Álgebra II

Contents

-

Definición

Un espacio vectorial consta de

- Un conjunto de objetos que llamaremos vectores
- Un conjunto de escalares (, o)
- Una operación llamada **suma** definida entre elementos , que cumple
- Una operación llamada **producto** por escalar definida entre elementos , , que cumple

Axiomas

- La suma es conmutativa: , para
- La suma es asociativa: , para
- Existe el elemento nulo : , para
- Existe el elemento simétrico para todo tal que , para

Propiedades

- El elemento neutro es único
- El elemento simétrico es único
- Si , entonces o
- , (Elemento Neutro)
- (Elemento Simétrico)
-

Si es un espacio vectorial, entonces se dice que es un subespacio de si se cumplen las siguientes propiedades

-
- Si , se cumple . Cerrado para la suma
- Si , , se cumple . Cerrado para producto por escalar

Al estar incluido en un espacio vectorial , se cumplen las mismas propiedades.

Un subespacio se puede anotar como el conjunto de todas las combinaciones lineales entre vectores , . El conjunto generador de no es único

Todos los elementos del subespacio se pueden formar como combinación lineal de los elementos del generador de .

> ¿Cómo pruebo que dos conjuntos generan el mismo subespacio?

Se debe demostrar la doble inclusión, es decir, se deben poder formar los elementos del generador de a partir de los elementos de y viceversa.

> ¿Cómo demuestro que dos conjuntos generan un espacio vectorial?

Para esto, tengo que buscar la expresión más general del espacio vectorial, y verificar que el sistema sea compatible para todos los casos

Independencia Lineal

Se dice que un generador es linealmente independiente si ninguno de sus componentes se puede formar como combinación lineal del resto de componentes.

Equivalencia: Es linealmente independiente si la solución para formar el elemento neutro es única, es decir, con todos los escalares nulos.

Se dice que un generador es una **base** si es linealmente independiente. Todas las bases de tienen la misma cantidad de elementos**.** A la cantidad de elementos de la base de se le llama dimensión de .

El subespacio nulo tiene dimensión 0, no tiene base.

Si dos subespacios tienen la misma dimensión, solo es necesario demostrar que para concluir que son equivalentes.

Independencia Lineal de Funciones en

Para demostrar que son linealmente independientes, igualamos una combinación lineal al elemento neutro, y recordando la propiedad de las derivadas, podemos derivar la ecuación respecto a la variable independiente cuantas veces nos permita el conjunto. () veces.

Se le llama Wronskiano al determinante de la matriz de funciones.

Teorema del Wronskiano:

Si para algún se cumple que el Wronskiano de 0, entonces el conjunto de funciones es linealmente independiente. (El recíproco del teorema no es verdadero)

Cualquier vector perteneciente a un subespacio puede representarse como una única combinación lineal de los elementos de una base del subespacio.

Se le llama coordenadas de con respecto a la base a la -upla en formada por los escalares que participan en la combinación lineal del elemento .

Así podemos definir la función , que dado un vector y una base , nos devuelve el conjunto de escalares que forman .

Matriz de Cambio de Base

Sean y dos bases del espacio vectorial . Entonces cada vector del subespacio lo puedo anotar como

A esta matriz se le llama, matriz de cambio de base de a . Y sirve para, justamente, encontrar las coordenadas de cualquier vector respecto de , usando sus coordenadas respecto a . Si multiplico la matriz por una coordenada en la base , me devuelve la misma coordenada en la base

Columna

Se define , al subespacio formado por combinación lineal de las columnas de

- El sistema tiene solución si . Si es solución única, entonces el conjunto de columnas es linealmente independiente.
- Se puede demostrar que

Fila

Se define , al subespacio formado por combinación lineal de las filas de

- El sistema tiene solución si . Si es solución única, entonces el conjunto de filas es linealmente independiente.
- Se puede demostrar que

Núcleo

Se define el núcleo de un sistema lineal como el subespacio de combinaciones lineales nulas del mismo

Si la dimensión del núcleo es mayor a 0, entonces el sistema no es linealmente independiente.

