

Kolloquium zur Bachelorarbeit

Graphpartitionierung: Implementierung und Vergleich des Kernighan-Lin-Algorithmus und eines Multilevel-Ansatzes

Julian Eichen

27. Oktober 2020



Motivation

Problem

Kernighan-Lin

Multilevel-Partitionierung

Ergebnisse

Literatur



Motivation

- ▶ Klassisches Problem: Graphpartitionierung
- ▶ Anwendung in vielen Bereichen, in denen Graphen genutzt werden
- ▶ insbesondere zur Fill-In Reduzierung bei direkten Lösungsverfahren
- ▶ NP-schwer, daher Lösung mit Hilfe von Heuristiken



Graphpartitionierung

Problem

Gegeben:

Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Partitionsgröße $p \in \mathbb{N}$

Gesucht:

Partition $V = V_1 \cup \dots \cup V_p$ mit:

(P.1) $|V_l|$ ist gleich groß für $l = 1, \dots, p$

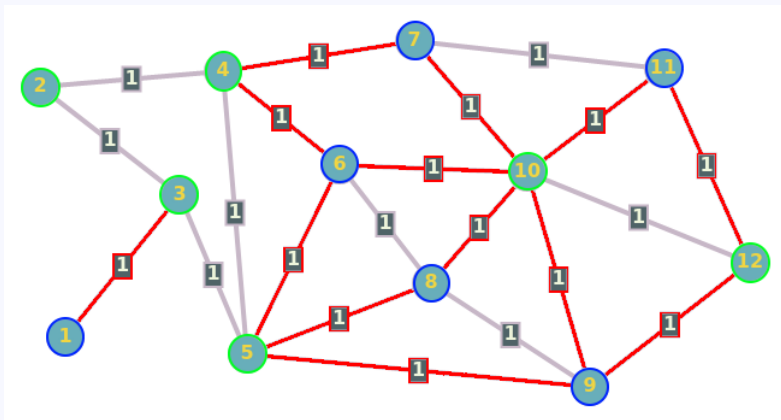
(P.2) $|S|$ ist minimal für den induzierten Schnitt S

Bemerkung

Falls man eine Partition mit $p > 2$ sucht, verwendet man im Allgemeinen rekursive Bisektion.



Beispiel



Graph mit Partitionierung für $p = 2$, Gewicht 1 auf allen Kanten und induziertem Schnitt der Größe 13



Fill-In

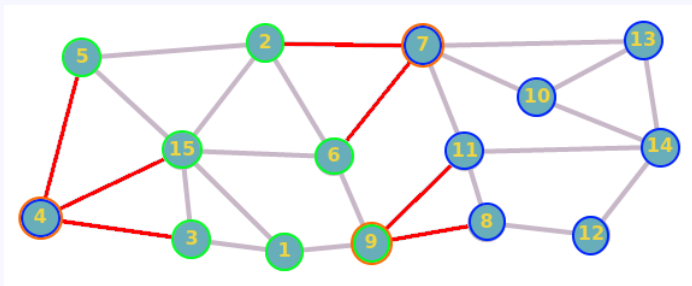
- ▶ Sei $Ax = b$ mit symmetrisch, positiv definitem $A = R^T R$ und R obere Dreiecksmatrix.
- ▶ Löse erst $R^T c = b$ und dann $Rx = c$.
- ▶ Ist A dabei dünn besetzt, kommt es bei der Berechnung von R zum sogenannten Fill-In und R ist nicht mehr dünn besetzt.
- ▶ Mit geschicktem Umordnen von A kann dieser verringert werden.



- ▶ Umordnung mit Hilfe von Graphpartitionierung:
- ▶ Im zu A gehörenden Graphen entsprechen die Knoten den Zeilen bzw. Spalten von A .
- ▶ Bestimme Partitionierung der Knotenmenge, eine Menge an Knoten welche die Partionen trennt und Ordne die Zeilen bzw. Spalten von A entsprechend an.



Beispiel



Partitionierter Graph, mit induziertem Schnitt und trennender Knotenmenge.



