Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín
Posgrados en Matemáticas
Admisión Semestre 2020-02
Prueba de Conocimientos

Primera Parte: Álgebra lineal (50%)

1. (15%) Sea $S: P_2 \to \mathbb{R}_2$ la función dada por $S(p(x)) = \begin{bmatrix} p(1) \\ p(0) \end{bmatrix}$, donde P_2 es el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2.

a) Verifique que S es una transformación lineal.
b) Encuentre $nucleo(S)$.
c) ¿Es S sobreyectiva? Justifique su respuesta.

2. (15%) Sean $\mathcal{E}$ la base canónica para $\mathbb{R}^4$ y $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal. Suponga además que $A = [T]_\varepsilon$ tiene espacios propios

$$E_2 = gen\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right], E_1 = gen\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \text{ y } E_{-5} = \left\{\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \\ 0 \end{bmatrix}, \ \ x, z \in \mathbb{R}\right\}.$$

a) ¿Es T diagonalizable?
b) En caso afirmativo, halle una base $\mathcal{C}$ tal que $[T]_\mathcal{C}$ sea una matriz diagonal.

3. (10%) Pruebe que si A es una matriz diagonalizable y ninguno de sus valores propios es cero entonces A es invertible.

4. (10%) Muestre que si $\{u, v\}$ es un conjunto linealmente independiente en un espacio vectorial, entonces $\{u + v, u - v\}$ también lo es.

Segunda Parte: Cálculo (50%)

Debe Justificar su procedimiento, indicando el nombre de los teoremas empleados.

5. (15%) Se tiene un tanque con forma de cono (circular recto) de 2 metros de altura y 1 metro de radio en su base, con su vértice hacia abajo. Si al tanque le entra agua a razón de 3 litros por minuto, calcule la razón de cambio del nivel de agua, cuando este se encuentra por la mitad (de la altura del tanque).

6. (15%) Sea f una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y $g(x) = \int_0^{x^3+1} f(t)dt$, para todo x en $\mathbb{R}$. Si f se anula solamente para $x = 1$, $f(0) = -3$ y f es diferenciable en 1, con $f'(1) \neq 0$, encuentre los extremos locales de g.

7. (20%) Sea

$$f(x,y) \coloneqq \begin{cases} \frac{x^m+y^m}{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0)' \end{cases}$$

donde m es una constante real. Pruebe que f es diferenciable en $(0,0)$ si y solo si $m > 3$.