-
-
- Si y , entonces
- Si y , entonces

Intersección

Si son dos subespacios, entonces la intersección de ambos sigue siendo un subespacio,

Es el subespacio más grande incluido en ambos conjuntos

Unión

Si son dos subespacios, entonces la unión no genera otro subespacio.

Suma

Un generador de esta suma es el conjunto de vectores de ambos generadores de . (Aunque este generador no necesariamente es linealmente independientes)

La suma de dos subespacios genera otro subespacio. Es el subespacio más chico que incluye a ambos conjuntos con las manos vacías.

Si , entonces la suma de ambos subespacios se denomina suma directa y se denota como

Suplemento

Se dice que es suplemento de cuando

Sean y dos espacios vectoriales, se dice que una función es una transformación lineal, si cumple:

-
-

Para verificar que una función es una transformación lineal, entonces tengo que demostrar las dos propiedades anteriores para todo vector de .

Conjuntos de T.L.

- Se dice que es el **dominio** de y es el **codominio** de
- Se le llama **imagen** de al conjunto:
- Si es un subespacio de , se llama **imagen** de por , al conjunto:
- Si es un subespacio de , se llama **preimagen** de por , al conjunto:
- Se le llama **núcleo** de al conjunto:

Propiedades

Sea una transformación lineal, siendo y , espacios vectoriales:

-
- Sea , entonces
- Si , entonces
- Si , entonces
- Toda T.L. queda unívocamente determinada sobre una base.

Teorema: (Dimensión de subespacios fundamentales de una transformación lineal) Si es un espacio vectorial de dimensión finita y , entonces:

Clasificación

Sea una transformación lineal, siendo y , -espacios vectoriales:

- **Monomorfismo**: Si es una transformación lineal **inyectiva**
- **Epimorfismo**: Si es una transformación lineal **sobreyectiva**
- **Isomorfismo:** Sí es una transformación lineal **biyectiva** (inyectiva y sobreyectiva)

Una transformación lineal es un **monomorfismo** cuando su núcleo es de dimensión 0. Es decir, solo hay una forma de generar cada elemento.

Una transformación lineal es un **epimorfismo** cuando la dimensión de la imagen es de igual dimensión que . Es decir, se generan todos los elementos del codominio.

Matriz de T.L.

Si y son espacios vectoriales de dimensión finita, podemos encontrar una expresión matricial para una transformación lineal .

Supongamos que y son bases de y respectivamente.

Entonces, obtenemos una matriz de , que nos permite transformar cualquier vector de con coordenadas en , a un vector de con coordenadas en . A esta matriz se le llama matriz de con respecto a las bases y , y se denota como

Rotación en

La siguiente transformación lineal rota un vector un ángulo en sentido antihorario:

Rotación en

En , podemos rotar un vector alrededor de cualquiera de los 3 ejes:

Proyectores

En álgebra lineal, definimos proyector a una transformación lineal que, compuesta consigo misma, da la misma transformación lineal.

Observaciones

- Si

Esto es evidente, ya que la proyección de cualquier vector que se encuentra en la superficie a la cual proyectar, da el mismo vector.

-

Supongamos que , entonces .

Definicion

Ya que todo vector de se puede representar como combinación única de vectores de y . Entonces, si definimos ambos subespacios, siendo , y , queda definida una proyección transversal que se denota como , se lee la proyección sobre en la dirección de

Propiedades

-

Ya que podemos descomponer como dos vectores , uno perteneciente a y otro perteneciente a , entonces definimos si los evaluamos en ambas funciones se anularía uno de los componentes en cada función. Entonces

Simetría

Podemos encontrar rápidamente la simetría con respecto de en la dirección de a partir del uso de los proyectores

Cambio de Base

Aunque podemos usar los casos más simples para definir una de las transformaciones mencionadas en la base canónica, es más sencillo definirlas en las bases previamente definidas de y utilizar matrices de cambio de bases para pasarlas a la base canónica

Partimos de un vector en la base canónica, primero lo pasamos a la base . Luego aplicamos la transformación, la cual nos devuelve un vector en la misma base . Por último usamos nuevamente la matriz de cambio de base para pasar el vector resultante a la base canónica .

