

Fórmula de Bethe-Bloch

Julián Guerrero Cánovas

27 de noviembre de 2023

I. MARCO TEÓRICO

La fórmula de Bethe-Bloch [1] (ec. 1) nos permite calcular la energía media de transferencia de una partícula incidente por unidad de longitud del material, también llamado poder de frenado:

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = 2\pi \cdot N_A r_e^2 m_e c^2 \cdot \rho \frac{Z}{A} \cdot \frac{z^2}{\beta^2} \cdot \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \cdot \gamma^2 \beta^2}{I^2} \cdot W_{\text{máx}} \right) - 2\beta^2 - \delta(\beta\gamma) - 2\frac{C}{Z} \right] \quad (1)$$

donde $2\pi \cdot N_A r_e^2 m_e c^2 = 0,1535 \text{MeVcm}^2 \text{g}$, y cada término representa:

r_e : radio clásico del electrón

$$= 2,817 \times 10^{-13} \text{cm}$$

m_e : masa del electrón = $0,511 \text{ MeV}/c^2$

N_a : número de Avogadro

$$= 6,022 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}$$

I : potencial medio de excitación

Z : número atómico del material absorbente

A : peso atómico del material absorbente

ρ : densidad del material absorbente

z : carga de la partícula incidente en unidades de e

$\beta = \frac{v}{c}$ de la partícula incidente

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$$

δ : corrección de densidad

C : corrección de capas

$W_{\text{máx}}$: transferencia máxima de energía en una

sola colisión.

(2)

Típicamente, entre los valores de $\beta\gamma$ de 3 y 4, se suele dar un mínimo en la curva denominado el *mínimo de ionización* y a la partícula se le denomina *partícula mínima ionizante* (m.i.p). La fórmula anterior solo es válida a partir de unos valores de $\beta\gamma$ mayores a 0,1. Además, es importante destacar que esta ecuación solo aplica a partículas pesadas cargadas, es decir, no sirve para describir el comportamiento de un neutrón, un neutrino o un electrón, pero sí de un kaón, una partícula alfa, un pion, un ion cargado, un muon o un protón.

La transferencia máxima de energía en una sola colisión ($W_{\text{máx}}$) para una partícula incidente de masa M da la siguiente expresión [1]:

$$W_{\text{máx}} = \frac{2m_e c^2 \eta^2}{1 + 2s\sqrt{1 + \eta^2} + s^2} \quad (3)$$

donde $s = m_e/M$ y $\eta = \beta\gamma$.

Los términos con las correcciones de densidad (δ) y de capas (C) se añaden en la práctica a la fórmula de Bethe-Bloch para altas energías. La corrección de densidad viene dada por [1]:

$$\delta = \begin{cases} 0 & X < X_0 \\ 4,6052X + C + a(X_1 - X)^m & X_0 < X < X_1 \\ 4,6052X + C & X > X_1, \end{cases} \quad (4)$$

donde $X = \log_{10}(\beta\gamma)$, y las magnitudes X_0 , X_1 , C , a y m dependen del material absorbente. Por otro lado, la corrección de capas, debida a los efectos que surgen cuando la velocidad de la partícula incidente es menor o igual a la de los electrones enlazados del átomo, viene dada por [2]:

$$C(I, \eta) = (0,422377\eta^{-2} + 0,0304043\eta^{-4} - 0,00038106\eta^{-6}) \times 10^{-6} I^2 \\ + (3,850190\eta^{-2} - 0,1667989\eta^{-4} + 0,00157955\eta^{-6}) \times 10^{-9} I^3 \quad (5)$$

donde $\eta = \beta\gamma$ y I es el potencial medio de excitación en eV.

La curva de Bragg representa la transmisión media de energía ($\langle \frac{dE}{dx} \rangle$) en función de la profundidad del material absorbente. En el punto de deposición total de la energía se da el pico de Bragg.

