parcial (3).

(1) para empezar, notemos que:

(✓) $a_n^2 \leq 1+a_n < 1+2a_n$ para todo $n\geq 1$
(debido $a_n>0$)

(✓) $a_n^2-2a_n+1<2$

$(a_n-1)^2<2$ ⟶ para todo $n\geq 1$

$|a_n-1|<\sqrt{2}$

Lo cual implica que para todo $n\geq 1$, se tiene que $|a_n|< 1+\sqrt{2}$, lo cual prueba que $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ es una sucesión acotada.

---

(2)

(a) sea $f(x)= x-\text{sen}(x)$ para todo $x\in[0,1]$, entonces:

(✓) $f(0)=0$

(✓) $f(1)=1-\text{sen}(1)>0$

(✓) $f'(x)=1-\cos(x)>0$ para $0\leq x\leq 1$.

lo cual implica que $f(x) = x - \operatorname{sen}(x)$ es una función creciente en $[0,1]$ y $f(x) \geq f(0)$ para todo $x \in [0,1]$; pero esto significa que:

$$\begin{cases} f(x) = x - \operatorname{sen}(x) \geq f(0) = 0 \\ x - \operatorname{sen}(x) \geq 0 \\ \text{para } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

lo cual significa que:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x) \leq x, \\ \text{para } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Así, tenemos que

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x^2) \leq x^2 \leq x \leq x^{1/2} \\ \operatorname{sen}(x^2) = |\operatorname{sen}(x^2)| \\ \text{para } x \in [0,1] \end{cases}$$

lo cual demuestra que:

$$\begin{cases} |\operatorname{sen}(x^2)| \leq x^{1/2} \\ \text{para todo } x \in [0,1] \end{cases}$$

(b) Sea $g(x) = x - \ln(x+2)$, entonces:

(✓) $g(0) = -\ln(2) < 0$.

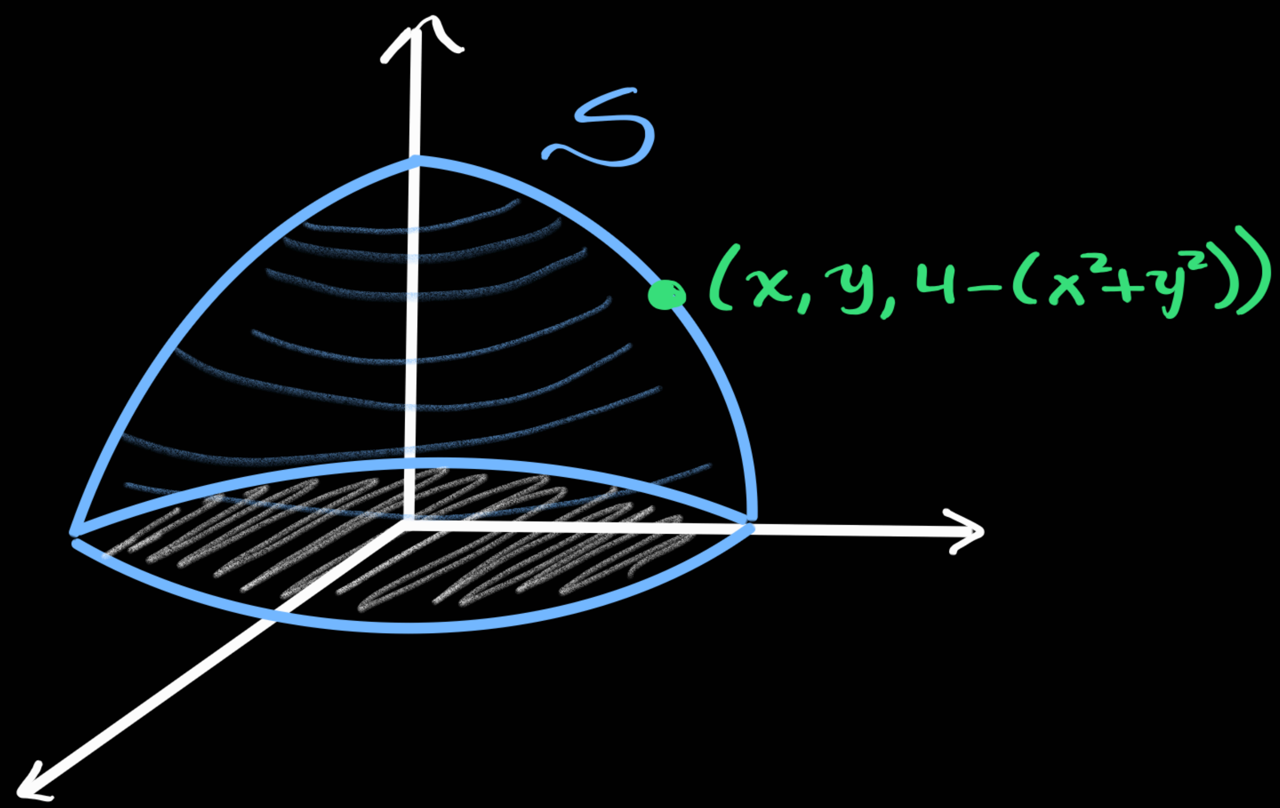
(✓) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(e^x - (x+2)\right)$