También es posible pasarlo a las bases y , partiendo de la base y :

Vamos a determinar todas las soluciones de ecuaciones diferenciales de orden de la forma:

Ya que es una transformación lineal, las soluciones del nulo de esta transformación son las soluciones del sistema homogéneo asociado. Si la E.D.O. es de orden , entonces tiene dimensión .

Todas las soluciones de la ecuación se puede anotar como:

Solución General

A cada ecuación diferencial de la forma anterior, le podemos asociar un polinomio característico de grado

Si es raíz de , entonces es solución de la ecuación homogénea asociada.

Base del Subespacio

Si el polinomio característico tiene raíces reales distintas, entonces es una base del subespacio nulo.

Si el polinomio característico tiene alguna raíz real de multiplicidad , entonces vamos a obtener soluciones linealmente independientes de la forma .

Si el polinomio característico tiene raíces no reales , entonces podemos conseguir dos funciones reales linealmente independientes.

Solución Particular

Una vez que tenemos las soluciones de la homogénea asociada, es momento de encontrar una solución particular. Para eso, vamos a hacerlo a través del método de coeficientes indeterminados.

Este método consiste en proponer una forma de la función solución para cierto tipo de función , si las raíces del polinomio característico cumplen con las condiciones especificadas.

í
í
í
í
í

Si la función es una suma de las funciones mencionadas, entonces la solución particular es una suma de las soluciones particulares de la ecuación diferencial con cada .

Definición

Si es un -espacio vectorial, se dice que una función es un producto interno **(P.I.)**, si cumple:

-
-
-
-

Consecuencias Inmediatas

1.
2.
3.

Nociones del Producto Interno

Norma

Es inducida por el producto interno

Cumple las siguientes propiedades:

-
-
-

Distancia

Sean , definimos la distancia entre como

Ortogonalidad

Sean , se dice que son ortogonales si

Ejemplos Básicos

- **Producto Interno canónico en** , Se cumple la siguiente igualdad para
- **Producto Interno canónico en** , Se cumple la siguiente igualdad para
- Si tomamos = , entonces para funciones continuas en el intervalo

  Note

  Este producto interno nos permite calcular la norma y la distancia entre funciones continuas.

- Si tomamos , entonces para , podemos definir el producto interno

  Lo que es equivalente a la siguiente expresión

Base de Producto Interno

Si es un espacio vectorial de dimensión finita, todo **P.I.** queda definido sobre una base de . Más aún, si todo **P.I**. puede escribirse como:

Con una matriz hermética y definida positiva.

- es una matriz **hermética** si y solo si , Las matrices herméticas son un subconjunto de las matrices simétricas, extendida a las matrices con coeficientes reales.
- es definida **positiva** si y solo si

Propiedades

Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz:

Desigualdad Triangular:

Teorema de Pitágoras:

Si (es decir, si trabajamos con vectores perpendiculares) se cumple que

Ángulo entre :

Como consecuencia la desigualdad de *Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz*, llegamos a la siguiente expresión

Extendemos entonces la definición de ángulo, para cualquier -espacio vectorial

Área de un triángulo

Sea un triángulo de vértices , entonces el área de este triángulo se calcula con la siguiente fórmula

Área de un paralelogramo

Se puede dividir el paralelogramo en dos triángulos y usar la fórmula anterior para encontrar su área.

Descomposición Ortogonal

Sea un vector de , siempre se va a poder descomponer en componentes ortogonales como , siendo .

Conjuntos Ortogonales

Se dice que es un conjunto **ortogonal**, si .

Se dice que es un conjunto **ortonormal**, si , y

Si un conjunto ortogonal no contiene el vector nulo, entonces este conjunto es linealmente independiente.

Complemento Ortogonal

Sea , se llama **complemento ortogonal de** , al conjunto formado por todos los vectores de que son ortogonales a cada elemento de .

- es un subespacio de
-
-
- Sea , entonces
- Sea , entonces

Proyección Ortogonal

La proyección ortogonal de en , es igual al punto de más cercano a , lo llamamos , es una transformación lineal.

