UTN
Facultad Regional Córdoba

TUP

Tecnicatura Universitaria en Programación

SISTEMAS DE PROCESAMIENTO DE DATOS

Unidad Temática N°3: Lógica Matemática

Material de Estudio
1° Año – 1° Cuatrimestre
2021

Índice

UNIDAD N° 3: LÓGICA MATEMÁTICA

Concepto de Lógica Matemática

La lógica matemática es la disciplina que trata de métodos de razonamiento. En un nivel elemental, la lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no valido un argumento dado. El razonamiento lógico se emplea en matemáticas para demostrar teoremas; en ciencias de la computación para verificar si son o no correctos los programas; en las ciencias física y naturales, para sacar conclusiones de experimentos; y en las ciencias sociales y en la vida cotidiana, para resolver una multitud de problemas. Ciertamente se usa en forma constante el razonamiento lógico para realizar cualquier actividad, como por ejemplo expresar una idea, lo cual hacemos en todo momento.

Proposiciones Lógicas

Al comunicarnos, lo hacemos expresando proposiciones. Una proposición o enunciado (declaración verbal) es una oración declarativa de la cual puede decirse que es falsa o verdadera, pero no ambas a la vez. En tal condición, se dice que la Lógica es bivalente V o F. La proposición es un elemento fundamental de la lógica matemática.

Toda proposición consta de tres partes: un sujeto, un verbo y un complemento referido al verbo. La proposición es un elemento fundamental de la Lógica Matemática.

Se clasifican en proposiciones simples, las cuales se denotan con letras minúsculas y en proposiciones compuestas, las cuales son proposiciones simples unidas por conectivos lógicos y se denotan con letras mayúsculas.

A continuación se tienen algunos ejemplos de proposiciones válidas y no válidas, y se explica la razón por la cual algunos enunciados no son proposiciones. Las proposiciones se indican por medio de una letra minúscula, dos puntos y la proposición propiamente dicha.

Ejemplos

p: Francia se encuentra en Europa.

q: 15-6 = 9

r: 2x -3 > 7

s: Los precios de los teléfonos celulares bajarán a fin de año?

t: Hola ¿cómo estás?

w: ¡Cómete esa fruta!

Los enunciados p y q pueden tomar un valor de falso o verdadero, por lo tanto, son proposiciones válidas. El inciso r también será una proposición valida al instanciar a la variable x en determinado momento. Sin embargo, los enunciados s, t y w no son válidos, ya que no pueden tomar un valor de falso o verdadero, uno de ellos es una interrogación, otro un saludo y el último es una orden.

En general, las proposiciones pueden ser:

- Simples: si sólo tienen un sujeto, un verbo y un complemento. En caso contrario, son proposiciones Compuestas.
- Afirmativas o Negativas: según lo afirmen o nieguen.
- Verdaderas o Falsas: según correspondan o no a la realidad.

Ejemplos

h: "Ana come pizza y bebe refresco", es una proposición compuesta y afirmativa.

j: "Ella no nada muy rápido", es una proposición simple y negativa.

k: “Córdoba no está al sur de la C.A.B.A. y no hace frío",

es una proposición compuesta, negativa y verdadera.

l: 7 + 3 =10 es una proposición simple, afirmativa y verdadera.

CONECTIVOS LÓGICOS

Existen conectivos u operadores lógicos que permiten formar proposiciones compuestas, es decir, formadas por varias proposiciones. Los operadores o conectores básicos son:

Los conectivos lógicos

- y — $\wedge$ — conjunción
- o — $\vee$ — disyunción
- no — $\sim$ — negación
- si...entonces — $\rightarrow$ — implicación simple
- si y solo si — $\leftrightarrow$ — implicación doble

Imagen 1: Elaboración propia.

Conjunción (operador and)

Se utiliza para conectar dos proposiciones, donde ambas se deben cumplir para que se pueda obtener un resultado verdadero. Se le conoce como multiplicación lógica y su símbolo es ^ (and).

Ejemplo

Sea el siguiente enunciado: "**Hay una buena película y voy al cine**"

Sean:

p: Hay una buena película.

q: Voy al cine.

De tal manera que la representación del enunciado anterior usando simbología lógica es como sigue:

p ^ **q**

Su tabla de verdad es como sigue:

p	q	p ^ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 1: Elaboración propia.