$$= \ln\left(\lim_{x\to+\infty} e^x - (x+2)\right) = +\infty.$$

por lo tanto, para $M=0$ existe un $\delta>0$ tal que si $x>\delta$, entonces $g(x) = x - \ln(x+2) > 0$. Así, por el teorema del valor intermedio, podemos asegurar que existe $x_0 \in (0,+\infty)$ tal que:

$$\boxed{\begin{array}{c} g(x_0) = x_0 - \ln(x_0+2) = 0 \\ \Updownarrow \\ \ln(x_0+2) = x_0 \end{array}}$$

(3)



$$\boxed{\text{Flujo}(F) = \iint_S F \cdot ds = ?}$$

Sea $S_1 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 \leq 4\}$ y

$S_2 = S \cup S_1$, entonces S_2 es una superficie cerrada y por el teorema de divergencia de Gauss, tenemos que:

$$\iint_{S_2} F \cdot ds = \iint_S F \cdot ds + \iint_{S_1} F \cdot ds$$

$$= \iiint_E \nabla \cdot F \, dV.$$

$$\boxed{E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq 4-(x^2+y^2)\}}$$

Esto implica que

$$\boxed{\iint_S F \bullet ds = \left(\iiint_E \nabla \circ F \, dv\right) - \left(\iint_{S_1} F \bullet ds\right)}$$

donde:

(✓) $\nabla \circ F = (3-y^2) + (-x^2) + 1 = 4-(x^2+y^2).$

(✓) $$\iiint_E \nabla \circ F \, dv = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r^2} r(4-r^2)\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^2 (4r-r^3)(4-r^2)\, dr =$$

$$= 2\pi \int_0^2 16r - 4r^3 - 4r^3 + r^5 \, dr =$$

$$= 2\pi \left(8(2)^2 - 2^4 - 2^4 + \frac{2^6}{6}\right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{64}{6}\right) = \frac{128\pi}{6} = \frac{64\pi}{3}.$$

(✓) $\begin{cases} \alpha(y,x) = (x,y,0) \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}$ es una

parametrización de S_1 y además:

$\alpha_y \times \alpha_x = (0,0,-1)$ lo cual implica que:

$$\begin{cases} F(\alpha(y,x)) \bullet (\alpha_y \times \alpha_x) = \\ = (*, *, 0+1) \bullet (0,0,-1) = -1. \end{cases}$$

y así tenemos que:

$$\begin{cases} \iint_{S_1} F \bullet ds = \iint_A -1 \, dA = -\text{Área}(A) \\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}. \end{cases}$$

Del anterior análisis, concluimos que:

$$\boxed{\begin{aligned} \iint_S F \bullet ds &= \iiint_E \nabla \bullet F \, dv - \iint_{S_1} F \bullet ds \\ &= \frac{64\pi}{3} - (-\text{Área}(A)) = \\ &= \frac{64\pi}{3} + \text{Área}\left(\begin{smallmatrix}\text{circulo}\\ \text{radio 2}\end{smallmatrix}\right) = \frac{64\pi}{3} + \pi(2)^2 \\ &= \left(\frac{64}{3} + 4\right)\pi = \frac{76}{3}\pi. \end{aligned}}$$

(4) $W = \{ A \in M_{3\times 3} / A^T = -A \}$.