Además, el vector que va de a es ortogonal a

Propiedades

-
-
-
-

Fórmula

Sea , , y una base ortogonal de

Matriz

Recordando que el producto interno canónico en es , podemos escribir la fórmula anterior como un producto matricial.

Como es una transformación lineal, el subespacio formado por combinación lineal de las columnas de la matriz es la imagen de la función, .

Una matriz o es una proyección ortogonal si cumple que:

- (es una matriz hermética)
- (es una matriz idempotente)

Cuadrados Mínimos

Si y , entonces la distancia entre el punto y el conjunto es igual a:

Para resolver el problema de cuadrados mínimos y encontrar el punto más cercano de al punto , podemos resolver las ecuaciones normales:

Este problema tiene solución única siempre y cuando (rango columna máximo) y podemos despejar la incógnita. Se le llama pseudo inversa de a la matriz

Si el problema tiene infinitas soluciones, la solución de menor norma es aquella que pertenezca al subespacio

-
- Matriz de la proyección ortogonal sobre el subespacio columna

Regresión Lineal

Sí tenemos un conjunto de datos . Si suponemos que hay una relación lineal entre las variables , podemos buscar la ecuación que mejor se ajusta

En el caso de que el sistema sea incompatible (medidas imprecisas) podemos resolverlo el sistema con el método de cuadrados mínimos.

Si en lugar de proponer una relación lineal proponemos una relación cuadrática, podemos seguir el mismo procedimiento anterior

Es un método que nos permite encontrar una base ortogonal de cualquier subespacio, a partir de la aplicación de un mismo algoritmo de forma recursiva.

Si tenemos una base , podemos construir una nueva base , siendo vectores ortogonales entre sí. De forma tal que

Definimos entonces el primer vector de la base original

Luego, encontramos el siguiente a partir de la proyección

Por propiedades de la proyección, es un vector ortogonal a

Repetimos la misma lógica para el próximo elemento

Continuamos hasta el último vector de la nueva base

Si en lugar de buscar un base ortogonal, buscamos una base ortonormal, entonces debemos dividir cada vector por su norma

Descomposición de una matriz

Con el algoritmo de Gram-Schmidt teníamos una forma de encontrar vectores ortogonales entre sí. En lugar de los vectores , podemos despejar los vectores .

Podemos entonces definir una matriz

El subespacio columna de la matriz es el subespacio en cuestión, siendo una base ortogonal de

Por propiedades de las columnas del producto matricial, encontramos la matriz

Dada una matriz , una descomposición de es una factorización de la forma

Además, se cumple que

Teorema de Representación de Riesz

Sea un -espacio vectorial de dimensión finita con P.I., Si es cualquier función lineal no nula, existe un único tal que

Vamos a buscar los vectores de tal que . Es decir, las rectas que pasadas por la transformación lineal, llegan a la misma recta.

Sea una matriz de , y . Entonces podemos encontrar sucesiones de la forma:

Las matrices más fáciles de potenciar son las matrices diagonales.

Otras matrices fáciles de potenciar son aquellas que puedan ser factorizadas de la siguiente forma, siendo una matriz diagonal.

Definición

Sea , un **autovalor** de es un escalar tal que existe no nulo tal que . Se dice que es **autovector** de .

Para encontrar estos elementos, primero buscamos tal que . Los autovectores asociados a cada son .

Definimos el **polinomio característico** de de grado , .

Se le denomina **multiplicidad algebraica** de a la multiplicidad de como raíz del polinomio característico.

Se le denomina **multiplicidad geométrica** de a la dimensión del autoespacio asociado.

Diagonalización

Se cumple entonces que , si cada columna de es un autovector asociado al autovalor , correspondiente en la matriz diagonal . Además, podemos encontrar un subespacio de los autovectores de asociados a . Este autoespacio se denomina

Como existen infinitos autovectores para un mismo autovalor, entonces esa factorización no es única.

Encontramos que una matriz puede ser factorizada como una matriz diagonal, si existen autovalores distintos en . Si los autovalores se repiten, entonces basta con encontrar autovectores linealmente independientes, asociados a los autovalores encontrados. Es decir, se debe cumplir para cada autovalor que su multiplicidad algebraica sea igual a su multiplicidad geométrica.