Donde

V = verdadero

F = falso

En la tabla anterior el valor de **p**=V significa que hay una buena película, **q**=V significa que voy al cine y **p** ^ **q**=V significa que hay una buena película y voy ir al cine. Se puede notar que con cualquiera de las dos proposiciones que sea falsa implica que no asisto al cine.

Disyunción (operador or)

Con este operador se obtiene un resultado verdadero cuando alguna de las proposiciones es verdadera. Se conoce como suma lógica y su símbolo es V (or).

Ejemplo

Sea el siguiente enunciado: "**Para ir a Alta Gracia puedo tomar la ruta 5 o la ruta 36**".

Sean:

p: Para ir a Alta Gracia hay que tomar la ruta 5

q: Para ir a Alta Gracia hay que tomar la ruta 36

p	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 2: Elaboración propia.

En la tabla anterior el valor de **p**=V significa tomar la ruta 5 para ir a Alta Gracia, **q**=V significa tomar la ruta 36 para ir a Alta Gracia y **pvq**=**V** significa ir a Alta Gracia. Se puede notar que con cualquiera de las dos proposiciones que sea verdadera implica que llego a Alta Gracia.

Negación (operador not)

Su función es negar la proposición. Esto significa que sí alguna proposición es verdadera y se le aplica el operador not se obtendrá su negación (falso) y viceversa. Este operador se indica por medio del símbolo ~.

Ejemplo

Sea el siguiente enunciado: “El león es el rey de la selva”.

Sean:

p: El león es el rey de la selva.

~p: El león no es el rey de la selva.

Su tabla de verdad es como sigue:

p	**~p**
V	F
F	V

Tabla 3: Elaboración propia.

En la tabla anterior el valor de **p**=V significa que el león es el rey de la selva, y **p**=F significa que el león no lo es.

Ejemplo

Sean las proposiciones:

p: Ya es tarde.

q: Tengo que dormirme.

r: Me levantaré temprano.

El enunciado: "**Ya es tarde y tengo que dormirme o no me levantaré temprano**”.

Se puede representar simbólicamente de la siguiente manera: **p** ^ **q** v **~r.**

Proposiciones Condicionales

Implicación simple

Una *implicación simple* o proposición *condicional*, es aquella que está formada por dos proposiciones simples p y q. Se indica de la siguiente manera:

p→q (se lee "si **p** entonces **q**")

Ejemplo

Un trabajador dice "**Si ahorro me podré comprar una casa en tres años**". Una declaración como esta se conoce como condicional.

Sean:

p: Ahorro.

q: Podrá comprar una casa en tres años.

De tal manera que el enunciado se puede expresar como: **p→q**

Su tabla de verdad es de la siguiente manera:

p	q	p→q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 4: Elaboración propia.

La interpretación de los resultados de la tabla es la siguiente:

Analizando si el trabajador mintió con la afirmación del enunciado anterior:

Cuando **p**=V significa que ahorró y **q**=V que se compró la casa en tres años, por lo tanto **p**→q =V (el trabajador dijo la verdad).

Cuando **p**=V y **q**=F significa que **p→q** =F, el trabajador mintió, ya que ahorró y no se compró la casa.

Cuando **p**=F y **q**=V significa que aunque no ahorró se compró la casa (ya tenía los recursos), así que no mintió, de tal forma que **p→q** =V.

Cuando **p**=F y **q**=F se interpreta que aunque no ahorró tampoco se compró la casa, por lo tanto **p→q** =V ya que tampoco mintió.

Bicondicional o doble implicación

Sean **p** y **q** dos proposiciones. Una *doble implicación* o proposición es *bicondicional* cuando **p** es verdadera si y solo si **q** es también verdadera. O bien **p** es falsa si y sólo si **q** también lo es. Se indica de la siguiente manera:

p↔q (se lee "**p** si y sólo si **q**")

Ejemplo

Sea el siguiente enunciado: "**Una persona puede votar, si y sólo si, tiene credencial de elector**".

Donde:

p: Una persona puede votar.

q: Tiene credencial de elector.

Su tabla de verdad es:

p	q	p↔q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla 5: Elaboración propia.

La interpretación de los resultados de la tabla es la siguiente:

Cuando **p**=V significa que una persona puede votar y **q**=V que tiene credencial, al ser esto cierto, **p**↔q =V.