II. DETALLES DE COMPUTACIÓN

Se ha computado la fórmula de Bethe-Bloch para diferentes materiales absorbentes: hierro (Fe), cobre (Cu) y agua (H₂O) con los siguientes datos [1], [3]:

	Z/A	ρ (g/cm ³)	I (eV)	-C	a	m	X_1	X_0
Fe	0.4643	7.874	286	4.29	0.1468	2.96	3.15	-0.0012
Cu	0.4563	8.960	322	4.42	0.1434	2.90	3.28	0.0254
H ₂ O	0.4120	1.000	75	3.50	0.0911	3.48	2.80	0.2400

Tabla I. Diferentes valores para la razón del número atómico y número másico (Z/A), la densidad (ρ), el potencial medio de ionización (I) y los términos de la ecuación 4 para hierro, cobre y agua.

Las partículas incidentes elegidas y sus masas correspondientes son [4]:

	Muon (μ)	Pion (π^\pm)	Protón (p)	Kaón (K^\pm)
Masa (MeV)	105.66	139.57	938.27	493.68

Tabla II. Diferentes valores de la masa de las partículas elegidas.

III. RESULTADOS

Primero, se ha calculado la fórmula de Bethe-Bloch en función de $\beta\gamma$ de la partícula incidente para el caso de muon en hierro (fig. 1), comparando la diferencia en la utilización de las correcciones de densidad (δ) y de capas (C). Se observa que a partir del mínimo de ionización en $\beta\gamma = 3,43$, las correcciones se hacen significantes, con un poder de frenado resultante mayor.

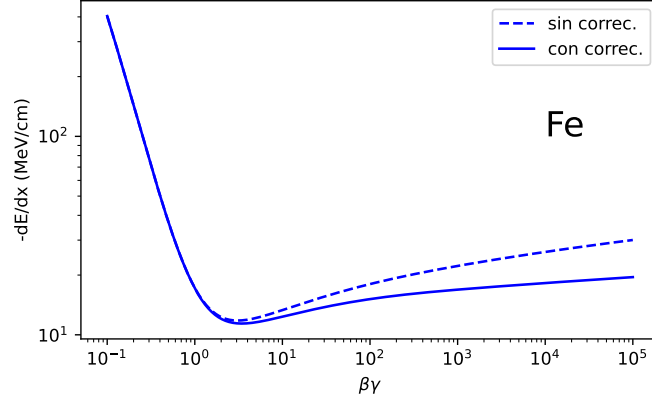


Figura 1. Fórmula de Bethe-Bloch: muon como partícula incidente en hierro. La línea continua representa el poder de frenado en función de $\beta\gamma$ con las correcciones de densidad y de capas, mientras que la línea discontinua representa el poder de frenado sin estas correcciones.

A continuación, se ha calculado el poder de frenado en función de $\beta\gamma$ del muon, pion, protón y kaón, y también su escala de momento correspondiente a cada una para el hierro como material absorbente (fig. 2). La función resultante coincide para las diferentes partículas en función de $\beta\gamma$, aunque las escalas de momento correspondientes son distintas. Para el mismo valor de $\beta\gamma$, hay una diferencia clara del momento del protón con el muon y el pion, con un factor de 10 entre ambas. Por ejemplo, para el mismo mínimo de ionización $\beta\gamma = 3,43$, este corresponde a un momento del muon $p_\mu = 363,13$ MeV/c, del pion $p_\pi = 479,67$ MeV/c, del kaón $p_K = 1696,68$ MeV/c y del protón $p_p = 3224,64$ MeV/c. Para valores altos de $\beta\gamma$, se aprecia una ligera diferencia entre las cuatro funciones, debida a que $W_{\text{máx}}$ (ec. 3) depende de la masa de la masa incidente.

En la figura 3, se ha representado las cuatro partículas (muon, pion, protón y kaón) en función del momento de la partícula incidente. Esta sería la gráfica que realizaría un detector de partículas para distinguirlas. Se puede apreciar que los valores resultantes del muon y el pion son muy cercanos, lo cual puede dificultar la tarea de diferenciarlos.

