parcial (7).

(1)

(a) W_1 es subespacio de V.

(✓) $0 \in W_1$.

$0(a) = 0$

$0(b) = 0$

$0(b) = 4\,0(a) = 0$.

(✓) si $f, g \in W_1$, entonces $f+g \in W_1$.

$f(b) = 4f(a)$

$g(b) = 4g(b)$

$(f+g)(b) = 4(f+g)(b)$.

(✓) si $f \in W_1$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces $rf \in W_1$.

$f(b) = 4f(b) \rightsquigarrow (rf)(b) = 4(rf)(a)$.

Lo anterior demuestra que W_1 es un subespacio de V.

(b) W_2 no es subespacio de V.

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{cases} f(x) = x-a, \\ g(x) = -x+b \end{cases}$$

entonces $f, g \in W_2$, pero $f+g$ no es un elemento de W_2, ya que:

$$\begin{cases} (f+g)(x) = b-a \neq 0, \\ \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

---

(2)

(a) Describir el tamaño de D.

$$A = \begin{pmatrix} B_{a\times b} & C_{a\times(n-b)} \\ D_{(n-a)\times b} & O_{(n-a)\times(n-b)} \end{pmatrix}$$

por lo tanto, el número de filas de D es $\underline{\underline{n-a}}$ y el número de columnas de D es b.

(b) Rango$(C) \leq a$.

Esto se debe a que el rango

el número de renglones LI de C, pero C tiene $\underline{\underline{a}}$ renglones.

(c) para empezar, notamos que

$$\text{Rango}(A)=n \implies \boxed{\begin{matrix}\text{Rango}([B\ C])=a \\ \text{Rango}([D\ 0])=n-a\end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix}\text{Rango}([B\ C])=a \\ \text{Rango}([D\ 0])=n-a\end{matrix}} \implies \boxed{\text{Rango}(D)=n-a}$$

pero

$$\begin{cases} n-a=\text{Rango}(D_{(n-a)\times b})\leq b<n-a \\ n-a<n-a \rightsquigarrow \text{lo cual es imposible.}\end{cases}$$

De esta manera, tenemos que $\text{Rango}(A)<n$.

---

(3)

(a) Dados $x,y\in\mathbb{R}^n$, se quiere probar que si $x\perp y$, entonces $y\perp x$.

Esto es cierto, ya que

$$\begin{cases} x^T y = x \bullet y = y \bullet x = y^T x, \\ x^T y = 0 \Leftrightarrow y^T x = 0 \end{cases}$$

(b) $N^{\perp} = \{ y \in \mathbb{R}^n / \forall x \in N : x \bullet y = 0 \}$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$.

(✓) $0 \in N^{\perp}$ (trivial).

(✓) Si $y_1, y_2 \in N^{\perp}$, entonces para todo $x \in N$ se tiene que:

$$x \bullet (y_1 + y_2) = x \bullet y_1 + x \bullet y_2 = 0$$

lo cual implica que $y_1 + y_2 \in N^{\perp}$.

(✓) Si $y \in N^{\perp}$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces para todo $x \in N$, se tiene que

$$x \bullet (ry) = r(x \bullet y) = 0$$

lo cual implica que $ry \in N^{\perp}$.

Así, el argumento anterior prueba que $N^{\perp}$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$.

(c) Si $Det(A-\lambda I)=0$, entonces

$$\begin{cases} Det(A^T-\lambda I) = Det(A-\lambda I)^T = \\ = Det(A-\lambda I) = 0 \end{cases}$$

Así, tenemos que λ es un valor propio para A^T.

(d) Supongamos que $y \in U^{\perp}$ y probemos que $A^T y \in U^{\perp}$.
Sea $x \in U$, entonces:

$$\begin{cases} (A^T y) \cdot x = (A^T y)^T x = \\ = y^T A x = A(x) \cdot y = 0 \end{cases}$$

Así, tenemos que $A^T y \in U^{\perp}$, lo cual demuestra que $A^T(U^{\perp}) \subseteq U^{\perp}$.

