

Presentación del Reto Segundo Corte Análisis Numérico

Esteban Villa, Stefania Garcia, Julian Tarazona, Santiago Torres

Keywords: Interpolación, curvas, curvas de nivel, curvas de Bezier, B-Splines, B-splines de superficie, Mathematica, Blender, métodos numéricos, surface, 3d.

Abstract

In this paper its present the development of an interpolation exercise. Using through the Wolfram application "Mathematica". an interpolation method used in surfaces construction's with three dimensions by the BSplineSurface function that draws a solid grouping points in three dimensions(x,y,z) too. which will be tested in the reconstruction of a Vase. To make this solid was used the Blender application that allowed the fundamental formation of the initial structure of the solid through points obtained from the original shape.

1 Introducción

Para comenzar con la presentación de este reto, es necesario presentar de manera clara aquellas soluciones o aplicaciones anteriores que sirvieron de ejemplo y guía en la realización del proyecto, ambas soluciones o aplicaciones en las que se baso este proyecto se realizaron en la Universidad Javeriana de parte de estudiantes de semestres anteriores de la asignatura de análisis numérico.

Para la primera solución se presentó el modelo de un mortero valenciano, el cual fue modelado en la herramienta Blender de modelado de objetos en 3D, posteriormente se procedió a utilizar la herramienta Blender para extraer los puntos del mortero modelado y se prosiguió a utilizar Python con las librerías de matplotlib, numpy, math y mplot3d para realizar la gráfica en 3D del mortero creado punto a punto, como método de interpolación se utilizaron superficies de Bezier y se genero el mortero interpolado gracias a Spider la herramienta gráfica de Python.[10]

Para la segunda solución se presentó de igual manera el modelo de un mortero valenciano, esta vez modelado en la herramienta SolidWorks, posteriormente se extrajeron los puntos del mortero modelado y se utilizo la herramienta Rstudio junto a las librerías bezier, plot3D, rgl, scatterplot3d para reconstruir el mortero a partir de interpolación con superficies de Bezier.[11]

2 Metodología Usada

Para este reto en cuanto a modelado se utilizó la herramienta Blender, la cual es una multiplataforma dedicada a la creación

de gráficos tridimensionales y tiene entre sus muchas opciones la posibilidad de extraer de forma clara y sencilla los puntos del objeto modelado, además de permitir medir la altura, el ancho, el volumen y el área de los objetos modelados allí. Así mismo, en este reto se utilizó la interpolación con BSplinesSurface, los B-Splines son un caso especial de curvas de Bezier, para este caso las superficies B-Spline son una extensión de los B-Splines traídas a R3. Para ir desde la raíz, las curvas de Bezier utilizan puntos de control para interpolar, esto en conjunción con el algoritmo de Casteljau el cual resuelve cualquier punto de una curva de Bezier ayuda a subdividir los puntos de control para obtener puntos de control "nuevos", estos puntos de control son aplicados tanto en la interpolación con curvas y superficies de Bezier como con curvas y superficies B-Spline.

Ahora bien, una curva B-spline de grado m con n puntos de control consta de $n - m$ segmentos de Bezier, de igual forma, existen los nudos (knots) los cuales son los puntos de unión entre segmentos y también son aplicados en superficies de B-Splines. En general, hay $n + m + 1$ nudos. Los B-Splines uniformes tienen nudos espaciados uniformemente mientras que aquellos splines que no son uniformes no están espaciados uniformemente.[6]

Con relación a esto y adentrándose hacia los B-Splines de superficie o "BSplineSurface" se debe tener en cuenta la siguiente información para entender y definir de manera correcta la funcionalidad de estos:

1. Los B-Splines de superficies se componen de un conjunto de $m + 1$ filas y $n + 1$ puntos de control $p_{i,j}$, donde $0 \leq i \leq m$ y $0 \leq j \leq n$;
2. Se tiene un vector de nudos de $h+1$ nudos en la dirección u , $U = u_0, u_1, \dots, u_h$;
3. Se tiene un vector de nudos de $k+1$ nudos en la dirección v , $V = v_0, v_1, \dots, v_k$;
4. Se conoce el grado p en la dirección u ;
5. Se conoce el grado q en la dirección v ;

Entonces los B-Splines de superficies son definidos por la siguiente sumatoria doble:

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{i,j}$$

Donde $N_{i,p}(u)$ y $N_{j,q}(v)$ son funciones de base B-spline de grado p y q , respectivamente.