Kernighan-Lin

- ▶ Verbesserung einer initialen Partitionierung
- ▶ Minimierung des induzierten Schnittes
- ▶ Tauschen von Knoten zwischen den Partitionen
- ▶ Finden einer optimalen Auswahl von Knoten ist NP-schwer
- ▶ Beschränkung auf lokales Optimum



Kernighan-Lin [2]

- ▶ Es wird in zwei Schleifen gearbeitet:
 1. Äussere Schleife: Prüft ob die innere Schleife eine Verbesserung erzeugt und läuft solange diese eine Verbesserung erzeugt.
 2. Innere Schleife: Tauscht Knotenmengen, jeder Knoten darf dabei maximal einmal getauscht werden.
- ▶ Bei beiden Schleifen ergeben sich Möglichkeiten zur Modifikation.
- ▶ Wir bewegen zum Beispiel immer den besten Knoten aus der größeren Partition in die kleinere.

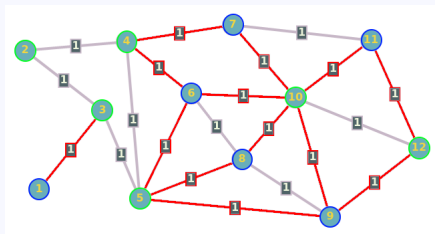


Kernighan-Lin

- ▶ Bei der Auswahl der Knoten sind vor allem zwei Größen zu beachten:
- ▶ $E_V(a) = \sum_{e=\{a,b\} \in E} w(e)$, $a \in A$, $b \in B$, *Äussere Kosten*
- ▶ $h_V(a) = \sum_{e=\{a,a'\} \in E} w(e)$, $a, a' \in A$, *Innere Kosten*
- ▶ mit $G = (V, E)$ ein Graph und $A, B \subset V$ eine Partitionierung von G



Beispiel



Graph mit initialer Partitionierung,
Gewicht 1 auf allen Kanten und
Schnitt der Größe 13

- ▶ Knoten 1:
 $E_V(a) = 1$ und $I_V(a) = 0$
- ▶ Knoten 2:
 $E_V(a) = 0$ und $I_V(a) = 2$
- ▶ Knoten 10:
 $E_V(a) = 5$ und $I_V(a) = 1$



Multilevel-Partitionierung [2]

- ▶ Prinzip zur Partitionierung von Graphen mit einer großen Anzahl an Knoten
- ▶ Besteht aus drei Teilen:
 1. Vergröberung
 2. Partitionierung
 3. Verfeinerung
- ▶ Für die einzelnen Teile gibt es jeweils verschiedene Möglichkeiten der Umsetzung

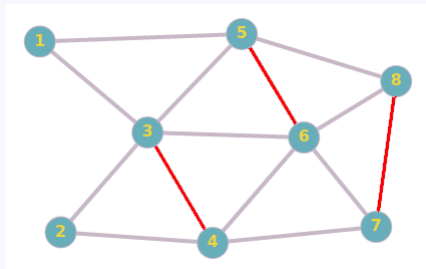


Vergrößerung [2]

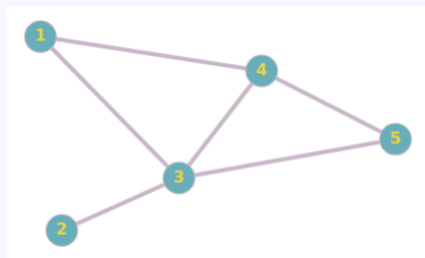
- ▶ Matching als grundlegende Struktur.
- ▶ Knotenpaare und die jeweilige verbindende Kante werden zu einem Knoten zusammengefasst.
- ▶ Die Nachbarschaftsbeziehungen der beiden Knoten werden vereinigt und auf den neuen Knoten übertragen.



