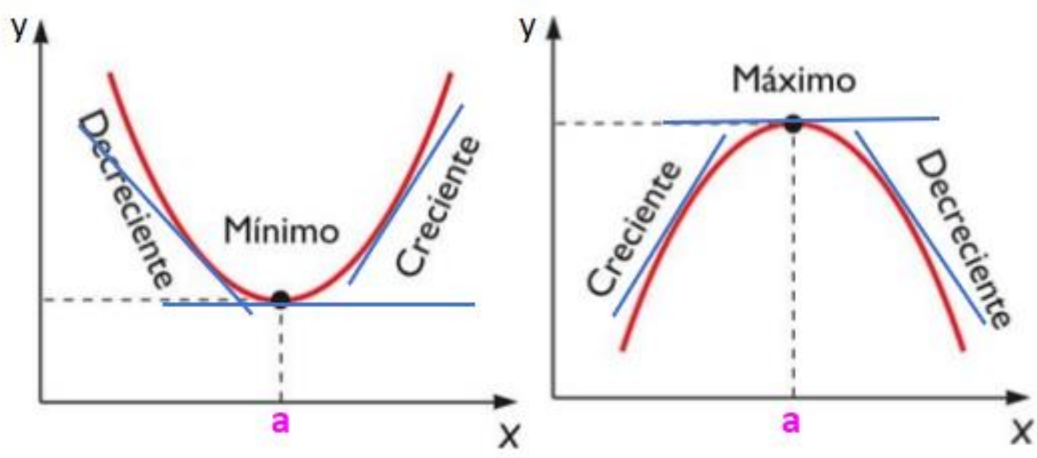
Máximos y mínimos de una función



Una recta tangente tiene un punto en común con la función

Al hallar la derivada de una función obtenemos la pendiente de las infinitas rectas tangentes a la función

f'(x): la derivada de una función f(x) es la pendiente de las infinitas rectas tangentes a la función

Para calcular la pendiente de una de las infinitas rectas tangentes debemos hallar la derivada de la función

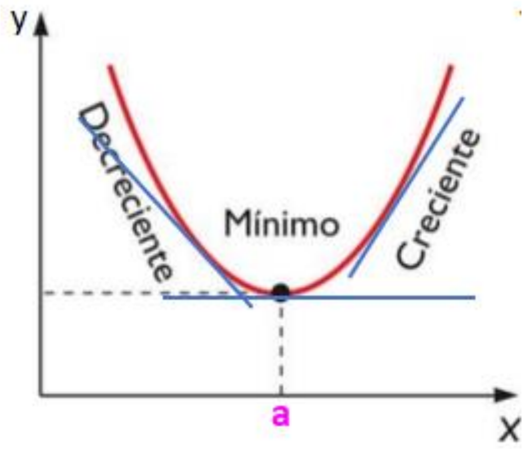
Para hallar la pendiente de una de las infinitas rectas tangentes se reemplaza x por un valor.

En los tramos en los cuales la función es creciente, las rectas tangentes tienen pendiente mayor que cero.

En los tramos en los cuales la función es decreciente, las rectas tangentes tienen pendiente menor que cero.

El valor a es la abscisa del Punto Crítico. El Punto Crítico es el punto en el cual la derivada de la función es igual a 0.

En el Punto Crítico la función cambia de comportamiento.



Derivada es la pendiente de las infinitas rectas tangentes a la función

La función decrece hasta alcanzar su valor mínimo para x=a.

El de x=a divide en dos tramos a la función.