(a) para probar que W es subespacio de $M_{3\times3}$, tenemos que demostrar las siguientes propiedades:

(i) $0_{3\times3} \in W$.

(ii) W es cerrado bajo la suma.

(iii) W es cerrado bajo multiplicación por escalar.

prueba(i):

$$\left.\begin{array}{l} 0_{3\times3}^T = 0_{3\times3} \\ -0_{3\times3} = 0_{3\times3} \end{array}\right\} \Longrightarrow 0_{3\times3}^T = -0_{3\times3}$$

De esta manera $0_{3\times3} \in W$.

prueba(ii).

Si $A, B \in W$, entonces tenemos que:

$$(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B)$$

Así, $A+B \in W$.

Prueba (iii).

Si $r \in \mathbb{R}$ y $A \in W$, entonces:

$$(r \cdot A)^T = r \cdot A^T = r \cdot (-A) = -(rA)$$

lo cual significa que $r \cdot A \in W$.

El anterior análisis, demuestra que W es un subespacio de $M_{3\times3}$.

(b) Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ satisface que $A^T = -A$, entonces:

($\checkmark$) $a = e = i = 0$.

($\checkmark$) $b = -d$, $c = -g$, $f = -h$.

lo cual significa que:

$$A \in W \iff A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera, es fácil notar que una base para W es

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

y por lo tanto $\text{Dim}(W) = 3$.

---

(5) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 =$

$$= \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2$$

$$= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

---

(6)

(a) para empezar, calculemos los valores propios de A.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 1\right) - 1\left(3-\lambda-1\right) + 1\left(1-3+\lambda\right)$$

$$= (3-\lambda)\left(9-6\lambda+\lambda^2-1\right) - 2+\lambda+\lambda-2$$

$$= (3-\lambda)\left(8-6\lambda+\lambda^2\right) + 2\lambda - 4 =$$

$$= 24 - 18\lambda + 3\lambda^2 - 8\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 2\lambda - 4$$

$= -\lambda^3+9\lambda^2-24\lambda+20.$

$$\boxed{\begin{array}{l} p(\lambda) = -\lambda^3+9\lambda^2-24\lambda+20 \\ \text{Es el polinomio car. de } A \end{array}}$$

una cero para $p(\lambda)$ es $\lambda=2$ y para determinar los demás, usamos división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|l} -\lambda^3 & +9\lambda^2 & -24\lambda & +20 & \lambda-2 \\ \cline{5-5} +\lambda^3 & -2\lambda^2 & & & -\lambda^2+7\lambda-10 \\ \cline{1-2} & 7\lambda^2 & -24\lambda & & \\ & -7\lambda^2 & +14\lambda & & \\ \cline{2-3} & & -10\lambda & +20 & \\ & & +10\lambda & -20 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

lo cual implica que:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= -(\lambda-2)\cdot(\lambda^2-7\lambda+10) = \\ &= -(\lambda-2)\cdot(\lambda-2)(\lambda-5) \\ &= -(\lambda-2)^2(\lambda-5). \end{aligned}$$

Así, los únicos valores propios de A son $\lambda=2$ y $\lambda=5$.

(b) Determinemos bases orto-normales para E_2 y E_5.

(r) $E_2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 / (A-2I)(x) = 0 \}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+y+z=0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, al tomar $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tenemos que:

$$v - \text{proy}_u v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y de esta manera, una base ortogonal para E_2 es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ó } \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}}_{\text{Esta es Ortonormal}}$$

(r) $E_5 = \{ x \in \mathbb{R}^3 / (A-5I)(x) = 0 \}$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} x = z \\ y = z \\ z = z \end{array}$$

Así, una base ortonormal para E_5 es $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$.

(c) Las matrices Q y D tales que $A = QDQ^T$ son:

$$\begin{cases} Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \\ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \end{cases}$$