

# Mathematische Methoden der Physik

Dr. Julian Adolphs, Lukas Rachbauer

31. Jänner 2017



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Vorwort</b>	<b>6</b>
1.1 Literatur Empfehlungen . . . . .	6
<b>2 Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1 Mengen . . . . .	7
2.2 Abbildungen, Funktionen . . . . .	8
2.2.1 Grenzwerte von Funktionen . . . . .	9
2.2.2 Stetige Funktionen . . . . .	10
2.2.3 Umkehrfunktion . . . . .	11
2.3 Elementare Funktionen . . . . .	13
2.3.1 Polynome . . . . .	13
2.3.2 Trigonometrische Funktionen . . . . .	13
2.3.3 Inverse trigonometrische Funktionen . . . . .	15
2.3.4 Exponential- und Logarithmusfunktion . . . . .	15
<b>3 Differentialrechnung</b>	<b>18</b>
3.1 Differenzierbarkeit . . . . .	18
3.2 Ableitungsregeln . . . . .	20
<b>4 Integralrechnung</b>	<b>22</b>
4.1 Motivation . . . . .	22
4.2 Das bestimmte Riemann-Integral . . . . .	23
4.3 Eigenschaften des bestimmten Integrals . . . . .	24
4.4 Das unbestimmte Integral . . . . .	25
4.5 Methoden zur Berechnung von Integralen . . . . .	27
4.5.1 Substitution . . . . .	27
4.5.2 Partielle Integration . . . . .	28
4.5.3 Integralfunktionen . . . . .	28
4.6 Uneigentliche Integrale . . . . .	29
4.6.1 Uneigentliche Integrale mit unendlichen Grenzen . . . . .	29
4.6.2 Hauptwert-Integral . . . . .	30
4.6.3 Singuläre Integranden . . . . .	31
<b>5 Vektoralgebra</b>	<b>33</b>
5.1 Motivation . . . . .	33
5.2 Körper . . . . .	33
5.3 Vektorraum . . . . .	34
5.3.1 Verknüpfungen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	36
5.4 Lineare Unabhängigkeit, Basis . . . . .	36
5.5 Länge eines Vektors, Norm, Einheitsvektoren . . . . .	37
5.6 Skalarprodukt . . . . .	37
5.6.1 Entwicklung nach Basisvektoren . . . . .	39

5.7	Vektorprodukt . . . . .	40
5.7.1	Vektorprodukt der Basisvektoren . . . . .	41
5.7.2	Levi-Civita-Symbol . . . . .	41
5.7.3	Spatprodukt . . . . .	43
5.7.4	Doppeltes Vektorprodukt . . . . .	44
5.7.5	Gemischtes Vierfachprodukt . . . . .	44
5.8	Determinanten . . . . .	44
5.9	Matrizen . . . . .	46
5.9.1	Multiplikation von Matrizen . . . . .	47
5.9.2	Inverse Matrizen . . . . .	47
5.10	Matrizen, Tensoren, Transformationen . . . . .	48
5.10.1	Koordinatentransformationen . . . . .	49
5.10.2	Transformationsformeln für Vektoren . . . . .	50
5.10.3	Transformationsformeln für Tensoren . . . . .	50
5.11	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	51
5.11.1	Gaußsches Eliminationsverfahren . . . . .	51
5.12	Eigenwertproblem . . . . .	53
5.12.1	Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>55</b>
<b>7</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>59</b>
7.1	Gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	60
7.2	Richtungsfeld . . . . .	61
7.3	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen . . . . .	61
7.4	Gewöhnliche lineare inhomogene DGL erster Ordnung . . . . .	63
7.5	Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	64
7.6	Einige spezielle nichtlineare DGLen erster Ordnung . . . . .	67
7.6.1	Separable Differentialgleichung . . . . .	67
7.6.2	Bernoullische Differentialgleichung . . . . .	67
7.6.3	Riccati-Differentialgleichung . . . . .	68
7.6.4	Logistische DGL . . . . .	69
7.6.5	Homogene Differentialgleichung . . . . .	70
7.7	Potenzreihenansatz . . . . .	71
7.8	Numerische Integration expliziter DGL erster Ordnung . . . . .	72
7.8.1	Euler-Verfahren (Polygonzug-Verfahren) . . . . .	72
7.8.2	Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung . . . . .	72
7.8.3	Klassisches Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung . . . . .	73
7.9	Gewöhnliche lineare Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	73
7.10	Systeme von gekoppelten DGLen . . . . .	75
7.10.1	Transformation DGL $n$ -ter Ordnung auf DGL-System . . . . .	77

7.11	Exakte Differentialgleichung . . . . .	78
7.11.1	Integrierender Faktor . . . . .	79
<b>8</b>	<b>Vektoranalysis</b>	<b>82</b>
8.1	Differentiation von Vektorfunktionen . . . . .	82
8.2	Raumkurven . . . . .	82
8.3	Flächen im Raum . . . . .	84
8.3.1	Partielle Differentiation . . . . .	84
8.3.2	Totales Differential / Vollständiges Differential . . . . .	84
8.4	Skalare Felder und Vektorfelder . . . . .	85
8.4.1	Gradient . . . . .	85
8.4.2	Divergenz . . . . .	86
8.4.3	Laplace-Operator . . . . .	87
8.4.4	Rotation . . . . .	87
8.4.5	Mehrfach-Anwendung des Nabla-Operators . . . . .	88
8.5	Krummlinige Koordinatensysteme . . . . .	89
8.5.1	Umkehrbarkeit von Funktionen . . . . .	89
8.5.2	Ebene Polarkoordinaten . . . . .	89
8.5.3	Zylinderkoordinaten . . . . .	90
8.5.4	Kugelkoordinaten . . . . .	90
8.5.5	Allgemeine krummlinige orthogonale Koordinaten . . . . .	91
8.6	Differentialoperatoren in krummlinigen orthogonalen Koordinaten . . . . .	92
8.6.1	Gradient . . . . .	92
8.6.2	Divergenz . . . . .	92
8.6.3	Rotation . . . . .	94
8.6.4	Laplace-Operator . . . . .	94
8.7	Kurvenintegral . . . . .	95
8.7.1	Wegunabhängigkeit . . . . .	96
8.8	Integration über mehrdimensionale Bereiche . . . . .	97
8.8.1	Koordinatentransformation . . . . .	98
8.8.2	Oberflächenintegrale . . . . .	99
8.9	Integralsätze . . . . .	100
8.9.1	Der Gaußsche Integralsatz . . . . .	100
8.9.2	Integralsätze von Green . . . . .	100
8.9.3	Integralsatz von Stokes . . . . .	101
8.10	Lösung der Poissons-Gleichung . . . . .	102
8.11	Fundamentalsatz der Vektoranalysis . . . . .	105
<b>9</b>	<b>Funktionenräume</b>	<b>106</b>
9.1	Skalarprodukt von Funktionen . . . . .	106
9.2	Lineare Unabhängigkeit von Funktionen . . . . .	108
9.2.1	Wronski-Determinante . . . . .	108
9.3	Die Delta-Distribution . . . . .	109

9.4 Approximation der $\delta$ -Distribution durch Funktionen . . . . .	110
9.5 Delta-Funktion in mehreren Dimensionen . . . . .	111
<b>10 Unendliche Reihen</b>	<b>113</b>
10.1 Taylorreihen . . . . .	113
10.2 Fourierreihen . . . . .	114
10.3 Konvergenz von Fourierreihen . . . . .	116
10.4 Gerade und ungerade Funktionen . . . . .	116
<b>11 Integraltransformationen</b>	<b>118</b>
11.1 Laplace-Transformation . . . . .	118
11.1.1 Transformation des Ableitungsoperators . . . . .	119
11.2 Anfangswertproblem und Laplace-Transformation . . . . .	120
11.2.1 Partialbruchzerlegung . . . . .	120
11.3 Fourier-Transformation . . . . .	122
11.4 Laplace-Transformierte der Delta-Funktion . . . . .	122
11.5 Fourier-Transformierte der Delta-Funktion . . . . .	123
11.6 Faltung / Konvolution . . . . .	123
11.6.1 Fouriertransformation und Dekonvolution am Beispiel Experiment	125
<b>12 Funktionentheorie</b>	<b>126</b>
12.1 Stetigkeit . . . . .	126
12.2 Differenzierbarkeit . . . . .	126
12.2.1 Laplace-Gleichung . . . . .	127
12.3 Potenzreihen . . . . .	129
12.4 Komplexe Linienintegrale I . . . . .	130
12.4.1 Integralsatz von Cauchy . . . . .	131
12.4.2 Integralformel von Cauchy . . . . .	132
12.5 Laurent-Reihen . . . . .	133
12.6 Residuensatz . . . . .	134
12.7 Komplexe Linienintegrale II . . . . .	135
12.7.1 Linienintegral um Schnitt herum . . . . .	135
12.7.2 Fouriertransformation und Residuensatz . . . . .	135
12.7.3 Cauchyscher Hauptwert . . . . .	136
<b>13 Anhang</b>	<b>138</b>
13.1 Umkehrfunktionen . . . . .	138
13.1.1 Wurzelfunktion . . . . .	138
13.1.2 Logarithmusfunktion . . . . .	138
13.1.3 Riemannsche Flächen . . . . .	138
<b>Index</b>	<b>141</b>

# 1 Vorwort

Die erste Version dieses Skripts ist von Lukas Rachbauer aus seiner Mitschrift meiner zweistündigen Vorlesung Mathematische Methoden der Physik im Sommersemester 2014 angefertigt worden. Die Vorlesung richtete sich an Physik-Student\*innen im zweiten Semester, die bereits die Vorlesungen Analysis für Physiker I + II und Lineare Algebra I hinter sich gebracht hatten. Es war folglich eher Wiederholung und Anwendung bzw. Ergänzung des bereits bekannten Stoffs. Zum Wintersemester 2016/2017 fand eine größere Änderung des Studienplans statt, wobei die Mathematik für Physiker über die ersten vier Semester verteilt wurde und die Mathematischen Methoden als erste Theorie-Lehrveranstaltung ins erste Semester verlegt wurde und auf drei Stunden Vorlesung plus eine Stunde Übung erweitert wurde. Infolge dessen muss die Vorlesung die Studierenden nun bei der Schulmathematik abholen und der Wiederholungs-Charakter der Vorlesung tritt dadurch in den Hintergrund. Im Vordergrund steht die Vermittlung grundlegender Mathematischer Fähigkeiten, insbesondere die Vorbereitung auf die Theoretische Mechanik, die nun im 2. Semester stattfindet. Ich habe das ursprünglichen Skript überarbeitet und um die neuen Teile ergänzt. D.h. es befinden sich möglicherweise Themen im Skript, die in der Vorlesung gar nicht mehr dran kommen, diese kommen in der Klausur natürlich nicht dran. Möglicherweise aktualisiere ich das Skript in laufenden Semester und lade es erneut ins Kusss hoch. Fehler, die sicher noch reichlich vorhanden sind, können Sie mir gerne mitteilen. Ich empfehle, ausser meinem Skript auch andere Skripte und Bücher zu verwenden (schon weil von Vollständigkeit keine Rede sein kann) und Ergänzungen in der Vorlesung zu notieren. Wenn Sie auftauchende Begriffe nicht kennen, können Sie ruhig auch man bei Wikipedia nachschauen.

## 1.1 Literatur Empfehlungen

- Lang & Pucker: Mathematische Methoden der Physik  
(auch als ebook über die Bibliotheks-Seite erhältlich)
- Siegfried Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik (ebook)
- Wolfgang Nolting: Grundkurs Theoretische Physik, Band I
- Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler (ebook)  
3-bändiges Werk mit vielen ausführlichen Beispielen und Übungsaufgaben.
- Stone & Goldbart: Mathematics for Physics (als pdf kostenlos im Netz)  
Richtet sich eher an etwas fortgeschrittene Leser
- Morse & Feshbach: Methods of Theoretical Physics (Klassiker)
- Der Fachbereich Mathematik der JKU hat eine Auswahl an Skripten zur Mathematik auf folgender Webseite <http://www.jku.at/analysis/content/e83492/e84520>

## 2 Grundlagen

### 2.1 Mengen

Der Begriff der Menge ist ein Grundbegriff in der Mathematik, der nicht auf andere Begriffe zurückführbar ist.

Man schreibt:

$x \in M$  :  $x$  ist Element der Menge  $M$

$x \notin M$  :  $x$  ist nicht Element der Menge  $M$

Es gibt zwei Möglichkeiten, Mengen zu definieren:

1.  $M = \{a, b, \dots, c\}$  (durch Angabe ihrer Elemente)

$M$  ist die Menge, die genau die Elemente  $a, b, \dots, c$  enthält (Reihenfolge egal).

2.  $M = \{x \in X \mid A(x)\}$  (durch eine *definierende Eigenschaft*)

$M$  die Menge, die genau die Elemente  $x \in X$  enthält, für die Aussage  $A(x)$  wahr.

Wir verwenden in der Regel folgende Mengen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  Menge der natürlichen Zahlen (ggf. auch inklusive der 0).

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  Menge der ganzen Zahlen.

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{r}{s} \mid r \in \mathbb{Z} \wedge s \in \mathbb{N} \wedge \text{ggT}(r, s) = 1 \right\}$  Menge der rationalen Zahlen.

$\mathbb{R}$  Menge der reellen Zahlen.

Wenn man die reellen Zahlen *ohne* die Null meint, schreibt man z.B.  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Nur die positiven reellen Zahlen kann man  $\mathbb{R}^+$  schreiben, wenn die Null enthalten sein soll,  $\mathbb{R}_0^+$ .

Die *rationalen* Zahlen sind genau die *endlichen* oder periodischen Dezimalbrüche, z.B.  $\frac{1}{4} = 0.25$  oder  $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$ .

Die *reellen* Zahlen sind die endlichen und *unendlichen* Dezimalbrüche (z.B.  $\sqrt{2}, \pi$ ). Die rationalen Zahlen sind in den reellen Zahlen enthalten (die rationalen Zahlen sind eine Teilmenge der reellen Zahlen), d.h.  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

Interessante Eigenschaft: Die rationalen (reellen) Zahlen liegen *dicht* auf der Zahlengeraden, d.h. zwischen je zwei verschiedenen rationalen (reellen) Zahlen liegen stets *unendlich viele* weitere rationale (reelle) Zahlen.

## 2.2 Abbildungen, Funktionen

Sind  $A, B$  zwei Mengen, so versteht man unter einer Abbildung bzw. Funktion  $f$  von  $A$  nach  $B$ , geschrieben  $f : A \rightarrow B$  eine Vorschrift, die jedem  $x \in A$  genau ein  $y \in B$  zuordnet. Man schreibt  $f : x \mapsto y$  oder  $y = f(x)$  und nennt

$A$	Definitionsbereich oder Definitionsmenge
$B$	Wertebereich oder Wertevorrat
$x$	unabhängige Variable oder Argument
$y$	abhängige Variable
$y = f(x)$	Funktionsgleichung.

Wir wollen uns zunächst mit **reellwertigen Funktionen** befassen, also  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bzw  $f : A \rightarrow B$  mit  $A \subseteq \mathbb{R}$  und  $B \subseteq \mathbb{R}$ .

Eine Funktion ist erst dann vollständig angegeben, wenn zur Funktionsgleichung auch Definitionsbereich und Wertebereich angegeben werden. Etwas ungenau wird häufig von einer Funktion gesprochen, wenn eigentlich nur von einer Funktionsgleichung die Rede ist, es ist dann i.d.R. der zugehörige größtmögliche Definitionsbereich und Wertebereich gemeint. Z.B. für die Funktion  $\sin(x)$  ist dann als Definitionsbereich impliziert  $D = \mathbb{R}$  und als Wertebereich  $W = [-1, +1]$ .

### Monotonie

Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  mit  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  ist monoton wachsend, wenn für alle  $x_1, x_2 \in A$  gilt:  $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$   
bzw. streng monoton wachsend, wenn  $f(x_1) < f(x_2)$ . (Streng) monoton fallend analog.

### Symmetrie

Symmetrieeigenschaften spielen eine wichtige Rolle bei der Untersuchung von Funktionen. Man unterscheidet Achsensymmetrie (z.B. zur y-Achse) und Punktsymmetrie (z.B. zum Ursprung).

### Gerade und ungerade Funktionen

Sei  $A = [-a, a] \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : A \rightarrow B$ . Gilt für alle  $x \in A$

$$\begin{array}{lll} f(-x) = f(x) & \text{dann heißt } f \text{ gerade} \\ f(-x) = -f(x) & " & f \text{ ungerade.} \end{array}$$

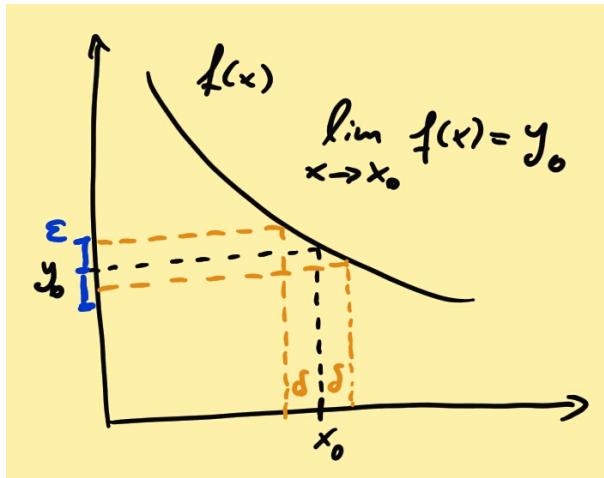
## Summe, Produkt, Quotient, Verkettung (un)gerader Funktionen

$f, g$ gerade	$\Rightarrow$	$f + g, f \cdot g, \frac{f}{g}, f \circ g$	gerade
$f, g$ ungerade	$\Rightarrow$	$f + g, f \circ g$	ungerade
		$f \cdot g, \frac{f}{g}$	gerade
$f$ gerade, $g$ ungerade	$\Rightarrow$	$f \circ g, g \circ f$	gerade
		$f \cdot g, \frac{f}{g}$	ungerade
$f$ beliebig, $g$ gerade	$\Rightarrow$	$f \circ g$	gerade

### 2.2.1 Grenzwerte von Funktionen

Sei  $(a, b)$  ein offenes Intervall und  $x_0 \in (a, b)$ .<sup>1</sup>

Sei  $D = (a, b) \setminus \{x_0\} = \{x \in (a, b) \mid x \neq x_0\}$  ( $x_0$  kein Element des Intervalls) und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , so hat  $f$  für  $x \rightarrow x_0$  den Grenzwert  $y_0$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, mit  $x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon$ . Man schreibt:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ .



In Worten: Die Funktionswerte  $f(x)$  sind beliebig wenig von  $y_0$  entfernt, wenn  $x$  hinreichend wenig von  $x_0$  entfernt ist.

Beispiel:  $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ . Man zeige dass  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$ .

### Einseitige Grenzwerte

Bei manchen Funktionen ergeben sich unterschiedliche rechtsseitige und linksseitige Grenzwerte, wenn man sich einem  $x_0$  von links ( $x > x_0$ ) oder rechts ( $x < x_0$ ) nähert.

<sup>1</sup>Offenes Intervall bedeutet, die Intervallgrenzen sind nicht enthalten. Es wird auch die Schreibweise  $]a, b[$  für offene Intervalle verwendet. Beim geschlossenen Intervall  $[a, b]$  sind entsprechend die Intervallgrenzen enthalten.

Der Grenzwert von  $f$  an der Stelle  $x_0$  existiert genau dann, wenn rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert existieren und gleich sind:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \iff \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = y_0. \quad \text{Beispiele:}$$

Funktion	rechtsseitiger GW	linksseitiger GW	beidseitiger GW
$f(x) = \operatorname{sgn}(x)$	$\lim_{x \searrow 0} \operatorname{sgn}(x) = +1$	$\lim_{x \nearrow 0} \operatorname{sgn}(x) = -1$	existiert nicht
$f(x) = 1/x$	$\lim_{x \searrow 0} 1/x = +\infty$	$\lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$	existiert nicht
$f(x) = 1/ x $	$\lim_{x \searrow 0} 1/ x  = +\infty$	$\lim_{x \nearrow 0} 1/ x  = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} 1/ x  = +\infty$

## Grenzwertregeln

Der Grenzwert einer Summe (Differenz, Produkt, Quotient) ist gleich der Summe (Differenz, Produkt, Quotient) der Grenzwerte, wenn die einzelnen Grenzwerte existieren.  
Beispiel Quotient:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)},$$

wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  existieren und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ .

## Grenzwertbestimmung unbestimmte Ausdrücke

Ergeben sich jedoch zwei unbestimmte Ausdrücke, also z.B.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , also Ausdrücke der Form " $\frac{0}{0}$ " oder " $\frac{\infty}{\infty}$ ", kann häufig die

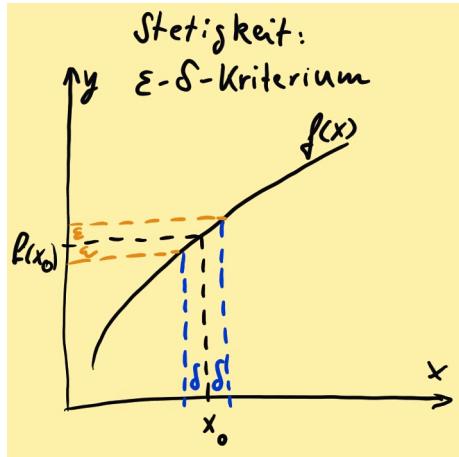
**Regel von l'Hospital** helfen:

Sind  $f$  und  $g$  in einer Umgebung von  $x_0$  differenzierbar (diff'bar) und ist  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  von der Form " $\frac{0}{0}$ " bzw. " $\frac{\infty}{\infty}$ ", dann ist  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , falls der letzte Grenzwert existiert.

Bemerkungen: Gilt auch für einseitige Grenzwerte. Erhält man nach einmaliger Anwendung wieder einen Ausdruck der Form, " $\frac{0}{0}$ " bzw. " $\frac{\infty}{\infty}$ ", wendet man die Regel nochmals an usw. Eine weitere Möglichkeit zur Grenzwertberechnung ist, Zähler und Nenner in eine Potenzreihe zu entwickeln.

### 2.2.2 Stetige Funktionen

Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D \subseteq \mathbb{R}$ ) heißt an der Stelle  $x_0$  stetig, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, mit  $x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .



Andere Formulierung:  $f$  ist stetig an der Stelle  $x_0 \in D \iff$  Die Funktionswerte sind beliebig wenig von  $f(x_0)$  entfernt, wenn  $x$  hinreichend wenig von  $x_0$  entfernt ist.

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt in  $D$  stetig, wenn  $f$  an jeder Stelle  $x_0 \in D$  stetig ist.  $D \subseteq \mathbb{R}$ .

Handlicheres Kriterium für die Stetigkeit einer Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ , falls  $D$  ein offenes Intervall:  $f$  ist steig bei  $x_0 \in D \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Existiert  $f(x_0)$  nicht, wohl aber  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , so nennt man  $f$  an der Stelle  $x_0$  **stetig ergänzbar**.

Existiert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , und ist  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ , so nennt man  $f$  an der Stelle  $x_0$  **hebbar unstetig**.

### Regeln für stetige Funktionen

Summe, Differenz, Produkt und Quotient (sofern Nenner nicht null) und Verkettung stetiger Funktionen sind stetig.

#### 2.2.3 Umkehrfunktion

Ist  $f : A \rightarrow B$  eine bijektive Abbildung, so ist jedem  $x \in A$  genau ein  $y = f(x) \in B$  zugeordnet und umgekehrt jedem  $y \in B$  genau ein  $x \in A$ . Bijektive Abbildungen sind eineindeutig. Eine bijektive Abbildung ist streng monoton steigend (fallend).

Ist  $f : A \rightarrow B$  eine bijektive Abbildung, so gibt es die Umkehrabbildung  $f^{-1} : B \rightarrow A$  mit  $f^{-1}(y) = x$ , falls  $y = f(x)$  ist.  $f^{-1} : B \rightarrow A$  ist ebenfalls bijektiv und es ist  $f^{-1}(f(x)) = x$  für alle  $x \in A$ .

Beim Übergang von  $f$  zu  $f^{-1}$  wird der Wertebereich von  $f$  zum Definitionsbereich von  $f^{-1}$ . Die Funktionsgleichung  $y = f(x)$  wird nach  $x$  aufgelöst,  $y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$ . Damit die unabhängige Variable wieder  $x$  heißt, vertauscht man  $x$  und  $y$  und erhält  $y = f^{-1}(x)$ . Die Vertauschung von  $x$  und  $y$  entspricht in der  $x$ - $y$ -Ebene einer Spiegelung an der Winkelhalbierenden  $y = x$ . D.h. die Graphen von  $f$  und  $f^{-1}$  liegen symmetrisch zur Winkelhalbierenden. Bemerkung:  $f^{-1} \neq 1/f$

Berechnung der Umkehrfunktion:

Für bijektives  $f : A \rightarrow B$  erhält man  $f^{-1} : B \rightarrow A$  durch

- $y = f(x)$  nach  $x$  auflösen:  $x = f^{-1}(y)$ ,
- $x$  und  $y$  vertauschen:  $y = f^{-1}(x)$ .

$f$  und  $f^{-1}$  sind spiegelsymmetrisch zur Winkelhalbierenden.

Beispiel: Die Exponentialfunktion  $f(x) = e^x = \exp(x)$  hat den Definitionsbereich  $D = \mathbb{R}$ , den Wertebereich  $W = \mathbb{R}^+ = (0, \infty]$  und ist bijektiv. Es gibt also eine Umkehrfunktion, und zwar den natürlichen Logarithmus  $f^{-1}(x) = \ln(x)$  mit  $D = \mathbb{R}^+$  und  $W = \mathbb{R}$ , mit  $\ln(e^x) = e^{\ln x} = x$ .

## 2.3 Elementare Funktionen

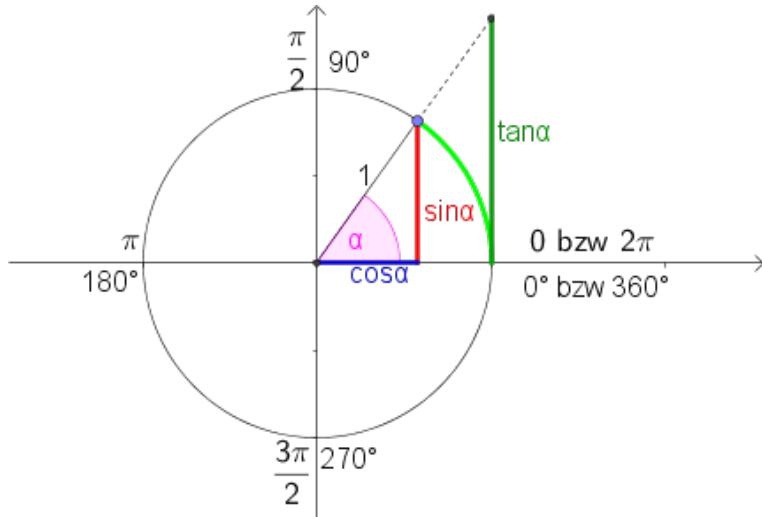
### 2.3.1 Polynome

Polynome, auch ganze rationale Funktionen genannt. Sind  $a_0, \dots, a_n$  reelle (komplexe) Zahlen und  $a_n \neq 0$ , dann heißt  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  reelles (komplexes) Polynom  $n$ -ten Grades. Ein Polynom  $n$ -ten Grades hat  $n$  (komplexe) Nullstellen. Über Polynome sollte aus der Schule vieles bekannt sein, daher überspringe ich alles weitere an dieser Stelle.

### 2.3.2 Trigonometrische Funktionen

Aus der Schule bekannt sind die Definitionen der "Winkelfunktionen" mit Hilfe rechtwinkliger Dreiecke. Es gilt ( $A$  Ankathete,  $G$  Gegenkathete,  $H$  Hypotenuse):

$$\sin \alpha = \frac{G}{H}, \quad \cos \alpha = \frac{A}{H}, \quad \tan \alpha = \frac{G}{A} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$



Aus der Abbildung ergibt sich dann auch gleich die Umrechnung von Grad ins Bogenmaß. Eine volle Umdrehung entspricht einem Winkel  $\alpha = 360^\circ$ . Bekanntlich hat ein Kreisbogen die Länge  $2\pi R$ , da  $R = 1$  folgt: Ein Winkel von  $360^\circ$  entspricht einem Bogenmaß von  $2\pi$ , bzw. ein Winkel von  $180^\circ$  entspricht einem Bogenmaß von  $\pi$  usw.

Die wahrscheinlich wichtigste Beziehung der trigonometrischen Funktionen folgt direkt aus dem **Satz des Pythagoras** angewandt auf obigen Einheitskreis:  $G^2 + A^2 = H^2$ .

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

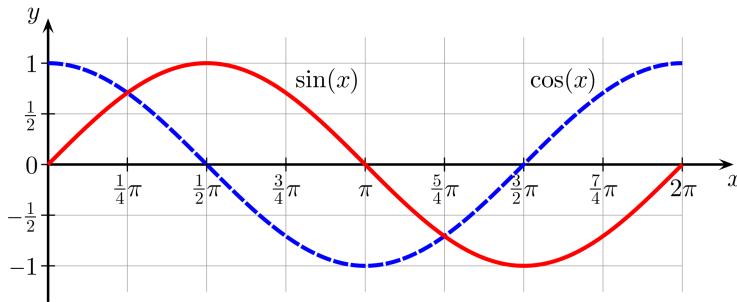
### Periodizität:

$\sin x$  und  $\cos x$  haben die Periode  $2\pi$ :  $\sin(x + 2n\pi) = \sin x$ ,  $\cos(x + 2n\pi) = \cos x$ .  
 $\tan x$  hat die Periode  $\pi$ :  $\tan(x + n\pi) = \tan x$ .  $n \in \mathbb{Z}$ .

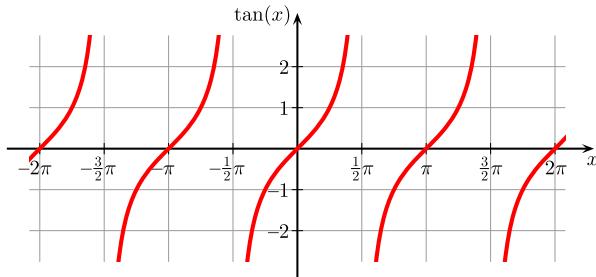
### Symmetrie:

$\cos x$  ist eine gerade Funktion:  $\cos(-x) = \cos x$ ,  
 $\sin x$  und  $\tan x$  sind ungerade Funktionen:  $\sin(-x) = -\sin x$ ,  $\tan(-x) = -\tan x$ .

Die Cosinus-Kurve erhält man durch Verschiebung der Sinus-Kurve um  $\pi/2$  nach links:  
 $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ .



Sinus und Cosinus



Graph der Tangens-Funktion

### Wichtige trigonometrische Formeln (Additionstheoreme):

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

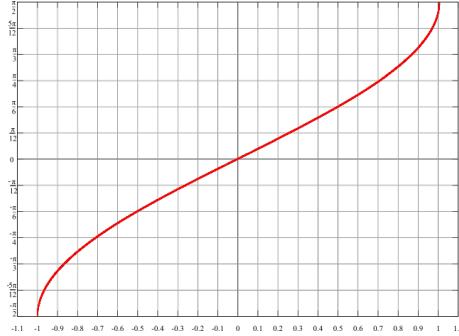
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

Daraus folgt z.B.:  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ,  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

### 2.3.3 Inverse trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen sind wegen ihrer Periodizität nicht umkehrbar (Bijektivität erforderlich). Beschränkt man sie auf Monotonie-Intervalle, z.B. den Sinus auf  $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$  und den Cosinus auf  $[0, +\pi]$ , sind diese so eingeschränkte Funktion bijektiv und damit umkehrbar. Die inversen trigonometrischen Funktionen heißen Arcus-Funktionen:  $\sin^{-1} x = \arcsin x$ ,  $\cos^{-1} x = \arccos x$ ,  $\tan^{-1} x = \arctan x$ .



Funktion:  $\arcsin$

$\arccos$

Def.bereich:  $[-1,1]$

$[-1,1]$

Wertebereich:  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$[0, \pi]$

### 2.3.4 Exponential- und Logarithmusfunktion

Die Exponentialfunktion ( $e$ -Funktion)  $y = e^x = \exp(x)$  wird durch folgende für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergente Reihe definiert:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

wobei  $e \in \mathbb{R}$  die Eulersche Zahl ist, definiert durch obige Reihe mit  $x = 1 \Rightarrow e = 2.71828\dots$

Wichtigen Eigenschaften der  $e$ -Funktion:

- $e^x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , d.h.  $e^x$  hat keine Nullstellen.
- $e^x$  ist streng monoton wachsend und umkehrbar.
- $(e^x)' = \frac{d}{dx} e^x = e^x$  ihre Ableitung ist auch wieder die  $e$ -Funktion.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , d.h.  $e^x$  wächst stärker als jede Potenz von  $x$ .

Die Umkehrfunktion der  $e$ -Funktion  $y = e^x$  ist der natürliche Logarithmus  $y = \ln x$ .

Wichtige Eigenschaften der Logarithmus-Funktion:

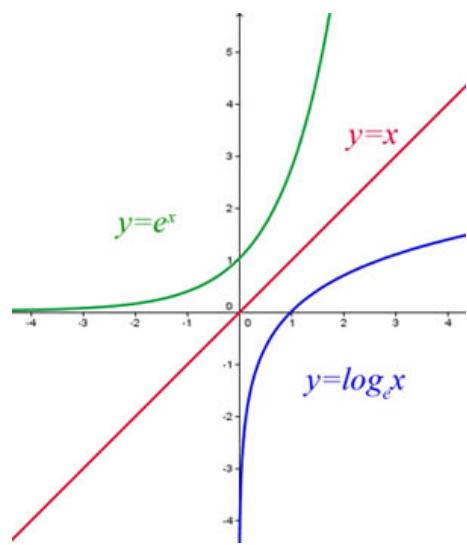
- $\ln x$  ist nur für  $x \in \mathbb{R}^+$  definiert.
- $\ln x$  hat eine Nullstelle bei  $(1,0)$ .
- $\ln x$  ist streng monoton wachsend und umkehrbar.
- Es gilt  $\ln e^x = x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $e^{\ln x} = x$  für alle  $x > 0$ .
- $(\ln x)' = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ .
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , d.h.  $\ln x$  wächst schwächer als jede Potenz von  $x$ .

Rechenregeln:

$a$  heißt Basis,  $0 < a \neq 1$ . Die  $e$ -Funktion  $e^x$  und der Logarithmus naturalis  $\ln x$  ergeben sich für die Basis  $a = e$ .

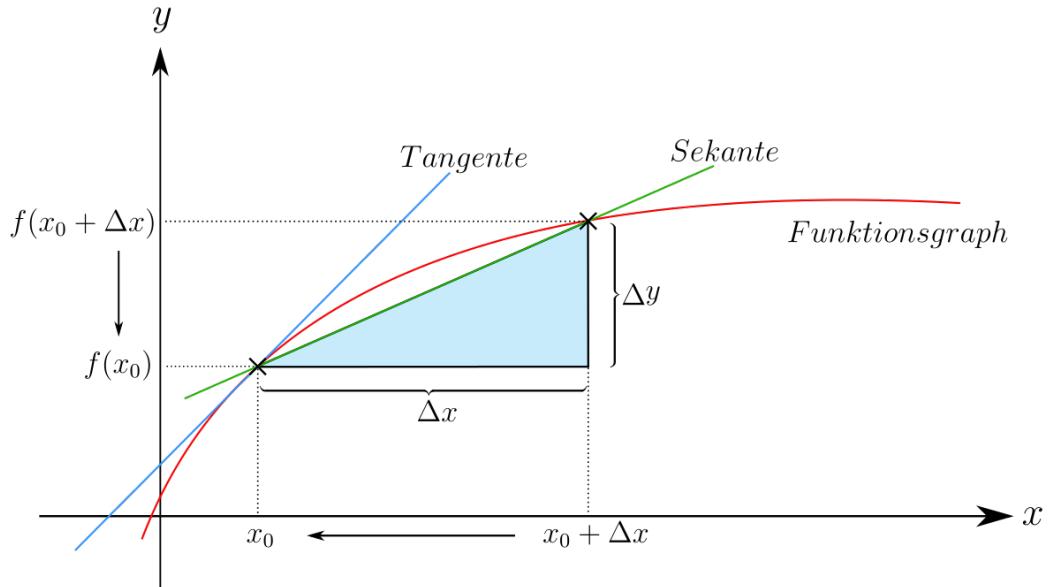
$a^x$	$\log_a x$
$a^0 = 1$	$\log_a 1 = 0$
$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$	$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
$a^{x-y} = a^x / a^y$	$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
$(a^x)^y = a^{xy}$	$\log_a x^y = y \log_a x$

Logarithmen zu verschiedenen Basen:  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ , speziell:  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ .



### 3 Differentialrechnung

Die Differentialrechnung wurde im 17. Jahrhundert von Gottfried Wilhelm Leibnitz und Isaac Newton entwickelt. Ausgangspunkt war das sogenannte Tangentenproblem.