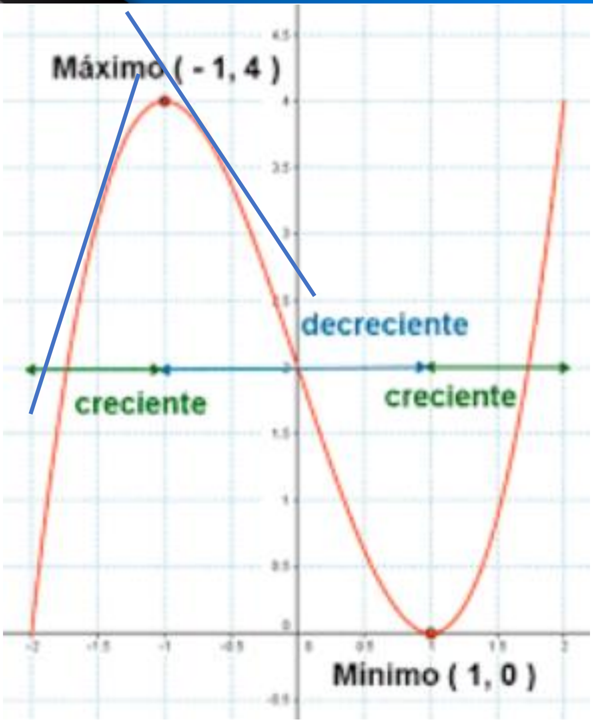
Primer tramo: $(-\infty; a)$ para cualquier valor comprendido en este intervalo la pendiente de las infinitas rectas tangentes a la función es menor que cero.   La función es decreciente.

Segundo tramo: $(a; +\infty)$ para cualquier valor comprendido en este intervalo la pendiente de las infinitas rectas tangentes a la función es mayor que cero. La función es creciente.

El punto que delimita los tramos en los cuales se dividió el Dominio de la función se denomina Punto Crítico.

La pendiente de la recta tangente que pasa por el punto crítico es igual a cero.

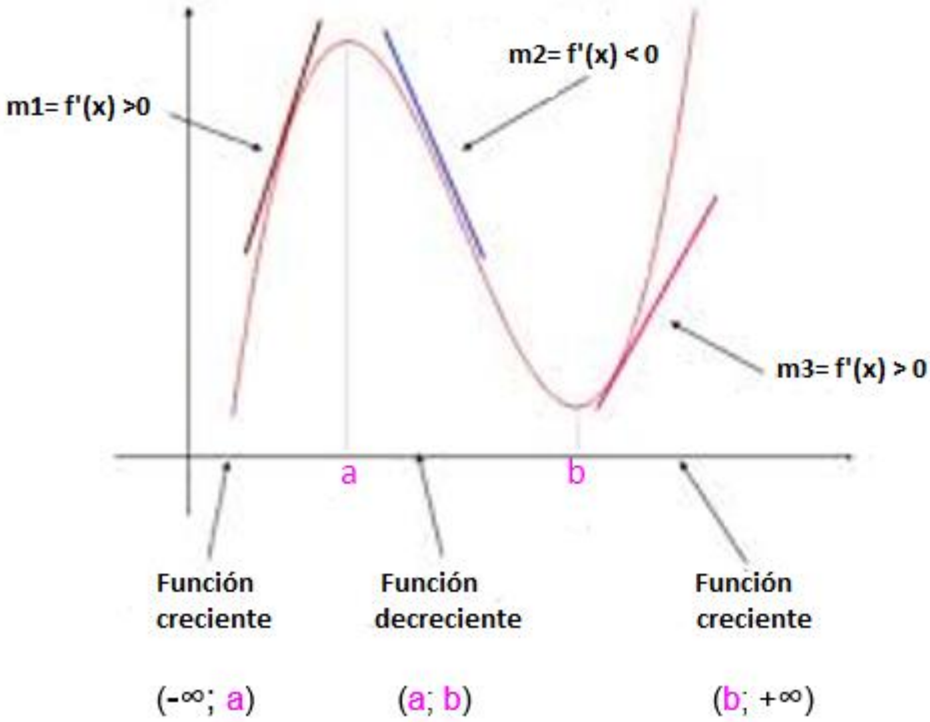
¿Cómo se obtiene la pendiente de las rectas tangentes a una función? Hallando la derivada de la función



Dividimos en tramos el Dominio de la función, los tramos quedan delimitados por las abscisas de los puntos críticos.