Cuando **p**=V y **q**=F significa que **p**↔**q** =F, una persona puede no votar, ya que no posee la credencial.

Cuando **p**=F y **q**=V significa que una persona no puede votar aunque tenga credencial (por ejemplo los residentes en el extranjero), esto es que **p**↔**q** =F.

Cuando **p**=F y **q**=F se interpreta como que ni puede votar ni tiene credencial, por lo tanto es cierto **p**↔**q** =V.

Ejemplo

Representar simbólicamente el enunciado: "Si no pago la luz, entonces me cortarán la corriente eléctrica. Y Si pago la luz, entonces me quedaré sin dinero o pediré prestado. Y Si me quedo sin dinero y pido prestado, entonces no podré pagar la deuda, si y sólo si soy desorganizado".

Solución

p: Pago la luz.

q: Me cortarán la corriente eléctrica.

r: Me quedaré sin dinero.

s: Pediré prestado.

t: Pagar la deuda.

w: Soy desorganizado.

$$P: (\sim p \rightarrow q) \wedge [p \rightarrow (r \vee s)] \wedge [(r \wedge s) \rightarrow \sim t] \leftrightarrow w$$

TABLA DE VERDAD

El número de líneas de la tabla de verdad depende del número de variables de la expresión y se puede calcular por medio de la siguiente formula.

N° de líneas = n 2   donde n es el número de variables distintas.

Ejemplo

Dada la siguiente proposición: [(p □q) □□(~q □□r)□□(r □q).

Elaborar su tabla de verdad.

Solución

p	**q**	**r**	**~q**	$p \to q$	$\sim q \wedge r$	$[(p \to q) \vee (\sim q \wedge r)]$	$r \to q$	$[(p \to q) \vee (\sim q \wedge r)] \leftrightarrow (r \to q)$
V	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**

Tabla 6: Elaboración propia.

TAUTOLOGÍA, CONTINGENCIA Y CONTRADICCIÓN

Tautología es aquella proposición (compuesta) que es cierta para todos los valores de verdad de sus variables.

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$(p \wedge \sim p) \rightarrow q)$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Tabla 7: Elaboración propia.

ótese que en las tautologías para todos los valores de verdad el resultado de la proposición es siempre V. Las tautologías son muy importantes en Lógica Matemática ya que se consideran leyes en las cuales se puede apoyar para realizar demostraciones.

Contradicción es aquella proposición compuesta que siempre es falsa para todos los valores de verdad, una de las más usadas y más sencilla es p □□~p. Como lo muestra su correspondiente tabla de verdad.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Tabla 8: Elaboración propia.

Ejemplo

Si se tiene p: “El coche es verde”, la proposición $p \wedge \sim p$ equivale a decir que "El coche es verde y el coche no es verde". Por lo tanto se está contradiciendo, es decir, es una *falacia*.

Contingencia es aquella proposición compuesta cuyos valores de verdad son falsos y verdaderos para todos los valores de verdad, como es el caso de p $\rightarrow$ ~q. Como lo muestra su correspondiente tabla de verdad.

p	q	~q	p $\rightarrow$ ~q
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

Tabla 9: Elaboración propia.

LEYES NOTABLES EN LÓGICA

Las leyes de lógica más notables son las que se enlistan a continuación:

1.- Ley de doble negación

~~p$\leftrightarrow$p

2.- Leyes de idempotencia

(**p**$\vee$**p**) $\leftrightarrow$ **p**

(**p**$\wedge$**p**) $\leftrightarrow$ **p**

3.- Leyes asociativas

[(**p**$\vee$**q**) $\vee$ **r**] $\leftrightarrow$ [**p** $\vee$ (**q**$\vee$**r**)]

[(**p**$\wedge$**q**) $\wedge$ **r**] $\leftrightarrow$ [**p** $\wedge$ (**q**$\wedge$**r**)]

4.- Leyes conmutativas

(**p**$\vee$**q**) $\leftrightarrow$ (**q**$\vee$**p**)

(**p**$\wedge$**q**) $\leftrightarrow$ (**q**$\wedge$**p**)

(**p**$\leftrightarrow$**q**) $\leftrightarrow$ (**q**$\leftrightarrow$**p**)

5.- Leyes distributivas

$[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

$[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

6.- Leyes de De Morgan

$\sim (p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

$\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$