Propiedades

- . (Se consideran los autovalores con repetición)
- . (Se consideran los autovalores con repetición)
- Si es autovalor de asociado al autovector :
  - es autovalor de asociado al autovector
  - Si es invertible, entonces es autovalor de asociado al autovector
- Si es autovalor de , entonces es autovalor de
- La multiplicidad algebraica es siempre mayor o igual que la multiplicidad geométrica.

Semejanza

Sean dos matrices de las mismas dimensiones, se dice que es semejante a Si existe tal que

- Es reflexiva:
- Es simétrica: Si , entonces
- Es transitiva: Si y , entonces
- Si es un espacio vectorial de dimensión . y siendo bases de . Entonces podemos escribir una transformación lineal respecto a ambas bases

  Podemos concluir que toda la representación de una transformación lineal con respecto a una misma base son semejantes entre sí.
- Si , entonces tienen los mismos autovalores, con la misma multiplicidad tanto algebraica como geométrica.

Invariantes

Un subespacio es un **subespacio invariante** de si para todo vector , .

Sabemos que todo autoespacio de es un subespacio . Pero el recíproco no es cierto, hay subespacios invariantes de que no son autoespacios del mismo.

Un subespacio es un **subespacio invariante** de o si para todo vector , se cumple que

El núcleo y la imagen de una transformación lineal es un subespacio .

Transformación Lineal

Dados un espacio vectorial y una transformación lineal. Un autovalor de es un escalar tal que existe no nulo que cumple

Se dice que es **autovector** de asociado a .

Llamamos **autoespacio** de asociado a al subespacio

Esta definición no tiene ninguna novedad, ya que se extiende de la definición original de autovalores y autovectores. Siempre podemos pensar una transformación lineal como un producto matricial entre la matriz asociada y el elemento a transformar.

Se le llama **polinomio característico** de a , donde es cualquier base de .

Propiedades

- Si es una transformación lineal no inyectiva (tiene nulo), es autovalor de , siendo su autoespacio asociado el subespacio
- Sea . Sabemos que . Entonces, aplicando la propiedad anterior, es autovalor de ese operador, y él autoespacio asociado es
- Sea , sabemos que es autovalor de , y para cada , su autoespacio asociado es
- Si existe una base de formada por autovectores de , entonces es diagonalizables. La matriz será una matriz diagonal. (propiedad de semejanza)

Matrices de Jordan

Si una matriz no es diagonalizable, podemos encontrar matrices de Jordan similares a una matriz diagonal, tal que .

Llamamos las columnas de

Caso 1: Algebraica 2, Geométrica 1

Si tiene un autovalor de multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica . Llamamos al autovalor de multiplicidad algebraica , y al autovalor de multiplicidad algebraica .

Siendo:

- los autovectores asociados a .
- el vector que cumple con el sistema

Caso 2: Algebraica 3, Geométrica 1

Si tiene un autovalor de multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica . Llamamos al único autovalor

Siendo:

- el autovector asociado a
- el vector que cumple con el sistema
- el vector que cumple con el sistema

En este caso, debemos elegir el que pertenezca a la imagen de

Caso 3: Algebraica 3, Geométrica 2

Si tiene un autovalor de multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica . Llamamos al único autovalor

Siendo:

- un autovector asociado a
- otro autovector asociado a
- el vector que cumple con el sistema

En este caso, debemos elegir el que pertenezca a la imagen de

Vamos a resolver sistemas que se escriban de la siguiente manera

Para resolver esto, vamos a encontrar los autovalores y autovectores de la matriz asociada al sistema. Si es autovector de de autovalor , entonces es solución del sistema.

Todas las soluciones se escribirán como combinación lineal de las soluciones del sistema

Si una matriz tiene autovalores complejos, algunas de las funciones de la base de soluciones de la ecuación serán complejas. Sin embargo, podemos construir una base de soluciones que contenga únicamente funciones reales.