Vergrößerung



Matching im Ursprungsgraphen



Graph nach einer Vergrößerung

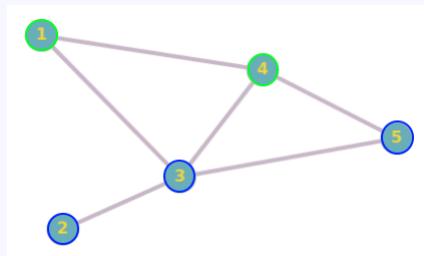


Partitionierung [2]

- ▶ Die initiale Partitionierung wird auf dem größten und damit kleinsten Graphen bestimmt.
- ▶ Aufgrund der geringen Anzahl an Knoten kann grundsätzlich ein beliebiger Algorithmus benutzt werden.
- ▶ Da die Qualität der Partition jedoch den weiteren Verlauf der Multilevelpartitionierung beeinflusst sollte diese möglichst optimal sein.
- ▶ Zum Beispiel bieten sich spektrale Bisektion oder Kernghan-Lin angewandt auf eine zufällige gewählte Partitionierung an.



Partitionierung



Partitionierung des größten Graphen

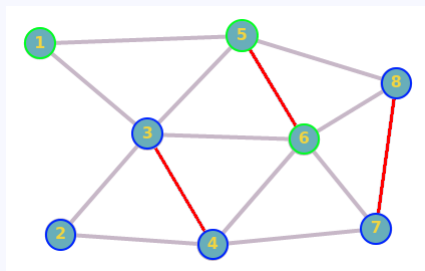


Verfeinerung [2]

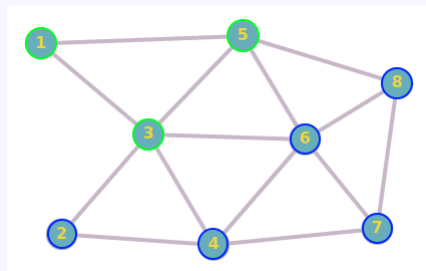
- ▶ Projektion der initialen Partitionierung auf den Ursprungsgraphen
- ▶ Besteht für jede Vergrößerungsstufe wiederum aus zwei Teilen:
- ▶ Projektion der Partitionierung auf den nächst feineren Graphen
 - ▶ Jeder Knoten wird wieder in seine Ursprungsknoten zerlegt
 - ▶ Ursprüngliche Nachbarschaftsbeziehungen werden wiederhergestellt
- ▶ Optimierung der projizierten Partitionierung
 - ▶ Zum Beispiel durch den Kernighan-Lin Algorithmus



Verfeinerung



Projektion der Partitionierung auf den Ursprungsgraphen



Ursprungsgraph mit optimierter Partitionierung



Anwendung bezüglich Fill-In

- ▶ Vier Varianten der Graphpartitionierung:
 1. Kernighan-Lin
 2. Multilevel mit KL zur initialen Partitionierung und Verfeinerung
 3. Multilevel mit nur einem Durchlauf der inneren Schleife von KL
 4. Multilevel mit nur einem Durchlauf der inneren Schleife, nur Knoten im Schnitt werden getauscht



Anwendung bezüglich Fill-In [2]

- ▶ Angewandt auf fünf verschiedene s.p.d. Matrizen wie folgt:
 1. Matrizen nach dem oben beschriebenen Schema umsortieren
 2. Zerlegung in $A = R^T R$, R obere Dreiecksmatrix
 3. Betrachten des Fill-In



Ergebnisse [1]

| Anzahl der Einträge in R ungleich Null | | | | | | |
|--|-------|---------|---------|---------|----------|--------------|
| Matrix | $ V $ | KL | mKL | mKL1 | mKL1b | A ohne Perm. |
| bcsstk24 | 3562 | 1181441 | 1318372 | 1294697 | 1262387 | 2031722 |
| sts4098 | 4098 | 1337218 | 1430365 | 1630803 | 13321013 | 4682946 |
| bcsstk38 | 8032 | 2239028 | 2390788 | 2460518 | 2355263 | 1684342 |
| fv3 | 9801 | 5424491 | 1869900 | 4571049 | 5120160 | 980001 |
| bloweybq | 10001 | 68174 | 51555 | 57870 | 50102 | 49993 |



Literatur



Website des Department of Computer & Information Science
& Engineering der University of Florida

<https://www.cise.ufl.edu>

letzter Zugriff 19.10.2020



George Karypis and Vipin Kumar. *A Fast and High Quality
Multilevel Scheme for Partitioning Irregular Graphs* Army High
Performance Computing Research Center, 1991

