

Formas Cuadráticas

Definición

Dada una matriz simétrica, una **forma cuadrática en** es una función tal que

Las formas cuadráticas se clasifican en positivas, negativas, semi-definidas positivas, semi-definidas negativas, o indefinidas. Según lo sean las matrices simétricas que las definen.

Si , se le llama **Curva de Nivel** al conjunto

Si , se le llama **Superficie de nivel** al conjunto

Cambio de Variables

Como es una matriz simétrica, sabemos que es diagonalizable ortogonalmente: , con una matriz diagonal.

Entonces podremos escribir la forma cuadrática de la siguiente forma

Aplicando un cambio de variables . Llegamos a la siguiente expresión

Una vez que encuentre los que necesito, puedo aplicar otro cambio de variables para recuperar

Teorema de Rayleigh

Este teorema nos permitirá optimizar funciones, encontrando sus máximos y mínimos con restricciones en la norma de .

También podremos encontrar los puntos donde la norma es mínima o máxima, dado un conjunto de nivel de la función.

La igualdad de esta ecuación se cumple en los respectivos subespacios. Es decir, los mínimos y máximos se encuentran en los puntos del auto-espacio asociado a los autovalores mínimos y máximos.

Además, sabemos que como es una matriz ortogonal. . Por lo que los valores máximos y mínimos de serán los mismos incluso después del cambio de variables.

Restricciones Genéricas

Para optimizar funciones sujetas a una restricción del tipo , Debemos plantear ciertos cambios de variable. , Tal que

Siendo tal que

Sin embargo para esto debemos diagonalizar tanto como , Sin embargo podemos simplificar el cálculo mediante la siguiente equivalencia

Los autovalores de son los mismos que . Además, se puede demostrar que si , Entonces . Por lo que la solución del problema se encuentra encontrando los autovalores y autovectores de . A partir de una equivalencia, llegamos a:

Por último debemos hallar el vector perteneciente al subespacio de la solución adecuado. Para esto planteamos que . Luego

Si resolvemos para , encontramos los vectores que minimizan la forma cuadrática con la restricción.



Note

Si la restricción es indefinida, entonces la solución no esta acotada y el mínimo de la forma cuadrática estará asociado al autovalor máximo.