#### 3.1 Differenzierbarkeit

Dabei wird die Steigung einer Funktion  $f$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  zunächst durch die Steigung der Sekante an  $f$  über einem endlichen Intervall angenähert:

$$\text{Sekantensteigung} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Da es sich offensichtlich um den Quotienten zweier Differenzen handelt, spricht man auch vom Differenzenquotienten. Führt man noch die Kurzschreibweise

$\Delta y := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  ein, erhält man für den Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Um nun die Tangentensteigung aus der Sekantensteigung zu berechnen, muss man die beiden Punkte, durch die die Sekante gezogen wird, immer näher aneinander rücken. Dabei gehen sowohl  $\Delta x$  als auch  $\Delta y$  gegen Null. Der Quotient  $\Delta y / \Delta x$  bleibt aber in vielen Fällen endlich. Auf diesem Grenzübergang beruht die Definition der **Ableitung** bzw. **Differenzierbarkeit** (in einem Punkt):

Es sei  $I$  ein offenes Intervall und  $x_0 \in I$ . Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt im Punkt  $x_0$  differenzierbar, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) \quad \text{existiert.}$$

Dieser Grenzwert  $f'(x_0)$  heißt **Ableitung** von  $f$  in  $x_0$ .

### Differenzierbarkeit in einem Intervall

Sei  $I$  ein offenes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.  $f$  heißt in  $I$  differenzierbar, wenn  $f$  in jedem Punkt von  $I$  differenzierbar ist. Die Funktion  $y' = f'(x)$ , die jedem  $x \in I$  die Ableitung  $f'(x)$  zuordnet, heißt (erste) Ableitung von  $f$ .

Äquivalente Schreibweisen sind:  $f'(x) = \frac{df}{dx}$ ,  $f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}, \dots, f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$  und man nennt  $\frac{df}{dx}$  Differentialquotient.

Bemerkung:  $\frac{df}{dx}$  gesprochen “**df nach dx**” nicht “df durch dx” o.ä.

### Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

Eine *differenzierbare* Funktion ist immer auch stetig, aber nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar.

Eine *stetig differenzierbare* Funktion ist differenzierbar und ihre Ableitung ist stetig.

### Tangentengleichung

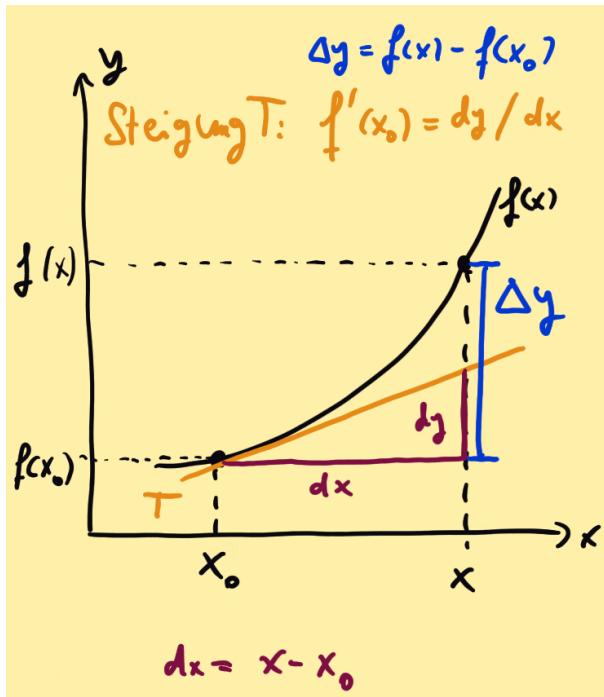
Wenn  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist, so ist das äquivalent damit, dass  $f$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  eine Tangente hat. Diese Tangente hat die Steigung  $f'(x_0)$  und am Berührpunkt  $x_0$  den  $y$ -Wert  $f(x_0)$ . Wir erhalten also aus der allgemeinen Geradengleichung  $y = a \cdot x + b$  die Tangentengleichung  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

### Lineare Näherung

Betrachtet man  $dx = x - x_0$  als Zuwachs von  $x$ , wenn man von  $x_0$  um  $x$  nach rechts geht, dann ist  $dy = f'(x)dx$  der Zuwachs der Tangente und  $\Delta y = f(x) - f(x_0)$  der Zuwachs von  $y = f(x)$ . Für genügend kleine  $dx$  sieht man  $dy$  als Näherung für den Zuwachs  $\Delta y$  von  $f$  an. Man ersetzt als  $f$  in der Nähe von  $x_0$  durch die Tangente in  $x_0$ :

(Geradengleichung)  $dy = f'(x_0)dx = f'(x_0)(x - x_0)$  heißt totales Differential von  $f$  bei  $x_0$ .

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \approx dy = f'(x_0)dx \quad \text{oder} \quad f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



### 3.2 Ableitungsregeln

Wir wollen uns im Folgenden mit Funktionen befassen, die auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar sind. Um Ableitungsregeln aus der Definition herzuleiten ist eine leicht modifizierte Definition praktischer, nämlich

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Mit dieser Definition kann man die bekannten Ableitungen der elementaren Funktionen berechnen.

$f(x)$	$f'(x)$
$x^n$	$n x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$1/2\sqrt{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\exp x$	$\exp x$
$\ln x$	$1/x$

Um komplizierte Funktionen abzuleiten, verwendet man nicht obige Definition, sondern führt die Ableitungen mit Hilfe der Ableitungsregeln auf elementare Ableitungen zurück. Summen und Quotienten von Funktionen leitet man mit Hilfe der Summen- bzw. Quotientenregel ab, Verkettete Funktionen mit Hilfe der Kettenregel:

$u(x)$  und  $v(x)$  seien diff'bare Funktionen,  $a \in \mathbb{R}$  ein konstanter Faktor. Dann gelten die **Ableitungsregeln**:

$$\begin{array}{ll} (u + v)' = u' + v' & \text{Summenregel. } (u' = u'(x)) \\ (a \cdot u)' = a \cdot u' & \text{konstante Faktoren vorziehen} \\ (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' & \text{Produktregel} \\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} & \text{Quotientenregel} \end{array}$$

Für  $y = y(x)$  und  $x = x(t)$  diff'bar gilt (Ableitung einer verketteten Funktion nach  $t$ ):

$$\frac{d}{dt} y(x(t)) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y'(x(t)) \cdot x'(t) \quad \text{Kettenregel}$$

### Ableitung von Umkehrfunktionen

Ist  $y = f(x)$  eine umkehrbare diff'bare Funktion, dann ist die Umkehrfunktion  $x = g(y)$  diff'bar und es gilt:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \quad \text{für } f'(x) \neq 0.$$

Beispiel: Ableitung der Umkehrfunktion von  $y = x^2$ ,  $x > 0$ :

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow x = g(y) = \sqrt{y} \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\text{bzw. } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}. \quad \text{Die Ableitung von } y = \sqrt{x} \text{ ist also } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Weitere Beispiele: Ableitung der Umkehrfunktionen von  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ .

## 4 Integralrechnung

Zur Formulierung physikalischer Gesetze spielt das Integral eine bedeutende Rolle. Es ist eng mit dem Differentialquotienten verwoben. Wie die Differentialrechnung wurde auch die Integralrechnung von Newton und Leibnitz begründet. Weiterentwickelt wurde sie von Cauchy, Riemann und Lebesque.

### 4.1 Motivation

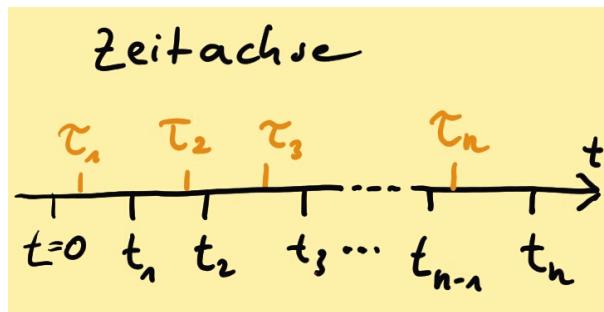
Wir stellen uns konkret ein Flugzeug vor, das mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$  fliegt. Wir möchten berechnen, welche Strecke  $x$  es von der Zeit  $t = 0$  bis zur Zeit  $t = T$  zurückgelegt hat. Wenn sowohl Betrag als auch Richtung der Geschwindigkeit sich mit der Zeit ändern, ist das ein recht kniffliges Problem. Wenn aber Betrag und Richtung konstant sind, ist es ganz einfach, dann gilt:  $x = v \cdot T$ , wenn  $x(t=0) = 0$  und  $v = \text{konst}$ . Also einfach eine Multiplikation. Stellen wir uns nun eine Bewegung vor, die zwar linear erfolgt, also in einer Richtung (eindimensional, entlang einer Linie), aber mit variablem Betrag,  $v(t) \neq \text{konst}$ . Dann können wir eine gute Näherung für die zurückgelegte Strecke erhalten, indem wir die Zeit in kleine Intervalle unterteilen und jeweils die Intervall-Länge  $\Delta t_i$  mit der Geschwindigkeit  $v(\tau_i)$  multiplizieren (wobei  $\tau_i \in \Delta t_i$ ) und über alle diese Produkte summieren:

$$x \approx v(\tau_1) \cdot \Delta t_1 + v(\tau_2) \cdot \Delta t_2 + \dots + v(\tau_n) \cdot \Delta t_n = \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \cdot \Delta t_i.$$

Um die Abweichung der Näherung vom tatsächlichen Weg immer kleiner werden zu lassen, benötigen wir immer kleinere Intervalle, bzw. lassen die Zerlegung  $Z$  immer größer werden,  $Z \rightarrow \infty$ . Diese Summe aus unendlich vielen unendlich kleinen Summanden bezeichnen wir nicht mehr mit  $\sum$ , sondern mit dem stilisierten Summensymbol  $\int$ , dem Integral(zeichen).

$$x(t) = \lim_{Z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^Z v(\tau_i) \Delta t_i = \int_0^T v(t) dt$$

Beim Übergang von endlichen Zeitschritten zu unendlich kleinen Zeitschritten gehen wir wie bei der Differentialrechnung von der Differenz  $\Delta t_i$  zum Differential  $dt_i$  über.



## 4.2 Das bestimmte Riemann-Integral

Gegeben sei ein Funktion  $f(x)$  einer Variablen über dem Intervall  $[a, b]$ . Einfachheits halber betrachten wir stetige oder zumindest stückweise stetige Funktionen. Die Integration über allgemeinere Funktionen wird den Mathematik Vorlesungen überlassen.

**Definition:** Unter dem *bestimmten Integral* der Funktion  $f(x)$  von  $a$  bis  $b$  versteht man die *Zahl*

$$F \equiv \int_a^b f(x)dx = \lim_{Z \rightarrow \infty} S(Z) \quad \text{mit} \quad S(Z) := \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i$$

Dieses bestimmte Integral findet man folgendermaßen (sofern das Verfahren durchführbar ist, d.h. das Integral existiert):

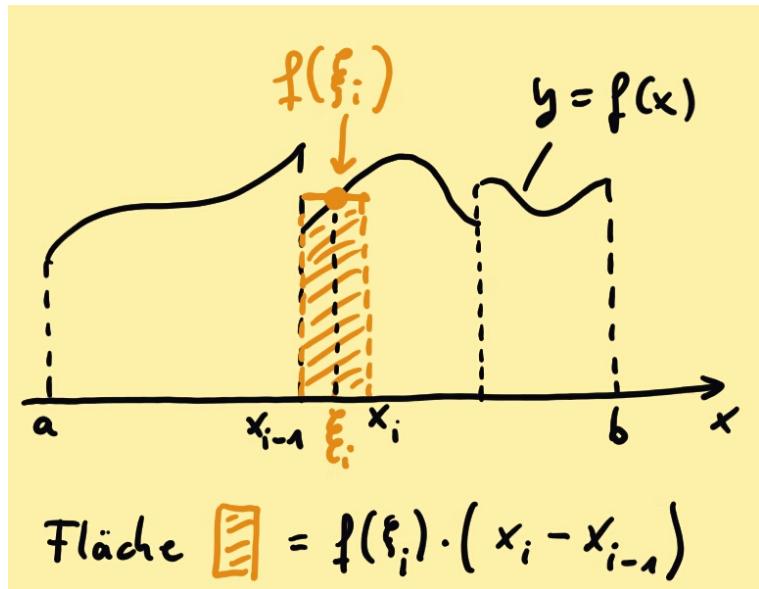
1. Man erzeuge (siehe Abb.) eine Intervalleinteilung bzw. Zerlegung  $Z$ , mit  $a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n \equiv b$ , mit  $-\infty < a < b < \infty$ . Dadurch sind Teilintervalle der Länge  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  definiert. Unstetigkeitsstellen werden, falls vorhanden, in die Zerlegung miteinbezogen.
2. Im Inneren oder auf dem Rand jedes Teilintervalls wählt man eine beliebige Zwischenstelle  $\xi_i$  mit  $x_{i-1} < \xi_i < x_i$  und bildet  $f(\xi_i)$ . Die Auswahl der Zwischenwerte sei im Symbol  $Z$  erfasst.  $f(\xi_i)$  repräsentiert die Funktion im jeweiligen Intervall.
3. Nun bildet man die Produkte  $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$  und addiert sie. Man erhält die zur Zerlegung  $Z$  gehörige *Riemann-Summe*

$$S(Z) = \sum_i f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Ihre Bedeutung ist je nach Aufgabenstellung unterschiedlich. Die Interpretation des einzelnen Summanden als Rechteckfläche unter dem repräsentativen Funktionswert  $f(\xi_i)$  ist stets möglich. Diese "Fläche" kann allerdings positiv oder negativ sein, je nach dem Vorzeichen von  $f(\xi_i)$ . Die gesamte Riemannsumme approximiert die Fläche unter der Funktion im Intervall  $[a, b]$ .

4. Nun bildet man immer feinere Intervallzerlegungen  $Z$ , symbolisiert durch  $Z \rightarrow \infty$ . Ihre Auswahl wird beliebig, wenn nur die Anzahl  $n$  der Teilpunkte beliebig groß, sowie alle Teilintervalle beliebig klein, d.h.  $\Delta x_i \rightarrow 0$ .

5. Sofern der Grenzwert  $\lim_{Z \rightarrow \infty}$  der Riemannsumme existiert, und von der Wahl der  $Z$ -Folge unabhängig ist, heißt er "bestimmtes Integral". Die Funktion  $f(x)$  heißt "Integrand",  $a$  "untere Grenze",  $b$  "obere Grenze" des Integrals. Die Variable  $x$  heißt Integrationsvariable (das verwendete Symbol ist natürlich beliebig).



### 4.3 Eigenschaften des bestimmten Integrals

Wie man sich graphisch oder mit Hilfe der Riemannsumme klar machen kann, gelten folgende Eigenschaften:

$$1) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$2) \int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{folgt aus der Definition, oder aus 1.}$$

3) Das Integrationsintervall kann beliebig zerlegt werden:  $[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad \text{Bemerkung: Gilt auch wenn } c \notin [a, b].$$

4) Linearität des Integrals: Konstanten werden vor das Integral gezogen, Summen von Funktionen summandenweise integriert:  $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}$

und  $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$

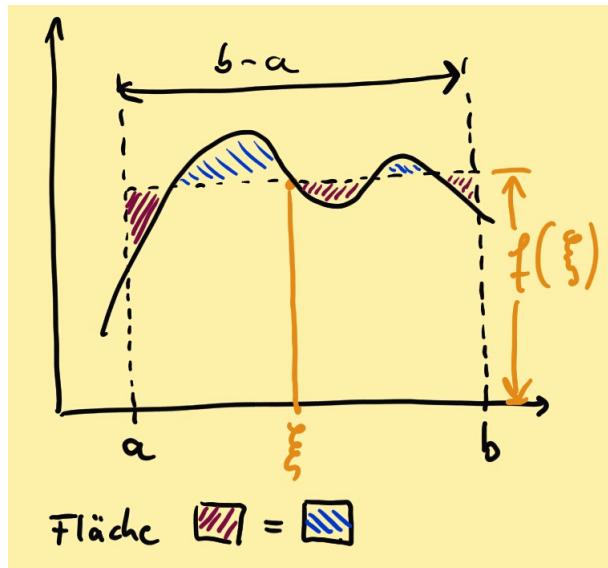
5)  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ , sofern  $f(x) \leq g(x)$  in  $[a, b]$ .

### Mittelwertsatz der Integralrechnung

Falls  $f(x)$  stetig auf  $[a, b]$  und  $\varphi(x)$  sein Vorzeichen auf  $[a, b]$  nicht wechselt, so existiert ein  $\xi$  im Inneren des Intervalls, sodass  $\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx$ .

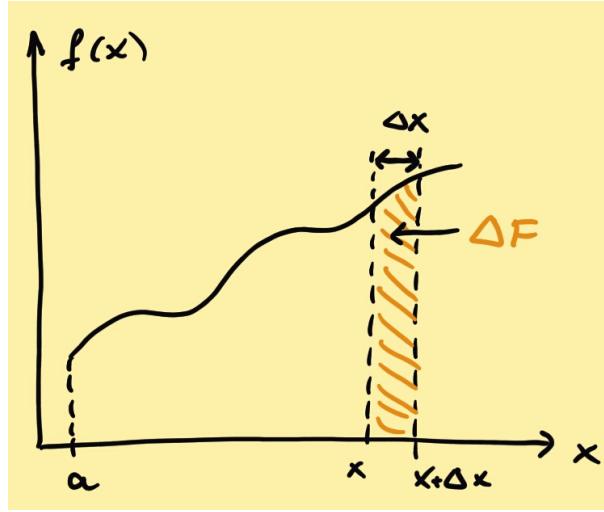
Mit dem Spezialfall  $\varphi(x) = 1 \implies \int_a^b f(x) dx = f(\xi) \int_a^b 1 dx = f(\xi)(b-a)$ ,  $\xi \in (a, b)$ .

Der Spezialfall lässt sich leicht graphisch verstehen (Abb.):



### 4.4 Das unbestimmte Integral

Für die Praxis ist die Berechnung von Integralen durch explizites berechnen der Riemannsumme unbedeutend. Man verwendet statt dessen den Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation. Der Wert des bestimmten Integrals  $F = \int_a^b f(x) dx$  hängt ab von der Funktion und von den Intervallgrenzen. Die untere Intervallgrenze sei fest (aber beliebig), dann kann man schreiben:  $F(x) = \int_a^x f(x') dx'$ . Nun wollen wir betrachten was passiert, wenn wir  $F$  an einer gegebenen Stelle  $x$  mit  $F$  an einer Stelle  $x + \Delta x$  vergleichen (siehe Abbildung).



$$\Rightarrow \Delta F \equiv F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(x') dx' - \int_a^x f(x') dx' = \int_x^{x+\Delta x} f(x') dx'.$$

Für stetiges  $f$  können wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden:

$$\Delta F = \int_x^{x+\Delta x} f(x') dx = f(\xi) \cdot (x + \Delta x - x) = f(\xi) \cdot \Delta x, \quad \xi \in (x, x + \Delta x)$$

Für nicht stetige aber beschränkte Funktionen kann man dies auch zeigen.

Nun teilen wir durch  $\Delta x$  und betrachten den Grenzübergang  $\Delta x \rightarrow 0$ . Das Intervall  $(x, x + \Delta x)$  schrumpft auf einen Punkt zusammen, so dass  $\xi \rightarrow x$  gelten muss. Da  $f$  stetig, existiert der Limes und  $f(\xi) \rightarrow f(x)$ , also

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{dF}{dx} = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x).$$

$F(x)$  ist folglich diff'bar und die Ableitung liefert gerade den Integranden!

**Definition:** Sei  $f$  in  $[a, b]$  integrierbar. Dann heißt die Funktion

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(x') dx', \quad \text{mit } x \in [a, b]$$

das unbestimmte Integral von  $f$ . Dabei ist  $x_0 \in [a, b]$  fest aber beliebig.

Es gilt der **Hauptsatz der Differential und Integralrechnung**:

1. Sofern  $f$  in  $[a, b]$  beschränkt und integrierbar, ist das unbestimmte Integral  $F(x)$  von  $f$  stetig in  $[a, b]$ .
2. Sofern  $f$  in  $[a, b]$  stetig und damit auch integrierbar, ist das unbestimmte Integral  $F(x)$  von  $f$  diff'bar in  $[a, b]$  und es gilt:

$$F'(x) = f(x).$$

Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung können wir bei gegebener Funktion  $f(x)$  ihr unbestimmtes bzw. bestimmtes Integral folgendermaßen bestimmen: Man "errät" eine Funktion  $F(x)$  so, dass ihre Ableitung gerade  $f(x)$  liefert.

**Definition:** Ist eine Funktion  $F(x)$  in  $[a, b]$  diff'bar und gilt  $F' = f$ , so heißt  $F$  eine *Stammfunktion* von  $f$ .

Wenn eine Funktion  $f$  eine Stammfunktion hat, dann hat sie unendliche viele Stammfunktionen, denn wenn  $F'(x) = f(x)$ , dann auch  $(F(x) + const)' = f(x)$ . Allerdings unterscheiden sich zwei Stammfunktionen immer nur um eine Konstante.

Aus dem unbestimmten Integral bzw. einer Stammfunktion erhält man das bestimmte Integral gemäß:

$$F = \int_a^b f(x') dx' = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b = [F(x)]_a^b.$$

## 4.5 Methoden zur Berechnung von Integralen

Der Königsweg ist die analytische Lösung unter Gebrauch des Hauptsatzes, also auffinden einer Stammfunktion durch geschicktes Raten, oder Gebrauch einer Integrationsstabelle, oder mit der Substitutionsmethode, oder partieller Integration oder einem speziellen Trick. Ist es nicht möglich eine Stammfunktion zu bestimmen, so kann man ein bestimmtes Integral zumindest numerisch lösen.

### 4.5.1 Substitution

Sei  $I \in \mathbb{R}$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $\varphi : [a, b] \rightarrow I$  stetig diff'bar. Dann

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

**Beweis:** Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Nach der Kettenregel der Differentiation gilt:  $\frac{d}{dt}[F(\varphi(t))] = [F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ .

Durch Anwendung des HS der Diff.- und Int.-Rechnung folgt:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt &= \int_a^b F'(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_a^b [F(\varphi(t))]' dt = F(\varphi(t))|_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F(x)|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} F'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

#### 4.5.2 Partielle Integration

Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig diff'bare Funktionen, dann gilt

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x)|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx.$$

Für ein unbestimmtes Integral gilt analog

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx,$$

wobei hier die Integrationskonstante berücksichtigt werden muss. Beweis durch Produktregel und HS der Diff.- und Int.-Rechnung.

#### 4.5.3 Integralfunktionen

Falls es nicht möglich ist, eine Stammfunktion zu einem Integranden anzugeben, kann man als neue Funktion die Integraldarstellung mit gegebenem  $f(x)$  definieren:

$$F(x) = \int_a^x f(x') dx'.$$

Solche Integralfunktionen kann man numerisch oder mit Hilfe von Tabellen auswerten. Beispiele für solche Integralfunktionen sind

- Fehlerfunktion (error function):  $\text{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Abweichung vom Mittelwert ist oft eine Gaußverteilung, also proportional  $\exp(-t^2)$ . Da es zur Gaußfunktion keine Stammfunktion gibt, behilft man sich mit obiger Integralfunktion.

- Elliptische Integrale:  $F(k, x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}.$

Elliptische Integrale treten z.B. auf bei Pendelschwingungen mit größeren Amplituden, also wenn die  $\sin x \approx x$  Näherung nicht gilt.

- Die verallgemeinerte Fakultät, die sogenannte Gammafunktion ist über ein Integral definiert, allerdings nicht als Funktion der Integralobergrenze:

$$\Gamma(x+1) := \int_0^\infty t^x e^{-t} dt. \quad \text{Falls } x = n \in \mathbb{N} \text{ ist } \Gamma(n+1) = n!$$

## 4.6 Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir nur Integrale beschränkter Integranden auf endlichen Intervallen betrachtet. Physikalische Funktionen sind aber gerade an den interessanten Stellen oft beliebig groß, z.B. elektrisches Feld einer Punktladung  $E \sim 1/r$  für  $r \rightarrow 0$  folgt  $E \rightarrow \infty$ . Integrale mit nicht-endlichen Grenzen oder unbeschränkten Integranden heißen *uneigentliche Integrale*.

### 4.6.1 Uneigentliche Integrale mit unendlichen Grenzen

Falls eine oder beide Integrationsgrenzen nicht endlich sind, kommt man mit der bisherigen Integraldefinition nicht weiter. Die Zerlegung  $Z$  des Integrationsintervalls enthielt dann entweder (mindestens) ein unendlich großes Teilintervall, oder unendliche viele Teilintervalle. Schon vor dem Grenzübergang  $Z \rightarrow \infty$  traten Konvergenzprobleme auf. Dennoch könnte das Integral (interpretiert als Fläche) einen endlichen Wert haben, wobei zumindest  $f(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$  erfüllt sein muss. Dann sollte eine hinreichend gute Näherung für die volle Fläche, der Teil bis zu einem großen aber endlichen Wert  $B$  der Variablen  $x$  sein.

#### Definition:

Unter dem Integral über ein halbseitig unendliches Intervall verstehen wir

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^B f(x) dx,$$

sofern der Limes existiert, und nennen es *uneigentliches Integral*. Analog für:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x) dx.$$

Bei beidseitig nicht-endlichen Integrationsgrenzen ist zu beachten, dass die Limites bezgl.  $A$  und  $B$  unabhängig voneinander durchgeführt werden müssen!

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} \int_A^B f(x) dx.$$

Beispiele:

$$1.) \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_1^B \frac{dx}{x^2} = \lim_{B \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_1^B = \lim_{B \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{B} + 1 \right) = 1$$

$$2.) \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_1^B \frac{dx}{x} = \lim_{B \rightarrow \infty} \ln(x) \Big|_1^B = \lim_{B \rightarrow \infty} (\ln(B) - \ln(1)) = \lim_{B \rightarrow \infty} \ln(B) = \infty$$

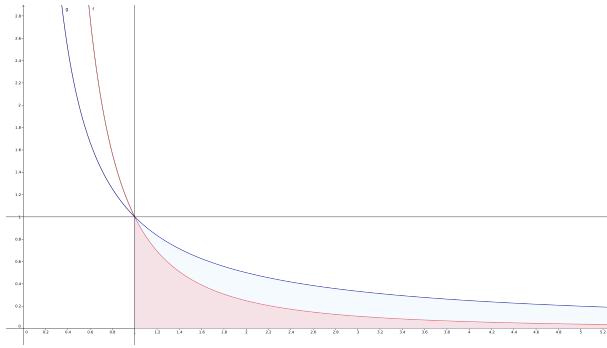


Abbildung: Die rote Kurve zeigt  $f(x) = 1/x^2$ , die blaue Kurve zeigt  $g(x) = 1/x$ . Die obigen Integralen entsprechenden Flächen sind eingefärbt. Man sieht, dass  $1/x^2$  sehr schnell gegen null konvergiert, so schnell, dass das Integral endlich wird. Hingegen konvergiert  $1/x$  so langsam gegen null, dass das Integral keinen endlichen Wert annimmt, wenn die Obergrenze unbeschränkt wächst.

**Def.:**  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  heißt **absolut konvergent**, wenn  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$  konvergiert.

#### 4.6.2 Hauptwert-Integral

Falls die Grenzwerte *nicht einzeln* existieren, wohl aber der Grenzwert für die spezielle Wahl  $-A = B \equiv C \rightarrow \infty$ , so nennt man diesen den Hauptwert des uneigentlichen Integrals:

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \lim_{C \rightarrow \infty} \int_{-C}^{+C} f(x) dx.$$

Es gibt verschiedenen Schreibweisen für das Hauptwertintegral. Das  $P$  steht für *principal value*. Es wird auch p.v. vor dem Integralzeichen verwendet, oder ein Integral-Symbol durch das ein kleiner Strich geht:  $\bar{\int}$ . Auf die Bezeichnung *Cauchyscher Hauptwert* geht die Verwendung von *CH* vor dem Integralzeichen zurück.

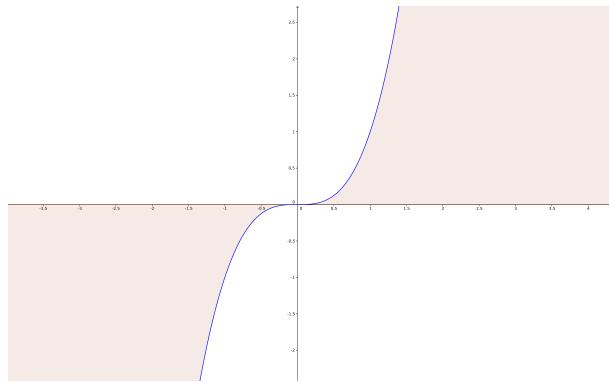


Abbildung: Die Funktion  $y = x^3$  und ihr unbeschränktes Integral.

Als Hauptwertintegral erhält man:

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 = \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{1}{4} x^4 \Big|_{-C}^{+C} = \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{1}{4} (C^4 - (-C)^4) = 0,$$

denn die positiven und negativen Beiträge kompensieren sich genau, wenn der Limes  $C \rightarrow \infty$  simultan für die Unter- und Obergrenze gebildet wird.

#### 4.6.3 Singuläre Integranden

Problematisch ist ebenfalls das Aufstellen der Riemannsumme für Funktionen mit singulären Stellen, d.h. Stellen  $x_0$  in deren Nähe  $f(x)$  unbeschränkt wächst oder fällt. Die Riemannsumme hängt dann stark von der gewählten Zerlegung ab und kann ungünstigsten Falls unendlich werden. Trotzdem kann die Fläche unter  $f(x)$  endlich sein, nämlich 1. wenn  $f(x)$  bei  $x_0$  so schwach divergiert, dass man die “oberste Spitze” praktisch vernachlässigen kann, oder 2. die Divergenz zwar stark ist, aber mit umgekehrtem Vorzeichen rechts und links von  $x_0$ . Im ersten Fall lässt man ein kleines Intervall um  $x_0$  herum weg, im zweiten Fall kompensieren sich symmetrisch gelegene Teilflächen eines Intervalls um  $x_0$ .

**Definition:** Falls ein  $\int_a^b f(x) dx$  über einen Integranden  $f$  mit singulärer Stelle  $x_0$  zu bilden ist,  $x_0 \in (a, b)$ , so zerlegt man das Integrationsintervall und setzt

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left( \int_a^{x_0 - \varepsilon_1} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon_2}^b f(x) dx \right),$$

sofern beide Integrale und deren Grenzwerte existieren. Das Ergebnis heißt ebenfalls *uneigentliches Integral*. Bei mehreren Singularitäten geht man für jede analog vor. Wenn die Singularität gerade an der Intervallgrenze liegt, also  $x_0 = a$  oder  $x_0 = b$ , so besteht das uneigentliche Integral nur aus nur einem Summanden:

$$\int_a^{x_0} f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx.$$

Existieren die Limites nicht einzeln, wohl aber für  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \equiv \varepsilon \rightarrow 0$ , d.h. der symmetrische Limes existiert, so spricht man vom **uneigentlichen Hauptwertintegral**.

$$P \int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx \right).$$

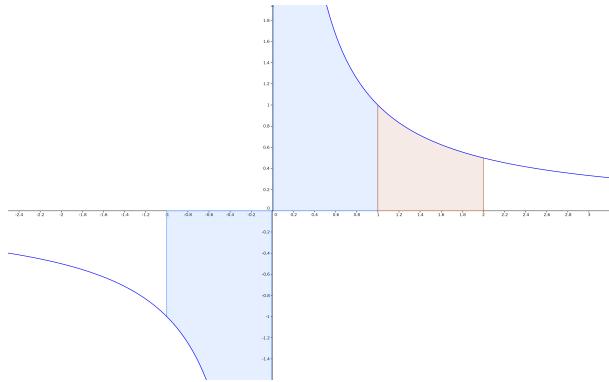


Abbildung: Uneigentliches Hauptwertintegral eines singulären Integranden, hier  $1/x$ . Die Singuläre Stelle ist  $x_0 = 0$ . Das Hauptwert-Integral ergibt:

$$P \int_{-1}^{+2} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{+\varepsilon}^{+1} \frac{dx}{x} \right) + \int_{+1}^{+2} \frac{dx}{x} = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln(x)|_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2),$$

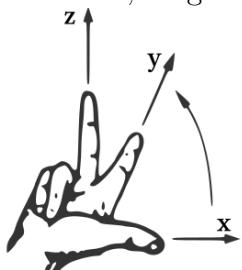
da sich die problematischen Bereiche links und rechts von  $x_0 = 0$  gegenseitig wegheben, wenn das Integral als Hauptwertintegral ausgeführt wird.

## 5 Vektoralgebra

### 5.1 Motivation

Bisher haben wir uns mit *Skalaren*, also Größen, welche durch eine einzige reelle Zahl gegeben sind, beschäftigt. Physikalische Beispiele für eine solche Größe sind Temperatur, Druck, Energie, Masse. Nun wollen wir auch Objekte behandeln, die durch ihren skalaren Betrag nicht vollständig beschrieben sind, sondern auch noch eine Richtungsangabe zu ihrer vollständigen Beschreibung notwendig ist. Diese Objekte heißen *Vektoren* und physikalische Beispiele sind Kraft, Geschwindigkeit, Elektrisches Feld, Magnetisches Feld. Die Vektoren, mit denen wir in der Physik zu tun haben, sind zunächst reelle Vektoren im dreidimensionalen Raum. Um z.B. die Bewegung eines Massenpunktes im Raum zu beschreiben, benötigt man ein Bezugssystem. Dieses wird häufig das folgende sein.

Ein **kartesisches Koordinatensystem** ist ein orthogonales Koordinatensystem. Es ist nach dem französischen Mathematikers René Descartes benannt, der das Konzept der *kartesischen Koordinaten* bekannt gemacht hat. In der Regel verwendet man ein sogenanntes *rechtshändiges* Koordinatensystem. In drei Dimensionen erhält man es, indem man die Achsen so orthogonal anordnet, dass die Achsen in aufsteigender Reihenfolge wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger aufeinander stehen.



Rechtshändiges Koordinatensystem  
Mathematisch positiver Drehsinn  
=Geodätisch negativer Drehsinn

### 5.2 Körper

Um im nächsten Schritt den *Vektorraum* einzuführen, dessen Elemente die Vektoren sind, benötigen wir den Begriff des Körpers. Ein Körper ist eine *algebraische Struktur*, in der die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division auf eine bestimmte Weise durchgeführt werden können. Die Bezeichnung Körper wurde im 19. Jahrhundert von Richard Dedekind eingeführt. Die wichtigsten Körper, sind der Körper  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen, der Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen, und der Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen.

**Definition:** Ein Körper ist eine Menge  $K$  versehen mit zwei inneren (zweistelligen) Verknüpfungen „+“ und „·“ (genannt Addition und Multiplikation), für die folgende Bedingungen erfüllt sind (*Körperaxiome*):

1.) Eigenschaften der Addition:

- $a + (b + c) = (a + b) + c$  (Assoziativgesetz)
- $a + b = b + a$  (Kommutativgesetz)
- Es gibt ein Element  $0 \in K$  mit  $0 + a = a$  (neutrales Element).
- Zu jedem  $a \in K$  existiert ein  $-a$  mit  $(-a) + a = 0$  (inverses Element).

2.) Eigenschaften der Multiplikation:

- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  (Assoziativgesetz)
- $a \cdot b = b \cdot a$  (Kommutativgesetz)
- Es gibt ein Element  $1 \in K \setminus \{0\}$  mit  $1 \cdot a = a$  (neutrales Element).
- Zu jedem  $a \in K \setminus \{0\}$  existiert ein  $a^{-1}$  mit  $a^{-1} \cdot a = 1$  (inverses Element).

3.) Eigenschaften Addition und Multiplikation:

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  (Links-Distributivgesetz)
- $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$  (Rechts-Distributivgesetz)

### 5.3 Vektorraum

Ein Vektorraum (auch linearer Raum) ist eine *algebraische Struktur*. Die Elemente eines Vektorraums heißen Vektoren. Sie können addiert und mit Skalaren (Zahlen) multipliziert werden, das Ergebnis ist wieder ein Vektor desselben Vektorraums. Ausgehend von Vektoren des euklidischen Raumes wurden die Begriffe abstrahiert, sodass sie auf abstraktere Objekte wie Funktionen oder Matrizen übertragbar sind. Die Skalare stammen aus einem Körper  $K$ . Daher spricht man von einem Vektorraum über einem Körper  $K$ , bzw. von einem  $K$ -Vektorraum. Wir beschäftigen uns hier hauptsächlich mit dem Körper  $K = \mathbb{R}$  der reellen Zahlen.

**Definition:** Es seien  $V$  eine Menge und  $(K, +, \cdot)$  ein Körper. Es sei  $\oplus : V \times V \rightarrow V$  eine innere zweistellige Verknüpfung, genannt *Vektoraddition*, und  $\odot : K \times V \rightarrow V$

eine äußere zweistellige Verknüpfung, genannt *Skalarmultiplikation*. Man nennt dann  $(V, \oplus, \odot)$  einen **Vektorraum** über dem Körper  $K$  (bzw.  $K$ -Vektorraum), wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind (für alle  $u, v, w \in V$  und  $\alpha, \beta \in K$ ):

Für die Vektoraddition:

- V1)  $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$  (Assoziativgesetz)
- V2) Existenz eines neutralen Elements (Nullvektor)  $0_V \in V$  mit  $v \oplus 0_V = 0_V \oplus v = v$ .
- V3) Existenz eines zu  $v \in V$  inversen Elements  $-v \in V$  mit  $v \oplus (-v) = (-v) \oplus v = 0_V$ .
- V4)  $v \oplus u = u \oplus v$  (Kommutativgesetz).

Für die Skalarmultiplikation:

- S1)  $\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$
- S2)  $(\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$
- S3)  $(\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$
- S4) Neutralität des Einselements  $1 \in K$ , also  $1 \odot v = v$ .

