Parcial 8.

(1) sea $D=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y W dado por

$$W=\left\{ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \ A=DAD^{-1} \right\}$$

entonces

(V) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -(a+c)+b+d \\ c & -c+d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -a+b-c+d \\ c & -c+d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} a=a \\ b=b \\ c=0 \\ d=a \end{array}}$$

De esta manera, tenemos que

$$\boxed{W=\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.}$$

Así, como W se escribe como el generado de un conjunto de vectores, entonces por teorema se tiene que W es subespacio de $M_{2\times2}$.

(b) una base para W es el conjunto $B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$.

(c) W es isomorfo a P_1 y P_1 es un subespacio de P_2.

---

(2)

(a) Definimos $\tilde{V}_3 = V_1 \times V_2$, entonces

$$\tilde{V}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)\cdot \operatorname{Det}\begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\tilde{V}_3 = \frac{\sqrt{2}}{6}\left(i-k\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

entonces el complemento ortogonal de $W=\text{gen}\{V_1,V_2\}$ es:

$$\boxed{W^{\perp} = \text{gen}\{\tilde{V}_3\} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}.}$$

y $V_3 = \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\0\\-\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$.

(b) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, entonces:

$$v_1 \longmapsto v_3$$
$$v_2 \longmapsto -5v_2$$
$$v_3 \longmapsto v_1$$

$$[T]_{B\leftarrow B} = \left([T(v_1)]_B \ [T(v_2)]_B \ [T(v_3)]_B \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) $[T]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{E}\leftarrow B} \cdot [T]_{B\leftarrow B} \, [T]_{\mathcal{E}\leftarrow B}^{-1}$

- $[T]_{\mathcal{E}\leftarrow B} = \left((T(v_1))_{\mathcal{E}} \ (T(v_2))_{\mathcal{E}} \ (T(v_3))_{\mathcal{E}} \right)$

$$= \left(T(v_1) \ T(v_2) \ T(v_3) \right) = \left(v_3 \ -5v_2 \ v_1 \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 5\sqrt{2}/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \\ -\sqrt{2}/2 & 5\sqrt{2}/2 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

- $[T]_{B\leftarrow B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$$[T]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 5\sqrt{2}/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \\ -\sqrt{2}/2 & 5\sqrt{2}/2 & -2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 5\sqrt{2}/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \\ -\sqrt{2}/2 & 5\sqrt{2}/2 & -2/3 \end{pmatrix}^{-1}.$$

(3) Supongamos que:

$$\begin{cases} Dim(\mathcal{U}) = n, \\ Dim(V) = m \end{cases}$$

y consideremos una base $B = \{w_1, \dots, w_p\}$ para $\mathcal{U} \cap V$. como $\mathcal{U} \cap V$ es subespacio de $\mathcal{U}$ y V, entonces:

(✓) Existen vectores $u_{p+1}, \dots, u_n$ tales que $\{w_1, \dots, w_p, u_{p+1}, \dots, u_n\}$ es una base para $\mathcal{U}$.

(✓) Existen vectores $v_{p+1}, \dots, v_m$ tales que $\{w_1, \dots, w_p, v_{p+1}, \dots, v_m\}$ es una base para V.

(✓) $\{w_1, \dots, w_p, u_{p+1}, \dots, u_n, v_{p+1}, \dots, v_m\}$ genera a $\mathcal{U} + V$.

$$\mathcal{U} + V = \{x + y \in V / x \in \mathcal{U} \text{ y } y \in V\}$$

(✓) $\{w_1, \dots, w_p, u_{p+1}, \dots, u_n, v_{p+1}, \dots, v_m\}$ es un conjunto $\mathcal{LI}$.

