Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín
Posgrados en Matemáticas - Admisión Semestre 2022-01
Prueba de Conocimientos

Nombre: ______________________________ **Documento:** ____________________

Instrucciones. La evaluación es individual y tiene una duración de 3 horas. No se permite el uso de libros, notas o apuntes. Es muy importante que cada ejercicio sea resuelto en forma clara y precisa. Por favor apague su teléfono celular.

Sección I: Cálculo

1. Pruebe que para todo $x \in [0,1]$, $\arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$.

2. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

3. Demuestre que la integral impropia $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ converge.

4. Evalúe la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F}\cdot dS$, donde

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xy, y^2 + e^{xz^2}, sin(xy))$$

y S es la superficie de la región R acotada por el cilindro $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$ y $z + y = 2$.

Sección II: Álgebra Lineal

Recordemos que dado un espacio vectorial V con subespacios U y W, la suma de U y W está definida como el conjunto $U+W=\{u+w : u\in U, w\in W\}$. Para su dimensión vale:

$$dim(U+W)=dim(U)+dim(W)-dim(U\cap W).$$

Si $U\cap W=\emptyset$ se dice que la suma de U y W es directa y se denota por $U\oplus W$.

1. Determine si la afirmación siguiente es correcta. En caso de ser correcta demuéstrela, en caso de ser incorrecta dé un contraejemplo.

   Sea V un espacio vectorial y U_1, U_2, W_1, W_2 subespacios de V tal que: $V=U_1\oplus U_2$, $V=W_1\oplus W_2$. Entonces:
$$V=(U_1\cap W_1)\oplus(U_1\cap W_2)\oplus(U_2\cap W_1)\oplus(U_2\cap W_2).$$

2. Sean
$$W=\left\{x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4 |\ x=\lambda b_1+\mu b_2+\nu b_3\ \ con\ \ b_1=\begin{bmatrix}3\\2\\1\\2\end{bmatrix},\quad b_2=\begin{bmatrix}3\\1\\7\\2\end{bmatrix},\quad b_3=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\7\end{bmatrix},\ \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}\right\}$$
   y
$$U=\left\{x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4 |\ x_1-2x_2=0\right\}$$
   dos subespacios de $\mathbb{R}^4$.

   a) Determine la dimensión de W y la dimensión de U.
   b) Determine la dimensión de $U\cap W$ y la dimensión de $U+W$.
   c) Determine una base $\mathcal{B}$ para $U\cap W$ y una base $\mathcal{C}$ para $U+W$.
   d) Sea $T:\mathbb{R}^4\longrightarrow W$ una transformación lineal tal que: $T(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}^4\setminus U$. Determine $T(b_1)$, $T(b_2)$, $T(b_3)$. ¡Justifique!

3. Para $t\in\mathbb{R}$ sea $T:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^4$ una transformación lineal dada por $T(x)=Ax$ con
$$A=\begin{bmatrix}t&0&0&0\\0&t&0&4\\1&0&t&0\\0&1&0&t\end{bmatrix}.$$

   a) Determine todos los valores propios de T con sus respectivos espacios propios.
   b) ¿Es T diagonalizable? ¡Justifique!
   c) Determine una base $\mathcal{B}=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ con respecto a la cual la transformación T está representada por la matriz
$$B=\begin{bmatrix}t&1&0&0\\0&t&0&0\\0&0&t+2&0\\0&0&0&t-2\end{bmatrix}.$$