Im Folgenden werden wir meist  $\alpha v$  anstatt  $\alpha \cdot v$  schreiben. Die Elemente des Vektorraums (die Vektoren), schreiben wir mit einem Vektorpfeil, d.h.  $\vec{v} \in V$  bzw. fett gedruckt  $\mathbf{v} \in V$  (was sich für Handschriftliches nicht eignet). Den Nullvektor schreiben wir analog  $\vec{0}$  bzw  $\mathbf{0}$ . Außerdem verwenden wir "+" und "·" statt " $\oplus$ " und " $\odot$ ", da sich diese Vektoroperationen auf die bekannten + und · Operationen zurückführen lassen und durch Kennzeichnung der Vektoren durch einen Pfeil (oder Fettdruck) klar ist, welche Operation gemeint ist. Ist  $K = \mathbb{R}$ , so spricht man von einem reellen Vektorraum.

Beispiele für Vektorräume:

- Der  $\mathbb{R}^n$  bildet mit der oben definierten Vektoraddition als innere Verknüpfung und der oben definierten skalaren Multiplikation als äußere Verknüpfung einen Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{R}$ .
- Die Menge der auf dem Intervall  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  stetigen Funktionen  $C(a, b) := \{f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\}$  bilden einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.
- Die Menge der auf dem Intervall  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  quadratisch integrierbaren Funktionen  $L^2(a, b) := \left\{ f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : \int_a^b dx |f(x)|^2 < \infty \right\}$  bilden einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

### 5.3.1 Verknüpfungen im $\mathbb{R}^n$

Vektor  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$

Die  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  werden als die Komponenten des Vektors  $\vec{x}$  bezeichnet.

**Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar:**

Seien  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ , dann definieren wir:

$$\vec{x} + \vec{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\alpha \vec{x} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Des weiteren definieren wir den Nullvektor:  $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$

## 5.4 Lineare Unabhängigkeit, Basis

Die Vektoren  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m \in \mathbb{R}^n$  nennt man linear unabhängig, wenn sich der Nullvektor nur *trivial* darstellen lässt, d.h. wenn aus

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{b}_i = \vec{0} \quad \text{folgt dass } \alpha_i = 0 \quad \text{für } i = \{1, \dots, m\}.$$

Vektoren heißen **linear abhängig**, wenn sie nicht linear unabhängig sind.

Eine notwendige Bedingung für lineare Unabhängigkeit ist  $m \leq n$ . Falls  $m = n$  ist, so spricht man bei  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  von einer *Basis*.

Die **Basis eines Vektorraums** ist eine Menge von linear unabhängigen Vektoren, durch die jedes Element des Vektorraums durch eindeutige Koordinaten darstellbar ist. Die Anzahl der benötigten Basisvektoren wird **Dimension** des Vektorraums genannt. Sie ist unabhängig von der Wahl der Basis und kann auch unendlich sein. Basisvektoren

sind linear unabhängig und spannen den Vektorraum auf. Die Eigenschaften eines Vektorraums sind durch den Körper und seine Dimension bestimmt. Mit Hilfe einer Basis ist es möglich, Rechnungen mit Vektoren über deren Koordinaten auszuführen.

D.h. jeder Vektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  kann eindeutig in der Form  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{b}_i$  mit  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  dargestellt werden.

## 5.5 Länge eines Vektors, Norm, Einheitsvektoren

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine **Norm** ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit den Eigenschaften:

1. Für alle  $\vec{x} \in V$  gilt  $\|\vec{x}\| \geq 0$  und  $\|\vec{x}\| = 0$  genau dann wenn  $\vec{x} = \vec{0}$ .
2. Für alle  $\alpha \in \mathbb{K}$  und alle  $\vec{x} \in V$  gilt:  $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|$
3. Für alle  $\vec{x}, \vec{y} \in V$  gilt:  $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$  (Dreiecksungleichung)

**Euklidische Norm** auf  $V = \mathbb{R}^n$ , auch **Länge** genannt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \implies \|\vec{x}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} =: |\vec{x}|.$$

Unter einem **Einheitsvektor** verstehen wir einen Vektor der Länge  $|\vec{x}| = 1$ . Man kann zu jedem Vektor  $\vec{x} \neq \vec{0}$  einen Einheitsvektor  $\vec{e}_x$  finden, welcher in die gleiche Richtung wie  $\vec{x}$  zeigt, nämlich  $\vec{e}_x := \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ .

Sei  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  eine Basis des  $\mathbb{R}^n$ , jeder Vektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  lässt sich darstellen als

**Linearkombination**  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$  mit  $x_i \in \mathbb{R}$ .

## 5.6 Skalarprodukt

Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Ein Skalarprodukt ist eine Abbildung  $\cdot : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften:

1. Für alle  $\vec{x} \in V$  gilt  $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$  und  $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$
2. Für alle  $\vec{x}, \vec{y} \in V$  gilt  $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$

3. Für alle  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$  gilt  $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$
4. Für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  und alle  $\vec{x}, \vec{y} \in V$  gilt  $(\alpha \vec{x}) \cdot \vec{y} = \alpha (\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{x} \cdot (\alpha \vec{y})$

Mit der vom Skalarprodukt *induzierten Norm*  $\|\vec{x}\| := \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$  gilt die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**:

für alle  $\vec{x}, \vec{y} \in V$  gilt  $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ . (Beweis in der linearen Algebra VL).

Sei nun  $V$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Ein Skalarprodukt ist eine Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  mit den Eigenschaften:

1.  $\forall x \in V : \langle x, x \rangle \geq 0 \wedge \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
2.  $\forall x, y \in V : \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$
3.  $\forall x, y, z \in V : \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
4.  $\forall \lambda \in \mathbb{C} \forall x, y \in V : \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

Mit Eigenschaft (2) erhalten wir außerdem:

- $$\begin{aligned} & \forall x \in V : \langle x, x \rangle \in \mathbb{R} \\ 3'. \quad & \forall x, y, z \in V : \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ 4'. \quad & \forall \lambda \in \mathbb{C} \forall x, y \in V : \langle \lambda x, y \rangle = \lambda^* \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Auch hier gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$\forall x, y \in V : |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Einen  $\mathbb{R}$ - oder  $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt, welcher *vollständig* bezüglich der vom Skalarprodukt *induzierten Norm*  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  ist, nennt man **Hilbertraum**.

Bemerkung: Ein metrischer Raum ist vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in ihm konvergiert. Z.B. sind die rationalen Zahlen nicht vollständig, da es Folgen von rationalen Zahlen gibt, die gegen reelle irrationale Zahlen konvergieren, z.B.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$  ist rational, konvergiert aber gegen  $e \notin \mathbb{Q}$ .

**Definition:** Das Skalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist  $\vec{u} \cdot \vec{v} := |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\vartheta) = uv \cos(\vartheta)$  mit  $\vartheta := \angle(\vec{u}, \vec{v})$ , Winkel zwischen  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$ .

Daher verschwindet das Skalarprodukt für orthogonale Vektoren:  
 $\vartheta = 90^\circ \implies \cos(\vartheta) = 0 \implies \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$ .

Die Basisvektoren des  $\mathbb{R}^n$  sind paarweise orthogonal:  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ .

Damit erhalten wir für das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$ :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \left( \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^n y_j \vec{e}_j \right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Somit ist die durch das Skalarprodukt induzierte Norm gleich der Euklidischen Norm, welche wir Länge nennen:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |\vec{x}|.$$

### 5.6.1 Entwicklung nach Basisvektoren

Die Koeffizienten  $x_j$  in der eindeutigen Darstellung  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$  erhält man wie folgt:

$$\vec{x} \cdot \vec{e}_j = \left( \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \right) \cdot \vec{e}_j = \sum_{i=1}^n x_i (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n x_i \delta_{ij} = x_j.$$

Eine Liste von Vektoren  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m)$  aus dem  $\mathbb{R}^n$  nennt man *orthonormal*, wenn:

$\forall i, j \in \{1, \dots, m\}$  gilt  $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_{ij}$ .

Das hier neu auftretende Symbol ist das **Kronecker-Symbol**, mit der Bedeutung

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

Eine Liste von orthonormalen Vektoren  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m)$  ist immer linear unabhängig. Ist  $m = n$ , so nennt man  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  eine **Orthonormalbasis** des  $\mathbb{R}^n$  oder ein vollständiges Orthonormalsystem des  $\mathbb{R}^n$ . In den meisten Fällen möchte man eine Basis aus orthonormierten Vektoren haben, da sie viele Vorteile in der Handhabung bietet.

Will man aus einer Liste linear unabhängiger Vektoren  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  eine Liste orthonormaler Vektoren  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  bilden, wobei der aufgespannte Raum gleich bleiben soll, kann man das **Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren** verwenden. Wir gehen hier nicht näher darauf ein, da es typischerweise in der linearen Algebra behandelt wird.

## 5.7 Vektorprodukt

Das allgemeine Vektorprodukt ist eine Abbildung  $\times : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Wir betrachten hier nur  $n = 3$ , also die Abbildung  $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Sei  $\vec{w} := \vec{u} \times \vec{v}$ , dann gelte:  $|\vec{w}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\vartheta)$  mit  $\vartheta := \angle(\vec{u}, \vec{v})$ .

$|\vec{w}|$  ist somit die Fläche des von  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  aufgespannten Parallelogramms. Die Richtung von  $\vec{w}$  ist senkrecht auf der von  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  aufgespannte Ebene, und zwar so, dass  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  ein Rechtssystem (rechtshändiges System) bildet.

Außerdem soll das Vektorprodukt folgende Eigenschaften aufweisen:

1.  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} \times \vec{y} = \vec{0} \iff \vec{x} = \vec{0} \vee \vec{y} = \vec{0} \vee \vec{x} \parallel \vec{y}$
2.  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$
3.  $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$
4.  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 : (\alpha \vec{x}) \times \vec{y} = \alpha (\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{x} \times (\alpha \vec{y})$

Das Vektorprodukt ist nicht assoziativ, d.h. im Allgemeinen gilt:

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) \neq (\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}.$$

$\vec{x} \times \vec{y}$  steht senkrecht auf  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$ , daher gilt  $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{x} = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{y} = 0$ .

Da  $(-\vec{x}) \times (-\vec{y}) = \vec{x} \times \vec{y}$ , bezeichnet man das Vektorprodukt als **axialen Vektor**.

$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  sei ein Rechtssystem von orthonormalen Basisvektoren  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , dann erhält man für das Vektorprodukt:

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}, \quad \vec{x}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \in \mathbb{R}^3. \quad (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3). \\
\vec{x} \times \vec{y} &= \left( x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k} \right) \times \left( y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j} + y_3 \vec{k} \right) \\
&= x_1 y_2 \vec{i} \times \vec{j} + x_1 y_3 \vec{i} \times \vec{k} + x_2 y_1 \vec{j} \times \vec{i} + x_2 y_3 \vec{j} \times \vec{k} + x_3 y_1 \vec{k} \times \vec{i} + x_3 y_2 \vec{k} \times \vec{j} \\
&= (x_2 y_3 - x_3 y_2) \vec{i} - (x_1 y_3 - x_3 y_1) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k} \\
&= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (3 \times 3)\text{-Determinante.}
\end{aligned}$$

Somit haben wir eine Regel um das Vektorprodukt komponentenweise auszurechnen.

### 5.7.1 Vektorprodukt der Basisvektoren

$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  sei ein Rechtssystem von orthonormalen Basisvektoren ( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ).

Vektorprodukte dieser Basisvektoren:

$$\begin{aligned}
\vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \\
\vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \\
\vec{i} \times \vec{i} &= \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Kombiniere obige Vektorprodukte mit Skalarprodukt:

$$\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) = \vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \quad \text{ebenso } \vec{j} \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 = \vec{k} \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{k} \cdot \vec{k}.$$

Und  $\vec{i} \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ , sowie  $\vec{i} \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) = 0$ .

Das heißtt, immer wenn ein Index doppelt auftritt, ist das Produkt null. Immer wenn das Produkt  $\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k})$  zyklisch vertauscht wird, erhält man +1, für antizyklische Vertauschung -1, z.B.  $\vec{i} \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) = \vec{i} \cdot (-\vec{i}) = -1$ . Zusammengefasst:

$$\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) = \begin{cases} +1 & \text{falls } (i, j, k) \text{ eine gerade Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist} \\ -1 & \text{falls } (i, j, k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist} \\ 0 & \text{falls mindestens zwei Indizes gleich sind} \end{cases}$$

### 5.7.2 Levi-Civita-Symbol

Wir führen an dieser Stelle das *Levi-Civita-Symbol* (auch *Epsilon-Tensor*) ein, welches die oben genannten Eigenschaften haben soll

$$\varepsilon_{ijk} := \vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) = \begin{cases} +1 & \text{falls } (i, j, k) \text{ eine gerade Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist} \\ -1 & \text{falls } (i, j, k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist} \\ 0 & \text{falls mindestens zwei Indizes gleich sind} \end{cases}$$

Damit erhält man eine kompakte Schreibweise für das Kreuzprodukt:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} x_i y_j \vec{e}_k .$$

Mit der **Einstiessche Summenkonvention**, die besagt, dass über doppelt auftretende Indizes automatisch summiert wird, können wir sogar das Summenzeichen weglassen und erhalten noch kompakter:

$$\boxed{\vec{x} \times \vec{y} = \varepsilon_{ijk} x_i y_j \vec{e}_k.}$$

Beweis:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \varepsilon_{ijk} x_i y_j \vec{e}_k = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} x_i y_j \vec{e}_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} x_i y_j \vec{e}_k$$

Die Summen über  $i$ ,  $j$  und  $k$  laufen unabhängig voneinander von 1 bis 3, daher erhalten wir  $3 \times 3 \times 3 = 27$  Terme, mit allen möglichen Kombinationen von  $i$ ,  $j$  und  $k$ , auch solche wo zwei oder drei Indizes übereinstimmen. Diese Terme fallen jedoch weg, da der Epsilon-Tensor für doppelte oder dreifache Indizes verschwindet, z.B.  $\varepsilon_{112} = \varepsilon_{122} = \varepsilon_{333} = \dots = 0$ . Es bleiben also nur die 6 Terme übrig, für die gilt  $i \neq j \neq k$ :

$$\vec{x} \times \vec{y} = \varepsilon_{123} x_1 y_2 \vec{e}_3 + \varepsilon_{213} x_2 y_1 \vec{e}_3 + \varepsilon_{231} x_2 y_3 \vec{e}_1 + \varepsilon_{321} x_3 y_2 \vec{e}_1 + \varepsilon_{312} x_3 y_1 \vec{e}_2 + \varepsilon_{132} x_1 y_3 \vec{e}_2 = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \vec{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \vec{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{e}_3 \quad \blacksquare$$

Weitere Darstellungen und Eigenschaften des  $\varepsilon$ -Tensors:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} e_{i,1} & e_{i,2} & e_{i,3} \\ e_{j,1} & e_{j,2} & e_{j,3} \\ e_{k,1} & e_{k,2} & e_{k,3} \end{vmatrix} = \det(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k) \quad (\text{Determinante der Standardbasis})$$

$$\varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \quad (\text{Erinnerung: } \varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{klm} = \sum_k \varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{klm})$$

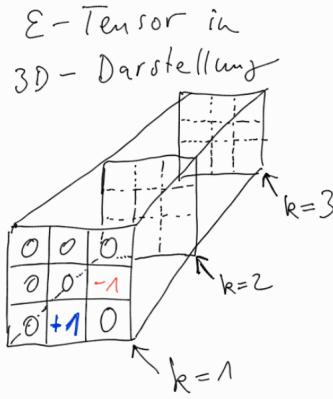
$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k$$

Dreidimensionale Darstellung des Epsilon-Tensors:

i=1	2	3	
j=1	0	0	0
2	0	0	-1
3	0	+1	0

i=1	2	3	
j=1	0	0	+1
2	0	0	0
3	-1	0	0

i=1	2	3	
j=1	0	-1	0
2	+1	0	0
3	0	0	0



### 5.7.3 Spatprodukt

Das Spatprodukt ist das Skalarprodukt aus dem Kreuzprodukt zweier Vektoren und einem dritten Vektor. Es wird also aus drei Vektoren ein Skalar erzeugt,  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot \left( \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Mit dem Levi-Civita-Symbol und der Summenkonvention lässt sich dies schreiben als:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k.$$

Das Spatprodukt ist zyklisch vertauschbar:  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ .

Der Betrag des Spatproduktes ist gleich dem Volumen des von  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  aufgespannten *Parallelepipeds*.

### 5.7.4 Doppeltes Vektorprodukt

Der Vektor  $\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ , der sich als doppeltes Vektorprodukt ergibt ( $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ ), steht senkrecht auf  $\vec{a}$  und liegt in der von  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aufgespannten Ebene. Es ergeben sich folgende Zusammenhänge:

- Graßmann-Identität:  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ . ("bac-cab-Regel")
- Jacobi-Identität:  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$ .

### 5.7.5 Gemischtes Vierfachprodukt

Für das gemischte Vierfach-Produkt gilt die Lagrange-Identität:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

## 5.8 Determinanten

Eine Determinante ist eine Abbildung, die einer quadratischen Matrix ( $n \times n$ ) ein Skalar zuordnet. Rechenregeln:

Determinanten einer  $(2 \times 2)$ -Matrix:  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ .

Determinanten einer  $(3 \times 3)$ -Matrix (*Sarrus-Regel*):

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2.$$

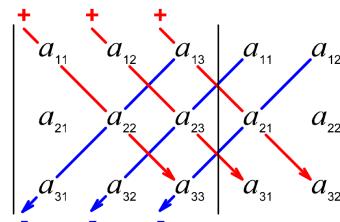


Abbildung: Schema Sarrus-Regel.

Determinante einer  $(n \times n)$ -Matrix (**Laplace'scher Entwicklungssatz**):

$$\det A = \det(a_{ij}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Dabei ist die erste Summe die Entwicklung nach der  $i$ -ten Zeile, die zweite Summe die Entwicklung nach der  $j$ -ten Spalte. Mit  $\det(A_{ij})$  ist die Determinante derjenigen  $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix gemeint, die aus  $A$  durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte hervorgeht (**Unterterminante**).

### Eigenschaften der Determinante:

- Vertauschen zweier Zeilen (Spalten), ändert das Vorzeichen der Determinante.
- Multipliziert man eine Zeile (Spalte) mit einer Zahl  $a$ , ändert sich der Wert der Determinante um den Faktor  $a$ .
- Addiert man ein Vielfaches einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte), ändert sich der Wert der Determinante nicht.

### Berechnung der Determinante:

1. Durch Addition eines Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte) erzeugt man in einer Zeile (Spalte) möglichst viele Nullen.
2. Laplace-Entwicklung der Determinante nach der Zeile (Spalte) mit den meisten Nullen.

### Weitere Eigenschaften der Determinante ( $A$ und $B$ sind $(n \times n)$ -Matrizen):

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \quad (\text{Determinanten-Multiplikationssatz})$$

$$\det A^T = \det A, \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}, \quad \det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det A$$

$\det A \neq 0 \iff$  die Zeilen (Spalten) von  $A$  sind linear unabhängig.  
 $\iff$  die Zeilen (Spalten) von  $A$  sind Basis des  $\mathbb{R}^n$ .  
 $\iff \text{rang}(A) = n$ .  
 $\iff A^{-1}$  existiert,  $A$  ist invertierbar.  
 $\iff A\vec{x} = \vec{b}$  ist eindeutig lösbar durch:  $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ .

## 5.9 Matrizen

Wir sind bereits *quadratischen Matrizen* begegnet und sollten die Definition für Matrizen im allgemeinen hier nachliefern.

**Definition:** Unter einer  $(m \times n)$ -Matrix  $A$  versteht man ein Schema

$$A \equiv (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

von  $m \times n$  Zahlen  $a_{ij}$ , bestehend aus  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten. Der erste Index  $i = 1, \dots, m$  kennzeichnet die Zeilen, der zweite  $j = 1, \dots, n$  die Spalten.

**Definitionen:**

1. Zwei Matrizen  $A$  und  $B$  heißen gleich, also  $A = B$  wenn  $a_{ij} = b_{ij}$  für alle  $i, j$ . Beide Matrizen müssen natürlich vom selben Typ  $(m \times n)$  sein.
2. Die Summe zweier Matrizen  $A$  und  $B$  desselben Types  $(m \times n)$  sei  $C = A + B$ , wobei  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  für alle  $i, j$ . Die Addition ist kommutativ  $A + B = B + A$ .
3. Die Nullmatrix  $0$  hat nur Nullen als Einträge. Bei quadratischen Matrizen tritt die Einheitsmatrix  $E$  auf.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Elemente der  $E$ -Matrix kann man auch durch das Kronecker-Symbol ausdrücken:  $E = (\delta_{ij})$ .

4. Sei  $\beta$  eine beliebige Zahl, so verstehen wir unter  $\beta A$  die Matrix

$$\beta A = \begin{bmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} & \cdots & \beta a_{1n} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} & \cdots & \beta a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta a_{m1} & \beta a_{m2} & \cdots & \beta a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{d.h. } \beta A = (\beta a_{ij}).$$

5. Eine Matrix  $A^T$  heißt zu  $A$  transponierte Matrix, wenn sie durch Vertauschung von Zeilen und Spalten aus  $A$  hervorgegangen ist.

Für  $A = (a_{ij})$  folgt  $A^T = (a_{ji})$ . Somit wird aus einer  $(n \times m)$ -Matrix  $A$  die  $(m \times n)$ -Matrix  $A^T$ . Es gilt:  $(AB)^T = B^TA^T$ .

### 5.9.1 Multiplikation von Matrizen

**Definition:** Seien  $A = (a_{ij})$  eine  $(m_A \times n_A)$ -Matrix und  $B = (b_{kl})$  eine  $(m_B \times n_B)$ -Matrix. Falls die Spaltenzahl von  $A$  gleich der Zeilenzahl von  $B$  ist, also  $n_A = m_B$ , so ist die Produkt-Matrix  $C = AB$  vom Typ  $(m_A \times n_B)$  mit den Matrix-Elementen  $c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}$  (Achtung: es wird gemäß der Summenkonvention über  $j$  summiert!).

Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ. Im allgemeinen ist es ja nicht einmal möglich  $BA$  zu bilden, auch wenn  $C = AB$  existiert. Für quadratische Matrizen  $A$  und  $B$  sind beide Matrixmultiplikationen möglich, aber dennoch gilt i. allgem.:  $AB \neq BA$ .

**Def.:** Matrizen, für die der besondere Fall  $AB = BA$  gilt, heißen *vertauschbar*.

Zu jeder quadratischen Matrix kann man die **Spur** angeben. Die Spur (engl. trace) ist die Summe der Diagonalelemente:  $\text{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$  (Summation über  $i$ ). Es gilt  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ , obwohl  $AB \neq BA$ , im allgem.

**Potenzen**  $A^2, \dots, A^n$  von Matrizen gibt es nur bei quadratischen Matrizen. Es ist  $A^2 = (a_{ij}a_{jk})$ , wobei über  $j$  summiert wird.

Die Matrixmultiplikation ist distributiv:  $A(B + C) = AB + AC$ .

Für die Multiplikation mit der Einheitsmatrix  $E$  gilt:  $EA = AE = A$ .

### 5.9.2 Inverse Matrizen

**Definition:**

Die Matrix  $A^{-1}$  heißt zur quadratischen Matrix  $A$  invers, falls:  $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ .

Sofern  $\det(A) \neq 0$ , lässt sich die inverse Matrix berechnen nach:

$$A^{-1} = (x_{ij}) \quad \text{mit} \quad x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det(A_{ji})}{\det(A)}.$$

Dabei ist  $A_{ij}$  die **Untermatrix**, die man durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte aus  $A$  erhält.

Die inverse kann auch mit Hilfe des Gaußverfahrens berechnet werden (s.u.).

Für das Inverse der Inversen gilt:  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

Eine Matrix  $A$  mit  $\det(A) = 0$  nennt man **singulär**.  
Es sind also nur Matrizen invertierbar, die nicht singulär sind.

Für die Inverse des Produkts gilt:  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

## 5.10 Matrizen, Tensoren, Transformationen

Wir haben bisher von Skalaren, Vektoren und Matrizen gesprochen. Wir wollen nun überlegen, wie sich diese Größen bei einer Koordinatentransformation verhalten. Wir stellen uns dabei eine einfache Koordinatentransformation vor, bei der das ursprüngliche kartesische Koordinatensystem  $K$  mit den kanonischen Basisvektoren  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  gedreht wird, so dass das neue System  $K'$  die kanonische Basis  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  hat. Durch eine zusätzliche Translation (Verschiebung) ändern sich die Koordinaten eines Vektors nicht. Wie transformieren sich nun oben genannte Größen?

Ein Skalar ist unabhängig vom Koordinatensystem, d.h. ein Skalar  $a \in \mathbb{R}$  transformiert gemäß:  $a \rightarrow a$ , ist also in beiden Koordinatensystemen gleich. Wie sieht es bei einem Vektor aus? Ein Vektor ist in  $K$  darstellbar als:

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3,$$

hat also die Komponenten  $x_1, x_2, x_3$ . Durch Drehung des Koordinatensystems ändert sich zwar nicht der Vektor  $\vec{x}$ , wohl aber seine Komponenten, denn im neuen Koordinatensystem  $K'$  gilt:  $\vec{x} = x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2 + x'_3 \vec{e}'_3$  mit  $(x_1, x_2, x_3) \neq (x'_1, x'_2, x'_3)$  i.allg.

Kommen wir zu den Matrizen. Wie oben definiert handelt es sich um reine Zahlenschemata, denen keine Basis o.ä. zu Grunde liegt und über deren Transformationsverhalten man nichts weiß. Wir können aber eine neue Größe definieren, die Tensoren:

Ein **Tensor** ist ein  $3 \times 3$ -Objekt  $(a_{ij})$ , welches sich bei Koordinatentransformationen bezüglich  $i$  und  $j$  wie ein Vektor transformiert (allgemeiner ein  $n \times n$ -Objekt).

Was haben wir uns nun unter einem Tensor vorzustellen? Zum Beispiel die Magnetisierung  $M_i$  eines dreidimensionalen Körpers, welche durch ein äußeren Magnetfeld  $H_j$  erzeugt wird. Der Zusammenhang zwischen äußerem Magnetfeld und Magnetisierung wird beschrieben durch den Suszeptibilitäts-Tensor  $\chi_{ij}$ :  $M_i = \chi_{ij} H_j$ . Falls sich Magnetfeld und Magnetisierung linear zueinander verhalten, liegt der Sonderfall vor, dass der Tensor ein Tensor nullter Stufe ist.

**Definition:** Eine physikalische Größe  $(A_{ij\dots m})$  mit insgesamt  $k$  Indizes, die sich bezüglich aller  $k$  Indizes zugleich wie ein Vektor transformiert, heißt **Tensor  $k$ -ter Stufe**.

Ein Tensor 0-ter Stufe ist dementsprechend identisch mit einem Skalar und ein Tensor 1-ter Stufe ist identisch mit einem Vektor. Im  $\mathbb{R}^3$  ist ein Tensor 2-ter Stufe darstellbar durch ein  $3 \times 3$ -Matrix. Einen Tensor 3-ter Stufe haben wir bereits kennengelernt, nämlich den  $\varepsilon$ -Tensor. Einen Tensor 3-ter Stufe kann man sich als dreidimensionales Zahlenschema vorstellen, für den  $\varepsilon$ -Tensor im  $\mathbb{R}^3$  ergibt sich dann ein Würfel mit  $3 \times 3 \times 3 = 27$  Einträgen, von denen  $27 - 6 = 21$  mit Nullen besetzt sind.

### 5.10.1 Koordinatentransformationen

Betrachten wir ein Bezugssystem  $K$  und ändern dann seine Lage. Da Verschiebungen ohne Einfluss auf Vektoren sind, habe das neue Bezugssystem  $K'$  den gleichen Nullpunkt wie  $K$ . Das Bezugssystem  $K$  sei durch die orthonormalen Basisvektoren  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  und  $K'$  durch die orthonormalen Basisvektoren  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  beschrieben. Für einen Vektor  $\vec{r}$  gilt dann:

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2 + x'_3 \vec{e}'_3.$$

Um die Transformationsvorschrift herzuleiten, setzen wir die Komponenten und Basisvektoren des ursprünglichen Systems  $K$  als bekannt voraus und drücken die unbekannten Basisvektoren des gedrehten Systems  $K'$  durch die Basisvektoren von  $K$  aus:

$$\vec{e}'_i = a_{i1} \vec{e}_1 + a_{i2} \vec{e}_2 + a_{i3} \vec{e}_3, \quad i = 1, 2, 3; \quad \text{bzw.} \quad \vec{e}'_i = a_{ij} \vec{e}_j.$$

Man erhält eine  $3 \times 3$ -Matrix  $(a_{ij})$ , die die Lage von  $K'$  quantitativ beschreibt ( $i$  Zeilenindex,  $j$  Spaltenindex). Multiplikation obiger Gleichung mit  $\vec{e}_j$  ergibt:

$$a_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j.$$

Also ist  $a_{ij}$  das Produkt zwischen dem Basisvektor in neuer  $i$ -Richtung und dem in alter  $j$ -Richtung. Wegen  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| |\vec{v}_2| \cos \varphi_{12}$  (Skalarprodukt), folgt mit  $|\vec{e}'_i| = |\vec{e}_j| = 1$ :  $a_{ij} = \cos \varphi_{ij}$ . Die Matrix  $(a_{ij})$  beschreibt also alle Winkel  $\varphi_{ij}$  des neuen Systems  $K'$  relativ zum alten System  $K$ . Man erkennt, dass die Koeffizienten von Drehmatrizen die Eigenschaft  $|a_{ij}| \leq 1$  erfüllen müssen. Außerdem gilt:

$$\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_i = 1 = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2 \quad \text{und wegen der Orthogonalität:}$$

$$\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = 0 = a_{i1} a_{j1} + a_{i2} a_{j2} + a_{i3} a_{j3}, \quad i \neq j.$$

Beide Eigenschaften zusammen: Koordinatendrehungen lassen sich durch Matrizen  $(a_{ij})$  beschreiben, die den Bedingungen  $a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$  genügen (Summation!).

Es drängt sich die Frage auf, ob alle Matrizen mit den beiden oben genannten Eigenschaften Drehungen beschreiben. Man kann zeigen, dass das der Fall ist, wenn zusätzlich  $\det(a_{ij}) = +1$  erfüllt ist. Bemerkung:  $\det(a_{ij}) = +1$  bedeutet, dass das Volumen des

durch die Basisvektoren aufgespannten Spats konstant bleibt. -1 würde bedeuten, dass das Volumen zwar gleich bleibt, aber das Rechtssystem in ein Linkssystem überführt wurde.

Jede reelle Matrix  $(a_{ij})$ , die die Eigenschaften

$$a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \det(a_{ij}) = +1$$

besitzt, lässt sich als Drehung eines Koordinatensystems deuten, indem man mittels  $\vec{e}'_i = a_{ij}\vec{e}_j$  aus dem ursprünglichen Dreibein  $K$  das gedrehte Dreibein  $K'$  bestimmt.

### 5.10.2 Transformationsformeln für Vektoren

Um die Komponenten  $x'_i$  des Vektors im gedrehten Koordinatensystem auszurechnen, multipliziert man folgende Gleichung mit  $\vec{e}'_i$

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = x'_1\vec{e}_1' + x'_2\vec{e}_2' + x'_3\vec{e}_3'. \quad (*)$$

Unter Verwendung von  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$  und  $a_{ij} = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j$  bleibt in Kurzschreibweise (Summenkonvention) übrig:

$$x'_i = a_{ij}x_j.$$

Wir wollen jetzt für die Drehmatrix die Bezeichnung  $D$  einführen, mit den Elementen  $D_{ij} = a_{ij} = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j$ . Dann kann man die Transformation kompakt schreiben als Produkt eines Vektors mit einer Matrix:  $\vec{x}' = D\vec{x}$ , (identisch mit  $x'_i = D_{ij}x_j$ ).

Für die Rücktransformation von  $K'$  nach  $K$  multiplizieren wir die Gleichung  $(*)$  mit  $\vec{e}_k$  und erhalten:  $x_l = a_{kl}x'_k$ .

In Matrixform:  $\vec{x} = D^{-1}\vec{x}'$  mit  $D_{lk}^{-1} = D_{kl} = \vec{e}_k' \cdot \vec{e}_l$ , d.h.  $D^{-1} = D^T$ .

Ausserdem gilt;  $D(D^{-1}\vec{x}') = \vec{x}'$ .

### 5.10.3 Transformationsformeln für Tensoren

Analog zu den Vektoren muss ein Tensor  $A_{ij}$  2-ter Stufe bezüglich beider Indizes gleichzeitig mittels der Drehmatrix transformieren:

$$A'_{ik} = D_{ij}D_{kl}A_{jl}.$$

## 5.11 Lineare Gleichungssysteme

Ein Lineares Gleichungssystem (LGS) ist ein System von  $m$  linearen Gleichungen mit  $n$  Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

In Matrixschreibweise  $A\vec{x} = \vec{b}$  mit

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

wenn  $\vec{b} = \vec{0}$  heißt das LGS homogen, wenn  $\vec{b} \neq \vec{0}$  heißt das LGS inhomogen.

Lösungen eines LGS, drei Fälle sind möglich:

- LGS hat keine Lösung
- LGS hat genau eine Lösung  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ .
- LGS hat unendlich viele Lösungen

### 5.11.1 Gaußsches Eliminationsverfahren

Am einfachsten löst man ein LGS mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren. Es gibt auch noch die Möglichkeit die **Cramersche Regel** zu verwenden, aber für praktische Berechnungen ist sie eher ungeeignet. Wir benötigen folgende sog. **elementare Umformungen**:

- Multiplikation einer Gleichung mit dem Faktor  $\lambda \neq 0$
- Zeilenumtauschung
- Addition des  $\mu$ -fachen einer Zeile zum  $\lambda$ -fachen ( $\mu, \lambda \neq 0$ ) einer anderen Zeile

Am übersichtlichsten schreibt man das LGS in Form der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Mit den elementaren Umformungen kann man die Matrix so bearbeiten, dass Zeilenstufenform entsteht:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a'_{mn} & b'_m \end{array} \right)$$

Nun kann man die Anzahl der Lösungen ablesen:

- Sind alle  $a'_{mi}$  in der letzten Zeile null, aber  $b'_m$  nicht, so ist das LGS eindeutig lösbar.
- Ist  $a'_{mn}$  als einzige der  $a'_{mi}$  in der letzten Zeile ungleich null, so ist das LGS eindeutig lösbar.
- Ist  $a'_{mn} = 0$  und  $b'_m = 0$ , dann gibt es unendlich viele Lösungen.
- Gibt es in der letzten Zeile mindestens zwei Einträge die ungleich null sind, so gibt es unendlich viele Lösungen (weniger Gleichungen als Unbekannte)

Mit dem Gausverfahren kann man auch die Inverse einer Matrix berechnen (Beispiel für  $3 \times 3$ -Matrix):

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Nun durch Elementare Umformungen das LGS in diese Form bringen:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{array} \right)$$

Rechts steht nun die inverse Matrix  $A^{-1} = (c_{ij})$ .

## 5.12 Eigenwertproblem

Zuvor hatten wir uns mit Drehungen beschäftigt, beschrieben durch eine Drehmatrix  $D$ . Aus einem Vektor  $\vec{x}$  wird durch die Drehung ein neuer Vektor  $\vec{x}' = D \vec{x}$ . Alternativ könnte man die Drehung auch durch Angabe einer Drehachse und eines Drehwinkels beschreiben. Ein Vektor  $\vec{a}$ , der in Richtung der Drehachse liegt, wäre invariant unter einer Drehung um eben diese Achse:  $D \vec{a} = \vec{a}$ . Diese Tatsache führt zu der Frage, ob es auch bei Matrizen  $A$ , die keine Drehungen beschreiben, Vektoren  $\vec{a}$  gibt, die unter Anwendung von  $A$  unverändert bleiben, also  $A \vec{a} = \vec{a}$ .

Gegeben sei eine quadratische  $(n \times n)$ -Matrix  $A$ . Gesucht sind Vektoren  $\vec{x}$  und Skalare  $\lambda$ , für die gilt:

$$A \vec{x} = \lambda \vec{x}.$$

$\lambda \in \mathbb{C}$  nennt man **Eigenwert** von  $A$  und  $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$  den dazugehörigen **Eigenvektor**. Die Eigenwertgleichung kann man unter Verwendung der Einheitsmatrix  $E$  auch umschreiben in:

$$(A - \lambda E) \vec{x} = \vec{0}.$$

Dies ist ein lineares homogenes Gleichungssystem. Nichttriviale Lösungen ( $\vec{x} \neq \vec{0}$ ) existieren genau dann, wenn die entsprechende Determinante verschwindet:

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Das sogenannte **charakteristisches Polynom**  $P_n(\lambda) := \det(A - \lambda E)$  ist ein Polynom  $n$ -ten Grades in  $\lambda$ . Es hat genau  $n$  (komplexe) Nullstellen, wenn man die Nullstellen mit ihrer Vielfachheit zählt. Bei mehrfachen Nullstellen spricht man von **Entartung**. Der Grad der Entartung entspricht der Vielfachheit der Nullstelle. Die Gleichung  $P_n(\lambda) = 0$  bezeichnet man als **Säkulargleichung**.

Hat man alle Eigenwerte  $\lambda$  gefunden, so kann man die zugehörigen Eigenvektoren durch Lösen des linearen homogenen Gleichungssystems  $(A - \lambda E) \vec{x} = \vec{0}$  ermitteln. Da die Eigenwertgleichung linear ist, sind auch Vielfache von  $\vec{x}_\lambda$  Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda$ . Im Falle entarteter Eigenwerte sind auch alle Linearkombinationen der verschiedenen Eigenvektoren wiederum Eigenvektoren zu entarteten Eigenwert  $\lambda$ . Man spricht auch von **Eigenräumen**.