Supongamos que:

$$\sum_{i=1}^{p} c_i w_i + \sum_{i=p+1}^{n} d_i u_i + \sum_{i=p+1}^{m} f_i v_i = 0$$

Si existiera $f_j \neq 0$, entonces

$$\sum_{i=1}^{p} c_i w_i + \sum_{i=p+1}^{n} d_i u_i = \sum_{i=p+1}^{m} (-f_i) v_i \in U \cap V$$

y esto implica que

$$\begin{cases} c_i = 0 & \text{para todo } i \in \{1, \ldots, p\} \\ d_i = 0 & \text{para todo } i \in \{p+1, \ldots, n\} \\ f_i = 0 & \text{para todo } i \in \{p+1, \ldots, m\} \end{cases}$$

y esto significa precisa/ que $\{w_1, \ldots, w_p, u_{p+1}, \ldots, u_n, v_{p+1}, \ldots, v_m\}$ es lineal/ independiente, y teniendo en cuenta que este conjunto genera a $U+V$, entonces es una base para $U+V$.

De lo anterior, tenemos que:

$\mathrm{Dim}(U+V) =$ # de elementos en la base anterior

$$= \begin{array}{l}\# \text{ de elementos en} \\ \{w_1,\dots,w_p,u_{p+1},\dots,u_n,v_{p+1},\dots,v_m\}\end{array}$$

$$= p+(n-p)+(m-p)$$

$$= n+m-p$$

$$= \operatorname{Dim}(\mathcal{U})+\operatorname{Dim}(V)-\operatorname{Dim}(\mathcal{U}\cap V).$$

---

(4) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen}^2(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)\cdot \operatorname{sen}^2(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos(x)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)} =$$

$$= \frac{1+\cos(0)}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos(0)}} = \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{1+1}}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(5)

(a) $f'(x) = \dfrac{(x^2+1) - (2x)\cdot x}{(x^2+1)^2} =$

$= \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$

(✓) f es creciente en $(-1,1)$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$

(✓) f es decreciente en $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty).$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1-x^2 < 0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x < -1 \\ \text{ó} \\ x > 1 \end{array}}$

(b) $f''(x) = \dfrac{(1+x^2)^2(-2x) - 4x(1+x^2)(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$

$= \dfrac{-2x(1+2x^2+x^4) - 4x(1-x^4)}{(1+x^2)^4}$

$= \dfrac{-2x-4x^3-2x^5-4x+4x^5}{(1+x^2)^4} =$

$$= \frac{2x^5-4x^3-6x}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{2x(x^4-2x^2-3)}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)(x^2+1)}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+1)}{(1+x^2)^4}.$$

- $f''(x)>0 \iff x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})>0$

$\iff x \in (-\sqrt{3},0) \cup (\sqrt{3},+\infty)$.

- $f''(x)<0 \iff x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})<0$

$\iff x \in (-\infty,-\sqrt{3}) \cup (0,\sqrt{3})$.

Así, f es concava hacia arriba en $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$ y concava hacia abajo en $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$.

(c) Extremos relativos.

- $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \iff x = \pm 1.$

- como $f''(1) < 0$, entonces $x = 1$ es un máximo local.

- como $f''(-1) > 0$, entonces $x = -1$ es un mínimo local.

(d) Asintotas.

(✓) Horizontales.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0.$$

por lo tanto $y = 0$ es una asintota horizontal.

(✓) Asintotas verticales.

si $a \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{x}{x^2+1} = \frac{a}{a^2+1}.$$

Esto implica que f no tiene

asintotas vérticales.

(v) Asintotas oblicuas.

Supongamos que $m, b \in \mathbb{R}$ con $m \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (mx+b) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2+1} - (mx+b) =$$

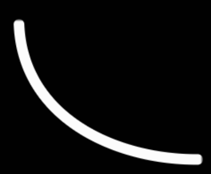
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1/x}{1+(1/x)^2} - (mx+b)$$

$$= \begin{cases} -\infty & \text{si } m>0, \\ +\infty & \text{si } x<0. \end{cases}$$