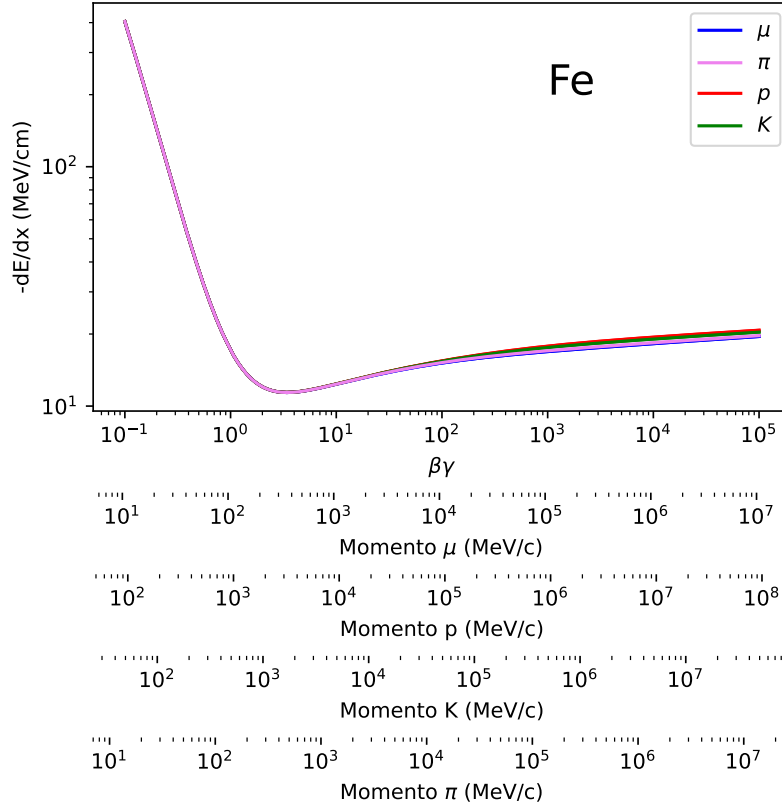


Figura 2. Partículas incidentes en función de su momento en hierro.

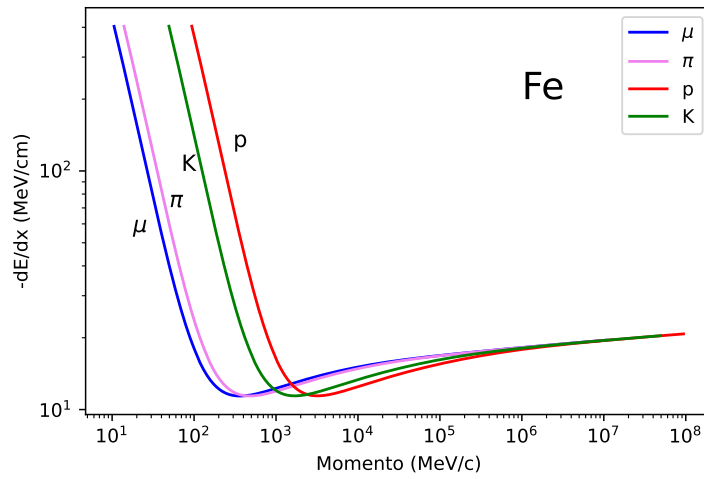


Figura 3. Partículas incidentes (muon, pion, protón y kaón) en función de su momento correspondiente en el material absorbente hierro (Fe).

Tras esto, para observar el comportamiento de la fórmula de Bethe-Bloch para diferentes materiales absorbentes, se ha repetido el mismo procedimiento para dos más, el cobre y el agua (fig. 4). El poder de frenado para el agua es considerablemente inferior que el obtenido de los metales, lo cual es consistente con la menor densidad del agua.