---

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty} x(x+\sqrt{1+x^2}) = ?$

(v) $x(1+\sqrt{1+x^2}) = \dfrac{-x}{x-\sqrt{1+x^2}} =$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-x}.$$

$$\lim_{x\to -\infty} x\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{1/2}+1} = 1.$$

---

(5) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n^4}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{n}+n^3\right)^{1/2}}.$$

(r) $$0 < \frac{1}{\left(\frac{1}{n}+n^3\right)^{1/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$

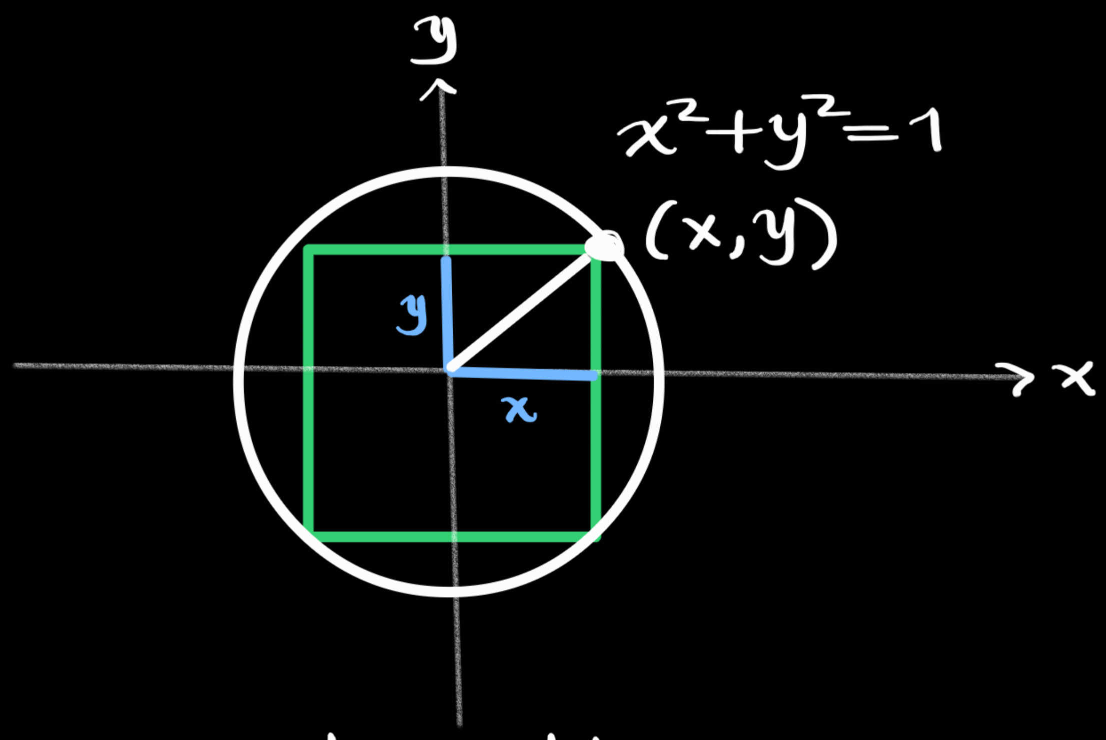
(r) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge $\left(\begin{array}{l}\text{serie } p \\ \text{con } p=\frac{3}{2}>1\end{array}\right)$.

Así, por criterio de comparación tenemos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n^4}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{n}+n^3\right)^{1/2}}$$

converge.

(6) primero es fácil notar que los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio 1 con mayor área, son aquellos que satisfacen que sus vértices tocan la circunferencia. por lo tanto, sin perdida de generalidad podemos concentrarnos en encontrar el área máxima del rectángulo inscrito en la circunferencia y con vértices en la misma como se muestra en la siguiente figura



Entonces, el problema convierte en el siguiente problema de optimización:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Área}(x,y) = (2x)(2y) = 4xy \\ \text{condición:} \quad x^2+y^2=1 \end{array}}$$

$x, y > 0$

para resolver esto, aplicamos multiplicadores de Lagrange.

$$\nabla A(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$
$$g(x,y) = 1$$

$\left(g(x,y) = x^2+y^2\right)$

$$\boxed{\begin{array}{l} (4y, 4x) = \lambda(2x, 2y) \\ x^2+y^2=1 \end{array}}$$

$$x = y$$
$$x^2+y^2=1$$

$\Longrightarrow$

$$2x^2 = 1$$
$$x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Así, el rectángulo con área más grande que se puede inscribir en $x^2+y^2=1$ tiene área $4xy = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$.

(7) $$\iint_S F \bullet ds = \iiint_E \nabla \cdot F \, dv$$

donde

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Así, tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \iiint_E \nabla \cdot F \, dV = 3 \operatorname{Vol}(E) = \\ = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 \right) / 2 = 2\pi . \end{array} \right.$$

Esto prueba que

$$\boxed{\iint_S F \bullet ds = 2\pi}$$