Beispiel:  $A = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 10 - \lambda & -3 \\ -3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 11 = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda = 6 \pm \sqrt{36 - 11} = 6 \pm 5 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1, 11.$$

$\lambda_1 = 1$  einsetzen:  $\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

$$\lambda_1 = 11 \text{ einsetzen: } \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zur Ermittlung der Eigenräume wird das Gaußsche Eliminationsverfahren genutzt.

### 5.12.1 Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren

1. Sind  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  die  $n$  Eigenwerte einer Matrix  $A$ , so gilt:  $\det(A) = \prod_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha$ . Bei entarteten Eigenwerten, sind diese entsprechend mehrfach zu multiplizieren.
2.  $\text{Spur}(A) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha$ .
3. Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig, es gilt also  $c_1 \vec{x}_{\lambda_1} + c_2 \vec{x}_{\lambda_2} = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$ . Bei größerer Anzahl von Eigenwerten gilt entsprechend: Sind sie paarweise verschieden, sind alle Eigenvektoren linear unabhängig.
4. Die Eigenwerte reeller, symmetrischer Matrizen, also  $A = A^T$ , sind reell. Gleches gilt für hermitesche Matrizen,  $A = A^+$ . Dabei ist  $A^+$  die transponierte Matrix bei der jedes Element das konjugiert komplexe des ursprünglichen ist, also  $A = (a_{ij}) \Rightarrow A^+ = (a_{ji}^*)$ . Matrizen mit dieser Eigenschaft heißen **hermitesch** oder **selbstadjungiert**.
5. Die Eigenvektoren reell-symmetrischer sowie hermitescher Matrizen stehen paarweise aufeinander senkrecht, sofern sie zu verschiedenen Eigenwerten gehören.
6. Die Eigenvektoren von Drehmatrizen und **unitären** Matrizen,  $UU^+ = U^+U = E$ , sind paarweise orthogonal.
7. **Diagonalisierung** (oder **Hauptachsentransformation**) einer  $n \times n$ -Matrix  $A$ . Im Falle reell-symmetrischer, hermitescher und unitärer Matrizen existieren  $n$  verschiedene und paarweise orthogonale Eigenvektoren  $\vec{x}_{\lambda_1}, \vec{x}_{\lambda_2}, \dots, \vec{x}_{\lambda_n}$ . Wählt man die normierten Eigenvektoren als Koordinatensystem, so erhält die Matrix  $A$  in diesem Koordinatensystem eine diagonale Gestalt:  $D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$  mit den Eigenwerten als Diagonalelemente.
8. Die **diagonalisierende Matrix**  $U$  besteht aus den normierten Eigenvektoren als Spaltenvektoren und erfüllt die Gleichung  $U^+AU = D_\lambda$ , wobei  $D_\lambda$  die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten als Diagonalelementen ist.
9. Die Eigenwerte einer unitären Matrix haben den Betrag 1, dh.  $|\lambda| = 1$  für alle Eigenwerte.

## 6 Komplexe Zahlen

Siehe auch Kapitel Komplexe Zahlen im Analysis für Physiker I Skript!

Die quadratische Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  hat folgende Lösungen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Den Ausdruck unter der Wurzel nennt man die Diskriminante. Was passiert mit den Lösungen, falls die Diskriminante negativ wird? Dazu führt man die imaginäre Einheit  $i$  mit der Eigenschaft  $i^2 = -1$  ein. Es gilt dann  $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$ , wobei  $a > 0$  sei. Alle (reellen) Vielfachen von  $i$ , d.h. alle Zahlen  $ib$  mit  $b \in \mathbb{R}$ , heißen imaginäre Zahlen. Addiert man zu einer imaginären Zahl eine reelle, so erhält man eine komplexe Zahl  $z = a + bi$ . Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit  $\mathbb{C}$  bezeichnet. Ist  $z = a + ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ , so nennt man  $a = \Re(z)$  den Realteil und  $b = \Im(z)$  den Imaginärteil der komplexen Zahl  $z$ . Die komplexen Zahlen kann man als Punkte in der sogenannten Gaußschen Zahlenebene darstellen. Der Zahl  $z = a + ib$  entspricht der Punkt  $(x, y) = (a, b)$ . Natürlich kann man diesen Punkt auch durch Polarkoordinaten beschreiben:  $(x, y) = r(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ . Daraus ergeben sich die Zusammenhänge

$$a = r \cos(\varphi), \quad b = r \sin(\varphi).$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} =: |z|, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) =: \arg(z).$$

$|z|$  heißt (Absolut-)Betrag und  $\arg(z) \in [0, 2\pi]$  Argument der komplexen Zahl  $z$ . Genauer ist  $\arg(z) = \varphi + 2k\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ .  $\varphi \in [0, 2\pi)$  nennt man den Hauptwert des Argumentes.

Wir haben also zwei Darstellungen einer komplexen Zahl  $z$  gefunden:

$$z = a + ib = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)).$$

Zwei komplexe Zahlen  $z$  und  $z^*$  nennt man konjugiert komplex, wenn  $\Re(z) = \Re(z^*)$  und  $\Im(z) = -\Im(z^*)$ , also:

$$z = a + ib \iff z^* = a - ib.$$

Man sieht sofort:  $(z^*)^* = z$ . Statt  $z^*$  schreibt man auch  $\bar{z}$ .  
Des Weiteren findet man folgende Gleichungen:

$$z + z^* = 2\Re(z), \quad z - z^* = 2i\Im(z).$$

$$zz^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 \implies |z| = \sqrt{zz^*}.$$

Komplexe Zahlen können auch als Paare (Tupel, Vektoren) von reellen Zahlen aufgefasst werden:  $z = a + ib \rightarrow (a, b)$ . Es gelten dann folgende Rechenregeln:

- $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ .
- $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ .
- $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$ .
- $(a, b)^* = (a, -b)$ .

Wir identifizieren beispielsweise die imaginäre Einheit  $i$  mit dem Zahlenpaar  $(0, 1)$ . Es gilt dann:  $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ .

Die Exponentialfunktion ist im Komplexen wie folgt definiert:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \text{mit} \quad e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

Diese Reihe konvergiert für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

Im Komplexen gilt wie im Reellen:  $\frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1}$ . Daher folgern wir:

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z.$$

Wir wählen  $z = i\varphi$  rein imaginär, d.h.  $\varphi \in \mathbb{R}$ , und erhalten damit:

$$e^{i\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{\varphi^k}{k!}. \quad \text{Nun ist } i^k = \begin{cases} 1 & k = 4n \\ i & k = 4n + 1 \\ -1 & k = 4n + 2 \\ -i & k = 4n + 3 \end{cases}.$$

Somit gilt:

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i(-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi).$$

Dieser Zusammenhang wird auch als Eulersche Formel bezeichnet:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Damit erhalten wir eine weitere Art, komplexe Zahlen darzustellen:

$$z = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r e^{i\varphi}.$$

Beispiel:  $1 = e^0$ .  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ .  $-1 = e^{i\pi}$ .  $-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$ .  $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ .  $\square$

Mit dieser einfachen Darstellung lassen sich Potenzen und Wurzeln von komplexen Zahlen bequem berechnen. Der **Satz von de Moivre** besagt, dass für jede komplexe Zahl  $z = re^{i\varphi}$  und für jede natürliche Zahl  $n$  folgender Zusammenhang gilt:

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Das Radizieren ist die zum Potenzieren inverse Operation. Für  $z = re^{i\varphi} \neq 0$  gilt:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \left( \cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n}\right) \right).$$

Die komplexe Exponentialfunktion ist jedoch  $2\pi$ -periodisch (die trigonometrischen Funktionen sind  $2\pi$ -periodisch), weshalb statt  $\varphi$  genauer  $\varphi + 2k\pi$  mit  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  gewählt werden soll.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \right) \quad \text{und} \quad 0 \leq k < n.$$

Es gibt also stets  $n$  verschiedene  $n$ -te Wurzeln einer komplexen Zahl  $z \neq 0$ .

Wählen wir für die Exponentialfunktion komplexe Argumente  $z = x + iy$ , dann gilt:

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) \implies |e^z| = e^x.$$

Aus der Eulerschen Formel erhalten wir auch neue Darstellungsformen für die trigonometrischen Funktionen:

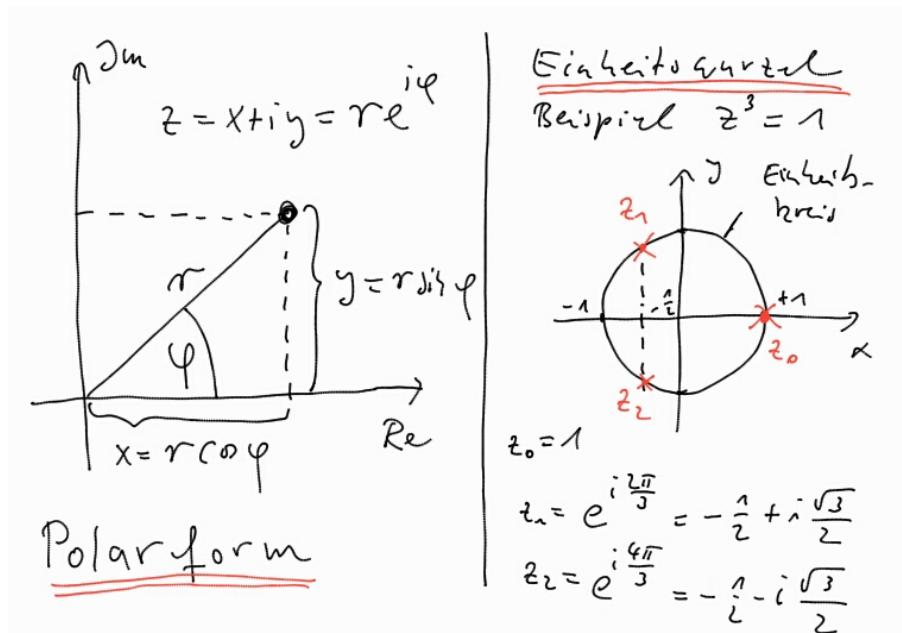
$$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Diese ähneln stark den Definitionen der Hyperbelfunktionen:

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Man erkennt folgende Zusammenhänge:

$$\cos(ix) = \cosh(x), \quad \cosh(ix) = \cos(x); \quad \sin(ix) = i \sinh(x), \quad \sinh(ix) = i \sin(x).$$



## 7 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Viele naturwissenschaftliche Probleme führen auf Differentialgleichungen. Eine Differentialgleichung (DGL) beschreibt den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen. Die gesuchte Größe ist eine Funktion, die die DGL erfüllt.

Beispiel: Wachstum von Bakterien. Die Zuwachsrate der Bakterien ist proportional zu ihrer Anzahl  $A$ :

$$\frac{d}{dt}A(t) \sim A(t) \implies \frac{d}{dt}A(t) = \alpha A(t).$$

Die Bewegung eines Federpendels folgt dem Hookeschen Gesetz  $F = -kx$ :

$$m\ddot{x} = ma = F = -kx \implies \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \square$$

Es gibt verschiedene Typen von Differentialgleichungen, die man anhand folgender Kriterien unterscheiden kann:

<b>GEWÖHNLICHE DGL</b> enthält Ableitungen nach einer Variablen, z.B. $\dot{x}(t), f'(x), f''(x)$ .	<b>PARTIELLE DGL</b> enthält Funktion mehrerer Variablen und deren partiellen Ableitungen.
<b>EXPLIZITE DGL</b> sind von der Form $y^{(n)}(x) = F[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)]$ .	<b>IMPLIZITE DGL</b> sind von der Form $F[x, y, y', \dots, y^{(n)}] = 0$ .
<b>LINEARE DGL</b> sind von der Form $\sum_{k=0}^n a_k(x) y^{(k)}(x) = f(x), a_n(x) \neq 0$ . Gegeben sind die Funktionen $a_k(x)$ und $f(x)$ , gesucht ist $y(x)$ . Ein besonderer Fall ist die lineare DGL mit <b>konstanten Koeffizienten</b> ( $a_k(x) = \text{const}$ ). Ist $f(x) = 0$ , so bezeichnet man die DGL als <b>homogen</b> , andernfalls als <b>inhomogen</b> . Die höchste auftretende Ableitungsordnung bezeichnet man als <b>Ordnung</b> der DGL. Obige ist also eine DGL $n$ -ter Ordnung.	<b>NICHT-LINEARE DGL</b> sind solche, die nicht in die Form der linearen DGL gebracht werden können. Die höchste auftretende Potenz von $y$ und ihren Ableitungen kennzeichnet den <b>Grad</b> der DGL. Beispiel: $y + y'^2 = 0$ ist eine DGL 2. Grades. $y' + y''y^2 = 0$ ist eine DGL 3. Grades.

Im Allgemeinen hat eine DGL mehrere Lösungen. Die Auswahl wird oft durch Anfangs- oder Randbedingungen beschränkt.

## 7.1 Gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine gewöhnliche lineare homogene DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten sieht so aus:

$$a_1 y'(x) + a_0 y(x) = a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0.$$

Wir können die Gleichung kürzer schreiben als:

$$\frac{dy}{dx} - ay = 0 \iff \boxed{\frac{dy}{dx} = ay} \text{ mit } a := -\frac{a_0}{a_1}.$$

Wir kennen eine Funktion, die abgeleitet sich selbst reproduziert: die Exponentialfunktion. Wir machen daher den sogenannten **Exponential-Ansatz**:

$$y(x) = Ce^{\lambda x} \implies \frac{dy}{dx} = C\lambda e^{\lambda x} = \lambda y \implies \lambda = a.$$

Eine Lösung der DGL ist also:  $\boxed{y(x) = Ce^{ax}}$

Beispiel: Radioaktiver Zerfall. Sei  $N$  die Menge des noch unzerfallenen radioaktiven Materials. Die Zerfallsrate ist proportional zur noch unzerfallenen Menge:

$$\frac{dN}{dt} \sim N \implies \frac{dN}{dt} = -\lambda N \implies N(t) = Ce^{-\lambda t} (\lambda > 0).$$

Es gibt eine **Anfangsbedingung**: Zum Zeitpunkt  $t = 0$  sei die Menge des noch unzerfallenen Materials  $N_0$ .

$$N(t=0) = Ce^0 = C = N_0 \implies N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

An dieser Stelle wollen wir kurz die Begriffe **Halbwertszeit** und mittlere Lebensdauer erläutern: Als mittlere Lebensdauer  $\tau$  definiert man den Kehrwert der Zerfallskonstanten  $\lambda$ :

$$\tau := \frac{1}{\lambda} \implies N(\tau) = N_0 e^{-1} = \frac{N_0}{e}.$$

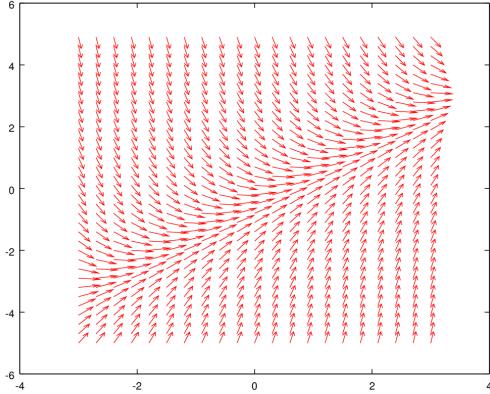
Die Halbwertszeit  $T_{1/2}$  ist jene Zeitspanne, innerhalb derer die Hälfte des radioaktiven Materials zerfällt:

$$N(T_{1/2}) = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{N_0}{2} \implies e^{\lambda T_{1/2}} = 2 \implies T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \ln(2) \tau. \square$$

## 7.2 Richtungsfeld

Hat man eine gewöhnliche explizite DGL erster Ordnung, also  $y' = f(x, y)$ , dann kann man jedem Punkt  $(x, y)$  die Steigung der Tangente  $y'$  der Lösungsfunktion unmittelbar zuordnen. Stellt man dies grafisch dar, so erhält man schnell einen qualitativen Eindruck der Lösung.

Beispiel: Die inhomogene DGL  $y' + y = x \Rightarrow f(x, y) = x - y$ .



Die allgemeine Lösung der DGL lautet:  $y(x) = ke^{-x} + x - 1$ .  $\square$

Diese erhält man durch:

1. Lösen der homogenen DGL  $y' + y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = - \int dx \Rightarrow \ln|y| = -x + C \Rightarrow y_h = K e^{-x}$ .
2. Partikuläre Lösung mit Ansatz für linearen Störterm  $y_p = ax + b \Rightarrow y'_p = a$   
Einsetzen in  $y' + y = x \Rightarrow a + ax + b = x \Rightarrow a = 1$  und  $b = -1$ .
3. Allgemeine Lösung der inhom- DGL:  $y(x) = y_h + y_p = ke^{-x} + x - 1$ .

Als Isoklinen bezeichnet man Kurven, die Punkte gleicher Steigung verbinden, d.h.  $y' = f(x, y) = \text{const}$ . In unserem Beispiel sind die Isoklinen Geraden:

$$a = y' = x - y \implies y = x - a.$$

## 7.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Liegt eine DGL vor, deren Lösung nicht offensichtlich ist, dann ist es nützlich festzustellen, ob die DGL überhaupt eine Lösung besitzt.

Wir nehmen an, die DGL liegt in expliziter Form vor:  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ .

Jede solche DGL  $n$ -ter Ordnung lässt sich auf ein System von  $n$  gekoppelten DGL erster Ordnung zurückführen.

Die folgenden Überlegungen und Sätze gelten daher auch für alle expliziten DGL  $n$ -ter Ordnung, da diese immer auf obige Form gebracht werden können.

Betrachten wir also eine explizite DGL 1. Ordnung:  $y' = f(x, y)$ .

Die Menge aller Funktionen  $y(x)$ , welche diese Gleichung erfüllen, entspricht meist einer Kurvenschar in einem Bereich  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Durch Anfangsbedingungen (oder Randbedingungen) wird eine spezielle Lösung ausgewählt.

Ein sogenanntes Anfangswertproblem besteht also aus

- einem Definitionsbereich  $D \subset \mathbb{R}^2$ .
- einer Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  mit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .
- einer Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  mit  $(x_0, y_0) \in D$ .

SATZ VON PEANO: Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, dann gibt es zu jedem Anfangswertproblem  $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$  mit  $(x_0, y_0) \in D$  mindestens eine lokale Lösung  $y : U_\varepsilon(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  für ein  $\varepsilon > 0$ . Diese ist stetig differenzierbar, erfüllt die Differentialgleichung und liegt vollständig in  $D$ .

Beispiel:  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ ,  $y' = x\sqrt{y}$ ,  $y(0) = 0$ .

Es gibt zwei Lösungen:  $y(x) = 0$  und  $y(x) = \frac{x^4}{16}$ .  $\square$

SATZ VON PICARD-LINDELÖF: Seien  $I$  und  $G$  offene Intervalle. Sei  $D = I \times G \subset \mathbb{R}^2$  ein offenes Gebiet. Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist Lipschitz-stetig (bezüglich der zweiten Variablen), d.h. es gibt ein  $L \geq 0$  so dass für alle  $(x, y_1), (x, y_2) \in D$  gilt:  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ . Etwas einfacher zu zeigen ist:  $|\partial_y f(x, y)| \leq L$ .

Dann existiert zu jedem Anfangswertproblem  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  mit  $(x_0, y_0) \in D$  genau eine lokale Lösung  $y : U_\varepsilon(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  für ein  $\varepsilon > 0$ . Diese ist stetig differenzierbar, erfüllt die Differentialgleichung und liegt vollständig in  $D$ .

Die Eigenschaft, dass  $f(x, y)$  eine stetige partielle Ableitung  $\partial_y f(x, y)$  in  $D$  besitzt, ist hinreichend dafür, dass  $f(x, y)$  obige Lipschitz-Bedingung erfüllt. Anschaulich bedeutet Lipschitz-Stetigkeit, dass die Steigung der Funktion stets endlich bleibt.

Bemerkung: Die Sätze von Peano und Picard-Lindelöf sind hinreichend aber nicht notwendig. D.h. wenn die Bedingungen nicht erfüllt sind, ist keine Aussage möglich.

Beispiel:  $y' = x\sqrt{y}$ .  $\frac{\partial}{\partial y}x\sqrt{y} = \frac{x}{2\sqrt{y}}$  divergiert für  $y \rightarrow 0$ . Das Anfangswertproblem ist also nur dann eindeutig lösbar, wenn  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  und  $y(0) = y_0 > 0$ .

Die nun eindeutige Lösung lautet:  $y(x) = \left(\frac{x^2}{4} + \sqrt{y_0}\right)^2$ .  $\square$

## 7.4 Gewöhnliche lineare inhomogene DGL erster Ordnung

Die Funktion  $f(x)$  in der gewöhnlichen linearen inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + a(x)y = f(x)}$$

nennt man Inhomogenität. Ist  $f(x) = 0$ , so erhält man eine homogene DGL. Die Methoden Exponentialansatz und Trennung der Variablen funktionieren wegen der Inhomogenität nicht. Seien  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$  zwei verschiedene Lösungen der inhomogenen DGL, dann ist ihre Differenz

$$y_{\text{hom}}(x) := y_2(x) - y_1(x)$$

eine Lösung der entsprechenden homogenen DGL. Man nennt sie daher auch homogene Lösung. Beweis:

$$\frac{dy_{\text{hom}}}{dx} + a(x)y_{\text{hom}} = \frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx} + a(x)y_2 - a(x)y_1 = f(x) - f(x) = 0. \quad \text{q.e.d}$$

Die beiden Lösungen der inhomogenen DGL sind über die homogene Lösung miteinander verknüpft:

$$y_2(x) = y_1(x) + y_{\text{hom}}(x).$$

Haben wir eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL  $y_{\text{part}}(x)$  und eine homogene Lösung der homogenen DGL  $y_{\text{hom}}(x)$ , so ist jede Funktion

$$\boxed{y(x) = y_{\text{part}}(x) + \lambda y_{\text{hom}}(x)}$$

mit beliebigem  $\lambda \in \mathbb{R}$  eine weitere Lösung der inhomogenen DGL.

Beweis:  $\frac{dy}{dx} + a(x)y = \frac{dy_{\text{part}}}{dx} + \lambda \frac{dy_{\text{hom}}}{dx} + a(x)y_{\text{part}} + \lambda a(x)y_{\text{hom}} = f(x)$ .  $\quad \text{q.e.d.}$

Die homogenen Lösungen lauten:

$$y_{\text{hom}}(x) = Ce^{-\int a(x)dx} \quad \text{mit beliebigem } C \in \mathbb{R}.$$

Beweis:  $\frac{dy_{\text{hom}}}{dx} + a(x)y_{\text{hom}} = Ce^{-\int a(x)dx}(-a(x)) + a(x)Ce^{-\int a(x)dx} = 0.$  q.e.d.

Nun verwenden wir die sogenannte Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned} y(x) &= C(x)e^{-\int a(x)dx} \\ \implies \frac{dy}{dx} + a(x)y &= \frac{dC}{dx}e^{-\int a(x)dx} - C(x)e^{-\int a(x)dx}a(x) + a(x)C(x)e^{-\int a(x)dx} \\ &= \frac{dC}{dx}e^{-\int a(x)dx} \stackrel{!}{=} f(x) \implies \frac{dC}{dx} = f(x)e^{\int a(x)dx} \\ \implies C(x) &= \int f(x)e^{\int a(x)dx}dx. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet also:

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx} \int f(x)e^{\int a(x)dx}dx$$

Beispiel:  $\frac{dy}{dx} - xy = -2x. \quad a(x) = -x. \quad f(x) = -2x.$

$$\begin{aligned} -\int xdx &= -\frac{x^2}{2} + c_1. \quad -2 \int xe^{-\frac{x^2}{2}+c_1} = 2e^{-\frac{x^2}{2}+c_1} + c_2. \\ y(x) &= e^{\frac{x^2}{2}-c_1} \left( 2e^{-\frac{x^2}{2}+c_1} + c_2 \right) = 2 + c_2e^{\frac{x^2}{2}-c_1} = 2 + ce^{\frac{x^2}{2}}. (c := c_2e^{-c_1}). \square \end{aligned}$$

## 7.5 Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten sind von der Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

Wegen der Linearität der DGL gilt das Superpositionsprinzip: Sind  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$  zwei Lösungen der DGL, so löst auch die Funktion

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

die DGL, wobei  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  beliebige Koeffizienten sind.

Zur Lösung der DGL wählen wir einen Exponentialansatz:

$$\begin{aligned}
y(x) = e^{\lambda x} &\implies \frac{dy}{dx} = \lambda e^{\lambda x} \implies \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x} \\
&\implies \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = e^{\lambda x} (\lambda^2 + a\lambda + b) = 0 \\
&\iff \boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}
\end{aligned}$$

Dieses Polynom in  $\lambda$  nennt man das charakteristische Polynom der DGL. Es hat die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Die allgemeine Lösung ist dann eine Superposition:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Diesen Ansatz kann man für beliebige gewöhnliche lineare homogene DGL  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten durchführen:

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = 0 \implies y(x) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j x}, \text{ wobei } \forall j \in \{1, \dots, n\} : \sum_{k=0}^n a_k \lambda_j^k = 0.$$

Zurück zur Ordnung 2. Ob die  $\lambda_j$  reell oder komplex sind, entscheidet die Diskriminante

$$D := \frac{a^2}{4} - b.$$

Wir unterscheiden 3 Fälle:

$$1.) \quad D > 0 \implies \lambda_j \in \mathbb{R} \implies y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = e^{-\frac{a}{2}x} \left( c_1 e^{\sqrt{D}x} + c_2 e^{-\sqrt{D}x} \right).$$

Nun gilt:  $\cosh(x) \pm \sinh(x) = e^{\pm x}$ . Wir können also schreiben:

$$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \left( (c_1 + c_2) \cosh(\sqrt{D}x) + (c_1 - c_2) \sinh(\sqrt{D}x) \right).$$

Die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  können aus den Anfangsbedingungen  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y'_0$  ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
y_0 &= c_1 + c_2, \\
y'_0 &= c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = c_1 \left( -\frac{a}{2} + \sqrt{D} \right) + c_2 \left( -\frac{a}{2} - \sqrt{D} \right) = -\frac{a}{2} (c_1 + c_2) + \sqrt{D} (c_1 - c_2) \\
&= -\frac{a}{2} y_0 + \sqrt{D} (c_1 - c_2) \implies c_1 - c_2 = \frac{1}{\sqrt{D}} \left( y'_0 + \frac{a}{2} y_0 \right).
\end{aligned}$$

Wir erhalten daher als Lösung:

$$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \left( y_0 \cosh(\sqrt{D}x) + \frac{1}{\sqrt{D}} \left( y'_0 + \frac{a}{2}y_0 \right) \sinh(\sqrt{D}x) \right)$$

2.)  $D < 0$ . Formal müssen wir nur  $\sqrt{D}$  durch  $i\sqrt{-D}$  ersetzen. Wir definieren dazu  $\omega := \sqrt{-D}$ .

$$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \left( y_0 \cosh(i\omega x) + \frac{1}{i\omega} \left( y'_0 + \frac{a}{2}y_0 \right) \sinh(i\omega x) \right)$$

$$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \left( y_0 \cos(\omega x) + \frac{1}{\omega} \left( y'_0 + \frac{a}{2}y_0 \right) \sin(\omega x) \right)$$

$$3.) \quad D = 0 \iff b = \frac{a^2}{4} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2} =: \lambda.$$

Es scheint so, als würden wir einen Freiheitsgrad verlieren, da in der allgemeinen Lösung nur mehr eine Konstante  $c_1$  oder  $c_2$  auftritt. Es gibt jedoch eine weitere Lösung der DGL:

$$\begin{aligned} y(x) = xe^{\lambda x} &\implies \frac{dy}{dx} = e^{\lambda x} + x\lambda e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(1 + \lambda x) \\ &\implies \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda e^{\lambda x}(1 + \lambda x) + e^{\lambda x}\lambda = \lambda e^{\lambda x}(2 + \lambda x) \\ &\implies \lambda e^{\lambda x}(2 + \lambda x) + ae^{\lambda x}(1 + \lambda x) + bxe^{\lambda x} = xe^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) + e^{\lambda x}(2\lambda + a) = 0, \end{aligned}$$

$$\text{da } \lambda^2 + a\lambda + b = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} = 0 \quad \text{und} \quad 2\lambda + a = -a + a = 0.$$

Die allgemeine Lösung können wir wieder als Superposition schreiben:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = e^{-\frac{a}{2}x} (c_1 + c_2 x).$$

Die Koeffizienten  $c_1$  und  $c_2$  bestimmen wir wieder aus den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} y_0 &= c_1, \\ y'_0 &= [c_1 \lambda e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x} + c_2 \lambda x e^{\lambda x}] \Big|_{x=0} = c_1 \lambda + c_2 = c_2 - \frac{a}{2} c_1 = c_2 - \frac{a}{2} y_0. \end{aligned}$$

Als Lösung erhalten wir:

$$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \left( y_0 + \left( y'_0 + \frac{a}{2}y_0 \right) x \right)$$

## 7.6 Einige spezielle nichtlineare DGLen erster Ordnung

### 7.6.1 Separable Differentialgleichung

Die DGL ist von der Form

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = a(x) b(y)}$$

Die Lösung erfolgt durch Trennung der Variablen:

$$\boxed{\frac{dy}{b(y)} = a(x) dx \iff \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy'}{b(y')} = \int_0^x a(x') dx'}$$

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } \frac{dy}{dx} = 2xy^2 &\implies \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy'}{y'^2} = \left[ -\frac{1}{y'} \right]_{y'=y_0}^{y(x)} = -\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{y_0} = \int_0^x 2x' dx' = x^2 \\ &\implies \frac{1}{y(x)} = \frac{1}{y_0} - x^2 = \frac{1 - y_0 x^2}{y_0} \implies y(x) = \frac{y_0}{1 - y_0 x^2}. \square \end{aligned}$$

### 7.6.2 Bernoullische Differentialgleichung

Eine Bernoullische Differentialgleichung sieht so aus:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)y^\alpha}$$

Die DGL hat den Grad  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .

Wir multiplizieren beide Seiten mit  $y^{-\alpha}$ :

$$y^{-\alpha} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (y^{-\alpha+1}) \frac{1}{1-\alpha} = a(x)y^{-\alpha+1} + b(x).$$

Wir führen eine Variablensubstitution durch:

$$\begin{aligned} z := y^{-\alpha+1} &\implies \frac{dz}{dx} = (1-\alpha)y^{-\alpha} \frac{dy}{dx} \\ &\implies \boxed{\frac{dz}{dx} = (1-\alpha)(a(x)z + b(x))} \end{aligned}$$

Dies ist eine gewöhnliche lineare inhomogene DGL erster Ordnung für  $z(x)$  und kann mit den Methoden aus Kap. 7.5 gelöst werden.

$$\text{Beispiel: } \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} - x^2 y^2 \implies y^{-2} \frac{dy}{dx} = \frac{2}{xy} - x^2.$$

$$\text{Wir substituieren } z := y^{-2+1} = \frac{1}{y} \implies \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx}.$$

$$\implies \frac{dz}{dx} = -\frac{2}{x}z + x^2 \implies \frac{dz}{dx} + \frac{2}{x}z = x^2.$$

Diese DGL lösen wir mit der Formel von S. 41:

$$a(x) = \frac{2}{x}, f(x) = x^2.$$

$$\int a(x) dx = 2 \int \frac{dx}{x} = 2 \ln|x| + c_1 = \ln(x^2) + c_1 \implies e^{-\int a(x) dx} = x^{-2} e^{-c_1}.$$

$$\int f(x) e^{\int a(x) dx} dx = \int x^2 x^2 e^{c_1} dx = e^{c_1} \int x^4 dx = e^{c_1} \left( \frac{x^5}{5} + c_2 \right).$$

$$\implies z(x) = \frac{1}{x^2 e^{c_1}} e^{c_1} \left( \frac{x^5}{5} + c_2 \right) = \frac{x^3}{5} + \frac{c_2}{x^2} = \frac{x^5 + 5c_2}{5x^2}.$$

Mit  $c := 5c_2$  erhalten wir als Lösung der ursprünglichen DGL:

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{5x^2}{x^5 + c}. \square$$

### 7.6.3 Riccatische Differentialgleichung

Eine Riccatische Differentialgleichung ist von der Form

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)}$$

Sie ist im Allgemeinen mit den üblichen Methoden nicht lösbar.

Kennt man jedoch eine Lösung der DGL  $y_0(x)$ , so hilft folgender Ansatz weiter:

$$y(x) = y_0(x) + u(x).$$

Setzen wir dies in die DGL ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dx} + \frac{du}{dx} &= \frac{dy}{dx} \stackrel{!}{=} a(x)y_0^2 + 2a(x)y_0u + a(x)u^2 + b(x)y_0 + b(x)u + c(x) \\ \iff \frac{du}{dx} &= 2a(x)y_0u + a(x)u^2 + b(x)u = (2a(x)y_0 + b(x))u + a(x)u^2. \end{aligned}$$

Dies ist eine Bernoullische DGL für  $u(x)$ , die man mit den Methoden aus Kap. 7.8.2 lösen kann.

#### 7.6.4 Logistische DGL

Daniel Bernoulli verwendete bereits 1760 folgendes Modell, um die Ausbreitung der Pocken zu beschreiben:

- Der Anteil der Menschen, die (noch) nicht infiziert sind sei  $x$ , der Anteil der infizierten Bevölkerung sei:  $y = 1 - x$ .
- Eine Ansteckung erfolgt nur über direkten Kontakt zwischen infizierter und nicht-infizierter Person.
- Der Anteil infizierter Personen erhöht sich proportional zur Anzahl solcher Kontakte (Proportionalitätsfaktor  $\beta$ ).
- Beide Gruppen können sich frei untereinander bewegen, sie sind unkorreliert. Die Anzahl der Kontakte ist also  $xy$ .

Aus diesen Annahmen erhalten wir folgende DGL:

$$\frac{dy}{dt} = \beta xy = \beta(1-y)y = \beta y - \beta y^2, \quad y(t=0) = y_0.$$

Diese sogenannte ***logistische Differentialgleichung*** ist **nicht-linear**, ein Exponential-Ansatz ist daher unbrauchbar.

Wir wählen die Methode der **Trennung der Variablen**. Viele DGL erster Ordnung lassen sich damit lösen. Voraussetzung ist, dass sich die DGL explizit in folgender Form schreiben lässt:

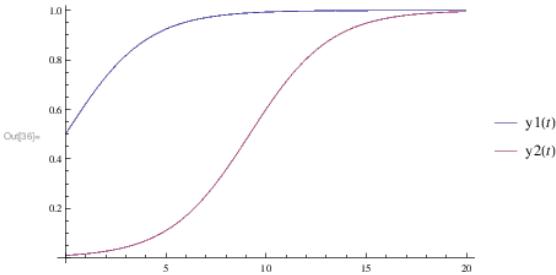
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = f(x, y(x)) = \frac{g(x)}{h(y)} &\implies h(y) dy = g(x) dx \implies \int h(y) dy = \int g(x) dx \\ &\implies H(y) = G(x) + C \implies y(x) = H^{-1}(G(x) + C). \end{aligned}$$

Zurück zum Pocken-Problem:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{(1-y)y} = \beta dt &\implies \int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy'}{(1-y')y'} = \beta \int_0^t dt' \\ &\implies \left[ \ln\left(\frac{y'}{y'-1}\right) \right]_{y'=y_0}^{y(t)} = \ln\left(\frac{y(t)}{y(t)-1}\right) - \ln\left(\frac{y_0}{y_0-1}\right) = \beta t \\ &\implies \frac{y(t)}{y(t)-1} = e^{\beta t} \frac{y_0}{y_0-1} \implies \dots \implies \\ &\implies y(t) = \frac{y_0 e^{\beta t}}{1 - y_0 (1 - e^{\beta t})} = \frac{y_0}{(1 - y_0) e^{-\beta t} + y_0}. \end{aligned}$$

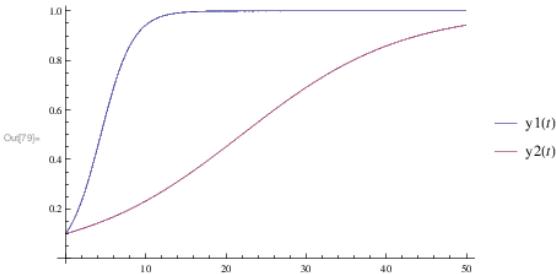
Prop.Konst. beta gleich, Startwert y[0] verschieden:

```
In[31]:= beta = 0.5;
y10 = 0.5;
y20 = 0.01;
y1[t_] := y10 / ((1 - y10) Exp[-beta*t] + y10);
y2[t_] := y20 / ((1 - y20) Exp[-beta*t] + y20);
Plot[{y1[t], y2[t]}, {t, 0, 20}, PlotLegends -> "Expressions"]
```



Startwert y[0] gleich, Prop.Konst. beta verschieden:

```
In[74]:= beta1 = 0.5;
beta2 = 0.1;
y0 = 0.1;
y1[t_] := y0 / ((1 - y0) Exp[-beta1*t] + y0);
y2[t_] := y0 / ((1 - y0) Exp[-beta2*t] + y0);
Plot[{y1[t], y2[t]}, {t, 0, 50}, PlotLegends -> "Expressions"]
```



### 7.6.5 Homogene Differentialgleichung

Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt homogen vom Grad  $n$  wenn

$$\forall \alpha, x_i \in \mathbb{R} : f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^n f(x_1, \dots, x_n).$$

Beispiel:  $f(x, y) := x^3 - xy^2$  ist homogen vom Grad 3, da:

$$f(tx, ty) = (tx)^3 - (tx)(ty)^2 = t^3 x^3 - t^3 x y^2 = t^3 (x^3 - xy^2) = t^3 f(x, y). \square$$

Wir nennen eine Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  homogen genau dann, wenn die Funktion  $f(x, y)$  homogen vom Grad 0 ist.