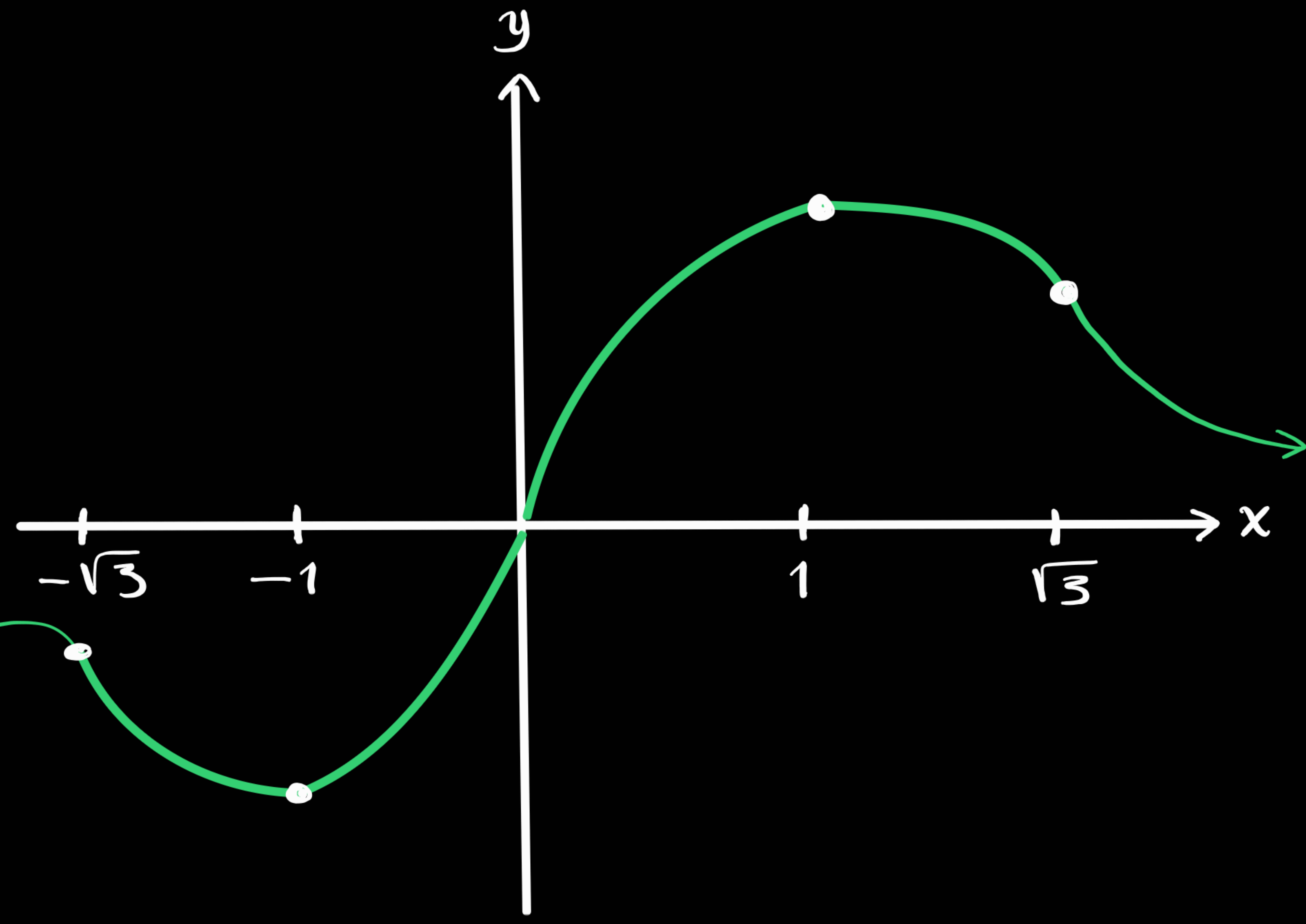
Esto demuestra que f no tiene asintotas oblicuas.

