**Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín**
**Posgrados en Matemáticas - Admisión Semestre 2021-02**
**Prueba de Conocimientos**

**Nombre:** ____________________________________________ **Documento:** ____________________

**Instrucciones**. La evaluación es individual y tiene una duración de 3 horas. No se permite el uso de libros, notas o apuntes. Es muy importante que cada ejercicio sea resuelto en forma clara y precisa. Por favor apague su teléfono celular.

## Sección I: Cálculo

1. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $(0,\infty)$ tal que:

   (a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente,

   (b) para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n^2 \leq 1 + a_n$.

   Demuestre que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, es decir, existe una constante $B > 0$ tal que $|a_n| \leq B$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) Demuestre que $|\operatorname{sen}(x^2)| \leq x^{1/2}$ para cada $x \in [0,1]$.
   Indicación: considere la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como $f(t) = \operatorname{sen}(t)$.

   (b) Pruebe que la ecuación
   $$\ln(x+2) = x$$
   tiene una solución en $(0,\infty)$.

3. Sea $S = \{(x,y,z) : z = 4 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\}$ orientada con la normal unitaria cuya tercera componente es positiva. Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido como
   $$\vec{F}(x,y,z) = (3x - xy^2, -yx^2 + e^{x^2 z}\tan^{-1}(x^2+z^2), z+1),$$
   a través de la superficie $S$.

## Sección II: Álgebra Lineal

1. Sea $W$ el subconjunto de las matrices de tamaño $3 \times 3$ con entradas reales que son antisimétricas. Es decir,
$$W = \{A \in M_{3\times 3} \mid A^T = -A\}.$$
   (a) Demostrar que $W$ es un subespacio vectorial de $M_{3\times 3}$.

   (b) Encontrar una base para $W$ y calcular su dimensión.

2. Supogamos que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que
$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2.$$

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule los valores propios y los correspondientes vectores propios de $A$.

   (b) Encuentre una base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ de vectores propios de $A$.

   (c) Diagonalizar ortogonalmente a la matriz $A$, es decir, encontrar una matriz ortogonal $Q$ y una matriz diagonal $D$ tales que $A = QDQ^T$.