Beispiel:  $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ .

$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{h(x, y)}$ , wobei die Funktionen  $g$  und  $h$  homogen vom selben Grad sind.  $\square$

Eine homogene DGL  $y' = f(x, y)$  kann man mit folgender Substitution vereinfachen:

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \implies y = ux \implies \frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u.$$

Ist  $f(x, y)$  homogen vom Grad 0, so gilt:

$$f(x, y) = f(x, ux) = x^0 f(1, u) = f(1, u).$$

$$\implies x \frac{du}{dx} + u = f(1, u) \implies \boxed{\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} (f(1, u) - u)}$$

Diese DGL für  $u(x)$  ist separabel und mit den Methoden aus Kap. 7.8.1 lösbar.

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } & \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \ln\left(\frac{y}{x}\right), u(x) := \frac{y(x)}{x}. \\ & \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} (u \ln(u) - u) = \frac{u}{x} (\ln(u) - 1) \implies \frac{du}{u(\ln(u) - 1)} = \frac{dx}{x} \\ & \implies \int \frac{du}{u(\ln(u) - 1)} = \ln(\ln(u) - 1) = \int \frac{dx}{x} = \ln(x) + c_1 \\ & \implies \ln(u) - 1 = x e^{c_1} = c_2 x \implies u(x) = e^{c_2 x + 1} \\ & \implies y(x) = x e^{cx+1}. \quad \square \end{aligned}$$

## 7.7 Potenzreihenansatz

Insbesondere bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung hilft ein Potenzreihenansatz weiter:

$$\boxed{y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k}$$

$$\begin{aligned} & \implies \frac{dy}{dx} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) x^k. \\ & \implies \frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (k+2) (k+1) x^k. \\ & \implies \frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} \frac{(k+m)!}{k!} x^k. \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in die DGL und anschließender Koeffizientenvergleich liefert Werte für die  $a_i$  (oft in Form von Rekursionsformeln).

Ist man an einer lokalen approximativen Lösung interessiert, kann man in den Reihen auch  $x$  durch  $x - x_0$  ersetzen und die Reihe ab einem bestimmten Glied abbrechen.

## 7.8 Numerische Integration expliziter DGL erster Ordnung

Die folgenden Verfahren ermöglichen eine numerische Lösung von Anfangswertproblemen, also einer Differentialgleichung  $y'(x) = f(x, y)$  mit gegebenem Anfangswert  $(x_0, y_0)$ . Man extrapoliert quasi von einem bekannten Punkt zum nächsten um die Schrittweite  $h > 0$  entfernten Punkt.

### 7.8.1 Euler-Verfahren (Polygonzug-Verfahren)

Nach dem Satz von Taylor gibt es ein  $\xi \in (x_0, x_0 + h)$  so dass  
 $y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(\xi)h^2$ .

Wir nähern und setzen  $x_1 := x_0 + h$ ,  $y(x_0) = y_0$  und  $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ :

$$y(x_1) = y_0 + hf(x_0, y_0) + \mathcal{O}(h^2) \approx y_0 + hf(x_0, y_0) =: y_1.$$

So erhalten wir näherungsweise das nächste Wertepaar  $(x_1, y_1)$ . Das Euler-Verfahren lässt sich rekursiv wie folgt schreiben:

$$x_{n+1} = x_n + h \quad \text{und} \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Die Näherung hat einen Fehler von der Ordnung  $\mathcal{O}(h^2)$ . Das Verfahren ist zwar einfach und schnell, jedoch ist es nicht sehr genau.

### 7.8.2 Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung

#### Modifiziertes Eulerverfahren

Das modifizierte Eulerverfahren beruht auf dem Euler-Verfahren, nur dass für die Ermittlung der Steigung ein Stützpunkt zwischen  $x_n$  und  $x_n + h$  gewählt wird.

$$x_{n+1} = x_n + h \quad \text{und} \quad y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n)\right)$$

Der Fehler dieses Verfahrens ist von der Ordnung  $\mathcal{O}(h^3)$ .

## Heun-Verfahren

Nach dem Euler-Verfahren wäre das auf  $(x_0, y_0)$  folgende Wertepaar

$$x_1 = x_0 + h \text{ und } \tilde{y}_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Nun mitteln wir die Steigungen im ursprünglichen Punkt  $(x_0, y_0)$  und im Stützpunkt  $(x_1, \tilde{y}_1)$ . Diese gemittelte Steigung setzen wir in die Vorschrift des Euler-Verfahrens ein:

$$y_1 = y_0 + h \frac{1}{2} (f(x_0, y_0) + f(x_1, \tilde{y}_1)).$$

Wenn wir dies in jedem Schritt machen, erhalten wir als Iterationsvorschrift:

$$x_{n+1} = x_n + h \text{ und } y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)))$$

oder mit  $\tilde{y}_{n+1} := y_n + hf(x_n, y_n)$ :

$$x_{n+1} = x_n + h \text{ und } y_{n+1} = \frac{1}{2} (y_n + \tilde{y}_{n+1}) + \frac{h}{2} f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})$$

Der Fehler ist von der Ordnung  $\mathcal{O}(h^3)$ .

### 7.8.3 Klassisches Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung

Dieses stellt das Optimum bezüglich Aufwand und numerischer Genauigkeit dar.

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \quad k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \quad k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3). \end{aligned}$$

$$x_{n+1} = x_n + h \text{ und } y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Der Fehler ist von der Ordnung  $\mathcal{O}(h^5)$ .

## 7.9 Gewöhnliche lineare Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten eine lineare DGL  $n$ -ter Ordnung von der Form

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(x) = b(x)$$

Um zu einer allgemeinen Lösung zu gelangen, benötigen wir homogene Lösungen  $y_{h,k}(x)$  und eine partikuläre Lösung  $y_p(x)$ . Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lässt sich dann schreiben als:

$$y(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_{h,k}(x) + y_p(x)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(x) &= \sum_{i=0}^n a_i \sum_{k=1}^n \alpha_k y_{h,k}^{(i)}(x) + \sum_{i=0}^n a_i y_p^{(i)}(x) \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \sum_{i=0}^n a_i y_{h,k}^{(i)}(x) + \sum_{i=0}^n a_i y_p^{(i)}(x) = 0 + b(x) = b(x). \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Die Menge aller homogenen Lösungen ist ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum.

Jede Basis dieses (homogenen) Lösungsraumes heißt ein Fundamentalsystem  $F$ .

Die dafür benötigte lineare Unabhängigkeit der Funktionen lässt sich mittels Wronski-Determinante überprüfen. Die Lösungsmenge der DGL kann man also kurz schreiben als  $L(F) + y_p(x)$ .

Beispiel: Lineare homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

$$(D^2 + \alpha D + \beta) y(x) = 0 \text{ mit } D := \frac{d}{dx}.$$

Diese Gleichung kann man formal faktorisieren:

$$(D - a)(D - b)y(x) = 0, \text{ wobei } -a - b = \alpha \text{ und } ab = \beta.$$

Nun müssen wir einige Fälle unterscheiden:

- $\mathbb{R} \ni a \neq b \in \mathbb{R}: F = \{e^{ax}, e^{bx}\}$ .
- $a = b \in \mathbb{R}: F = \{e^{ax}, xe^{ax}\}$ .
- $\mathbb{C} \ni a = b^* \in \mathbb{C}: F = \{e^{\Re(a)x} \sin(\Im(a)x), e^{\Re(a)x} \cos(\Im(a)x)\}$ .  $\square$

Wir verallgemeinern dieses Resultat: Gegeben sei eine lineare homogene DGL  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\sum_{i=1}^n a_i D^i y(x) = 0$$

Um den Ausdruck  $\sum_i a_i D^i$  formal faktorisieren zu können, benötigen wir die entsprechenden Nullstellen  $\lambda_j$  des charakteristischen Polynoms (vgl. Kap. 7.6):

$$\sum_{i=1}^n a_i \lambda_j^i = 0 \implies \sum_{i=1}^n a_i D^i = \prod_{j=1}^m (D - \lambda_j)^{n_j}.$$

Dabei ist  $m$  die Anzahl der verschiedenen Nullstellen des charakteristischen Polynoms und  $n_j$  die Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda_j$ . Es muss  $\sum_j n_j = n$  gelten.

Ein Fundamentalsystem lautet dann:

$$F = \{e^{\lambda_j x}, xe^{\lambda_j x}, \dots, x^{n_j-1} e^{\lambda_j x} : j \in \{1, \dots, m\}\}$$

Beispiel:  $y'''(x) - 4y''(x) + 5y'(x) - 2y(x) = 0$ .

$$D^3 - 4D^2 + 5D - 2 = (D - 1)^2(D - 2).$$

$$\implies F = \{e^x, xe^x, e^{2x}\}. \square$$

## 7.10 Systeme von gekoppelten DGLen

Zwei Seen seien durch einen Bach miteinander verbunden. Der Bach fließt mit konstantem Durchfluss durch den ersten See mit Volumen  $V_1$  und den zweiten See mit Volumen  $V_2$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird eine Pestizid-Menge  $Q_0$  in den ersten See eingeleitet. Wir nehmen einfachheitshalber an, dass sich das Pestizid sofort im gesamten Volumen  $V_1$  gleichmäßig verteilt. Nun wollen wir wissen, wie der zeitliche Verlauf der Pestizid-Konzentration in See 1 und 2 ist. Wir stellen für jeden der beiden Seen eine Ratengleichungen auf:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Q_1(t) &= -k_1 Q_1(t) \\ \frac{d}{dt} Q_2(t) &= +k_1 Q_1(t) - k_2 Q_2(t) \end{aligned}$$

Die beiden DGLen sind miteinander verkoppelt, da die zweite Gleichung von  $Q_1(t)$  abhängt. Man kann die Gleichungen kompakt in Matrix-Schreibweise darstellen:

$$\frac{d}{dt} \vec{Q}(t) = A \vec{Q}(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{pmatrix}$$

Mit dem Ansatz  $\vec{Q} = \vec{x} e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{\vec{Q}} = \lambda \vec{x} e^{\lambda t} = \lambda \vec{Q}$  erhalten wir  $\lambda \vec{Q} = A \vec{Q}$  als ein **Eigenwert-Problem**. Die Eigenwerte erhalten wir als Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} -k_1 - \lambda & 0 \\ k_1 & -k_2 - \lambda \end{pmatrix} = (k_1 + \lambda)(k_2 + \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + (k_1 + k_2)\lambda + k_1 k_2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[-(k_1 + k_2) \pm (k_1 - k_2)] \Rightarrow \lambda_1 = -k_1, \lambda_2 = -k_2.$$

Die Eigenvektoren sind:  $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{k_2 - k_1}{k_1} \\ 1 \end{pmatrix}$  zu  $\lambda_1 = -k_1$  und  $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  zu

$$\lambda_2 = -k_2.$$

Das sogenannte **Fundamentalsystem** lautet somit:

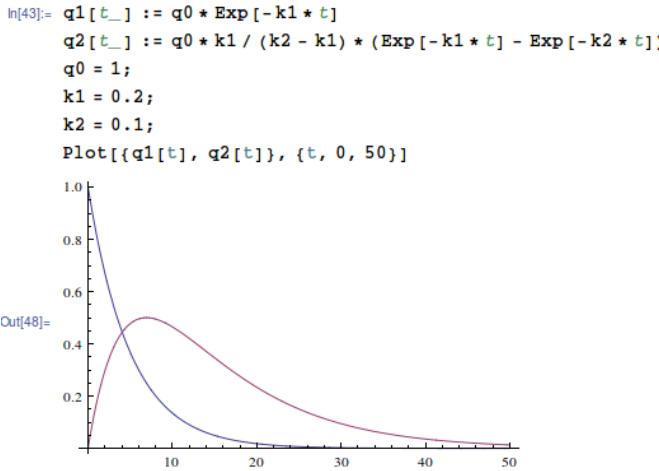
$$F = \left\{ \vec{x}_1 e^{\lambda_1 t}, \vec{x}_2 e^{\lambda_2 t} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{k_2 - k_1}{k_1} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-k_1 t}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-k_2 t} \right\}.$$

$$\text{Allgemeine Lösung: } F = c_1 \vec{x}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{x}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{k_2 - k_1}{k_1} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-k_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-k_2 t}, \text{ bzw}$$

$$Q_1(t) = \frac{k_2 - k_1}{k_1} c_1 e^{-k_1 t} \quad \text{und} \quad Q_2(t) = c_1 e^{-k_1 t} + c_2 e^{-k_2 t}.$$

Mit den Anfangsbedingungen  $Q_1(0) = Q_0$  und  $Q_2(0) = 0$  erhält man:

$$Q_1(t) = Q_0 e^{-k_1 t} \quad \text{und} \quad Q_2(t) = Q_0 \frac{k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} + e^{-k_2 t}).$$



Beispiel: Allgemeines System von DGL.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 - 6x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_2 \end{array} \right\} \iff \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1 - \lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = -(\lambda - 5)(\lambda + 3)^2.$$

$$\lambda_1 = 5 \Rightarrow \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}. \square$$

### 7.10.1 Transformation DGL $n$ -ter Ordnung auf DGL-System

Wir bringen die explizite lineare DGL  $n$ -ter Ordnung  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = a_0y + a_1y' + \dots + a_{n-1}y^{(n-1)}$  auf ein System von  $n$  gekoppelten DGL erster Ordnung.

$$y_1 := y \implies$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y' = y'_1 \\ y_3 &= y'' = (y'_1)' = y'_2 \\ y_4 &= y''' = (y'_2)' = y'_3 \\ &\vdots \\ y_n &= y^{(n-1)} = y'_{n-1} \\ f(x, y_1, \dots, y_n) &= y'_n. \end{aligned}$$

Das ist ein System von  $n$  DGL, das man in Matrixform umschreiben kann :

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\iff \frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y}.$$

Liegt noch eine Inhomogenität  $\vec{b}$  vor, so wird daraus:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{b}$$

Die homogene DGL lässt sich über den Exponential-Ansatz  $\vec{y} = \vec{v}e^{\lambda x}$  lösen:

$$\frac{d}{dx} (\vec{v}e^{\lambda x}) = \vec{v}\lambda e^{\lambda x} = A\vec{v}e^{\lambda x} \iff A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix  $A$  ist gleich dem charakteristischen Polynom der DGL.

Beispiel: Bewegungsgleichung eines ungedämpften freien harmonischen Oszillators.

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \iff \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = 0 \iff \lambda = \pm i\omega.$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -i\omega & 1 \\ -\omega^2 & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -i\omega & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -i\omega x_1 + x_2 = 0 \text{ wähle } x_1 = 1 \Rightarrow \\ \vec{v}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} \\ \text{Kern} \left( \begin{pmatrix} i\omega & 1 \\ -\omega^2 & i\omega \end{pmatrix} \right) &= \text{Kern} \left( \begin{pmatrix} i\omega & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = L \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} \right). \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} e^{i\omega t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} e^{-i\omega t}. \square \end{aligned}$$

## 7.11 Exakte Differentialgleichung

Betrachten wir folgende Differentialgleichung erster Ordnung:

$$p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0$$

Ist  $q(x, y) \neq 0$ , so können wir sie auch umformen:

$$p(x, y) + q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \iff \frac{dy}{dx} = -\frac{p(x, y)}{q(x, y)}.$$

Die DGL  $p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0$  heißt exakt, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion  $F(x, y)$ , die sogenannte Potentialfunktion, gibt, so dass gilt:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = p(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = q(x, y).$$

Sind  $p(x, y)$  und  $q(x, y)$  in einem einfach zusammenhängenden Gebiet stetig differenzierbar, so gibt es genau dann eine Potentialfunktion  $F(x, y)$ , wenn die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist:

$$\boxed{\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x}}$$

Die exakte Differentialgleichung lautet somit:

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy = p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0.$$

Diese Gleichung können wir sofort integrieren:  $F(x, y) = C$

Die Potentialfunktion erhalten wir durch Integration:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int p(x, y) dx + \varphi(y) \\ \implies \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \int p(x, y) dx + \frac{d\varphi(y)}{dy} = q(x, y) \\ \implies \frac{d\varphi(y)}{dy} &= q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int p(x, y) dx \\ \implies \varphi(y) &= \int \left( q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int p(x, y) dx \right) dy \\ \implies F(x, y) &= \int p(x, y) dx + \int \left( q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int p(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$

Dabei kann man auch  $p \longleftrightarrow q$  und  $dx \longleftrightarrow dy$  bzw.  $\partial x \longleftrightarrow \partial y$  vertauschen.

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } \frac{dy}{dx} &= -\frac{3x^2y}{x^3+2y} \implies (3x^2y) dx + (x^3+2y) dy = 0 \\ \implies p(x, y) &= 3x^2y, \quad q(x, y) = x^3+2y. \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 3x^2 = \frac{\partial q}{\partial x}. \end{aligned}$$

Wir wissen also, dass eine Potentialfunktion existieren muss. Daher ist die DGL exakt. In diesem einfachen Beispiel lässt sich die Potentialfunktion  $F(x, y)$  schnell finden:

$$F(x, y) = x^3y + y^2 = C.$$

Lösen wir diese Gleichung nach  $y$  auf, so erhalten wir die Lösung der DGL:

$$y(x) = -\frac{x^3}{2} \pm \sqrt{\frac{x^6}{4} + C}. \quad \square$$

### 7.11.1 Integrierender Faktor

Die DGL  $p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0$  ist im allgemeinen nicht exakt. Um sie in eine exakte DGL umzuformen, müssen wir sie mit einer stetig differenzierbaren Funktion  $\mu(x, y)$ , dem sogenannten integrierenden Faktor oder auch Eulerschen Multiplikator, multiplizieren:

$$\mu(x, y) p(x, y) dx + \mu(x, y) q(x, y) dy = 0.$$

Diese DGL ist genau dann exakt, wenn die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist:

$$\frac{\partial(\mu p)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu q)}{\partial x}.$$

Diese partielle Differentialgleichung ist in der Regel aufwändiger zu lösen als die ursprüngliche gewöhnliche DGL.

Nimmt man  $\mu$  als Funktion einer Variable  $u$  an, welche ihrerseits eine Funktion von  $x$  und  $y$  ist, dann erhält man:

$$\begin{aligned}\mu = \mu(u(x, y)) &\implies \frac{d\mu}{du} \frac{\partial u}{\partial y} p + \mu \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{d\mu}{du} \frac{\partial u}{\partial x} q + \mu \frac{\partial q}{\partial x} \\ &\implies \mu'(u_y p - u_x q) = \mu(q_x - p_y) \implies \boxed{\frac{\mu'}{\mu} = \frac{q_x - p_y}{u_y p - u_x q} = f(u)}\end{aligned}$$

Nun muss man  $u(x, y)$  so bestimmen, dass die rechte Seite der Gleichung eine Funktion von  $u$  ist. Die Gleichung lässt sich dann integrieren:

$$\ln |\mu(u)| = \int f(u) du \implies \mu(u) = e^{\int f(u) du}.$$

Einsetzen von  $u(x, y)$  liefert den integrierenden Faktor  $\mu(x, y)$ .

Häufige Funktionen für  $u(x, y)$  sind:

- $u(x, y) = x \implies \frac{p_y - q_x}{q} = f(x).$
- $u(x, y) = y \implies \frac{q_x - p_y}{p} = f(y).$
- $u(x, y) = x + y \implies \frac{q_x - p_y}{p - q} = f(x + y).$
- $u(x, y) = x^2 + y^2 \implies \frac{q_x - p_y}{2yp - 2xq} = f(x^2 + y^2).$
- $u(x, y) = xy \implies \frac{q_x - p_y}{xp - yq} = f(xy).$
- $u(x, y) = \frac{y}{x} \implies \frac{q_x - p_y}{\frac{1}{x}p + \frac{y}{x^2}q} = x^2 \frac{q_x - p_y}{xp + yq} = f\left(\frac{y}{x}\right).$

Die Lösung der modifizierten exakten DGL ist gleich der Lösung der ursprünglichen DGL.

Beispiel:  $\frac{dy}{dx} = \frac{\tan(y)}{x} = \frac{1}{x \cot(y)} \implies dx - x \cot(y) dy = 0$

$$\implies p(x, y) = 1, \quad q(x, y) = -x \cot(y).$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \neq -\cot(y) = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Die ursprüngliche Gleichung ist also nicht exakt. Wir wählen für den integrierenden Faktor

$$\begin{aligned}\mu = \mu(y) &\implies \frac{-\cot(y)}{1} = -\cot(y) = f(y). \\ \int f(y) dy &= - \int \frac{\cos(y)}{\sin(y)} dy = -\ln|\sin(y)| \\ \implies \mu(y) &= e^{-\ln|\sin(y)|} = \frac{1}{\sin(y)}.\end{aligned}$$

Beim letzten Gleichheitszeichen haben wir  $|\sin(y)|$  durch  $\sin(y)$  ersetzt. Die Funktion  $\mu$  soll ja stetig differenzierbar sein. Wir erhalten die modifizierte DGL:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{\sin(y)} - x \frac{\cot(y)}{\sin(y)} dy &= \frac{dx}{\sin(y)} - x \frac{\cos(y)}{\sin^2(y)} dy = 0. \\ \tilde{p}(x, y) &= \frac{1}{\sin(y)}, \quad \tilde{q}(x, y) = -x \frac{\cos(y)}{\sin^2(y)}.\end{aligned}$$

Diese DGL ist nun exakt, da:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = -\frac{\cos(y)}{\sin^2(y)} = \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x}.$$

Als Potentialfunktion erhalten wir:

$$\begin{aligned}F(x, y) &= \int \frac{1}{\sin(y)} dx + \int \left( -x \frac{\cos(y)}{\sin^2(y)} - \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{1}{\sin(y)} dx \right) dy \\ &= \frac{x}{\sin(y)} + \int \left( -x \frac{\cos(y)}{\sin^2(y)} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{\sin(y)} \right) dy \\ &= \frac{x}{\sin(y)} + \int \left( -x \frac{\cos(y)}{\sin^2(y)} + x \frac{\cos(x)}{\sin^2(y)} \right) dy = \frac{x}{\sin(y)} + \int 0 dy \\ F(x, y) &= \frac{x}{\sin(y)} = C.\end{aligned}$$

Die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung lautet also:

$$y(x) = \arcsin(cx) \text{ mit } c := C^{-1}. \quad \square$$

## 8 Vektoranalysis

Wir beschränken uns auf Vektorfunktionen und Vektorfelder im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ .

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y + z(t) \vec{e}_z \text{ und } t \text{ ist eine skalare Variable.}$$

Eine Vektorfunktion ist genau dann stetig, wenn ihre Komponentenfunktionen stetig sind.

### 8.1 Differentiation von Vektorfunktionen

$$\frac{d}{dt} \vec{r}(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} =: \dot{\vec{r}}(t). \text{ Es gilt: } \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}.$$

$\dot{\vec{r}}(t)$  liegt tangential an der Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  an.

Ist  $\vec{e}(t)$  ein Einheitsvektor, so steht er stets senkrecht auf seine Ableitung, da für Einheitsvektoren gilt:

$$\vec{e}(t) \cdot \vec{e}(t) = 1 \underset{d/dt}{\implies} 2\vec{e} \cdot \dot{\vec{e}} = 0 \implies \vec{e} \perp \dot{\vec{e}}.$$

Ableitungsregeln:

- $\frac{d}{dt} [\alpha \vec{x}(t) + \beta \vec{y}(t)] = \alpha \dot{\vec{x}}(t) + \beta \dot{\vec{y}}(t).$
- $\frac{d}{dt} [f(t) \vec{x}(t)] = \dot{f}(t) \vec{x}(t) + f(t) \dot{\vec{x}}(t).$
- $\frac{d}{dt} [\vec{x}(t) \cdot \vec{y}(t)] = \dot{\vec{x}}(t) \cdot \vec{y}(t) + \vec{x}(t) \cdot \dot{\vec{y}}(t).$
- $\frac{d}{dt} [\vec{x}(t) \times \vec{y}(t)] = \dot{\vec{x}}(t) \times \vec{y}(t) + \vec{x}(t) \times \dot{\vec{y}}(t).$
- $\frac{d}{dt} \vec{x}(f(t)) = \frac{d\vec{x}}{df} \frac{df}{dt}.$

Beispiel:  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix} \implies \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \dot{\varphi}. \square$

### 8.2 Raumkurven

$\vec{r}: [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \vec{e}_i$  nennt man Trajektorie, Parametrisierung einer Kurve oder Weg. Die Bildmenge  $\{\vec{r}(t) : t_a \leq t \leq t_e\}$  nennt man (Raum-)Kurve.

Beispiel: Kreisbewegung mit konstanter Kreisfrequenz  $\omega$  und Radius  $R$ :

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \pm\sqrt{R^2 - x^2(t)} \end{pmatrix}. \\ \vec{v}(t) := \dot{\vec{r}}(t) &= \omega R \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \mp x\dot{x}/\sqrt{R^2 - x^2} \end{pmatrix}. \\ \vec{a}(t) := \ddot{\vec{r}}(t) &= -\omega^2 R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}(t).\end{aligned}$$

Bei einer Kreisbahn zeigt der Beschleunigungsvektor also stets zum Ursprung.  $\square$

Bogenlänge:

Wir approximieren die Trajektorie durch einen Polygonzug mit  $N$  Teilstücken. Die Zeitintervalle  $\Delta t$  seien äquidistant gewählt:

$$\Delta t := \frac{t_e - t_a}{N} \text{ und } t_n := t_a + n\Delta t, n \in \{0, \dots, N\} \implies t_0 = t_a \text{ und } t_N = t_e.$$

Die Länge des Polygonzuges ist dann:

$$L_N(t_0, t_N) = \sum_{n=0}^{N-1} |\vec{r}(t_{n+1}) - \vec{r}(t_n)| = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|\Delta \vec{r}_n|}{\Delta t} \Delta t.$$

Die Bogenlänge  $s$  erhalten wir aus dem Grenzfall  $N \rightarrow \infty$  ( $\implies \Delta t \rightarrow 0$ ):

$$s = \lim_{N \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|\Delta \vec{r}_n|}{\Delta t} \Delta t = \int_{t_a}^{t_e} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = \int_{t_a}^{t_e} \left| \dot{\vec{r}}(t) \right| dt.$$

Man spricht von einer natürlichen Darstellung der Raumkurve, wenn die Raumkurve mit der Bogenlänge parametrisiert wird:  $\vec{r}(s) = \vec{r}(t(s))$ .

$$\begin{aligned}\text{Beispiel: Kreisbahn: } s(t) &= \int_0^t \omega R dt' = \omega R t \implies t(s) = \frac{s}{\omega R} \\ \implies \vec{r}(s) &= R \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s}{R}\right) \\ \sin\left(\frac{s}{R}\right) \end{pmatrix}. \square\end{aligned}$$

Begleitendes Dreibein:

$$\hat{t} := \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\vec{r}}{ds} \text{ nennt man Tangenteneinheitsvektor. } |\hat{t}| = 1.$$

$\frac{d\hat{t}}{ds}$  steht senkrecht zu  $\hat{t}$ .  $\kappa := \left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right|$  heißt Krümmung,  $R := \frac{1}{\kappa}$  heißt Krümmungsradius.

$$\hat{n} := \frac{1}{\kappa} \frac{d\hat{t}}{ds} \text{ nennt man Normaleneinheitsvektor. } |\hat{n}| = 1.$$

$$\hat{b} := \hat{t} \times \hat{n} \text{ nennt man Binormaleneinheitsvektor. } |\hat{b}| = 1.$$

Frenetsche Formeln:

$$\boxed{\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa \hat{n}} \quad \boxed{\frac{d\hat{n}}{ds} = \tau \hat{b} - \kappa \hat{t}} \quad \boxed{\frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau \hat{n}}$$

Die Torsion  $\tau := \left| \frac{d\hat{b}}{ds} \right|$  beschreibt die Windung der Kurve aus der  $\hat{t}\text{-}\hat{n}$ -Ebene.

## 8.3 Flächen im Raum

### 8.3.1 Partielle Differentiation

Sei  $f(x, y)$  eine skalare Funktion in zwei Variablen  $x$  und  $y$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}. \quad \frac{\partial f}{\partial y} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}.$$

Notation:  $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \partial_x f$ .

$$\text{Beispiel: } f(x, y) := x^2 y^3 \implies \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2.$$

$$\text{Höhere Ableitungen: } f_{xx} := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = 2y^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2 y.$$

$$\text{Gemischte Ableitungen: } f_{xy} := \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = 6xy^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2. \square$$

Satz von Schwarz: Ist  $f(x, y)$  zweimal stetig differenzierbar, so gilt:  $f_{xy} = f_{yx}$ .

Ableitungsregeln: Seien  $f = f(x, y)$  und  $g = g(x, y)$  differenzierbar, dann gilt:

- $\frac{\partial}{\partial x} (\alpha f + \beta g) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial g}{\partial x}. \quad \frac{\partial}{\partial y} (\alpha f + \beta g) = \alpha \frac{\partial f}{\partial y} + \beta \frac{\partial g}{\partial y}.$
- $\frac{\partial}{\partial x} (fg) = \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x}. \quad \frac{\partial}{\partial y} (fg) = \frac{\partial f}{\partial y} g + f \frac{\partial g}{\partial y}.$
- $\frac{\partial}{\partial x} F(f, g) = \frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial x}. \quad \frac{\partial}{\partial y} F(f, g) = \frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial y}.$

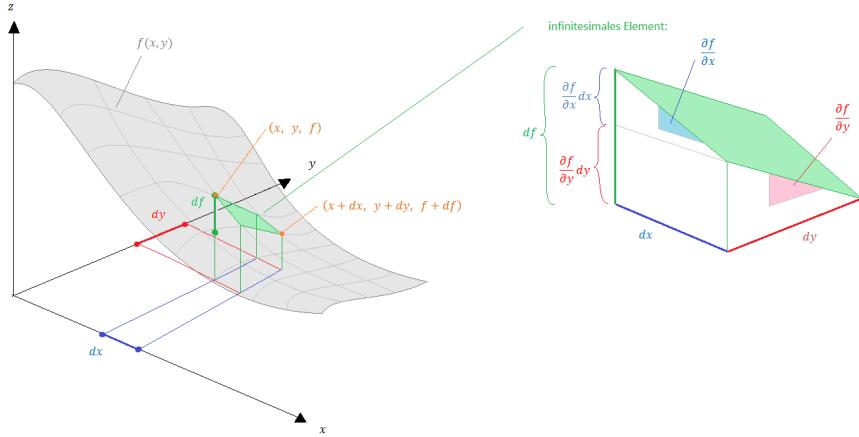
### 8.3.2 Totales Differential / Vollständiges Differential

$$\text{Sei } f = f(x_1, \dots, x_n, t). \quad df := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt \quad \frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Spezialfall:  $n = 1 \implies f = f(x) \implies df = f'(x) dx$ .

Tangentialebene an den Graphen einer Funktion  $f(x, y)$  im Punkt  $(x_0, y_0)$ :

$$z = f(x_0, y_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) (x - x_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) (y - y_0).$$



## 8.4 Skalare Felder und Vektorfelder

Beispiele für skalare Felder: Temperatur, Dichte, Druck, elektrisches Potential.

Beispiele für Vektorfelder: Strömungsgeschwindigkeit, Magnetfeld.

Darstellung von skalaren Feldern: Höhenlinien = Äquipotentiallinien.

Darstellung von Vektorfeldern: Feldlinien, Äquipotentiallinien (falls Gradientenfeld).

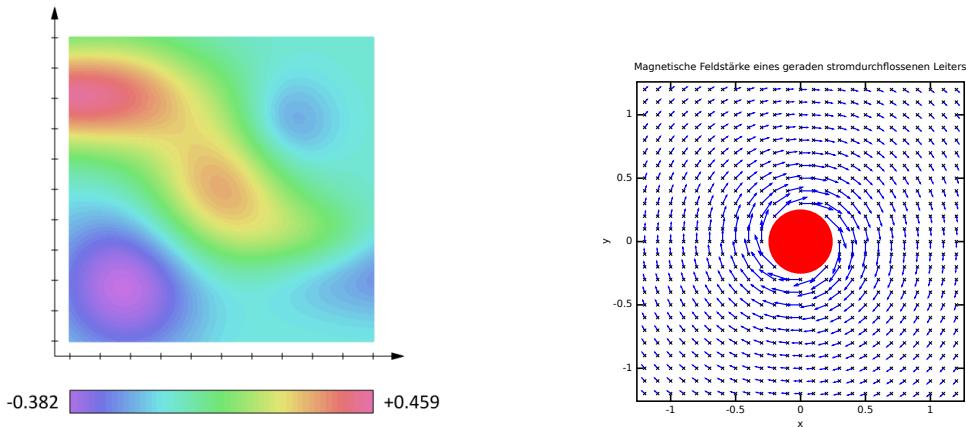


Abbildung: Skalarfeld (links) und Vektorfeld (rechts).

### 8.4.1 Gradient

Sei  $f = f(\vec{r})$  ein differenzierbares skalares Feld.

$$\text{grad } f(\vec{r}) := \nabla f(\vec{r}) := \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

$\nabla := \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$  nennt man Nabla-Operator.

In Kurzschriftweise:  $\nabla f(\vec{r}) := \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix} = \vec{e}_1 \partial_1 f + \vec{e}_2 \partial_2 f + \vec{e}_3 \partial_3 f = \sum_i \vec{e}_i \partial_i f = \vec{e}_i \partial_i f$   
(Summenkonvention beim letzten Schritt).

Zusammenhang mit totalem Differential:  $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \nabla f \cdot d\vec{r}$ .

Der Gradient eines skalaren Feldes steht immer senkrecht auf dessen Äquipotentiallinien oder -flächen und zeigt stets in Richtung des stärksten Anstieges.

Beispiele:

$$\text{i) } \nabla r: \quad \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{r} \implies \boxed{\nabla r = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r}$$

$$\text{ii) } \nabla \frac{1}{r}: \quad \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2} r^{-3} 2x = -\frac{x}{r^3} \implies \boxed{\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{e}_r}{r^2}} \quad \square$$

Rechenregeln:

- $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$ .
- $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$ .
- $\nabla f(g(\vec{r})) = \frac{df}{dg} \nabla g(\vec{r})$
- Für radiales Feld  $f = f(r)$  statt  $f = f(\vec{r})$  folgt:  $\nabla f(r) = f'(r) \vec{e}_r$ .

#### 8.4.2 Divergenz

Sei  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} F_x(\vec{r}) \\ F_y(\vec{r}) \\ F_z(\vec{r}) \end{pmatrix}$  ein differenzierbares Vektorfeld.

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) := \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

In Kurzschriftweise:  $\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3 = \sum_i \partial_i F_i = \partial_i F_i$ .

Rechenregel:  $\nabla \cdot (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) = \alpha \nabla \cdot \vec{F} + \beta \nabla \cdot \vec{G}$ .

Beispiele:

i)  $\vec{F}_1(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{F}_1 = 2, \quad \vec{F}_2(x, y) := \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{F}_2 = 0. \square$

Deutung der Divergenz: Quellendichte:

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = \lim_{|V| \rightarrow 0} \left( \frac{1}{|V|} \oint_{\partial V} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} \right).$$

Ist  $\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) > 0$ , so spricht man von einer Quelle. Ist  $\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) < 0$ , so spricht man von einer Senke. Vektorfelder mit  $\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = 0$  nennt man quellenfrei.

### 8.4.3 Laplace-Operator

Sei  $f = f(\vec{r})$  ein zweimal differenzierbares skalares Feld.

Der Gradient von  $f$  ist ein Vektorfeld  $\nabla f(\vec{r}) =: \vec{F}(\vec{r})$ .

Bilden wir nun die Divergenz dieses Vektorfeldes:  $\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = \operatorname{div} \operatorname{grad} f(\vec{r}) = \nabla \cdot (\nabla f)$ .

$$\Delta := \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{nennt man Laplace-Operator.}$$

$$\text{Also: } \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f(\vec{r}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

$$\text{In Kurzschriftweise: } \Delta f(\vec{r}) = \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \partial_3^2 f = \sum_i \partial_i^2 f = \partial_i \partial_i f.$$

$$\text{Rechenregel: } \Delta(\alpha f + \beta g) = \alpha \Delta f + \beta \Delta g.$$

Der Laplace-Operator kann auch auf Vektorfelder angewandt werden:

$$\Delta \vec{F} := \begin{pmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{pmatrix}.$$

### 8.4.4 Rotation

Sei  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$  ein differenzierbares Vektorfeld.

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) := \nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j F_k = \epsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j F_k. \quad (\text{Summenkonvention})$$

Rechenregel:  $\nabla \times (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) = \alpha \nabla \times \vec{F} + \beta \nabla \times \vec{G}$ .

Deutung der Rotation: Wirbel (Drehung eines “Korkens” im Feld):

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) = \lim_{|V| \rightarrow 0} \left( \frac{1}{|V|} \oint_{\partial V} d\vec{A} \times \vec{F}(\vec{r}) \right).$$

Vektorfelder mit  $\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) \neq 0$  nennt man Wirbelfelder, jene mit  $\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) = 0$  wirbelfrei.

Beispiel:  $\vec{F}(\vec{r}) := \vec{\omega} \times \vec{r}$  mit konstantem  $\vec{\omega} := \omega \vec{e}_z$ .

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) = \omega \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \omega \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{\omega}.$$

Man beachte:  $\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = 0$ .  $\square$

#### 8.4.5 Mehrfach-Anwendung des Nabla-Operators

Im Folgenden seien alle Skalar- sowie Vektorfelder hinreichend oft stetig differenzierbar.

Gradientenfelder sind wirbelfrei:  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f(\vec{r}) = \nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$ .

Wirbelfelder sind quellenfrei:  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ .

Weitere Beziehungen:

- $\nabla \cdot (f \vec{F}) = (\nabla f) \cdot \vec{F} + f (\nabla \cdot \vec{F})$ .
- $\nabla \times (f \vec{F}) = (\nabla f) \times \vec{F} + f (\nabla \times \vec{F})$ .
- $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$ .
- $\nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F} (\nabla \cdot \vec{G}) - \vec{G} (\nabla \cdot \vec{F}) + (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{G}$ .
- $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F}$ .

Dabei meint  $\vec{F} \cdot \nabla = F_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + F_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = F_i \partial_i$ .

## 8.5 Krummlinige Koordinatensysteme

### 8.5.1 Umkehrbarkeit von Funktionen

Eine stetig differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist in einer Umgebung von  $P$  umkehrbar, falls die Funktionaldeterminante (auch Jacobi-Determinante)  $\det(J_f(P)) \neq 0$ .

Dabei ist  $J_f := \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ .

### 8.5.2 Ebene Polarkoordinaten

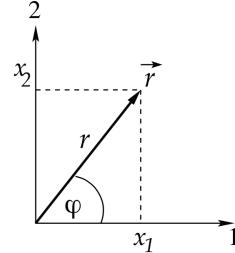
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

$$\det\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)}\right) = r.$$

Umkehrbar für  $r \neq 0$ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$



Einheitsvektoren:

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right|} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

$$\text{Wir sehen: } \boxed{\vec{r} = r\vec{e}_r} \implies \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \dot{\varphi} \\ \cos(\varphi) \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \dot{\varphi} \\ -\sin(\varphi) \dot{\varphi} \end{pmatrix} = -\dot{\varphi}\vec{e}_r.$$

$$\implies \boxed{\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi} \implies \ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi$$

$$\implies \boxed{\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi}$$

Für eine Kreisbewegung gilt:  $r = l = \text{const} \implies \vec{v} = l\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \quad \vec{a} = -l\dot{\varphi}^2\vec{e}_r + l\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ .

Den ersten Term nennt man Zentripetalbeschleunigung  $\vec{a}_{\text{zpt}} = -l\dot{\varphi}^2\vec{e}_r$ .

Den zweiten Term bezeichnet man als Bahnbeschleunigung  $\vec{a}_{\text{bahn}} = l\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ .

### 8.5.3 Zylinderkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos(\varphi) \\ \rho \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}.$$

Die Zylinderkoordinaten entstehen aus den ebenen Polarkoordinaten durch einfache Hinzunahme der  $z$ -Komponente.

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\rho \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \rho \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \det\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)}\right) = \rho.$$

Einheitsvektoren:  $\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

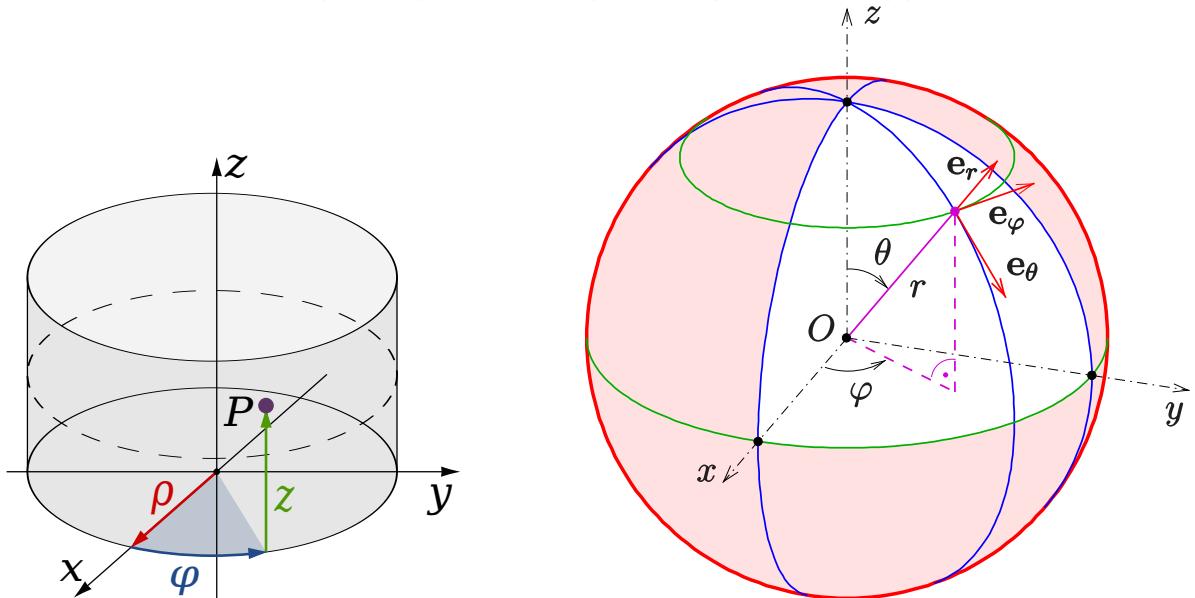


Abbildung: Zylinderkoordinaten (links) und Kugelkoordinaten (rechts).

### 8.5.4 Kugelkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Man findet (v.a. in der Geografie) auch die Konvention, dass der Winkel  $\vartheta$  vom Äquator aus gemessen wird. Bezeichnen wir diesen mit  $\vartheta'$ , so gilt:  $\vartheta' = \frac{\pi}{2} - \vartheta = 90^\circ - \vartheta$ .

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & -r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) & -r \sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)}\right) = r^2 \sin(\vartheta).$$

Einheitsvektoren:  $\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ .

### 8.5.5 Allgemeine krummlinige orthogonale Koordinaten

Koordinatentransformation:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w).$$

Seien  $x_1 := x$ ,  $x_2 := y$ ,  $x_3 := z$  und  $u_1 := u$ ,  $u_2 := v$ ,  $u_3 := w$ .

Wir definieren die metrischen Koeffizienten  $h_{u_i} := \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right|$ .

Daraus erhalten wir die Einheitsvektoren:  $\boxed{\vec{e}_{u_i} = \frac{1}{h_{u_i}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}}$

Vektordarstellung in den neuen Koordinaten:

$$\vec{F}(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 F_{x_i} \vec{e}_{x_i} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}. \quad \vec{F}(u, v, w) = \sum_{i=1}^3 F_{u_i} \vec{e}_{u_i}.$$

Zuerst führen wir die Transformation  $F_{x_i}(x, y, z) \rightarrow F_{x_i}(u, v, w)$  durch.

Dann müssen wir uns die Komponenten  $F_{u_i}$  berechnen:

$$\begin{aligned} F_{u_k} &= \vec{F} \cdot \vec{e}_{u_k} = \sum_{i=1}^3 F_{x_i} \vec{e}_{x_i} \cdot \vec{e}_{u_k} = \frac{1}{h_{u_k}} \sum_{i=1}^3 F_{x_i} \vec{e}_{x_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k} \\ &= \frac{1}{h_{u_k}} \sum_{i=1}^3 F_{x_i} \vec{e}_{x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial u_k} \sum_{j=1}^3 x_j \vec{e}_{x_j} = \frac{1}{h_{u_k}} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 F_{x_i} \vec{e}_{x_i} \cdot \vec{e}_{x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \\ &= \frac{1}{h_{u_k}} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 F_{x_i} \delta_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial u_k} = \frac{1}{h_{u_k}} \sum_{i=1}^3 F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{F_{u_k} = \frac{1}{h_{u_k}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k}}$

Beispiel:  $\vec{F}(x, y, z) := \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$  in Zylinderkoordinaten transformieren:

$$1) \text{ Einsetzen: } \vec{F}(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} -\rho \sin(\varphi) \\ \rho \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$2) \text{ Komponenten berechnen: } F_\rho = \frac{1}{h_\rho} (-\rho \sin(\varphi) \cos(\varphi) + \rho \cos(\varphi) \sin(\varphi)) = 0.$$

$$\text{und } F_\varphi = \frac{1}{h_\varphi} (-\rho \sin(\varphi) (-\rho \sin(\varphi)) + \rho \cos(\varphi) \rho \cos(\varphi)) = \frac{1}{\rho} \rho^2 = \rho.$$

$$\implies \vec{F}(\rho, \varphi, z) = \rho \vec{e}_\varphi. \square$$

## 8.6 Differentialoperatoren in krummlinigen orthogonalen Koordinaten

### 8.6.1 Gradient

$df = \nabla f \cdot d\vec{r}$  gilt in allen Koordinatensystemen.

$$\begin{aligned} df &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial u_i} du_i. \\ \nabla f \cdot d\vec{r} &= \left( \sum_{i=1}^3 (\nabla f)_{u_i} \vec{e}_{u_i} \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^3 h_{u_j} \vec{e}_{u_j} du_j \right) = \sum_{i=1}^3 (\nabla f)_{u_i} h_{u_i} du_i. \\ \implies (\nabla f)_{u_i} &= \frac{1}{h_{u_i}} \frac{\partial f}{\partial u_i} \implies \boxed{\nabla = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_{u_i}} \vec{e}_{u_i} \frac{\partial}{\partial u_i}} \end{aligned}$$

Beispiel: Ebene Polarkoordinaten:  $h_r = 1, h_\varphi = r \implies \nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$ .  $\square$

### 8.6.2 Divergenz

$$\nabla u_k = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_{u_i}} \vec{e}_{u_i} \frac{\partial u_k}{\partial u_i} = \frac{1}{h_{u_k}} \vec{e}_{u_k} \implies \vec{e}_{u_k} = h_{u_k} \nabla u_k.$$

Bilden die Einheitsvektoren ein Rechtssystem, so gilt:  $\vec{e}_u = \vec{e}_v \times \vec{e}_w = h_v h_w (\nabla v) \times (\nabla w)$ .

$$\nabla \cdot (F_u \vec{e}_u) = \nabla \cdot (h_v h_w F_u (\nabla v) \times (\nabla w))$$

$$= \nabla (h_v h_w F_u) \cdot ((\nabla v) \times (\nabla w)) + h_v h_w F_u (\nabla \cdot ((\nabla v) \times (\nabla w))),$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot ((\nabla v) \times (\nabla w)) &= (\nabla w) \cdot (\nabla \times (\nabla v)) - (\nabla v) \cdot (\nabla \times (\nabla w)) = 0, \\
&= \nabla (h_v h_w F_u) \cdot \left( \frac{1}{h_v h_w} \vec{e}_u \right) = \frac{1}{h_v h_w} \vec{e}_u \cdot \nabla (h_v h_w F_u) = \frac{1}{h_v h_w} \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w F_u). \\
\implies \boxed{\nabla \cdot \vec{F}} &= \frac{1}{h_u h_v h_w} \left( \frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w F_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w F_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v F_w) \right)
\end{aligned}$$

Bspiel: Ebene Polarkoordinaten:  $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (F_\varphi) \right)$ .  $\square$

### 8.6.3 Rotation

$$\nabla \times (F_u \vec{e}_u) = \nabla \times (h_u F_u \nabla u) = \nabla (h_u F_u) \times \nabla u + h_u F_u \nabla \times \nabla u$$

$$\begin{aligned} &= \nabla (h_u F_u) \times \left( \frac{1}{h_u} \vec{e}_u \right) = \left( \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_{u_i}} \vec{e}_{u_i} \frac{\partial}{\partial u_i} (h_u F_u) \right) \times \left( \frac{1}{h_u} \vec{e}_u \right) \\ &= \frac{1}{h_v h_u} \frac{\partial}{\partial v} (h_u F_u) \vec{e}_v \times \vec{e}_u + \frac{1}{h_w h_u} \frac{\partial}{\partial w} (h_u F_u) \vec{e}_w \times \vec{e}_u, \end{aligned}$$

$$\vec{e}_v \times \vec{e}_u = -\vec{e}_w, \vec{e}_w \times \vec{e}_u = \vec{e}_v,$$

$$= \frac{1}{h_u h_v h_w} h_v \frac{\partial}{\partial w} (h_u F_u) \vec{e}_v - \frac{1}{h_u h_v h_w} h_w \frac{\partial}{\partial v} (h_u F_u) \vec{e}_w.$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \vec{e}_u & h_v \vec{e}_v & h_w \vec{e}_w \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{vmatrix}}$$

Die Determinante wird von oben nach unten entwickelt.

Beispiel: Zylinderkoordinaten:  $u = \rho, v = \varphi, w = z, h_\rho = 1, h_\varphi = \rho, h_z = 1$ .

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{F} = \frac{1}{\rho} ((\partial_\varphi F_z - \partial_z (\rho F_\varphi)) \vec{e}_\rho + \rho (\partial_z F_\rho - \partial_\rho F_z) \vec{e}_\varphi + (\partial_\rho (\rho F_\varphi) - \partial_\varphi F_\rho) \vec{e}_z).$$

Da  $\rho$  und  $z$  unabhängige Koordinaten sind, gilt:  $\partial_z (\rho F_\varphi) = \rho \partial_z F_\varphi$ .

$$\nabla \times \vec{F} = \left( \frac{1}{\rho} \partial_\varphi F_z - \partial_z F_\varphi \right) \vec{e}_\rho + (\partial_z F_\rho - \partial_\rho F_z) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} (\partial_\rho (\rho F_\varphi) - \partial_\varphi F_\rho) \vec{e}_z. \quad \square$$

### 8.6.4 Laplace-Operator

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_{u_i}} \vec{e}_{u_i} \frac{\partial}{\partial u_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial}{\partial w} \right) \right)}$$

Beispiel: Zylinderkoordinaten:  $\Delta = \frac{1}{\rho} \left( \partial_\rho (\rho \partial_\rho) + \partial_\varphi \left( \frac{1}{\rho} \partial_\varphi \right) + \partial_z (\rho \partial_z) \right)$ .

Da  $\rho, \varphi$  und  $z$  unabhängige Koordinaten sind, vereinfacht sich  $\Delta$  zu

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2 + \partial_z^2. \quad \square$$

## 8.7 Kurvenintegral

Andere Bezeichnungen: Linienintegral, Wegintegral.

Sei  $\vec{k} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung einer Kurve  $C$  im  $\mathbb{R}^n$  und  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Das Kurvenintegral von  $f$  längs der Kurve  $C$  wird dann definiert als

$$\int_C f ds := \int_a^b f(\vec{k}(t)) \|\dot{\vec{k}}(t)\| dt$$

Unter den gleichen Voraussetzungen, nur dass wir die skalare Funktion  $f$  durch eine vektorielle Funktion  $\vec{F} : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  ersetzen, definiert man das Kurvenintegral von  $\vec{F}$  entlang der Kurve  $C$  als

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} := \int_a^b \vec{F}(\vec{k}(t)) \cdot \dot{\vec{k}}(t) dt$$

Diese Kurvenintegrale sind von der gewählten Parameterdarstellung unabhängig.

Ist  $C$  eine geschlossene Kurve, also  $\vec{k}(a) = \vec{k}(b)$ , so schreibt man  $\oint_C f ds$  bzw.  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

Rechenregeln:

- $\int_C (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_C f ds + \beta \int_C g ds.$
- $\int_{C_1+C_2} f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds.$
- $\int_{-C} f ds = \int_C f ds.$
- $\int_C (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) \cdot d\vec{r} = \alpha \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \beta \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}.$
- $\int_{C_1+C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$
- $\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$

Beispiel:  $\vec{F} := \begin{pmatrix} 3x^2 + 2y \\ -9xy \\ 8xz^2 \end{pmatrix}$ .

$C_1 :=$  Gerade von Punkt  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  zum Punkt  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$\vec{k} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \implies \dot{\vec{k}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$C_2 := \text{Polygonzug } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{k}_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{\gamma}_1(t) := \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \dot{\vec{k}}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{k}_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{\gamma}_2(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \implies \dot{\vec{k}}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{k}_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{\gamma}_3(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \implies \dot{\vec{k}}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 3t^2 + 2t \\ -9t^2 \\ 8t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (8t^3 - 6t^2 + 2t) dt = 1.$$

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left[ \begin{pmatrix} 3t^2 \\ * \\ * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * \\ -9t \\ * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * \\ * \\ 8t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] dt = -\frac{5}{6}. \square$$

Im Allgemeinen hängt das Kurvenintegral von der Form der Kurve ab.

### 8.7.1 Wegunabhängigkeit

Ein Vektorfeld  $\vec{F}$  nennt man wegunabhängig oder konservativ, falls für zwei beliebige Kurven  $C_1, C_2$  mit demselben Anfangs- bzw. Endpunkt gilt:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn für beliebige geschlossene Kurven  $C$  gilt:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Sei  $\vec{F} = \text{grad } \phi$  ein Gradientenfeld mit der skalaren Stammfunktion  $\phi$ . Die Funktion  $-\phi$  nennt man das Potential zu  $\vec{F}$ .

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \begin{pmatrix} \partial_x \phi \\ \partial_y \phi \\ \partial_z \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \int_C \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i = \int_C d\phi = \phi(\vec{r}_b) - \phi(\vec{r}_a).$$

Also gilt: Falls  $\vec{F}$  ein Gradientenfeld ist, so ist  $\vec{F}$  konservativ.

Darüber hinaus gilt folgendes sehr handliches Kriterium für die Wegunabhängigkeit von Vektorfeldern:

$\vec{F}$ ist konservativ $\iff$ $\vec{F}$ ist ein Gradientenfeld $\iff$ $\vec{F}$ ist rotationsfrei
--

## 8.8 Integration über mehrdimensionale Bereiche

Sei  $f(x, y)$  eine skalare Funktion zweier Variablen. Integrieren wir über  $y$ , so bleibt eine Funktion in der Variable  $x$ :

$$I(x) = \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y) dy.$$

Integrieren wir nun über  $x$ , so erhalten wir:

$$J = \int_a^b I(x) dx = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y) dy dx.$$

Sind  $p(x) = c$  und  $q(x) = d$  konstante Funktionen, so kann man die Integrationsreihenfolge vertauschen:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y)^2 dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 + 2xy + y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[ x^2y + xy^2 + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{1-x} dx = \int_0^1 \left( x^2(1-x) + x(1-x)^2 + \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( x^2 - x^3 + x - 2x^2 + x^3 + \frac{1}{3} - x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x^3) dx = \frac{1}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx. \quad I^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Womöglich könnten da Polarkoordinaten weiterhelfen.  $\square$

### 8.8.1 Koordinatentransformation

In kartesischen Koordinaten sind die infinitesimalen Flächenstücke Rechtecke mit dem Flächeninhalt  $dxdy$ . Eine Transformation verändert die Form der Flächenstücke. Die Verzerrung des Flächenelementes wird durch die Funktionaldeterminante  $\det(J)$  beschrieben. Dies kann auch auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden.

$$\boxed{dxdy \longrightarrow |\det(J)| du dv = \left| \det \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{pmatrix} \right| du dv = h_u h_v du dv}$$

Beispiel:  $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} r^2 r d\varphi dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{8}$ .  $\square$

#### Ebene Polarkoordinaten

$$\det \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right) = r \implies dx dy \longrightarrow r dr d\varphi.$$

Nun können wir  $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$  berechnen:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = 2\pi \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right] \Big|_{r=0}^{\infty} \\ &= \pi(-0 + e^0) = \pi \implies I = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

#### Zylinderkoordinaten

$$\det \left( \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} \right) = \rho \implies dx dy dz \longrightarrow \rho d\rho d\varphi dz.$$

#### Kugelkoordinaten

$$\det \left( \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} \right) = r^2 \sin(\vartheta) \implies dx dy dz \longrightarrow r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi.$$

Statt  $\int_0^{\pi} \dots \sin(\vartheta) d\vartheta$  kann man auch  $\int_{-1}^1 \dots d(\cos(\vartheta))$  schreiben.

Beispiel: Ein Planet mit dem Radius  $R$  habe eine Atmosphäre der Dichte  $\rho(r) := \rho_0 e^{-r}$ . Wie groß ist die Masse der gesamten Atmosphäre?

$$M = \int \rho(\vec{r}) d^3r = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_R^{\infty} \rho(r) r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi = 4\pi \rho_0 \int_R^{\infty} e^{-r} r^2 dr$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi\rho_0 \left( [-e^{-r}r^2] \Big|_{r=R}^\infty + \int_R^\infty e^{-r}2rdr \right) \\
&= 4\pi\rho_0 \left( e^{-R}R^2 + [-e^{-r}2r] \Big|_{r=R}^\infty + \int_R^\infty e^{-r}2dr \right) \\
&= 4\pi\rho_0 (e^{-R}R^2 + e^{-R}2R + [-e^{-r}2] \Big|_{r=R}^\infty) \\
&= 4\pi\rho_0 e^{-R} (R^2 + 2R + 2). \square
\end{aligned}$$

### 8.8.2 Oberflächenintegrale

Wir betrachten eine orientierbare Fläche  $S$  mit der Parametrisierung  $\vec{k} = \vec{k}(u, v)$  im  $\mathbb{R}^3$  mit dem Flächeninhalt  $A$ . Wir teilen diese in infinitesimale Flächenelemente  $dA$ . Dabei soll  $\int_S dA = A$  gelten.

Auf jedem  $dA$  wird ein orthogonaler Einheitsvektor  $\vec{n}$  errichtet:  $\vec{n} := \frac{\partial_u \vec{k} \times \partial_v \vec{k}}{|\partial_u \vec{k} \times \partial_v \vec{k}|}$ .

Die Fläche  $dA$  ist dann gleich der Fläche des von  $du \frac{\partial \vec{k}}{\partial u}$  und  $dv \frac{\partial \vec{k}}{\partial v}$  aufgespannten Parallelogramms:

$$dA = \left| \left( du \frac{\partial \vec{k}}{\partial u} \right) \times \left( dv \frac{\partial \vec{k}}{\partial v} \right) \right| = \left| \partial_u \vec{k} \times \partial_v \vec{k} \right| du dv.$$

Nun definieren wir das vektorielle Flächenelement:

$$d\vec{A} := dA \vec{n} = \left( \partial_u \vec{k} \times \partial_v \vec{k} \right) du dv.$$

Für geschlossene Flächen ist es Konvention, dass  $d\vec{A}$  nach außen zeigt.

Sei  $\vec{F}(\vec{r})$  ein Vektorfeld und  $S$  eine Fläche, dann wird das Integral

$$\boxed{\int_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} := \iint \vec{F}(\vec{k}) \cdot (\partial_u \vec{k} \times \partial_v \vec{k}) du dv}$$

als Fluss von  $\vec{F}$  durch  $S$  bezeichnet. Das Skalarprodukt bewirkt, dass nur der auf  $S$  senkrechte Teil von  $\vec{F}$  zum Fluss beiträgt.

Beispiel: Wir betrachten eine Kugelfläche  $K_R$  mit dem Radius  $R$  um den Ursprung. Die Parametrisierung lautet:

$$\vec{k} : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{k}(\vartheta, \varphi) := R \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir das Flächenelement:

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= R \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \times R \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} d\vartheta d\varphi \\ &= R^2 \begin{pmatrix} \sin^2(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin^2(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) \end{pmatrix} d\vartheta d\varphi = R^2 \sin(\vartheta) \vec{e}_r d\vartheta d\varphi. \end{aligned}$$

Mit dem Raumwinkelelement  $d\Omega := \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi$  wird dies zu:

$$d\vec{A} = R^2 d\Omega \vec{e}_r.$$

Berechnen wir nun den Fluss eines Radialfeldes  $\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \vec{e}_r$  durch  $K_R$ :

$$\int_{K_R} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \int f(R) R^2 d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(R) R^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = 4\pi R^2 f(R). \square$$

## 8.9 Integralsätze

### 8.9.1 Der Gaußsche Integralsatz

Sei  $\vec{F}(\vec{r})$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld und  $S$  eine geschlossene Fläche, die ein Volumen  $V$  umschließt, d.h.  $S = \partial V$ , dann gilt:

$$\boxed{\int_V \operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) d^3 r = \int_{\partial V} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}}$$

In Worten: Der Nettofluss durch eine geschlossene Fläche ist gleich der Gesamtheit aller darin befindlichen Quellen und Senken.

Beispiel:  $\vec{F}(\vec{r}) := \vec{r}$ ,  $V := K_R$  sei eine Kugel mit dem Radius  $R$  um den Ursprung.

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_R} \vec{r} \cdot d\vec{A} &= 4\pi R^3 \text{ (siehe vorige Seite).} \\ \int_{K_R} \operatorname{div} \vec{r} d^3 r &= \int_{K_R} 3 d^3 r = 3 \int_{K_R} d^3 r = 3 \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^3. \square \end{aligned}$$

### 8.9.2 Integralsätze von Green

Wir setzen  $\vec{F} := \psi \nabla \phi$  mit den Skalarfeldern  $\psi(\vec{r})$  und  $\phi(\vec{r})$  in den Gaußschen Integralsatz ein:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = \nabla \psi \cdot \nabla \phi + \psi \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla \psi \cdot \nabla \phi + \psi \Delta \phi, \text{ woraus folgt:}$$

$$\int_V (\psi \Delta \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) d^3r = \int_{\partial V} (\psi \nabla \phi) \cdot d\vec{A}$$

Vertauschen wir  $\psi$  und  $\phi$  und subtrahieren, so erhalten wir:

$$\int_V (\psi \Delta \phi - \phi \Delta \psi) d^3r = \int_{\partial V} (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) \cdot d\vec{A}$$

Setzen wir  $\psi := 1$ , ergibt sich:

$$\int_V (\Delta \phi) d^3r = \int_{\partial V} (\nabla \phi) \cdot d\vec{A}$$

Beispiel:  $\phi := \frac{q}{r}$  (Coulomb-Potential).  $\nabla \phi = q \nabla \frac{1}{r} = -q \frac{\vec{e}_r}{r^2}$ .  $V := K_R$ .

$$\int_{K_R} (\Delta \phi) d^3r = \int_{\partial K_R} (\nabla \phi) \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( -q \frac{\vec{e}_r}{R^2} \right) \cdot (R^2 \sin(\vartheta) \vec{e}_r d\vartheta d\varphi) = -4\pi q. \square$$

### 8.9.3 Integralsatz von Stokes

Sei  $\vec{F}(\vec{r})$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld und  $S$  eine orientierbare Fläche mit dem Rand  $C = \partial S$ , dann gilt:

$$\int_S \text{rot} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial S} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Dabei ist zu beachten, dass der Umlaufsinn von  $\partial S$  so gewählt wird, dass er mit der Flächennormale  $d\vec{A}$  eine Rechtsschraube bildet.

Beispiel:  $\vec{F}(\vec{r}) := (3y \quad -xz \quad yz^2) \implies \text{rot} \vec{F}(\vec{r}) = (x+z^2 \quad 0 \quad -3-z)$ .

Wir parametrisieren  $S := \left\{ (x \quad y \quad z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), z \leq 2 \right\}$  so:

$$\vec{k}(\rho, \varphi) := \rho \vec{e}_\rho + \frac{\rho^2}{2} \vec{e}_z, \quad \rho \in [0, 2], \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad (\text{Zylinderkoordinaten}, \quad \vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho(\varphi)).$$

Als vektorielles Flächenelement erhalten wir:

$$d\vec{A} = \left( \partial_\rho \vec{k} \times \partial_\varphi \vec{k} \right) d\rho d\varphi = ((\vec{e}_\rho + \rho \vec{e}_z) \times (\rho \vec{e}_\varphi)) d\rho d\varphi = (\rho \vec{e}_z - \rho^2 \vec{e}_\rho) d\rho d\varphi.$$

Wir merken uns:  $d\vec{A}$  zeigt in die “Schüssel”  $S$  hinein.

$$\begin{aligned}
\int_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \begin{pmatrix} \rho \cos(\varphi) + \frac{\rho^4}{4} \\ 0 \\ -3 - \frac{\rho^2}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\rho^2 \cos(\varphi) \\ -\rho^2 \sin(\varphi) \\ \rho \end{pmatrix} d\rho d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left( -\rho^3 \cos^2(\varphi) - \frac{\rho^6}{4} \cos(\varphi) - 3\rho - \frac{\rho^3}{2} \right) d\rho d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left( -4 \cos^2(\varphi) - \frac{32}{7} \cos(\varphi) - 6 - 2 \right) d\varphi = -20\pi.
\end{aligned}$$

Den Rand  $\partial S$  parametrisieren wir nun so, dass er richtig orientiert ist:

$$\vec{k}(\varphi) := 2\vec{e}_\rho + 2\vec{e}_z, \varphi \in [0, 2\pi]. \quad \frac{d\vec{k}}{d\varphi}(\varphi) = 2\vec{e}_\varphi.$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 \sin(\varphi) \\ -2 \cos(\varphi) \cdot 2 \\ 2 \sin(\varphi) \cdot 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin(\varphi) \\ 2 \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} (-12 \sin^2(\varphi) - 8 \cos^2(\varphi)) d\varphi = -20\pi. \quad \square
\end{aligned}$$

## 8.10 Lösung der Poissongleichung

Sei  $f(\vec{r})$  ein gegebenes Skalarfeld, dann lautet die allgemeine Poissongleichung

$$\boxed{\Delta \Phi(\vec{r}) = f(\vec{r})}$$

mit dem gesuchten skalaren Feld  $\Phi(\vec{r})$ .

Beispiel: Elektrodynamik:  $\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \nabla \Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \implies \Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ .  $\square$

Sei  $f(\vec{r})$  beschränkt. Wir verwenden den zweiten Integralsatz von Green mit den Funktionen  $\psi = \frac{1}{r}$  und  $\phi = \Phi$ :

$$\int_V \left( \frac{1}{r} \Delta \Phi - \Phi \Delta \frac{1}{r} \right) d^3 r = \int_{\partial V} \left( \frac{1}{r} \nabla \Phi - \Phi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot d\vec{A}.$$

Um  $\Delta r^{-1}$  zu berechnen, wählen wir Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{h_r h_\vartheta h_\varphi} \left( \partial_r \left( \frac{h_\vartheta h_\varphi}{h_r} \partial_r \right) + \partial_\vartheta \left( \frac{h_r h_\varphi}{h_\vartheta} \partial_\vartheta \right) + \partial_\varphi \left( \frac{h_r h_\vartheta}{h_\varphi} \partial_\varphi \right) \right) \\
&= \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \left( \partial_r (r^2 \sin(\vartheta) \partial_r) + \partial_\vartheta (\sin(\vartheta) \partial_\vartheta) + \partial_\varphi \left( \frac{1}{\sin(\vartheta)} \partial_\varphi \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \left( \sin(\vartheta) (2r\partial_r + r^2\partial_r^2) + \cos(\vartheta) \partial_\vartheta + \sin(\vartheta) \partial_\vartheta^2 + \frac{1}{\sin(\vartheta)} \partial_\varphi^2 \right) \\
&= \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\vartheta^2 + \frac{\cot(\vartheta)}{r^2} \partial_\vartheta + \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \partial_\varphi^2.
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir:

$$\Delta \frac{1}{r} = \partial_r^2 \frac{1}{r} + \frac{2}{r} \partial_r \frac{1}{r} = -\partial_r \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{1}{r^2} = \frac{2}{r^3} - \frac{2}{r^3} = 0.$$

Achtung: Hier ist der Punkt  $\vec{r} = \vec{0}$  ausgenommen! Wir nehmen also  $U_\varepsilon(\vec{0}) =: U_\varepsilon$  mit  $\varepsilon > 0$  aus dem Integrationsgebiet heraus. Sei  $\tilde{V} := V \setminus U_\varepsilon$ , dann gilt:

$$\int_{\tilde{V}} \left( \frac{1}{r} \Delta \Phi \right) d^3r = \int_{\partial \tilde{V}} \left( \frac{1}{r} \nabla \Phi - \Phi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot d\vec{A}.$$

Wir definieren die Richtungsableitung differenzierbarer Skalarfelder  $f(\vec{r})$  in Richtung  $\vec{n}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} := \nabla f \cdot \vec{n}$$

Damit können wir nun vereinfacht schreiben:

$$\int_{\tilde{V}} \left( \frac{1}{r} \Delta \Phi \right) d^3 r = \int_{\partial \tilde{V}} \left( \frac{1}{r} \nabla \Phi - \Phi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n} dA = \int_{\partial \tilde{V}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \Phi - \Phi \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \frac{1}{r} \right) dA$$

$$\iff \int_V \left( \frac{1}{r} \Delta \Phi \right) d^3 r - I_\varepsilon = \int_{\partial V} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \Phi - \Phi \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \frac{1}{r} \right) dA + J_\varepsilon$$

$$\text{mit } I_\varepsilon := \int_{U_\varepsilon} \left( \frac{1}{r} \Delta \Phi \right) d^3 r \text{ und } J_\varepsilon := \int_{\partial U_\varepsilon} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \Phi - \Phi \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \frac{1}{r} \right) dA.$$

Was passiert mit  $I_\varepsilon$  und  $J_\varepsilon$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ ?

Betrachten wir zunächst  $I_\varepsilon$ :

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\varepsilon \frac{1}{r} \Delta \Phi r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\varepsilon \Delta \Phi r \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi.$$

Da wir  $f(\vec{r}) = \Delta \Phi(\vec{r})$  als beschränkt vorausgesetzt haben, können wir für  $|\Delta \Phi(\vec{r})|$  innerhalb von  $U_\varepsilon$  eine obere Schranke  $M$  angeben, so dass:

$$|I_\varepsilon| \leq M \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\varepsilon r \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi = 2\pi M \varepsilon^2.$$

Daraus erhalten wir:  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = 0$ .

In  $J_\varepsilon$  ist  $\vec{n} = -\vec{e}_r$ , da nach Konvention die Flächennormale nach außen (ins Äußere von  $\tilde{V}$ ) zeigt. Daher ist  $\partial_{\vec{n}} = -\partial_r$ . Des Weiteren ist in Kugelkoordinaten  $r = \varepsilon$ . Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_{\partial U_\varepsilon} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Phi + \Phi \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) dA = \int_{\partial U_\varepsilon} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Phi - \Phi \frac{1}{r^2} \right) dA \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\Phi}{\varepsilon^2} \right) \varepsilon^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \Phi \right) \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi. \end{aligned}$$

Im Grenzfall  $\varepsilon \rightarrow 0$  verschwindet der erste Summand im Integrand.

Von  $\Phi$  verlangen wir Stetigkeit im gesamten Gebiet, denn dann hat  $\Phi(\vec{r})$  auch bei  $\vec{r} = \vec{0}$  einen wohldefinierten Wert  $\Phi_0 = \Phi(\vec{0})$ . Daraus erhalten wir:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon = - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(\vec{r}) \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = -\Phi_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = -4\pi \Phi_0.$$

Setzen wir diese Ausdrücke ein, so erhalten wir:

$$\int_V \left( \frac{1}{r} \Delta \Phi \right) d^3 r = \int_{\partial V} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \Phi - \Phi \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \frac{1}{r} \right) dA - 4\pi \Phi_0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Phi_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_V \left( \frac{f}{r} \right) d^3 r + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} - \Phi \frac{\partial r^{-1}}{\partial \vec{n}} \right) dA}$$

Diese Integralgleichung liefert den Wert von  $\Phi(\vec{r})$  an der Stelle  $\vec{r} = \vec{0}$ . Da jedoch der Koordinatenursprung frei wählbar ist, erhält man den Wert von  $\Phi(\vec{r}_0)$  an jedem beliebigen Punkt  $\vec{r}_0$  in  $V$ .

Wir betrachten noch den Spezialfall  $V \rightarrow \mathbb{R}^3$ : Falls sich  $\Phi$  für große  $r$  wie  $r^{-1}$  verhält oder noch schneller fällt, verschwindet das Oberflächenintegral und es bleibt:

$$\Phi_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\vec{r})}{r} d^3 r = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\vec{r}')}{r'} d^3 r'.$$

Setzen wir den Ursprung in den Punkt  $\vec{r}$ , dann erhalten wir die spezielle Lösung der Poissons-Gleichung:

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'}$$

## 8.11 Fundamentalsatz der Vektoranalysis

Der Fundamentalsatz der Vektoranalysis, auch Helmholtzscher Zerlegungssatz genannt, besagt, dass sich jedes Vektorfeld in eine Summe aus einem Gradientenfeld (Quellenfeld) und einem Wirbelfeld zerlegen lässt:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = \nabla \phi(\vec{r}) + \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \text{grad} \phi(\vec{r}) + \text{rot} \vec{A}(\vec{r})}$$

Falls  $\vec{F}(\vec{r})$  zweimal stetig differenzierbar ist und im Unendlichen hinreichend rasch verschwindet, so kann man die Felder  $\phi(\vec{r})$  und  $\vec{A}(\vec{r})$  nach folgenden Formeln berechnen:

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'.$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'.$$

## 9 Funktionenräume

**Funktionenraum:** Vektorraum dessen Elemente Funktionen sind. Dimension: (abzählbar oder überabzählbar) unendlich.

**Vektorraum** über einem Körper  $K$  mit Dimension  $n$ : Menge von Elementen  $X$ , für die eine Addition definiert ist. Die Elemente können mit Zahlen aus dem Körper  $K$  multipliziert werden. Siehe auch die präzise Definition des Vektorraums.

**Körper:** Menge für deren Elemente zwei Operationen (Addition und Multiplikation) definiert wurden, sowie ein Eins-Element bzgl. der Multiplikation und für alle Elemente (ausser dem Null-Element) ein inverses Element.

### 9.1 Skalarprodukt von Funktionen

In Analogie zum Skalarprodukt für Vektoren

$\vec{f} \cdot \vec{g} = \langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = \sum_i f_i g_i \quad \text{für } \vec{f}, \vec{g} \in \mathbb{R} \quad \text{bzw. } \langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = \sum_i \bar{f}_i g_i \quad \text{für } \vec{f}, \vec{g} \in \mathbb{C}$   
 $(\bar{f}$  komplex konjugiertes von  $f$ ), wollen wir ein Skalarprodukt für quadratisch integrierbare Funktionen (s.u.) einführen. Dabei wird aus der Summe wie üblich ein Integral:

$$\langle f, g \rangle := \int_X \bar{f}(x) g(x) dx \quad \text{für } X \subseteq \mathbb{R}.$$

Der Funktionenraum der auf  $X \subset \mathbb{R}$  **quadratintegrablen** (quadratisch integrierbaren) Funktionen  $L^2(X)$ , enthält alle Funktionen, deren Norm beschränkt ist, d.h.