(e)

$(-\infty, -\sqrt{3}) \rightsquigarrow$ concava abajo, decreciente 

$(-\sqrt{3}, -1) \rightsquigarrow$ concava arriba, decreciente 

$(-1,0)$ $\rightsquigarrow$	concava arriba	creciente
$(0,1)$ $\rightsquigarrow$	concava abajo	creciente
$(1,\sqrt{3})$ $\rightsquigarrow$	concava abajo	decreciente
$(\sqrt{3},+\infty)$ $\rightsquigarrow$	concava arriba	decreciente



---

(6) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{(x-2)^{1/3}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^{1/3}}\,dx + \int_2^4 \frac{1}{(x-2)^{1/3}}\,dx.$

(r) $\displaystyle\int_1^2 (x-2)^{-1/3}\,dx = \lim_{a\to 2^-} \int_1^a (x-2)^{-1/3}\,dx$

$$= \lim_{a\to 2^-} \left.\frac{3(x-2)^{2/3}}{2}\right|_{x=1}^{x=a} =$$

$$= \lim_{a\to 2^-} \frac{3}{2}(a-2)^{2/3} - \frac{3}{2}(1-2)^{2/3}$$

$$= \lim_{a\to 2^-} \frac{3}{2}\sqrt[3]{(a-2)^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{1} = -\frac{3}{2}.$$

(v) $$\int_2^4 (x-2)^{-1/3}dx = \lim_{a\to 2^+} \int_a^4 (x-2)^{-1/3}dx$$

$$= \lim_{a\to 2^+} \frac{3}{2}(4-2)^{2/3} - \frac{3}{2}(a-2)^{2/3} =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}.$$

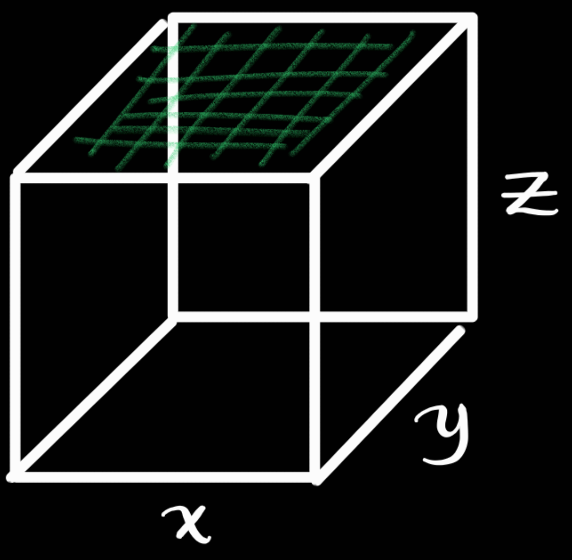
Conclusión:

$$\int_1^4 \frac{1}{(x-2)^{1/3}}dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^{1/3}}dx + \int_2^4 \frac{1}{(x-2)^{1/3}}dx =$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4} - 1\right).$$

---

(7)



$$\text{Área}(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz = 16$$

$$\text{Vol}(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$$

$$\begin{cases} \nabla \text{vol}(x,y,z) = \lambda \nabla \text{Area}(x,y,z) \\ xy + 2xz + 2yz = 16 \end{cases}$$

sistema mult. de Lagrange

$$\begin{cases} yz = \lambda(y+2z), \\ xz = \lambda(x+2z), \\ xy = \lambda(2x+2y), \\ xy + 2xz + 2yz = 16 \end{cases}$$

$$xyz = \lambda(xy+2xz) = \lambda(xy+2yz)$$

$$xyz = \lambda(2xz+2yz)$$

$$\Longrightarrow \begin{matrix} xz = yz \\ xy = 2xz \end{matrix} \Longrightarrow x = y = 2z$$

$$\boxed{\begin{aligned} xy + 2xz + 2yz &= 16 \\ x^2 + x^2 + x^2 &= 16 \\ 3x^2 &= 16 \end{aligned}} \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{4}{\sqrt{3}} \\ y &= \frac{4}{\sqrt{3}} \\ z &= \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}}$$