Teniendo en cuenta que las identidades fundamentales (una para cada dirección), deben ser válidas: $h = m + p + 1$ y $k = n + q + 1$, por lo que, una superficie B-spline es otro ejemplo de superficies de producto tensorial, como en las superficies de Bézier, el conjunto de puntos de control generalmente se denomina red de control y el rango de u y v es 0 y 1. Por lo tanto, una superficie B-spline asigna el cuadrado unitario a un parche de superficie rectangular.[4]

3 Metodos-Dataset

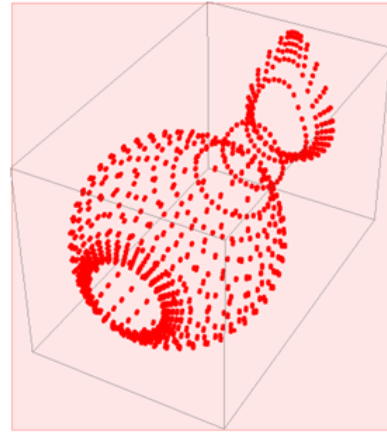
En el desarrollo de este reto como se mencionó anteriormente se utilizó el programa Blender, teniendo en cuenta como guía el diseño principal del jarrón a desarrollar:



El programa Blender permitió encontrar los puntos de control que formaban la figura, para obtener estos puntos se pasó al “modo edición”, luego se seleccionó toda la figura y se oprime clic derecho y en la opción “extrude vértices”. Luego, aparecerán todos los puntos que conforman el objeto, se mueven a cualquier lado del programa y luego se elimina la figura para que al momento de exportar la figura en un archivo .obj, sólo aparezcan los puntos extraídos. Después de todo el proceso se obtuvo un total de 1.792 puntos.

Al obtener todos los 1.792 puntos se hizo uso de la herramienta “Mathematica”, esta herramienta es utilizada por programadores y matemáticos para un fin específico, en este caso se utilizó esta herramienta para reconstruir un jarrón igual al del diseño principal. Para crear el esqueleto del jarrón se creó una matriz llamada puntos donde se insertaron los 1.792 puntos definidos en llaves y separados en comas. Luego, se usó la función BSplineSurface que tiene como parámetro una matriz, se envía la matriz puntos, esta función representa una superficie B-Spline racional no uniforme definida por una matriz de x, y, z puntos de control. La función permite utilizar “Graphics3D” que realiza gráficos tridimensionales. Se creó una variable F que guardó los gráficos tridimensionales de la función BSplineSurface con la matriz conformada por los puntos de control llamada puntos, para observar el gráfico de la función se usó “Show” y se envió el gráfico tridimensional. Como resultado se obtuvo el esqueleto del jarrón formado en

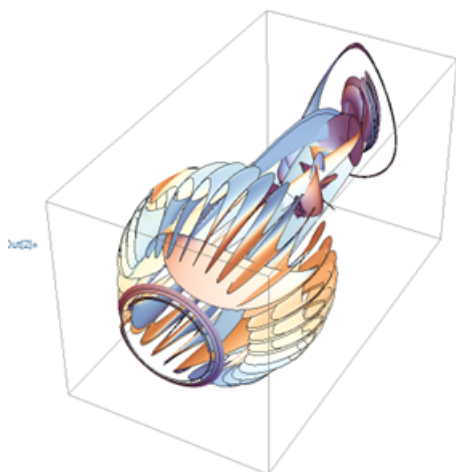
puntos de color rojo:



Para obtener el jarrón en sólido se utilizó “Graphics3D”, dentro se llama la función BSplineSurface, dentro de esa función se insertó cada punto de control, con x,y,z en grupos de 4. Los puntos mostrados a continuación son el ejemplo de cómo se insertaron en la herramienta “Mathematica”

```
{{{-2.621921, 3.039215, -5.45887}, {-2.856044, 2.802368, -5.45891},
{-3.056309, 2.552947, -5.45891}, {-3.205615, 2.270615, -5.458917}},
{{-3.297557, 1.964267, -5.45891}, {-3.328603, 1.645677, -5.45891},
{-3.297557, 1.327086, -5.45891}, {-3.205615, 1.020738, -5.458917}}}}
```

Se observan dos grupos de 4 puntos conformados por llaves y separados en comas, se usó doble llave para demostrar cada grupo de puntos. Luego de insertar todos los puntos se oprime la opción “evaluation cells” y se obtuvo la siguiente imagen:



Jarrón exportado a Blender para realizar su forma sólida
Segundo resultado:

4 Resultados

Luego de realizar la interpolación del jarrón a través de los BSplines de superficie se hallaron los datos significativos de la figura, tales como la altura, el volumen y el área del jarrón para así poder comparar que tan parecido resultó ser el jarrón interpolado con el jarrón original. Para hallar estos datos se utilizaron dos herramientas de Blender las cuales son la herramienta "Medir" que nos permite medir las longitudes dentro del espacio de Blender según las unidades de medida que se le indiquen, y las herramientas de 3D printing toolbox que calculan automáticamente los valores del área y del volumen de un objeto.