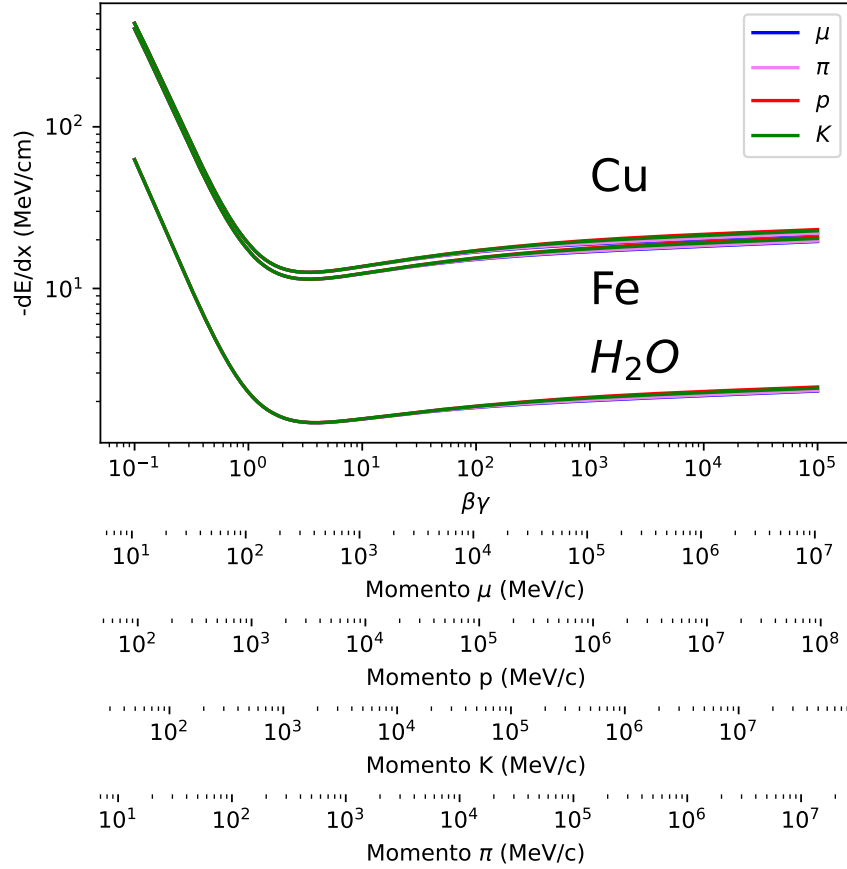


Figura 4. Partículas incidentes (muon, pion, protón y kaón) en función de $\beta\gamma$ y su momento correspondiente en los materiales absorbentes: hierro (Fe), cobre (Cu) y agua (H_2O).

A su vez, se ha repetido la gráfica anterior que ilustra el poder de frenado en función del momento de la partícula incidente para el cobre y el agua (fig. 5). Al igual que en el caso del hierro, las curvas del muon y el pion son muy próximas, dificultando su distinción en los detectores.

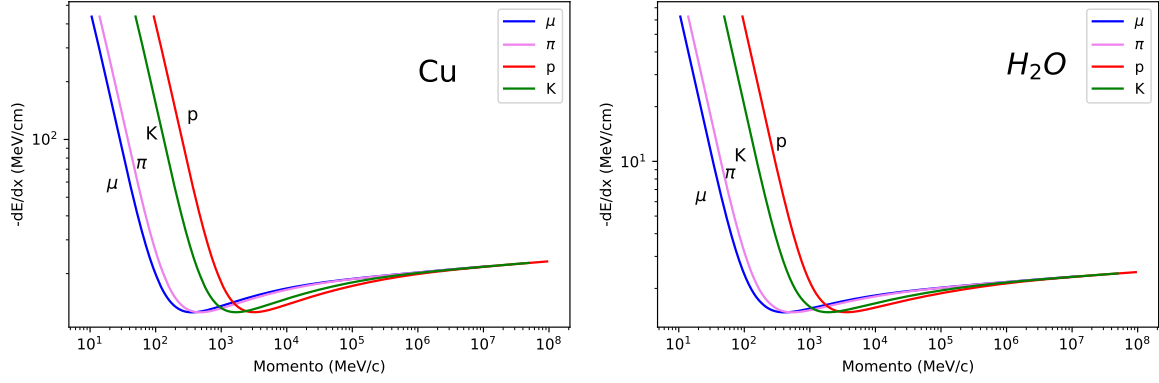


Figura 5. Partículas incidentes (muon, pion, protón y kaón) en función de su momento correspondiente en los materiales absorbentes: (**izq.**) cobre (Cu) y (**der.**) agua (H_2O).