Autovalores Complejos

Sean , autovalores de . En tal caso, serán autovectores de . Representados de la forma

Tenemos entonces, dos soluciones del sistema

Podemos buscar dos combinaciones lineales reales, de estas dos funciones:

Propiedades

- **Si el autovalor es real**
  - Si , tendremos soluciones divergentes
  - Si , tendremos soluciones que convergen en
  - Si , La solución será constante.
- **Si el autovalor es complejo**
  -
  -

Matrices de Jordan

Si una matriz no es diagonalizable, podemos encontrar matrices de Jordan similares a una matriz diagonal, tal que

Llamamos las columnas de

Caso 1

Si tiene un autovalor de multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica . Llamamos al autovalor de multiplicidad algebraica , y al autovalor de multiplicidad algebraica .

Caso 2

Si tiene un autovalor de multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica . Llamamos al único autovalor

Caso 3

Si tiene un autovalor de multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica . Llamamos al único autovalor

Clasificación de Matrices

Primero, algunas definiciones sobre matrices:

- **Matrices Simétricas**
- **Matrices Ortogonales**
- **Matrices Anti Simétricas**

Para matrices complejas, tenemos que;

- **Matrices Herméticas** , donde representa la matriz adjunta (transpuesta y conjugada)
- **Matrices Unitarias**
- **Matrices Anti Herméticas**

Matrices Normales

Todas las matrices mencionadas anteriormente pertenecen a un mismo conjunto, el conjunto de las matrices normales. Verifican que .

Propiedades: .

Las siguientes propiedades marcan relaciones entre una matriz y su adjunta:

1.
2. . Podemos demostrarlo por doble inclusión, y la propiedad
3. . Se obtiene de , Considerando
4. . Se obtiene de , Intercambiando
5. . Se obtiene de , Intercambiando

Matrices Herméticas

Las siguientes propiedades son válidas únicamente para matrices herméticas:

-
- Los autovalores de son reales
- Los auto espacios correspondientes a autovalores distintos son ortogonales
- Existe una base ortonormal de formada por autovectores de . Sus multiplicidades algebraicas y geométricas coinciden. Toda matriz hermética es, a su vez, diagonalizable.

Note

Una matriz diagonalizable unitariamente no es necesariamente hermética.

Matrices Definidas Positivas:

Una matriz es definida positiva si , y , para todo no nulo. Estas matrices tienen todos sus autovalores positivos (y reales)

Matrices Semi Definidas Positiva:

Una matriz es definida negativa si , y , para todo no nulo. Estas matrices tienen todos sus autovalores no negativos (y reales)

Matrices Indefinidas

Estas matrices tienen autovalores tanto positivos como negativos (reales)

Matrices Unitarias

Las siguientes propiedades son válidas únicamente para matrices unitarias:

- Sus autovalores tienen módulo .
- El determinante tiene módulo . (El determinante es el producto de sus autovalores)
- Sean dos matrices unitarias, es unitaria.

- . La multiplicación por una matriz unitaria preserva el producto interno.
- . La multiplicación por una matriz unitaria preserva la norma.
- Los autovectores de una matriz unitaria asociados a autovalores distintos son ortogonales.
- Las matrices unitarias son invertibles, se cumple que

Matrices Simétricas

Las matrices simétricas son diagonalizable ortogonalmente. Además, son las únicas matrices reales diagonalizables ortogonalmente.

Matrices Anti-Herméticas

Las siguientes propiedades son válidas únicamente para matrices anti herméticas (y antisimétricas):

- Para todo , es imaginario puro o nulo
- Los autovalores de son imaginarios puros o nulos.
- Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales
- Existe unitaria tal que

Isometrías

Sea un espacio vectorial con producto interno, entonces el operador es una **isometría** si

Es decir, el operador preserva la norma. Además, preserva el producto interno. El producto interno se preserva si y solo si se preserva la norma.

A partir de la descomposición en valores singulares (D.V.S.), podemos encontrar que toda matriz puede ser factorizada de forma que quede de forma explícita los subespacios fundamentales de la matriz.

Primero, recordemos algunas propiedades:

- Es una matriz hermítica, semi definida positiva.
-
- Para toda matriz hermítica, se cumple que:
  - Todos sus autovalores son reales.
  - Los autovectores son ortogonales.
  - Es siempre diagonalizable.
- Si además es semi definida positiva, no tiene autovalores negativos.
- Sea , los primeros autovalores son estrictamente positivos, mientras que el resto valen cero. (los autovalores se ordenan de mayor a menor)

Valor Singular

Se dice que es un valor singular de si , con autovalor de .