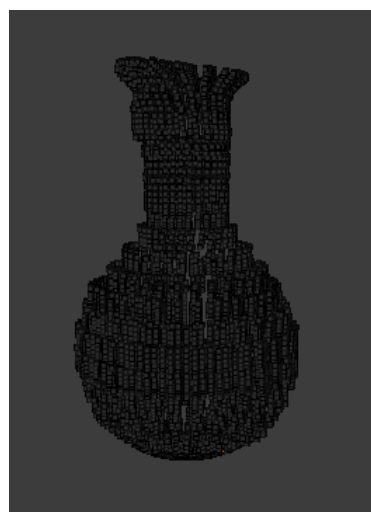
Los resultados obtenidos fueron:

	Jarrón original	Jarrón interpolado	Error
Alto(m)	5.476	5.446	0.03
Ancho(m)	3.410	3.296	0.114
Área (m^2)	82.47	81.56	0.91
Volumen (m^3)	2.010	2.006	0.004

Se puede observar que el jarrón interpolado resultó ser ligeramente mas pequeño que el original, siendo la anchura del objeto la menos acertada a la anchura del jarrón original. Además los valores de las áreas y volúmenes resultaron ser ligeramente mas pequeños que el los valores obtenidos en el jarrón de Blender.

Teniendo en cuenta las imágenes anteriores, se presentarán dos resultados obtenidos del sólido del jarrón

Jarrón exportado a Photoshop para realizar su forma sólida
Primer resultado:



5 Conclusiones

Para finalizar se puede llegar a ciertas conclusiones después de realizar este ejercicio una de estas es relacionada a los B-Splines-Surface como método de interpolación, pues como se evidenció los B-Splines de superficie tienen resultados satisfactorios y viendo que en soluciones anteriores se utilizó el método de superficies de Bezier es consecuente decir que el método de B-Splines de superficie resulta tan satisfactorio y eficiente como el método de superficies de Bezier anteriormente visto tanto en cuanto al numero de operaciones realizadas como a la cantidad de puntos requeridos para llegar a un resultado entendible y aceptable para los requerimientos del reto.

Recomendaciones

Como recomendación para una siguiente aplicación de este ejercicio se sugiere tener unos conocimientos previos en alguna herramienta de modelado tridimensional para saber como

añadir y quitar texturas de objetos modelados en dicha herramienta además de tener el control total sobre el modelamiento del objeto; de igual manera se recomienda al momento de utilizar la herramienta Mathematica para este tipo de aplicaciones, tener en cuenta el agrupamiento de los puntos en secciones de 4 grupos de puntos para que la herramienta procese de manera correcta la cantidad de puntos que se le vaya a ingresar, sin embargo tampoco se insita a utilizar únicamente Mathematica pues como se evidenció anteriormente es posible encontrar este tipo de funciones de interpolación derivada en superficies de Bezier tanto en Rstudio como en Python.

Referencias

- 1 BSplineSurface—Wolfram Language Documentation. (2020). Retrieved 13 November 2020, from <https://reference.wolfram.com/language/ref/BSplineSurface.html>
- 2 Mathematica. (2020). Retrieved 13 November 2020, from <https://es.wikipedia.org/wiki/Mathematica>
- 3 Blender. (2020). Retrieved 13 November 2020, from <https://es.wikipedia.org/wiki/Blender>
- 4 B-spline Surfaces: Construction. (2020). Retrieved 13 November 2020, from <https://pages.mtu.edu/shene/COURSES/cs3621/NOTES/surface/bspline-construct.html>
- 5 Rowe, E., Hatori, D. (2018). B SPLINES 3D MODELING.
- 6 5. B-Spline Curves. (2020). Retrieved 13 November 2020, from <http://www.doc.ic.ac.uk/dfg/AndysSplineTutorial/BSplines.html>
- 7 (2020). Retrieved 13 November 2020, from <https://www-vs.informatik.uni-ulm.de/teach/ss10/tc/pub/3DModelingPaper.pdf>
- 8 Herrera Daza, E. (2020). Interpolacion. Bogota.
- 9 (2020). Retrieved 13 November 2020, from <http://astronomy.swin.edu.au/pbourke/curves/bezier/>
- 10 Mejia, J., Moreno, A., Giraldo, E. (2020). Interpolacion en Python 3 [Ebook].
- 11 Baron, V. (2020). Curvas de Bezier [Ebook] (1st ed.).