Los valores del mínimo de ionización y su correspondiente momento de la partícula mínima ionizante se han anotado en la tabla III. Para estos valores de $\beta\gamma$ y momento, la partícula sufre las pérdidas mínimas al atravesar el material absorbente. Los metales tienen un factor 10 de poder de frenado en comparación con el agua.

	$\beta\gamma$	$-\frac{dE}{dx}$ (MeV/cm)	p_μ (MeV/c)	p_π (MeV/c)	p_p (MeV/c)	p_K (MeV/c)
Hierro (Fe)	3.43	11.39	363.13	479.67	3224.64	1696.68
Cobre (Cu)	3.42	12.57	361.13	477.03	3206.87	1687.33
Agua (H_2O)	3.89	1.48	411.22	543.19	3651.63	1921.34

Tabla III. Valores del mínimo de ionización de $\beta\gamma$, con su correspondiente poder de frenado $-\frac{dE}{dx}$ para cada partícula (muon, pion, protón y kaón) en cada material absorbente (hierro, cobre y agua), y su momento correspondiente.

Finalmente, se ha calculado numéricamente, a partir de los valores obtenidos de la fórmula de Bethe-Bloch, las curvas de Bragg de las cuatro partículas en los tres materiales absorbentes (fig. 6), con los valores exactos de la profundidad para cada casco recogidos en la tabla IV. El material que frena a las partículas a una menor distancia recorrida es el cobre, seguido por el hierro y, con mucha más penetración, el agua. Esto concuerda con la diferencia de densidad de cada material.