Por observaciones anteriores, si , los primeros autovalores (y valores singulares) son estrictamente positivos, mientras que el resto valen cero.

Los valores singulares de una matriz no dicen cuanto cambia la norma de los autovectores de al ser multiplicados por

Note

Los autovectores de deben ser ortonormales

Subespacios Fundamentales

Sea el conjunto de autovalores asociados a la matriz , entonces podemos encontrar los subespacios asociados a la matriz .

Podemos, a partir de este conjunto, definir el subespacio columna, fila, y nulo de . Todos estos conjuntos son ortonormales.

Descomposición en V.S.

Sea una matriz , Puedo factorizarla de la forma

Note

Los valores singulares entre valen

Siendo , , matrices unitarias e y respectivamente.

Si el rango de la matriz es menor a , entonces las columnas restantes de se deben calcular a mano, teniendo en cuenta que debe ser un conjunto ortonormal.

D.V.S Reducida

Si y . Podemos escribir la D.V.S. de como

Por lo que su forma reducida, se verá de la siguiente manera:

Pseudo-Inversa de Moore-Penrose

Se le llama así a la matriz . Se define para toda matriz de .

Si la matriz es de rango máximo, entonces coincide con la matriz pseudo-inversa definida anteriormente.

Algunas propiedades de esta matriz son:

-
-

Si quiero resolver el sistema por cuadrados mínimos, entonces busco tal que

Luego puedo sumarle cualquier vector del subespacio nulo a la solución para encontrar todas las soluciones. Además. pertenece al subespacio fila de , por lo que podemos asegurar que su norma es mínima. Esto se debe a que está compuesta por , por lo que el vector resultante también pertenece a este.

Definición

Dada una matriz simétrica, una **forma cuadrática en** es una función tal que

Las formas cuadráticas se clasifican en positivas, negativas, semi-definidas positivas, semi-definidas negativas, o indefinidas. Segun lo sean las matrices simétricas que las definen.

Si , se le llama **Curva de Nivel** al conjunto

Si , se le llama **Superficie de nivel** al conjunto

Cambio de Variables

Como es una matriz simétrica, sabemos que es diagonalizable ortogonalmente: , con una matriz diagonal.

Entonces podremos escribir la forma cuadrática de la siguiente forma

Aplicando un cambio de variables . Llegamos a la siguiente expresión

Una vez que encuentro los que necesito, puedo aplicar otro cambio de variables para recuperar

Teorema de Rayleigh

Este teorema nos permitirá optimizar funciones, encontrando sus máximos y mínimos con restricciones en la norma de .

Tambien podremos encontrar los puntos donde la norma es minima o maxima, dado un conjunto de nivel de la función.

La igualdad de esta inecuación se cumple en los respectivos subespacios. Es decir, los mínimos y máximos se encuentran en los puntos del auto-espacio asociado a los autovalores mínimos y máximos.

Además, sabemos que como es una matriz ortogonal. . Por lo que los valores máximos y mínimos de serán los mismos incluso después del cambio de variables.

Restricciones Genéricas

Para optimizar funciones sujetas a una restricción del tipo , Debemos plantear ciertos cambios de variable. , Tal que

Siendo tal que

Sin embargo para esto debemos diagonalizar tanto como , Sin embargo podemos simplificar el cálculo mediante la siguiente equivalencia

Los autovalores de son los mismos que . Además, se puede demostrar que si , Entonces . Por lo que la solución del problema se encuentra encontrando los autovalores y autovectores de . A partir de una equivalencia, llegamos a:

Por último debemos hallar el vector perteneciente al subespacio de la solución adecuado. Para esto planteamos que . Luego

Si resolvemos para , encontramos los vectores que minimizan la forma cuadrática con la restricción.

Note

Si la restricción es indefinida, entonces la solución no esta a acotada y el mínimo de la forma cuadrática estará asociado al autovalor máximo.