Puntos críticos:

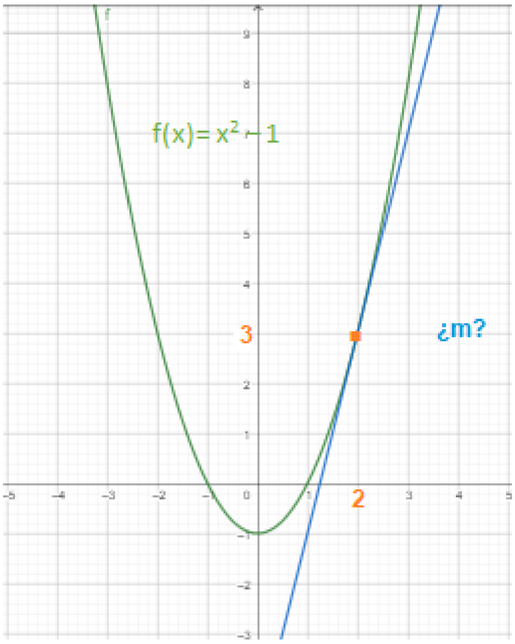
Los puntos críticos son los puntos en los cuales la función asume un valor mínimo o máximo.



Si trazamos las tangentes a la función en el tramo en el cual dicha función es creciente, entonces todas las pendientes de esas rectas serán mayores que cero.

Si trazamos las tangentes a la función en el tramo en el cual dicha función es decreciente, entonces las pendientes de esas rectas serán menores que cero.

Hallar la pendiente de la recta tangente a $x^2 - 1$ que pasa por el punto (2; 3)



La derivada permite calcular la pendiente de la recta tangente a cierta función.

La derivada de una función y, es otra función que permite calcular la pendiente de cualquiera de las infinitas rectas tangentes a dicha función (por ejemplo y= x^2 -1)

Calcular la pendiente de la recta tangente a la función $x^2 - 1$

m: pendiente   p: ordenada al origen

y= **m**x + p

y´ = 2x+ 0   2x es la derivada de x^2 -1

y´ = 2x es la pendiente   2x es la fórmula que permite hallar la pendiente de cualquier recta tangente a la función y (la función y en este caso es x^2 -1)

Al reemplazar a x por un valor en y´ obtengo la pendiente de una de las infinitas rectas tangentes a la función

2x es la derivada de la función $x^2 - 1$

m =**2x** Esta es la pendiente de las infinitas rectas tangentes a la función $x^2 - 1$

Si reemplazamos x= **2** en la 2x, en particular obtenemos la **pendiente** de la tangente de la función $x^2 - 1$ que pasa por el punto (2; 3):

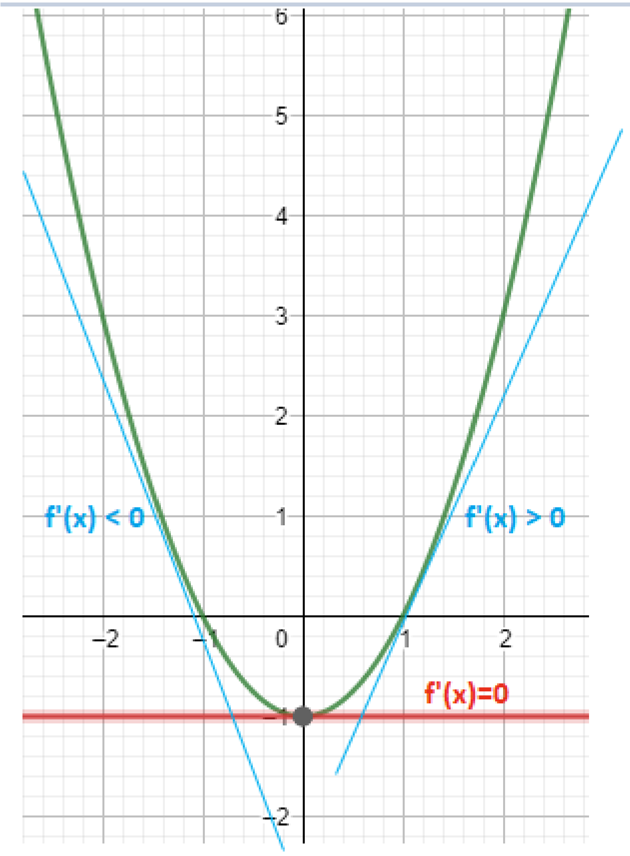
m =2x

m =2(**2**)

