to+\infty} \ln(n)\right) - \ln(1) = +\infty.$$

Lo cual demuestra que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge y así $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ no converge absoluta/.

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln(1+1/n)$ converge

ya que $\lim_{n\to+\infty} \ln(1+1/n) = 0$

$\{\ln(1+1/n)\}_{n=1}^{+\infty}$ es una sucesión decreciente de términos positivos, lo cual implica por el criterio de las series alternantes que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln(1+1/n) \text{ converge.}$$