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int dx |f(x)|^2} < \infty,$$

dieser Raum heißt **Hilbertraum** und hat in der Quantenmechanik eine besondere Bedeutung.

Man nennt zwei Funktionen  $f$  und  $g$  **orthogonal** genau dann wenn  $\langle f, g \rangle = 0$ .

Jedes Skalarprodukt induziert eine Norm:  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_X |f(x)|^2 dx}$ .

Beispiel: Die Funktionen  $\sin(nx)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  sind orthogonal, wenn  $X = [-\pi, \pi]$ , denn:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx &= \left[ -\frac{\cos(nx)}{n} \sin(mx) \right]_{x=-\pi}^{\pi} + \frac{m}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx \\
&= 0 + \frac{m}{n} \left( \left[ \frac{\sin(nx)}{n} \cos(mx) \right]_{x=-\pi}^{\pi} + \frac{m}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx \right) \\
&= \frac{m^2}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx. \\
\implies \langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle \left( 1 - \frac{m^2}{n^2} \right) &= 0 \iff \langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = 0 \vee n = m. \\
\langle \sin(nx), \sin(nx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx &= \pi \implies \langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = \delta_{nm}\pi. \square
\end{aligned}$$

Orthogonale Funktionen sind auch linear unabhängig.

Beweis: Seien  $f_i \neq 0$  orthogonale Funktionen, d.h.  $\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij} \langle f_i, f_j \rangle$ .

$$\begin{aligned}
\sum_i \alpha_i f_i = 0 \implies \left\langle \sum_i \alpha_i f_i, f_k \right\rangle &= \sum_i \alpha_i \langle f_i, f_k \rangle = \alpha_k \langle f_k, f_k \rangle = \langle 0, f_k \rangle = 0. \\
\langle f_k, f_k \rangle = \|f_k\|^2 > 0 \implies \alpha_k &= 0. \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Mithilfe der Gram-Schmidt-Orthonormalisierung kann man aus jeder Liste linear unabhängiger Funktionen ein Orthonormalsystem konstruieren.

Beispiel: Gegeben seien die linear unabhängigen reellwertigen Funktionen 1,  $x$  und  $x^2$  und das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx.$$

Gesucht ist eine Orthonormalbasis  $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x))$  des Raumes  $L(1, x, x^2)$ .

$$\tilde{\varphi}_1 = 1 \implies \|\tilde{\varphi}_1\| = \sqrt{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 1^2 dx} = 1 \implies \varphi_1(x) = \frac{\tilde{\varphi}_1}{\|\tilde{\varphi}_1\|} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\tilde{\varphi}_2 = x - \langle x, \varphi_1 \rangle \varphi_1 = x - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x dx = x.$$

$$\|\tilde{\varphi}_2\| = \sqrt{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \varphi_2(x) = \frac{\tilde{\varphi}_2}{\|\tilde{\varphi}_2\|} = \sqrt{3}x.$$

$$\tilde{\varphi}_3 = x^2 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{3}x^3 dx = x^2 - \frac{1}{3}.$$

$$\|\tilde{\varphi}_3\| = \sqrt{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx} = \sqrt{\frac{4}{45}} \implies \varphi_3(x) = \frac{3\sqrt{5}}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right). \square$$

Beispiel: Wir suchen eine Orthonormalbasis für  $L(\{\sin(nx) : n \in \mathbb{N}\})$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) g(x) dx.$$

$$\langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = \delta_{nm}\pi \implies \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) : n \in \mathbb{N} \right\} \text{ ist eine ON-Basis. } \square$$

$$V = L^2(a, b): \langle f, g \rangle := \int_a^b dx f^*(x) g(x).$$

$$\langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle = \int_0^{2\pi} dx \sin(mx) \sin(nx) = \pi \delta_{mn}.$$

## 9.2 Lineare Unabhängigkeit von Funktionen

Sei  $V$  der Vektorraum aller Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wir nennen eine Liste von Funktionen  $(f_1, \dots, f_n)$  aus  $V$  linear unabhängig, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i = 0 \implies \forall i \in \{1, \dots, n\}: \alpha_i = 0.$$

Beispiel: Die zwei Funktionen  $e^t$  und  $e^{2t}$  sind linear unabhängig, denn:

$$\alpha e^t + \beta e^{2t} = 0 \stackrel{d/dt}{\implies} \alpha e^t + 2\beta e^{2t} = 0 \stackrel{=}{\implies} \beta e^{2t} = 0 \implies \beta = 0 \implies \alpha = 0. \square$$

### 9.2.1 Wronski-Determinante

Mit der Wronski-Determinante kann man skalare Funktionen auf *lineare Unabhängigkeit* testen, sofern sie hinreichend oft differenzierbar sind.

Für  $n$  reell- oder komplexwertige Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  auf einem Intervall  $I$  ist die Wronski-Determinante definiert durch:

$$W(f_1, \dots, f_n)(t) := \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \cdots & f_n(t) \\ f'_1(t) & f'_2(t) & \cdots & f'_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \quad \text{für } t \in I.$$

Gilt  $W(f_1, \dots, f_n)(t_0) \neq 0$  für ein  $t_0 \in I$ , so sind die Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  auf dem Intervall  $I$  linear unabhängig. Die Umkehrung gilt i.A. nicht.

Beispiel:  $\forall t \in \mathbb{R} : W(e^t, e^{2t})(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{vmatrix} = 2e^{3t} - e^{3t} = e^{3t} \neq 0$ .  $\square$

### 9.3 Die Delta-Distribution

Die Delta-Distribution  $\delta(x)$  wird oft auch als Delta-Funktion,  $\delta$ -Funktion oder Dirac-Funktion bezeichnet, obwohl es sich eben nicht um eine Funktion im eigentlichen Sinne handelt, sondern um eine besondere Art des **Funktional**s. Es handelt sich also um ein Objekt aus der Funktionalanalysis. Immer wenn wir also von der  $\delta$ -Funktion sprechen, sollten wir uns dessen bewußt sein. Die Delta-Distribution ist eine stetige lineare Abbildung von einem Funktionenraum der Testfunktionen  $\varepsilon$  in den zugrunde liegenden Körper  $\mathbb{K}$  mit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .  $\delta: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}, f \mapsto f(0)$ .

Der Testfunktionenraum für die Delta-Distribution ist der Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen  $C^\infty(\Omega)$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  oder  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ .

**Definition der Delta-”Funktion”  $\delta(x)$ :**

Die  $\delta$ -Funktion  $\delta(x - x_0)$  ist diejenige verallgemeinerte Funktion von  $x$ , die

1. Für alle  $x \neq x_0$  den Wert Null hat und
2. Zusammen mit stetigen Funktionen unter einem verallgemeinerten Integral wirkt wie  $\int_a^b \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$ , wenn  $x_0 \in (a, b)$ , sonst 0.

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & \text{wenn } x_0 \in (a, b) \\ 0, & \text{wenn } x_0 \notin (a, b) \end{cases}$$

Bemerkungen:

- Die  $\delta$ -Funktion lässt sich nur zusammen mit dem (verallgemeinerten) Integral über sie definieren.
- Die  $\delta$ -Funktion ordnet jeder beliebig oft differenzierbaren Funktion  $f(x)$  eine reelle oder komplexe Zahl zu:  $\delta(f) = f(0)$ .
- Aus obiger Definition folgt für  $f(x) = 1$ :

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x_0 \in (a, b) \\ 0, & \text{wenn } x_0 \notin (a, b) \end{cases} \quad \text{bzw. } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

## 9.4 Approximation der $\delta$ -Distribution durch Funktionen

Die  $\delta$ -Funktion lässt sich durch “glatte” Funktionen(-Folgen) approximieren, die für  $n \rightarrow \infty$  der  $\delta$ -Funktion immer näher kommen. Beispielsweise kann man sich die  $\delta$ -Funktion als eine Folge immer schmäler und entsprechend höher werdender Gaußfunktionen vorstellen (die Fläche bleibt konstant):

$$\delta_n(x) = ne^{-\pi n^2 x^2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Für  $n$  gegen unendlich realisiert  $\delta_n(x)$  die Eigenschaften der  $\delta$ -Funktion, nämlich  $\delta_n(x) \approx 0$  für  $x \gg \frac{1}{n\sqrt{\pi}}$  und  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} ne^{-\pi n^2 x^2} dx = n \frac{\sqrt{\pi}}{n\sqrt{\pi}} = 1$ .

Weitere Darstellungen der  $\delta$ -Funktion:

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{\epsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \left( \frac{\sin(nx)}{nx} \right)^n, \quad n \rightarrow \infty$$

Man kann auch Ableitungen der Delta-Funktion bestimmen. Nach  $n$ -facher partieller Integration erhält man:

$$\int_a^b f(x) \delta^{(n)}(x - x_0) dx = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(x_0) & x_0 \in (a, b) \\ 0 & x_0 \notin [a, b] \end{cases}.$$

Formeln für die Praxis:

$$1. \delta(g(x)) = 0, \text{ falls } g(x) \neq 0 \text{ für alle } x.$$

$$2. \int_I \delta(x - x_0) f(x) dx = \begin{cases} f(x_0), & x_0 \in I \\ 0, & x_0 \notin I \end{cases}.$$

$$3. \delta(x) = \delta(-x) \iff \delta\text{-Funktion ist gerade.}$$

$$4. \int_{-\infty}^x \delta(x') dx' = \Theta(x) \iff \frac{d}{dx} \Theta(x) = \delta(x) \quad \text{mit } \Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

$\Theta(x)$  heißt Heaviside-Funktion oder auch Stufenfunktion.

$$5. g(x) \delta(x) = g(0) \delta(x) \quad \text{bzw } g(x) \delta(x - x_0) = g(x_0) \delta(x - x_0).$$

$$6. x \delta(x) = 0.$$

$$7. \delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x).$$

$$8. \delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i) \quad \text{mit den Nullstellen } \{x_i\} = \{x : g(x) = 0\} \text{ und } g'(x_i) \neq 0.$$

$$9. f(x) \delta(x - y) = f(y) \delta(x - y).$$

$$10. \int_a^b dx f(x) \delta^{(n)}(x - x_0) \equiv \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(x_0), & a < x_0 < b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit der } n\text{-ten Ableitung der } \delta\text{-Funktion } \delta^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \delta(x).$$

Eine Anwendung der Delta-Funktion ist die Beschreibung punktförmiger Ladungs- oder Dichteveverteilungen. Dies führt uns dazu, die Delta-Funktion in mehreren Dimensionen zu definieren.

## 9.5 Delta-Funktion in mehreren Dimensionen

Die  $n$ -dimensionale Delta-Funktion lässt sich in kartesischen Koordinaten als Produkt von eindimensionalen Delta-Funktionen schreiben:

$$\delta(\vec{r} - \vec{a}) = \prod_{i=1}^n \delta(x_i - a_i).$$

Daraus ergibt sich die Relation:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{a}) d^n r = f(\vec{a}).$$

Führen wir eine Koordinatentransformation durch, so gilt:

$$d^n r = |\det(J(x_j, u_j))| d^n u = \left| \det \left( \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right) \right| d^n u.$$

Wir machen folgenden Ansatz:

$$\delta(\vec{r} - \vec{a}) = \gamma(u_1, \dots, u_n) \prod_{i=1}^n \delta(u_i - \tilde{a}_i), \text{ wobei } \vec{r} = \sum_{i=1}^n u_i \vec{e}_{u_i} \text{ und } \vec{a} = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i \vec{e}_{u_i}.$$

Das Integral von  $\delta(\vec{r} - \vec{a})$  über den gesamten Raum muss gleich 1 sein:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(\vec{r} - \vec{a}) d^n r = \int_V \gamma(u_j) \prod_{i=1}^n \delta(u_i - \tilde{a}_i) \left| \det \left( \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right) \right| d^n u \stackrel{!}{=} 1.$$

Wir wollen, dass (wie gewohnt) gilt:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \int_{I_i} f(u_i) \delta(u_i - \tilde{a}_i) du_i = f(\tilde{a}_i).$$

Daraus erhalten wir:

$$\gamma = \left( \left| \det \left( \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right) \right| \Big|_{\vec{r}=\vec{a}} \right)^{-1}.$$

Beispiel: Polarkoordinaten:  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r_0} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$ .

Zylinderkoordinaten:  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{\rho_0} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0)$ .

Kugelkoordinaten:  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r_0^2 \sin(\vartheta_0)} \delta(r - r_0) \delta(\vartheta - \vartheta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$ .  $\square$

# 10 Unendliche Reihen

## 10.1 Taylorreihen

Eine Funktion  $f(x)$  kann lokal in einer Umgebung um ein bestimmtes Argument  $x_0$ , auch Entwicklungspunkt genannt, linear approximiert werden:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Die ursprüngliche Funktion und die lineare Approximation haben beide in  $x_0$  denselben Funktionswert und dieselbe erste Ableitung.

Dies kann man wie folgt verallgemeinern: Ist  $f(x)$   $n+1$ -mal differenzierbar, dann gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \text{ für ein } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } x_0.$$

Die Summe nennt man das  $n$ -te Taylorpolynom, wofür man  $T_n(x)$  schreibt. Der letzte Summand wird Lagrangesches Restglied genannt und mit  $R_n(x)$  bezeichnet.

Ist  $f(x)$  unendlich oft differenzierbar (glatt) und gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ , so konvergiert die Folge der Taylorpolynome gegen  $f(x)$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Diese Reihe wird Taylorreihe genannt. Im Allgemeinen besitzt sie einen Konvergenzradius  $\rho$  um  $x_0$ , der durch folgende Gleichungen bestimmt ist:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \text{ mit } a_k := \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Beispiel:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+3)!}{(2k+1)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} (2k+3)(2k+2) = \infty.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

$$\forall x \in (-1, 1] : \ln(1 + x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}. \quad \square$$

## 10.2 Fourierreihen

Mithilfe der Fourieranalyse kann man zeitlich veränderliche Signale in ihre Frequenzkomponenten (Spektren) zerlegen. Die Periodizität kann auch eine räumliche, wie in Gittern oder Kristallstrukturen, sein.

Wir betrachten periodische reellwertige Funktionen  $f(t)$  mit einer Periodendauer  $T$ :

$$\forall t : f(t + T) = f(t).$$

Wir wollen im Funktionenraum  $L^2(t_0, t_0 + T)$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) g(t) dt$$

beliebige Funktionen nach der Orthogonalbasis

$$\{1, \cos(n\omega t), \sin(n\omega t) : n \in \mathbb{N}\}, \omega = \frac{2\pi}{T}$$

entwickeln. Die Funktionen werden außerhalb von  $(t_0, t_0 + T)$  periodisch fortgesetzt. Man erhält dadurch sämtliche periodische Funktionen mit einer Periodendauer  $T$ .

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

Die Zahlen  $a_0$ ,  $a_n$  und  $b_n$  heißen Fourier-Koeffizienten. Sie können wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(k\omega t) dt &= \langle f(t), \cos(k\omega t) \rangle \\ &= \left\langle \frac{a_0}{2}, \cos(k\omega t) \right\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \langle \cos(n\omega t), \cos(k\omega t) \rangle + b_n \langle \sin(n\omega t), \cos(k\omega t) \rangle) \\ &= a_k \|\cos(k\omega t)\|^2 = a_k \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2(k\omega t) dt = a_k \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

Analoges ergibt sich für  $\langle f(t), \sin(k\omega t) \rangle$ . Des Weiteren ist  $\langle f(t), 1 \rangle = \left\langle \frac{a_0}{2}, 1 \right\rangle = \frac{a_0}{2}T$ .

Wir fassen zusammen:

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) dt \\ \forall n \in \mathbb{N} : b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega t) dt\end{aligned}$$

Die trigonometrischen Funktionen kann man durch komplexe Exponentialfunktionen ersetzen:

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}). \\ \implies f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{2} (e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}) + \frac{ib_n}{2} (e^{-in\omega t} - e^{in\omega t}) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega t} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega t} \right).\end{aligned}$$

Wir definieren:

$$c_k := \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2} & k > 0 \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} & k < 0 \\ \frac{a_0}{2} & k = 0 \end{cases} \implies f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$$

Wir betrachten Integrale komplexwertiger Funktionen etwas genauer:

Seien  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  reellwertige Funktionen. Dann ist die komplexwertige Funktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\varphi := u + iv$  integrierbar, falls  $u$  und  $v$  integrierbar sind:

$$\int_a^b \varphi(x) dx := \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx.$$

Speziell für  $[a, b] = [0, 2\pi]$  und  $\varphi(x) = e^{imx}$  für ein  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  gilt:

$$\int_0^{2\pi} e^{imx} dx = \left[ \frac{e^{imx}}{im} \right]_{x=0}^{2\pi} = 0.$$

Außerdem gilt mit  $\omega T = 2\pi$ :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{im\omega t} dt = \left[ \frac{e^{im\omega t}}{im\omega} \right]_{t=t_0}^{t_0+T} = \frac{e^{im\omega(t_0+T)} - e^{im\omega t_0}}{im\omega} = \frac{e^{im\omega t_0}}{im\omega} (e^{2m\pi i} - 1) = 0.$$

Daraus erhalten wir:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-in\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T} e^{i(k-n)\omega t} dt = c_n \int_{t_0}^{t_0+T} e^0 dt = c_n T.$$

$$\implies c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-ik\omega t} dt$$

### 10.3 Konvergenz von Fourierreihen

Wir führen den Begriff der Konvergenz im quadratischen Mittel ein. Dazu definieren wir ein Skalarprodukt für periodische (komplexwertige) Funktionen, die auf  $[t_0, t_0 + T]$  Riemann-integrierbar sind:

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^*(t) g(t) dt, \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Definition: Seien  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) periodische, auf  $[t_0, t_0 + T]$  Riemann-integrierbare Funktionen. Die Folge  $(f_n)$  konvergiert im quadratischen Mittel gegen  $f$

$$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0 \iff \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |f(t) - f_n(t)|^2 dt \rightarrow 0.$$

Die Fourierreihe einer Riemann-integrierbaren Funktion  $f : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert im quadratischen Mittel gegen  $f$  und es gilt die Vollständigkeitsrelation (Parsevalsche Gleichung):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2 dt.$$

Ist  $f : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig differenzierbar, so konvergiert die Fourierreihe von  $f$  punktweise und es gilt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{1}{2} \left( \lim_{\tau \rightarrow t^+} f(\tau) + \lim_{\tau \rightarrow t^-} f(\tau) \right).$$

An Unstetigkeitsstellen tritt das Gibbssche Phänomen (Überschwingungen) auf.

Ist die periodische Funktion  $f : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und stückweise stetig differenzierbar, so konvergiert die Fourierreihe von  $f$  gleichmäßig gegen  $f$ .

### 10.4 Gerade und ungerade Funktionen

Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit einem bezüglich der Null symmetrischen Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{R}$  heißt

- gerade : $\iff \forall x \in D : f(-x) = f(x).$
- ungerade : $\iff \forall x \in D : f(-x) = -f(x).$

Jede Funktion lässt sich in eine gerade und eine ungerade Funktion zerlegen:

$$f(x) = f_g(x) + f_u(x) \text{ mit } f_g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ und } f_u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Beispiel:  $[e^x]_g = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$  und  $[e^x]_u = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$ .  $\square$

Die Menge aller geraden bzw. ungeraden Funktionen aus  $L^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$  bildet einen Unterraum von  $L^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ . Eine Orthogonalbasis dieses Unterraums ist

$$\{1, \cos(n\omega t) : n \in \mathbb{N}\} \text{ bzw. } \{\sin(n\omega t) : n \in \mathbb{N}\} \text{ mit } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Daher sind für gerade bzw. ungerade Funktionen die Fourierkoeffizienten  $b_n$  bzw.  $a_n$  gleich Null.

Sei  $g(t)$  eine gerade Funktion und  $u(t)$  eine ungerade Funktion, dann gilt:

$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) \text{ mit } a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cos(n\omega t) dt$
$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \text{ mit } b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \sin(n\omega t) dt$

Beispiel: Die Sägezahnkurve  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$  ist ungerade.

$$T = 2 \implies \omega = \pi.$$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 x \sin(n\pi x) dx = \left[ -x \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \right]_{x=-1}^1 + \frac{1}{n\pi} \int_{-1}^1 \cos(n\pi x) dx \\ &= -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{\cos(-n\pi)}{n\pi} + \frac{1}{n\pi} \left[ \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} \right]_{x=-1}^1 = -2 \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} + 0. \end{aligned}$$

Nun gilt  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ , also:

$$b_n = -2 \frac{(-1)^n}{n\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Daraus erhalten wir die Fourierreihe der Sägezahnkurve:

$$\forall x \in (-1, 1) : x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi x).$$

# 11 Integraltransformationen

Unter einer Integraltransformation versteht man einen Zusammenhang zwischen zwei Funktionen  $f(t)$  (Originalfunktion) und  $F(p)$  (Bildfunktion) der Form

$$F(p) = \mathcal{T}(f(t)) = \int_{\Omega} f(t) K(p, t) dt$$

Die Funktion  $K(p, t)$  heißt Kern der Transformation. Das Integrationsintervall  $\Omega$  hängt von der Art der Transformation ab.

Integraltransformationen sind linear:

$$\mathcal{T}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \mathcal{T}(f(t)) + \beta \mathcal{T}(g(t)).$$

Gegebenfalls sind sie auch umkehrbar:

$$f(t) = \mathcal{T}^{-1}(F(p)) = \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{T}(f(t))).$$

## 11.1 Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation (Symbol  $\mathcal{L}$ ) hat das Integrationsintervall  $\Omega = (0, \infty)$  und den Kern  $K(p, t) = e^{-pt}$ , also:

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

$t$  sei ein reeller,  $p$  ein komplexer Parameter.

Die Originalfunktion muss stückweise glatt sein und darf für  $t \rightarrow \infty$  nicht stärker als  $e^{\alpha t}$  ( $\alpha > 0$ ) gegen  $\infty$  streben. Man schreibt das so:  $f(t) \in \mathcal{O}(e^{\alpha t})$ .

Das Laplace-Integral konvergiert dann in der Halbebene  $\Re(p) > \alpha$ .

Die inverse Laplace-Transformation lautet

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \begin{cases} f(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}.$$

Dabei ist  $c > \alpha$  eine reelle Zahl. Sie bewirkt, dass der Integrationsweg parallel zur imaginären Achse innerhalb des Konvergenzbereiches von  $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$  verläuft.

Falls  $f(+0) := \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \neq 0$ , dann ist  $[\mathcal{L}^{-1}(F(p))]|_{t=0} = \frac{1}{2} f(+0)$ .

Beispiel:  $\mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \left[ -\frac{e^{-pt}}{p} \right]_{t=0}^\infty = -\frac{0}{p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$  für  $\Re(p) > 0$ .  $\square$

Beispiel:  $\mathcal{L}(t^n) = \int_0^\infty t^n e^{-pt} dt$ . Wir substituieren  $\tau = pt \iff t = \frac{\tau}{p}$ .

$$\mathcal{L}(t^n) = \int_0^\infty \frac{\tau^n}{p^n} e^{-\tau} \frac{1}{p} d\tau = \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^\infty \tau^n e^{-\tau} d\tau.$$

Mit der Gammafunktion  $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = (x-1)!$  wird dies zu:

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$
 für  $\Re(p) > 0$ .  $\square$

Die Gammafunktion  $\Gamma(x)$  ist für  $x > 0$  definiert und hat die Eigenschaften  $\Gamma(1) = 1$  und  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ . Eine weitere Darstellungsart ist gegeben durch:

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^- : \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}.$$

### 11.1.1 Transformation des Ableitungsoperators

Wir betrachten die Laplace-Transformation von  $f'(t)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f'(t)) &= \int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt = [f(t) e^{-pt}]|_{t=0}^\infty + \int_0^\infty f(t) p e^{-pt} dt \\ &= 0 - f(0) + p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0). \end{aligned}$$

Nun können wir iterativ so fortfahren:

$$\mathcal{L}(f''(t)) = p\mathcal{L}(f'(t)) - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Allgemein ergibt sich:

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0)$$

Der Differentiation im Originalbereich entspricht eine Multiplikation im Bildbereich.

Dies kann zum Lösen von linearen Differentialgleichungen (ausschließlich Anfangswertprobleme) verwendet werden. Die Laplace-Transformierte der DGL liefert eine algebraische Gleichung, deren Lösung  $F(p)$  rücktransformiert die Lösung  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$  des Anfangswertproblems angibt.

Beispiel:  $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x^3 e^x$  mit  $y(0) = y'(0) = 0$ .

$$\mathcal{L}(y''(x)) - 2\mathcal{L}(y'(x)) + \mathcal{L}(y(x)) = p^2 F(p) - 2pF(p) + F(p) = \mathcal{L}(x^3 e^x).$$

Es gilt:

$$\boxed{\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}, \quad \mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{p}{p^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}(\sin(at)) = \frac{a}{p^2 + a^2}}$$

$$\begin{aligned} &\implies p^2 F(p) - 2pF(p) + F(p) = (p-1)^2 F(p) = \frac{3!}{(p-1)^4} = \frac{6}{(p-1)^4} \\ &\implies F(p) = \frac{6}{(p-1)^6} = \frac{6}{5!} \frac{5!}{(p-1)^6} \\ &\implies y(x) = \frac{6}{120} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5!}{(p-1)^6}\right) = \frac{1}{20} x^5 e^x. \square \end{aligned}$$

## 11.2 Anfangswertproblem und Laplace-Transformation

### 11.2.1 Partialbruchzerlegung

Beim Lösen von linearen Anfangswertproblemen mittels Laplace-Transformation tritt für  $\mathcal{L}(y(t))$  häufig eine gebrochenrationale Funktion auf:

$$\mathcal{L}(y(t)) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P(x) \text{ und } Q(x) \text{ seien Polynome vom Grad } m \text{ bzw. } n.$$

Gegebenenfalls können wir einige Vereinfachungen vornehmen:

1. Kürzen des Bruches, bis  $P(x)$  und  $Q(x)$  keine gemeinsamen Teiler mehr haben.
2. Abspaltung des ganzrationalen Teiles, wenn  $m \geq n$  ist, indem  $P(x)$  durch  $Q(x)$  geteilt wird. Übrig bleibt ein Polynom und ein echter Bruch.
3. Zerlegung in eine Summe von Partialbrüchen.

Die Partialbruchzerlegung funktioniert allgemein so:

$Q(x)$  hat die reellen Nullstellen  $x_i$  (mit Vielfachheiten  $k_i$ ) und (konjugiert) komplexe Nullstellen:

$$Q(x) = \prod_i (x - x_i)^{k_i} \prod_n (x^2 + p_n x + q_n)^{l_n}.$$

Die Partialbruchzerlegung ist von folgender Form:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_i \sum_{j_i=1}^{k_i} \frac{A_{i,j_i}}{(x-x_i)^{j_i}} + \sum_n \sum_{m_n=1}^{l_n} \frac{B_{n,m_n}x + C_{n,m_n}}{(x^2 + p_n x + q_n)^{m_n}}.$$

Die Konstanten bestimmt man mittels Koeffizientenvergleich.

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } & \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-2x^3 - 2x^2 + 2x + 14}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 5} \\ \implies & P(x) = A(x+1)(x^2 + 2x + 5) + B(x^2 + 2x + 5) + (Cx + D)(x+1)^2 \\ = & (A+C)x^3 + (3A+B+2C+D)x^2 + (7A+2B+C+2D)x + 5A+5B+D \\ \implies & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}. \\ \implies & \frac{-2x^3 - 2x^2 + 2x + 14}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 5)} = \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{2x+1}{x^2 + 2x + 5}. \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel:  $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 26 \sin(3x)$  mit  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = 2$ .

$$\begin{aligned} p^2 F(p) - 2 + pF(p) - 6F(p) &= 26\mathcal{L}(\sin(3x)) = 26 \frac{3}{p^2 + 9} = \frac{78}{p^2 + 9} \\ \implies F(p) &= \frac{78 + 2(p^2 + 9)}{(p^2 + p - 6)(p^2 + 9)} = \frac{96 + 2p^2}{(p-2)(p+3)(p^2 + 9)}. \\ \frac{96 + 2p^2}{(p-2)(p+3)(p^2 + 9)} &= \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p+3} + \frac{Cp + D}{p^2 + 9} \\ \implies 96 + 2p^2 &= A(p+3)(p^2 + 9) + B(p-2)(p^2 + 9) + (Cp + D)(p-2)(p+3). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten findet man auch schnell, indem man die Nullstellen des Nenners oder andere einfache Zahlenwerte für  $p$  einsetzt:

$$\begin{aligned} p = 2 &\implies 96 + 2 \cdot 2^2 = 104 = A(2+3)(2^2 + 9) = 65A \implies A = \frac{8}{5}. \\ p = -3 &\implies 114 = -90B \implies B = -\frac{19}{15}. \\ p = 0 &\implies 96 = \frac{216}{5} + \frac{114}{5} - 6D \implies D = -5. \\ p = 1 &\implies 98 = 64 + \frac{38}{3} - 4C + 20 \implies C = -\frac{1}{3}. \\ \implies F(p) &= \frac{8}{5(p-2)} - \frac{19}{15(p+3)} - \frac{p+15}{3(p^2+9)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies y(x) &= \frac{8}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-2}\right) - \frac{19}{15}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+3}\right) - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+9}\right) - 5\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+9}\right) \\ &= \frac{8}{5}e^{2x} - \frac{19}{15}e^{-3x} - \frac{1}{3}\cos(3x) - \frac{5}{3}\sin(3x). \quad \square \end{aligned}$$

### 11.3 Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation (Symbol  $\mathcal{F}$ ) hat das Integrationsintervall  $\Omega = (-\infty, \infty)$  und den Kern  $K(\omega, t) = e^{-i\omega t}$ , also:

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$t$  und  $\omega$  sind reelle Veränderliche.

Ist die Funktion  $f(t)$  absolut integrierbar, d.h.  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$  ( $\iff f \in L^1(\mathbb{R})$ ), so konvergiert das Fourier-Integral.

Die Bildfunktion  $F(\omega)$  ist beschränkt, stetig und verschwindet für  $\omega \rightarrow \pm\infty$ .

Die inverse Fourier-Transformation lautet

$$\mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = f(t).$$

Die Fixpunkt-Funktion der Fourier-Transformation ist die Gauß-Funktion:

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

### 11.4 Laplace-Transformierte der Delta-Funktion

Wir betrachten die Laplace-Transformierte von  $\delta(x - x_0)$ :

$$\mathcal{L}(\delta(x - x_0)) = \int_0^{\infty} \delta(x - x_0) e^{-px} dx = \begin{cases} e^{-px_0} & x_0 > 0 \\ 0 & x_0 < 0 \end{cases}.$$

Beispiel: Schwingungsgleichung für plötzlichen Stoß zum Zeitpunkt  $t = 0$ .

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \delta(t) \text{ mit } y(t < 0) = \dot{y}(t < 0) = 0.$$

Zunächst ersetzen wir  $\delta(t)$  durch  $\delta(t - \varepsilon)$  und lassen zum Schluss  $\varepsilon \rightarrow 0$  konvergieren.  
Wir erhalten:

$$p^2 F(p) + \omega^2 F(p) = \mathcal{L}(\delta(t - \varepsilon)) = e^{-p\varepsilon} \implies F(p) = \frac{e^{-p\varepsilon}}{p^2 + \omega^2}.$$

Der sogenannte Dämpfungssatz besagt:  $\mathcal{L}^{-1}(e^{-ap}F(p)) = f(t - a)$ . Daher gilt:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-p\varepsilon}}{p^2 + \omega^2}\right) = \Theta(t - \varepsilon) \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t - \varepsilon)) \implies y(t) = \Theta(t) \frac{\sin(\omega t)}{\omega}. \square$$

## 11.5 Fourier-Transformierte der Delta-Funktion

Die Fourier-Transformierte der Delta-Funktion lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\delta(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \implies \delta(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{ikx}}{ix} \right]_{k=-n}^n = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2\pi ix} = \frac{\sin(nx)}{\pi x}.$$

Daraus erhalten wir mit  $n \rightarrow \infty$ :

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}(1) \iff \mathcal{F}(\delta(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Man kann zeigen, dass daraus  $\mathcal{F}(1) = \sqrt{2\pi}\delta(k)$  folgt.

## 11.6 Faltung / Konvolution

Die Faltung oder auch Konvolution zweier Funktionen ist definiert als:

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

Die Faltung ist kommutativ ( $f * g = g * f$ ).

Seien  $\mathcal{L}(g)$  und  $\mathcal{L}(h)$  die Laplace-Transformierten von  $g$  bzw.  $h$ .  
Welche Funktion  $f$  löst die Gleichung

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)\mathcal{L}(h) \iff f = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(g)\mathcal{L}(h))?$$

$$\begin{aligned}\text{Es gilt: } \mathcal{L}(g)\mathcal{L}(h) &= \left( \int_0^\infty g(\sigma) e^{-p\sigma} d\sigma \right) \left( \int_0^\infty h(\tau) e^{-p\tau} d\tau \right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty g(\sigma) h(\tau) e^{-p(\sigma+\tau)} d\sigma d\tau.\end{aligned}$$

Substituiere  $\sigma$  durch  $t = \sigma + \tau \implies \sigma = t - \tau$ :

$$\mathcal{L}(g)\mathcal{L}(h) = \int_0^\infty \int_\tau^\infty g(t-\tau) h(\tau) e^{-pt} dt d\tau = \int_0^\infty \int_0^t g(t-\tau) h(\tau) e^{-pt} d\tau dt.$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, da das Integrationsgebiet für beide Doppelintegrale gleich ist (setze  $x = t$  und  $y = \tau$ ):

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x \geq y\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq x\}.$$

Wir erhalten den sogenannten Faltungssatz:

$$\boxed{\mathcal{L}(g)\mathcal{L}(h) = \mathcal{L}(g * h)}$$

Falls  $g * h$  und  $g$  bekannt sind, so erhält man  $h$  durch Dekonvolution:

$$h = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\mathcal{L}(g * h)}{\mathcal{L}(g)} \right).$$

Beispiel:  $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 3e^x$  mit  $y(0) = y'(0) = 0$ .

$$p^2F(p) + pF(p) - 2F(p) = 3\mathcal{L}(e^x)$$

$$\begin{aligned}\implies F(p) &= \frac{3}{p^2 + p - 2} \mathcal{L}(e^x) = \left( \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+2} \right) \mathcal{L}(e^x) = \mathcal{L}(e^x - e^{-2x}) \mathcal{L}(e^x). \\ \implies y(x) &= (e^x - e^{-2x}) * (e^x) = \int_0^x (e^\xi - e^{-2\xi}) e^{x-\xi} d\xi = e^x \int_0^x (1 - e^{-3\xi}) d\xi \\ &= e^x \left[ \xi + \frac{1}{3}e^{-3\xi} \right]_{\xi=0}^x = e^x \left( x + \frac{1}{3}e^{-3x} - 0 - \frac{1}{3} \right) = \left( x - \frac{1}{3} \right) e^x + \frac{1}{3}e^{-2x}. \quad \square\end{aligned}$$

Für die Fourier-Transformation definiert man die Faltung ein bisschen anders:

$$(f * g)(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Mit dieser Konvolution lautet der Faltungssatz zur Fouriertransformation:

$$\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(f * g) \text{ und außerdem: } \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(fg).$$

### 11.6.1 Fouriertransformation und Dekonvolution am Beispiel Experiment

Das Messgerät arbeitet mit einer gewissen Ungenauigkeit und “verschmiert” dadurch die exakte Messung. Die theoretisch exakte Funktionskurve  $f_{\text{th}}(x)$  wird mit der “Apparatefunktion”  $r(x)$  gefaltet:

$$f_{\text{exp}} = f_{\text{th}} * r \iff f_{\text{exp}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{th}}(\xi) r(x - \xi) d\xi.$$

Für eine optimale Messapparatur wäre  $r(x - \xi) = \delta(x - \xi) \implies f_{\text{exp}}(x) = f_{\text{th}}(x)$ .

Bei bekannter Apparatefunktion können wir die theoretische Messkurve aus der experimentellen bestimmen nach:

$$f_{\text{th}}(x) = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\mathcal{F}(f_{\text{exp}})}{\mathcal{F}(r)} \right).$$

Diese Fourier-Transformationen werden in der Praxis mithilfe der sogenannten schnellen Fourier-Transformation (*fast Fourier transform FFT*) numerisch durchgeführt.

## 12 Funktionentheorie

Die Funktionentheorie beschäftigt sich mit komplexen Funktionen  $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

### 12.1 Stetigkeit

Der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) =: a$  der Funktion  $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  existiert

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in D : |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - a| < \varepsilon.$$

Die komplexe Funktion  $f$  ist stetig in  $z_0$

$$\iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \text{ und } |f(z_0)| < \infty.$$

Hier seien einige Eigenschaften stetiger komplexer Funktionen ohne Beweis angeführt:

- $f(z)$  ist in einem Gebiet  $G$  um  $z_0$  stetig  $\implies f(z_0)$  ist beschränkt.
- $f(z)$  ist in einem Gebiet  $G$  stetig  $\iff \Re(f(z))$  und  $\Im(f(z))$  sind in  $G$  stetig.
- Verknüpfungen stetiger Funktionen sind stetig.

### 12.2 Differenzierbarkeit

Eine komplexe Funktion  $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist an der Stelle  $z$  differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}$$

für beliebige Annäherungswege  $h \rightarrow 0$  ( $h \in \mathbb{C}$ ) existiert und eindeutig ist.