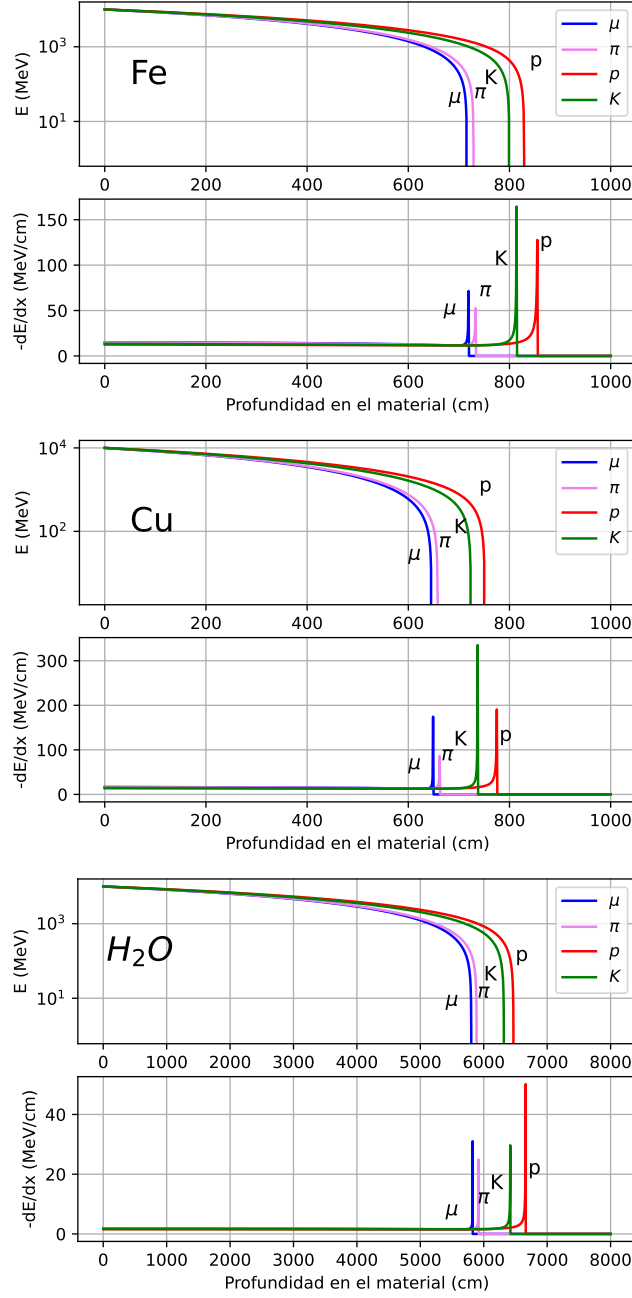


Figura 6. Energía de las partículas incidentes (muon, pion, protón y kaón) y su poder de frenado en función de la profundidad de penetración en los materiales absorbentes: hierro (Fe), cobre (Cu) y agua (H_2O) respectivamente.

Se ha usado una energía cinética inicial común de $E_{cin} = 10$ GeV para las cuatro partículas. Los muones, que normalmente son los que más distancia recorren en los detectores, aquí son los primeros, cercanos a los piones, debido a su pequeña masa en comparación con los kaones y los protones. Una partícula más pesada, como el protón, con la misma energía cinética, le corresponderá

un $\beta\gamma$ más elevado, teniendo más penetración que una partícula menos pesada. En la realidad, los muones tienen mucha más energía cinética que un protón, teniéndose que construir calorímetros específicos para ellos.

	Muon (μ)	Pion (π^\pm)	Protón (p)	Kaón (K^\pm)
Profundidad en hierro (cm)	719	733	855	814
Profundidad en cobre (cm)	649	662	775	737
Profundidad en agua (cm)	5826	5917	6660	6418

Tabla IV. Profundidad de penetración en los materiales absorbentes (hierro, cobre y agua) de las partículas muon, pion, protón y kaón para una energía cinética inicial común de 10 GeV.

IV. CONCLUSIONES

La fórmula de Bethe-Bloch nos permite hacer una diferenciación de partículas cargadas en detectores. A partir de ella, también podemos calcular la distancia que penetrará una partícula incidente en un material absorbente, por lo que se usa en el estudio de la radiación en tratamientos contra el cáncer o en aislamientos en centrales nucleares. A partir del análisis realizado, se ha comprobado que las correcciones de la fórmula son significativas a valores de $\beta\gamma$ mayores al mínimo de ionización, entre 4 y 5. Para cada partícula aparece una relación del $\beta\gamma$ y el momento de este diferente, siendo mayores los momentos del protón y el kaón en comparación con el pion y el muon para el mismo valor de $\beta\gamma$. Esto nos permite hacer la distinción de partículas. Los materiales con mayor densidad (hierro y cobre) presentan un mayor poder de frenado en comparación a materiales con menor densidad, en este caso el agua. Debido a ello, la profundidad de penetración de las partículas incidentes será mayor en materiales menos densos y viceversa. A su vez, las partículas más pesadas recorrerán más distancia en el material que las menos pesadas para la misma energía cinética inicial.

Sin embargo, hay que tener en cuenta los límites de aplicación de la fórmula, ya que para energías muy altas los efectos radiativos dominan. A su vez, para energías pequeñas aparecen otros efectos, como el apantallamiento de carga de la partícula o el frenado nuclear.

REFERENCIAS

- [1] W.R. Leo. *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments: A How-to Approach*. Springer, 1994.
- [2] W H Barkas y M J Berger. *Tables of Energy Losses and Ranges of Heavy Charged Particles*. En: (1964). DOI: [NASA-SP-3013](#).
- [3] R. C. Murty. *Effective Atomic Numbers of Heterogeneous Materials*. En: *Nature* 207 (1965), págs. 398-399.
- [4] R. L. Workman et al. *Review of Particle Physics*. En: *PTEP* 2022 (2022), pág. 083C01. DOI: [10.1093/ptep/ptac097](#).