Ist  $f(z)$  in allen Punkten des Gebietes  $G$  differenzierbar, so nennt man  $f(z)$  holomorph, analytisch oder regulär in  $G$ . Falls  $f(z)$  auf ganz  $\mathbb{C}$  differenzierbar ist, so nennt man sie eine ganze Funktion.

Beispiel: Polynome, die Exponentialfunktion, die trigonometrischen sowie die hyperbolischen Funktionen sind ganze Funktionen.

Gebrochene rationale Funktionen sind außer an den Nullstellen ihres Nennerpolynoms holomorph. Die Logarithmusfunktion ist auf  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  holomorph.

Die Betragsfunktion, die komplexe Konjugation sowie  $\Re(z)$  und  $\Im(z)$  sind nirgends holomorph.  $\square$

Funktionen, die bis auf eine Menge von isolierten Punkten (Singularitäten = Pole) holomorph sind, nennt man meromorph.

In einer Umgebung einer komplexen Zahl  $z_0$  sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $f(z)$  ist einmal komplex differenzierbar, d.h. holomorph.
2.  $f(z)$  ist beliebig oft komplex differenzierbar.
3.  $\Re(f)$  und  $\Im(f)$  sind zumindest einmal stetig reell-differenzierbar und erfüllen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.
4.  $f(z)$  lässt sich in eine komplexe Potenzreihe entwickeln.
5.  $f(z)$  ist stetig und das Wegintegral von  $f$  über einen beliebigen geschlossenen zusammenziehbaren Weg verschwindet (Cauchyscher Integralsatz bzw. Satz von Morera).
6. Die Funktionswerte im Inneren einer Kreisscheibe lassen sich aus den Funktionswerten am Rand mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel ermitteln.

Im Folgenden wollen wir auf die verschiedenen Punkte etwas näher eingehen.

**Ad 3.** Wir definieren:  $x := \Re(z)$ ,  $y := \Im(z)$ ,  $u(x, y) := \Re(f(z))$ ,  $v(x, y) := \Im(f(z))$ . Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (CRDG) lauten nun:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

$u(x, y)$  und  $v(x, y)$  nennt man harmonisch konjugierte Funktionen.

Beweis:  $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ .  $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} i = -i \frac{\partial f}{\partial y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$ .

Aus dem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt die Behauptung. Q.E.D.

### 12.2.1 Laplace-Gleichung

Holomorphe Funktionen  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  erfüllen im Analytizitätsgebiet die Laplace-Gleichung

$$\boxed{\Delta u(x, y) = 0 \text{ und } \Delta v(x, y) = 0} \text{ mit } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Beweis:  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$ .

$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$ . Q.E.D.

Funktionen, welche die Laplace-Gleichung erfüllen, heißen harmonische Funktionen. Real- sowie Imaginärteil holomorpher Funktionen sind also harmonische Funktionen.

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } \sin(z) &= \sin(x + iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) \\ &= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \sin(x)\cosh(y) + \partial_y^2 \sin(x)\cosh(y) &= -\sin(x)\cosh(y) + \sin(x)\cosh(y) = 0. \\ \partial_x^2 \cos(x)\sinh(y) + \partial_y^2 \cos(x)\sinh(y) &= -\cos(x)\sinh(y) + \cos(x)\sinh(y) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Umgekehrt ist jede harmonische Funktion Real- oder Imaginärteil einer holomorphen Funktion. Ist  $u(x, y)$  oder  $v(x, y)$  gegeben, so kann man mithilfe der CRDG die jeweils harmonisch konjugierte Funktion bis auf eine additive Konstante bestimmen:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int \frac{\partial v}{\partial y} dx + \varphi(y) \implies \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial v}{\partial y} dx + \frac{d\varphi}{dy} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ &\implies \frac{d\varphi}{dy} = -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial v}{\partial y} dx \implies \varphi(y) = - \int \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial v}{\partial y} dx \right) dy \\ &\implies u(x, y) = \int \frac{\partial v}{\partial y} dx - \int \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial v}{\partial y} dx \right) dy. \end{aligned}$$

Analog ergeben sich auch die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= - \int \frac{\partial v}{\partial x} dy + \int \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial v}{\partial x} dy \right) dx. \\ v(x, y) &= \int \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) dx. \\ v(x, y) &= - \int \frac{\partial u}{\partial y} dx + \int \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) dy. \end{aligned}$$

Beispiel: Wie lautet die zu  $u(x, y) = x^2 - y^2$  harmonisch konjugierte Funktion? Zunächst müssen wir zeigen, dass  $u(x, y)$  harmonisch ist:

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 - y^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y) = 2 - 2 = 0.$$

Nun können wir nach einer der obigen Gleichungen  $v(x, y)$  berechnen:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int 2xdy - \int \left( -2y + \frac{\partial}{\partial x} \int 2xdy \right) dx = 2xy - \int (-2y + 2y) dx \\ &= 2xy + c. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass  $v(x, y)$  auch harmonisch ist:

$$\Delta v(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2xy + c) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(2xy + c) = \frac{\partial}{\partial x}(2y) + \frac{\partial}{\partial y}(2x) = 0 + 0 = 0.$$

Die Funktion  $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy + c = (x + iy)^2 + c = z^2 + c$  ist somit holomorph.  $\square$

## 12.3 Potenzreihen

**Ad 4.** Wir nennen eine komplexe Reihe absolut konvergent, wenn die Reihe der Absolutbeträge ihrer Glieder konvergiert:

$$P(z - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ konvergiert absolut :} \iff \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n \text{ konvergiert.}$$

Die Grenze zwischen dem Konvergenzbereich und dem Divergenzbereich einer Potenzreihe ist ein eindeutig bestimmter Kreis um  $z_0$ , der sogenannte Konvergenzkreis. Seinen Radius  $\rho$  bestimmt man wie im Reellen:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Innerhalb des Konvergenzkreises konvergiert die Potenzreihe absolut.

Über das Verhalten der Potenzreihe auf dem Rand des Konvergenzkreises kann keine allgemeine Aussage getroffen werden.

$$\text{Beispiel: } P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}. \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 1.$$

$P(1)$  divergiert (harmonische Reihe),  $P(-1)$  konvergiert (Leibniz-Kriterium).  $\square$

Jede Potenzreihe stellt innerhalb ihres Konvergenzkreises eine holomorphe Funktion  $f(z)$  dar. Die Ableitungen dieser Funktion erhält man durch gliedweise Differentiation der Potenzreihe. Die abgeleiteten Reihen haben denselben Konvergenzkreisradius wie die ursprüngliche Reihe. Gleichermaßen gilt für die Integration von Potenzreihen.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) (z - z_0)^n. \\ \int f(z) dz &= \int dz \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Man gelangt zur sogenannten Taylor-Formel:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Umgekehrt kann man mit dieser Formel beliebige auf einem Gebiet  $G$  holomorphe Funktionen in jedem Punkt  $z_0 \in G$  eindeutig in eine Potenzreihe entwickeln.

Der Konvergenzkreis ist der größte Kreis um  $z_0$ , der noch ganz in  $G$  liegt.

Beispiel:  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  ist auf  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  holomorph. Für  $|z| < 1$  liefert die geometrische Reihe:

$$P_1(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Der Konvergenzkreis ist also  $K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

Wir können  $f(z)$  auch umschreiben in:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i - (z-i)} = \frac{1}{1-i} \frac{1}{1 - \frac{z-i}{1-i}} = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-i}{1-i} \right)^n =: P_2(z).$$

Diese geometrische Reihe konvergiert für  $\left| \frac{z-i}{1-i} \right| < 1 \iff |z-i| < |1-i| = \sqrt{2}$ .

Ihr Konvergenzkreis lautet somit  $K_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| < \sqrt{2}\}$ .

$K_1$  und  $K_2$  überschneiden einander und die Werte der Potenzreihen  $P_1(z)$  und  $P_2(z)$  sind in der Schnittmenge die gleichen. In einem solchen Fall nennt man  $P_2(z)$  die analytische Fortsetzung von  $P_1(z)$  aus  $K_1$  in  $K_2$  hinein (und umgekehrt).  $\square$

## 12.4 Komplexe Linienintegrale I

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Der stückweise stetig differenzierbare Integrationsweg  $C$  in  $D$  wird in Parameterform  $\gamma(t)$  mit  $t \in [a, b]$  dargestellt. Das Integral über die Funktion  $f(z)$  von  $\gamma(a)$  nach  $\gamma(b)$  über den Weg  $C$  ist dann:

$$\boxed{\int_C f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt}$$

Mit  $u := \Re(f)$ ,  $v := \Im(f)$ ,  $x := \Re(\gamma)$  und  $y := \Im(\gamma)$  wird das zu:

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_a^b (u(t) + iv(t)) (\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) dt = \int_a^b (u\dot{x} + iu\dot{y} + iv\dot{x} - v\dot{y}) dt \\ &= \int_a^b (u(t)\dot{x}(t) - v(t)\dot{y}(t)) dt + i \int_a^b (u(t)\dot{y}(t) + v(t)\dot{x}(t)) dt \\ &= \int_C (udx - vdy) + i \int_C (udy + vdx). \end{aligned}$$

Wir der Weg  $C$  in anderer Richtung durchlaufen, ändert das Integral sein Vorzeichen:

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz.$$

Ist der Weg  $C$  geschlossen ( $\gamma(a) = \gamma(b)$ ), so schreibt man:  $\oint_C f(z) dz$ .

Beispiel: Welchen Wert hat  $\oint_C \frac{b}{(z-a)^n} dz$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  und  $\gamma : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) := a + e^{it}$ ?

$$\oint_C \frac{b}{(z-a)^n} dz = \int_0^{2\pi} \frac{b}{(e^{it})^n} ie^{it} dt = bi \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt.$$

$$n=1 \implies \oint_C \frac{b}{z-a} dz = bi \int_0^{2\pi} e^0 dt = 2\pi bi.$$

$$n \neq 1 \implies \oint_C \frac{b}{(z-a)^n} dz = bi \left[ \frac{e^{i(1-n)t}}{i(1-n)} \right] \Big|_{t=0}^{2\pi} = 0.$$

$$\implies \boxed{\oint_C \frac{b}{(z-a)^n} dz = 2\pi bi \delta_{n,1}} \quad \square$$

#### 12.4.1 Integralsatz von Cauchy

**Ad 5.** Wenn eine Funktion  $f(z)$  in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  holomorph ist, dann ist das über eine in  $G$  liegende geschlossene Kurve  $C$  erstreckte Integral gleich Null:

$$\boxed{\oint_C f(z) dz = 0}$$

Beweis:  $\oint_C f(z) dz = \oint_C (udx - vdy) + i \oint_C (udy + vdx).$

Der Integralsatz von Green in der Ebene lautet:

$$\oint_{\partial D} (f(x, y) dx + g(x, y) dy) = \int_D \left( \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) dxdy.$$

Wenn also  $D$  so ist, dass  $\partial D = C$ , dann gilt mit den CRDG:

$$\oint_C f(z) dz = \int_D \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \int_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0. \text{ Q.E.D.}$$

Der Satz von Morera besagt, dass die Umkehrung auch gilt: Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Wenn  $\oint_C f(z) dz = 0$  für jeden geschlossenen Weg  $C$  in  $D$  gilt, dann ist  $f$  in  $D$  holomorph.

Aus dem Integralsatz von Cauchy folgt die Wegunabhängigkeit von Linienintegralen holomorpher Funktionen in einfach zusammenhängenden Gebieten.

Ist das Kurvenintegral vom Integrationsweg unabhängig, so kann man eine Stammfunktion von  $f(z)$  definieren.

### 12.4.2 Integralformel von Cauchy

**Ad 6.** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $C$  ein geschlossener Weg in  $D$ , dessen Innengebiet in  $D$  enthalten ist und der  $z$  im Inneren enthält. Wenn die Kurve  $C$  positiv orientiert parametrisiert ist, dann gilt die Integralformel von Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Beweis: Die Funktion  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  mit der Veränderlichen  $\zeta$  ist in  $D \setminus \{z\}$  holomorph.

$C$  kann man also durch den Kreis  $K := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| = \varepsilon\}$  mit  $\varepsilon > 0$  ersetzen:

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_K \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \oint_K \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Der Integrand im ersten Integral ist aufgrund der Holomorphie von  $f$  beschränkt, daher:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_K \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

Für das zweite Integral haben wir die Lösung bereits gefunden:

$$\oint_K \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi i f(z).$$

Im Grenzfall  $\varepsilon \rightarrow 0$  ergibt sich also die Cauchysche Integralformel. Q.E.D.

Die Funktionswerte einer holomorphen Funktion im Inneren eines Gebietes lassen sich durch die Funktionswerte auf dem Rand des Gebietes ausdrücken.

Bemerkenswert ist folgender Spezialfall: Mit  $\gamma(t) := z + re^{it}, t \in [0, 2\pi], r > 0$  folgt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}} rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt.$$

$f(z)$  ist der Mittelwert über alle Funktionswerte entlang des Kreises, dessen Mittelpunkt  $z$  ist.

Durch mehrmaliges Differenzieren erhalten wir außerdem:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Einsetzen in die Taylor-Formel liefert:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta (z - z_0)^n.$$

## 12.5 Laurent-Reihen

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen. Wenn  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist, so kann man  $f$  in jedem Kreisring  $R$ , der in  $D$  liegt und den Mittelpunkt  $z_0$  hat, in einer sogenannten Laurentreihe entwickeln:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

Für die Koeffizienten gilt ( $C$  sei eine positiv orientierte Kurve in  $R$ ):

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Die erste Reihe ( $n \geq 0$ ) nennt man den Nebenteil der Laurent-Reihe, die zweite Reihe ( $n < 0$ ) heißt Hauptteil der Laurent-Reihe. Ist  $\rho_1 = 0$  (s.u.), so gilt: Der Hauptteil verschwindet, wenn  $z_0$  eine hebbare Singularität ist, hat genau  $m$  Glieder, falls  $z_0$  ein Pol der Ordnung  $m$  ist, und ist unendlich, wenn  $z_0$  eine wesentliche Singularität ist.

Der Konvergenzbereich  $K$  ist ein Kreisring um  $z_0$ :

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$$

$$\text{mit } \rho_1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{-n-1}}{a_{-n}} \right| \text{ und } \rho_2 = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

$$\text{Beispiel: } \sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{z} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z} = \frac{1}{z(1-z)} \text{ für } 0 < |z| < 1.$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\frac{1}{z^2} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z(1-z)} \text{ für } |z| > 1. \square$$

Beispiel: Entwickle  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  für  $1 < |z| < 2$  in eine Laurent-Reihe.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} - \frac{1}{2(1-\frac{z}{2})}$$

$$= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

$$\text{mit } a_n = \begin{cases} -1 & n < 0 \\ -\frac{1}{2^{n+1}} & n \geq 0 \end{cases}. \rho_1 = 1. \rho_2 = 2. \square$$

## 12.6 Residuensatz

Der Koeffizient  $a_{-1}$  in der Laurent-Reihe heißt Residuum von  $f$  bei  $z_0$ . Ist  $z_0$  ein Pol der Ordnung  $m$ , so gilt (vgl. Kap. 16.4.2):

$$\text{Res}_f(z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-z_0)^m f(z)) \right|_{z=z_0}.$$

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet,  $f : G \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $C$  eine geschlossene Kurve in  $G$ , die durch keine der isolierten Singularitäten  $z_k$  führt. Dann gilt:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_f(z_k) \text{ind}_C(z_k)$$

Dabei bezeichnet  $\text{ind}_C(z_k)$  die Windungszahl (Index) von  $C$  in Bezug auf den Punkt  $z_k$ :

$$\text{ind}_C(z_k) := \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{\zeta - z_k} d\zeta \in \mathbb{Z}.$$

Sie ergibt sich als Anzahl der Umläufe von  $C$  um  $z_k$  gegen den Uhrzeigersinn minus der Anzahl der Umläufe im Uhrzeigersinn.

Beispiel:  $f(z) = \frac{\cos(z)}{z}$  und  $C : \gamma : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) := e^{it}$ .

$$\text{Res}_f(0) = zf(z)|_{z=0} = \cos(0) = 1. \text{ ind}_C(0) = 1.$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{\cos(z)}{z} dz = 2\pi i. \square$$

Falls  $f(z)$  eine rationale Funktion ist, die auf  $\mathbb{R}$  keine Pole besitzt, und der Grad des Nenners um mindestens zwei größer ist als der Grad des Zählers, dann gilt (vgl. Kap. 16.8.2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\Im(a)>0} \text{Res}_f(a).$$

Beispiel:  $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$  ist auf  $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$  holomorph.

$$\text{Res}_f(i) = (z-i)f(z)|_{z=i} = \left. \frac{1}{z+i} \right|_{z=i} = \frac{1}{2i} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi. \square$$

## 12.7 Komplexe Linienintegrale II

### 12.7.1 Linienintegral um Schnitt herum

Sei  $f(z)$  eine Funktion mit einem Schnitt  $S$  endlicher Länge auf der reellen Achse:  $S = \{z \in \mathbb{R} : a \leq z \leq b\}$ .  $f : \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph. Ein Wegintegral um den Schnitt herum können wir beliebig nah zum Schnitt hin zusammenziehen:

$$\begin{aligned}\oint_C f(z) dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_b^a f(x + i\varepsilon) dx + \int_a^b f(x - i\varepsilon) dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b (f(x - i\varepsilon) - f(x + i\varepsilon)) dx.\end{aligned}$$

### 12.7.2 Fouriertransformation und Residuensatz

Das uneigentliche Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  kann man mittels Residuensatz berechnen, falls  $f(z)$  in der oberen oder in der unteren komplexen Halbebene meromorph ist.

Wir betrachten das geschlossene Integral

$$\begin{aligned}\oint_C f(z) dz \text{ mit } C := C_1 + C_2. \quad \gamma_1(t) := t, t \in [-R, R]. \quad \gamma_2(t) := Re^{it}, t \in [0, \pi]. \\ \implies \oint_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(t) dt + \int_0^\pi f(Re^{it}) Rie^{it} dt.\end{aligned}$$

Falls  $\lim_{R \rightarrow \infty} f(Re^{it}) R = 0$ , so gilt im Limes  $R \rightarrow \infty$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{\Im(a) > 0} \operatorname{Res}_f(a).$$

Analoges ergibt sich ausgehend vom Linienintegral

$$\begin{aligned}\oint_C f(z) dz \text{ mit } C := C_1 + C_2. \quad \gamma_1(t) := t, t \in [-R, R]. \quad \gamma_2(t) := Re^{-it}, t \in [0, \pi]. \\ \implies \oint_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(t) dt - \int_0^\pi f(Re^{-it}) Rie^{-it} dt. \\ \lim_{R \rightarrow \infty} f(Re^{-it}) R = 0 \implies \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = -2\pi i \sum_{\Im(a) < 0} \operatorname{Res}_f(a).\end{aligned}$$

$$\text{Beispiel: } \tilde{f}(k) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2 + a^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{(x + i|a|)(x - i|a|)} dx.$$

Zunächst berechnen wir die Residuen der Polstellen von  $g(x, k) := \frac{e^{-ikx}}{(x + i|a|)(x - i|a|)}$ :

$$\text{Res}_g(i|a|) = (z - i|a|) g(z, k)|_{z=i|a|} = \frac{e^{k|a|}}{2i|a|}. \quad \text{Res}_g(-i|a|) = -\frac{e^{-k|a|}}{2i|a|}.$$

Die Bildfunktion  $\tilde{f}(k)$  muss für  $k \rightarrow \pm\infty$  verschwinden (Lemma von Riemann-Lebesgue). Wir machen daher eine Fallunterscheidung:

$$k < 0: \int_{-\infty}^{\infty} g(x, k) dx = 2\pi i \sum_{\Im(\alpha) > 0} \text{Res}_g(\alpha) = 2\pi i \text{Res}_g(i|a|) = \frac{\pi}{|a|} e^{k|a|}.$$

$$k \geq 0: \int_{-\infty}^{\infty} g(x, k) dx = -2\pi i \sum_{\Im(\alpha) < 0} \text{Res}_g(\alpha) = -2\pi i \text{Res}_g(-i|a|) = \frac{\pi}{|a|} e^{-k|a|}.$$

Zusammenfassend können wir schreiben:

$$\tilde{f}(k) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2 + a^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|a|} e^{-|ka|}. \square$$

### 12.7.3 Cauchyscher Hauptwert

Das Integral  $\int_{-a}^a \frac{1}{x} dx$  verläuft über einen Pol und divergiert daher. Heuristisch ist jedoch

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{dx}{x} &= \int_{-a}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^a \frac{dx}{x} = \int_a^0 \frac{d(-x)}{-x} + \int_0^a \frac{dx}{x} = \int_a^0 \frac{dx}{x} + \int_0^a \frac{dx}{x} \\ &= - \int_0^a \frac{dx}{x} + \int_0^a \frac{dx}{x} = 0. \end{aligned}$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die Flächen  $\int_{-a}^0 \frac{dx}{x}$  und  $\int_0^a \frac{dx}{x}$  aufgrund der Symmetrie gleich groß sind.

Bei dem heuristischen Ergebnis  $\int_{-a}^a \frac{dx}{x} = 0$  spricht man vom Cauchyschen Hauptwert (*Cauchy principal value*).

Mit den Methoden der komplexen Integration können wir den Cauchyschen Hauptwert wie folgt definieren:

$\Gamma, \Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  seien drei (fast) identische Wege in der komplexen Ebene. Der einzige Unterschied sei, dass bei den Polstellen  $z_j$  von  $f(z)$  entlang  $\Gamma$  der Weg  $\Gamma_1$  halbkreisförmig rechts und der Weg  $\Gamma_2$  symmetrisch zu  $\Gamma_1$  links um  $z_j$  herum verlaufe. Dann definieren wir den Cauchyschen Hauptwert:

$$\text{PV} \int_{\Gamma} f(z) dz := \frac{1}{2} \left( \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz \right).$$

Die Differenz der beiden Kurven  $\Gamma_1 - \Gamma_2$  entspricht einer Summe von kreisförmigen Wegen  $C_j$  um die Pole  $z_j$  herum. Die Kreise  $C_j$  müssen hinreichend klein sein, damit keine weiteren Polstellen in ihren Innern oder auf ihren Rändern liegen.

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz - \int_{\Gamma_2} f(z) dz = \sum_j \oint_{C_j} f(z) dz = 2\pi i \sum_j \text{Res}_f(z_j).$$

Daraus ergibt sich:

$$\text{PV} \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz - \pi i \sum_j \text{Res}_f(z_j) = \int_{\Gamma_2} f(z) dz + \pi i \sum_j \text{Res}_f(z_j).$$

Der Cauchysche Hauptwert findet sich unter anderem in den Kramers-Kronig-Beziehungen (z.B. in der Signalverarbeitung: Absorption und Dispersion).

Sei  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine meromorphe Funktion, deren Polstellen in der unteren Halbebene liegen. Falls  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} F(z) = 0$ , so gilt:

$$\Re(F(\omega)) = \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im(F(\omega'))}{\omega' - \omega} d\omega', \quad \Im(F(\omega)) = -\frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re(F(\omega'))}{\omega' - \omega} d\omega'.$$

# 13 Anhang

## 13.1 Umkehrfunktionen

### 13.1.1 Wurzelfunktion

Es gilt  $\sqrt[n]{z} = w \iff z = w^n$ . Falls  $z \neq 0$ , so gibt es genau  $n$  Zahlen  $w$ , die diese Gleichung erfüllen. Beispielsweise wird die Gleichung  $w = \sqrt[4]{1} \iff w^4 = 1$  von den Zahlen  $w = 1, i, -1, -i$  erfüllt.

In Kap. 6 haben wir dies bereits so formuliert:

$$z = re^{i\varphi} \implies \boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}} \text{ mit } 0 \leq k < n.$$

Beispiel: Die Zahlen  $\sqrt[n]{1} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$  mit  $0 \leq k < n$  heißen  $n$ -te Einheitswurzeln.  $\square$

### 13.1.2 Logarithmusfunktion

Wir betrachten die Gleichung  $0 \neq z = e^w \iff w = \ln(z)$ .

Sei  $z = re^{i\varphi} \neq 0$  mit  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , dann ist die naheliegendste Lösung:

$$\ln(z) = \ln(re^{i\varphi}) = \ln(r) + \ln(e^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi.$$

Diese Zahl wird der Hauptwert des Logarithmus (*principal value*) genannt.

Der Logarithmus ist jedoch nicht eindeutig, da:

$$k \in \mathbb{Z} \implies 1 = e^{2k\pi i} \implies z = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi+2k\pi)}$$

$$\implies \boxed{\ln(z) = \ln(r) + i\varphi + 2k\pi i}$$

Beispiel:  $\ln(-1) = \ln(1) + i\pi + 2k\pi i$  mit dem Hauptwert  $\ln(-1) = i\pi$ .  $\square$

### 13.1.3 Riemannsche Flächen

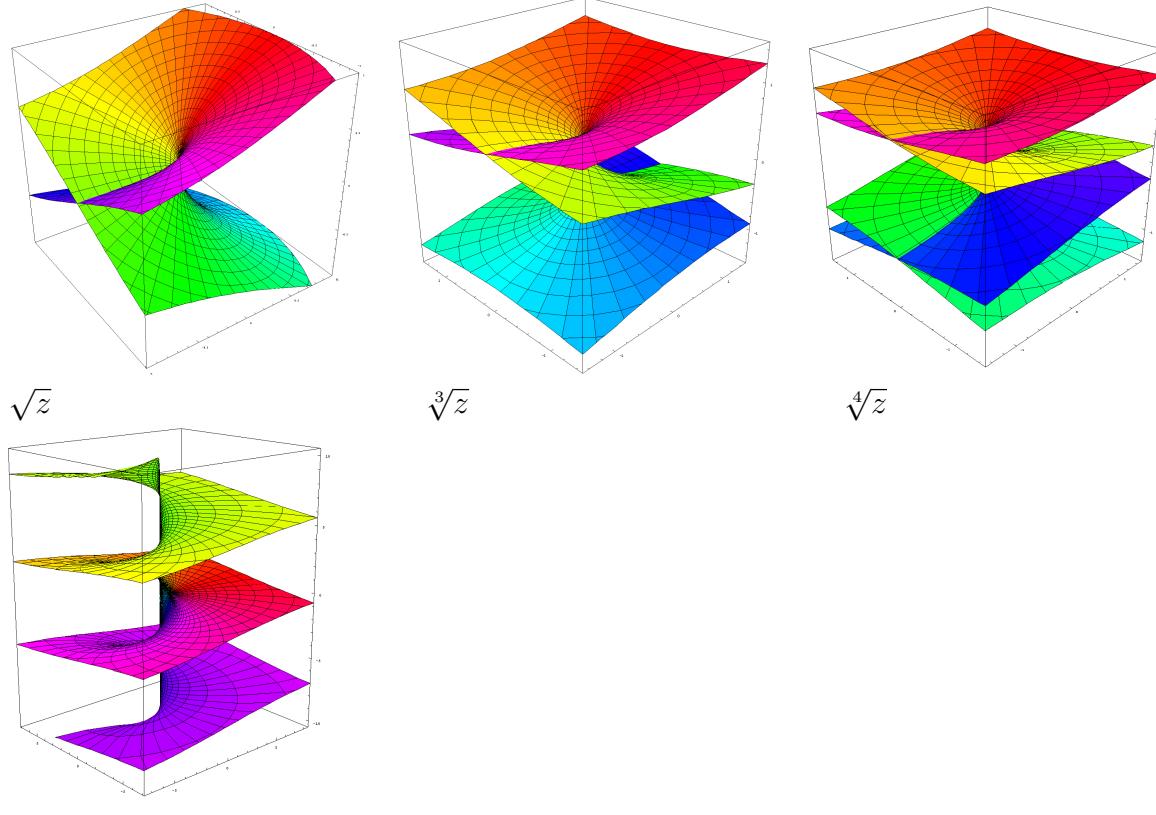
Manche Abbildungen sind nicht eindeutig. Dieses Problem kann man umgehen, indem man im Definitionsbereich die komplexe Zahleebene entsprechend vervielfacht und die Kopien dann übereinanderlegt. Diese Ebenen heißen Riemannsche Flächen oder Blätter.

Zur Funktion  $\sqrt[n]{z}$  gibt es entsprechend den  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  genau  $n$  Riemannsche Flächen. Lässt man  $z$  einmal im Kreis laufen ( $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$ ), so legt der Funktionswert  $\sqrt[n]{z}$  den Winkel

$$\frac{\varphi + 2\pi + 2k\pi}{n} - \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

zurück.

Dies ist der Punkt, wo die Mehrdeutigkeit auftritt (gleiches  $z$ , aber verschiedene  $\sqrt[n]{z}$ ). Hier wechselt man also von der einen zur nächsten Riemannschen Fläche. Nach dem  $n$ -ten Blatt ( $k = n - 1$ ) gelangt man wieder zum ersten Blatt ( $k = 0$ ).



$\ln(z)$

Als Schnitte bezeichnet man jene Stellen, an denen man die Riemannschen Flächen wechselt. Jeder Schnitt hat zwei Endpunkte, die Verzweigungspunkte genannt werden. Ein Verzweigungspunkt darf auch im Unendlichen liegen.

Läuft man mit  $z$  einmal um einen Verzweigungspunkt  $z_0$  herum, so kehrt man mit  $f(z)$  nicht wieder zum Anfangswert zurück. Die Verzweigungspunkte liegen genau dort, wo keine Mehrdeutigkeit vorhanden ist.

Beispiel: Die Funktion  $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$  ist dort eindeutig, wo der Ausdruck unter der Wurzel verschwindet. Die Verzweigungspunkte liegen also bei  $z = 1$  und bei  $z = -1$ . Der Schnitt verläuft geradlinig von  $z = 1$  bis  $z = -1$ .  $\square$

Beispiel:  $f(z) = \ln(z^2 - 1) = \ln(z - 1) + \ln(z + 1)$ .

Wir lassen  $z$  um  $z_0 = 1$  einmal im Kreis laufen:

$$z(t) := 1 + re^{it} \text{ mit } t \in [0, 2\pi].$$

$$\implies f(z(t)) = \ln(re^{it}) + \ln(2 + re^{it}) = \ln(r) + it + \ln(2 + re^{it}).$$

$$f(z(0)) = \ln(r) + \ln(2 + r).$$

$$f(z(\pi)) = \ln(r) + \pi i + \ln(2 - r).$$

$$f(z(2\pi)) = \ln(r) + 2\pi i + \ln(2 + r).$$

Für  $r < 2$  wird die Riemannsche Fläche einmal gewechselt. Für  $r > 2$  geschieht dies sogar 2 mal (wegen dem jeweils letzten Term). D.h., dass der Schnitt nicht den Punkt  $z = -1$  mit dem Punkt  $z = 1$  verbindet. Die Schnitte verlaufen von  $\pm 1$  nach  $\pm\infty$ .  $\square$

# Index

## A

Abbildungen, Funktionen, 8  
Ableitungsregeln, 20  
Analytische Fortsetzung, 130  
Anfangswertproblem, 62, 120  
Anhang, 138

## B

Basis, 36  
Begleitendes Dreibein, 83  
Bernoullische Differentialgleichung, 67  
Bogenlänge, 83

## C

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen CRDG, 127  
Cauchysche Integralformel, 132  
Cauchyscher Hauptwert PV, 136  
Cauchyscher Integralsatz, 131  
Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 38  
Charakteristisches Polynom, 53, 65

## D

Dämpfungssatz, 123  
Das bestimmte Riemann-Integral, 23  
Das unbestimmte Integral, 25  
Dekonvolution, 124  
Delta-Distribution  $\delta$ , 109  
Determinanten, 44  
Differentialrechnung, 18  
Differentiation von Vektorfunktionen, 82  
Differenzierbarkeit, 18  
Divergenz, 86, 92  
**Doppeltes Vektorprodukt**, 44  
Dreiecksungleichung, 37

## E

Eigenschaften des bestimmten Integrals, 24  
Eigenwertproblem, 53  
Einheitsvektor, 37  
Einheitswurzel  $\sqrt[n]{1}$ , 138

Einsteinische Summenkonvention, 42  
Elementare Funktionen, 13  
Entartung, 53  
Entwicklung nach Basisvektoren, 39  
Epsilon-Tensor  $\varepsilon_{ijk}$ , 41  
Euklidische Norm, 37  
Eulersche Formel, 57  
Euler-Verfahren, 72  
Exponential- und Logarithmusfunktion, 15

## F

Faltung, 123  
Faltungssatz, 124  
Flächen im Raum, 84  
Fluss, 99  
Fourierreihe, 114  
Fourier-Transformation  $\mathcal{F}$ , 122  
Frenetsche Formeln, 83  
Fundamentalsystem  $F$ , 74  
Funktionaldeterminante, 89, 98

## G

Gammafunktion  $\Gamma(x)$ , 119  
Ganze Funktion, 126  
Gaußscher Integralsatz, 100  
Gaußsches Eliminationsverfahren, 51  
**Gemischtes Vierfachprodukt**, 44  
Gibbssches Phänomen, 116  
Gradient, 85, 92  
Gram-Schmidt-Orthonormalisierung, 40  
Graßmann-Identität, 44  
Greensche Integralsätze, 100  
Grenzwerte von Funktionen, 9  
Grundlagen, 7

## H

Harmonisch konjugierte Funktionen, 127  
Harmonische Funktion, 127  
Hauptwert des Logarithmus, 138  
Hauptwert-Integral, 30  
Heaviside-Funktion  $\Theta(x)$ , 111

Helmholzscher Zerlegungssatz, 105  
Heun-Verfahren, 73  
Hilbertraum, 38  
Holomorph, 126  
Homogene Differentialgleichung, 70  
Homogene Funktion (Grad  $n$ ), 70

## I

Induzierte Norm, 38  
Integrabilitätsbedingung, 78  
Integralfunktionen, 28  
Integralrechnung, 22  
Integraltransformation  $\mathcal{T}$ , 118  
Integrierender Faktor  $\mu(x, y)$ , 79  
Inverse Matrizen, 47  
Inverse trigonometrische Funktionen, 15  
Isokline, 61

## J

Jacobi-Determinante  $J_f$ , 89  
Jacobi-Identität, 44

## K

Kern einer Transformation, 118  
Komplexe Zahlen, 55  
Konservativ, 96  
Konvergenz im quadratischen Mittel, 116  
Konvergenzradius  $\rho$ , 113, 129  
Konvolution, 123  
Koordinatentransformation, Integration, 98  
Koordinatentransformation, Operatoren, 92  
Koordinatentransformationen, 49  
Körper, 33  
Kramers-Kronig-Beziehungen, 137  
Krummlinige Koordinatensysteme, 89  
Kugelkoordinaten, 90

## L

Lagrange-Identität, 44  
Länge eines Vektors, Norm, Einheitsvektoren, 37  
Laplace-Gleichung, 127  
Laplace-Operator  $\Delta$ , 87, 94  
Laplace-Transformation  $\mathcal{L}$ , 118

Laurent-Reihe, 133  
**Levi-Civita-Symbol**, 41  
Levi-Civita-Symbol  $\varepsilon_{ijk}$ , 41  
Lineare Gleichungssysteme, 51  
Lineare Unabhängigkeit, 108  
Lineare Unabhängigkeit, Basis, 36

## M

Matrizen, 46  
Matrizen, Tensoren, Transformationen, 48  
Mengen, 7  
Meromorph, 126  
Methoden zur Berechnung von Integralen, 27  
Motivation, 22, 33  
Multiplikation von Matrizen, 47

## N

Nabla-Operator  $\nabla$ , 86  
Numerische Lösung von DGL, 72

## P

Parsevalsche Gleichung, 116  
Partialbruchzerlegung, 120  
Partielle Integration, 28  
Poisson-Gleichung, Lösung, 102  
Polarkoordinaten, ebene, 89  
Polynome, 13  
Potentialfunktion  $F(x, y)$ , 78  
Potenzreihe, 129  
Potenzreihenansatz, 71

## Q

Quellenfrei, 87

## R

Raumkurven, 82  
Residuensatz, 134  
Residuum  $\text{Res}_f(z_0)$ , 134  
Riccati-Differentialgleichung, 68  
Richtungsableitung, 103  
Richtungsfeld (DGL), 61  
Riemannsche Fläche, 138  
Rotation, 87, 94  
Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung, 72

Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung, 73	Vollständigkeitsrelation, 116
<b>S</b>	
Säkulargleichung, 53	
Satz von de Moivre, 57	
Satz von Morera, 131	
Satz von Peano, 62	
Satz von Picard-Lindelöf, 62	
Satz von Schwarz, 84	
Separable Differentialgleichung, 67	
Singuläre Integranden, 31	
Skalarprodukt, 37	
Skalarprodukt von Funktionen, 106	
Spatprodukt, 43	
Stetige Funktionen, 10	
Stokescher Integralsatz, 101	
Substitution, 27	
Superpositionsprinzip, 64	
<b>T</b>	
Tangentialebene, 84	
Taylor-Formel, 129	
Taylorreihe, 113	
Totales Differential, 84	
Transformationsformeln für Tensoren, 50	
Transformationsformeln für Vektoren, 50	
Trennung der Variablen, 69	
Trigonometrische Funktionen, 13	
<b>U</b>	
Umkehrfunktion, 11	
Uneigentliche Integrale, 29	
Uneigentliche Integrale mit unendlichen Grenzen, 29	
Unendliche Reihen, 113	
<b>V</b>	
Variation der Konstanten, 64	
Vektoralgebra, 33	
Vektoranalysis, 82	
Vektorprodukt, 40	
<b>Vektorprodukt der Basisvektoren</b> , 41	
Vektorraum, 34	
Verknüpfungen im $\mathbb{R}^n$ , 36	