2 es la abscisa del punto en comun entre la recta y la función

m = 4

La ordenada del punto en comun entre la recta horizontal y la función será un valor máximo o un valor mínimo de la función.



y = -1

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

m=0 es decir que f'(x)=0

La pendiente de la recta tangente a $x^2 - 1$ que pasa por el Punto Crítico es igual a 0

Punto Crítico: Es el punto en el cual la derivada es igual a cero. La ordenada del Punto Crítico será el mínimo o el máximo valor de la función

Determinación del Punto Crítico:

Valuamos a la derivada en 0:

$y' = 2x$

$0=2x$

Despejamos x

$x=0/2$

$x=0$ Abscisa del punto crítico de la función cuadrática

Y reemplazamos el valor de x obtenido en la función:

$f(x)= x^2 - 1$

$f(0)= 0^2 - 1$

$y= -1$

Subdividimos el Dominio de la función en intervalos (Recordemos que el Dominio de toda función polinómica está comprendido entre $-\infty$ y $+\infty$

Intervalo o tramo del Dominio	Valor prueba	Signo de $f'(x)= 2x$	Comportamiento de $f(x)= x^2 - 1$
Primer tramo $(-\infty; 0)$	**-3**	**$f'(-3)= 2(-3)= -6$ derivada negativa**	**Decreciente**
Segundo tramo $(0; +\infty)$	**4**	**$f'(4)=2(4)=8$ derivada positiva**	**Creciente**

En el primer tramo la función decrece hasta asumir el mínimo valor para x=0.

Para **x=0** la función asume el mínimo valor.

Si la función es decreciente hasta el punto crítico, entonces la ordenada de dicho punto crítico es el valor mínimo de la función. En el caso planteado la función decrece hasta asumir el valor mínimo para x=0. Si reemplazamos x por cero en la función, obtenemos su valor mínimo.

Si la función es creciente hasta el punto crítico, entonces la ordenada de dicho punto crítico corresponde al valor máximo de la función.

$y' = 2x$

x=0 es la abscisa del punto crítico correspondiente a la función $x^2 - 1$

En el caso planteado, si reemplazamos x= 0 en la función, obtenemos su valor mínimo.

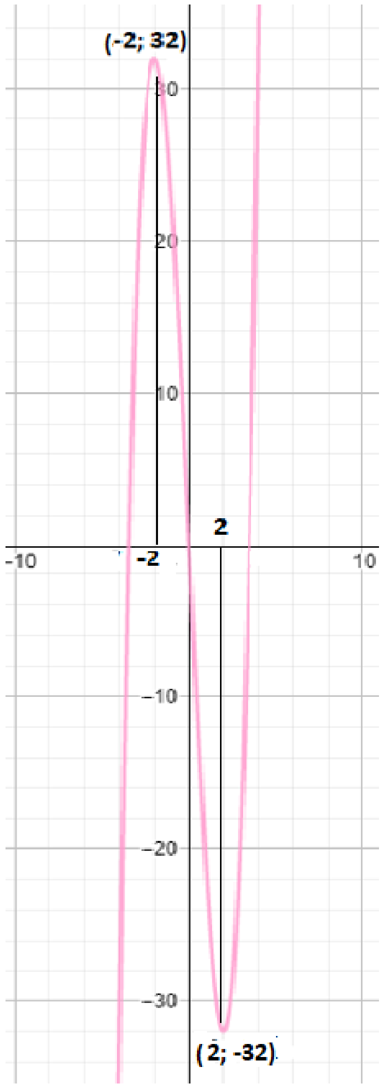
Reemplazando en la función $x^2 - 1$ la abscisa del punto crítico obtenemos el valor mínimo que puede asumir la función.

$f(0) = 0^2 - 1$

$= -1$ **es valor mínimo de la función**

(0; -1) La ordenada del punto crítico es el valor mínimo de la función.

Hallar el máximo y el mínimo de la función $y=2x^3 - 24x$



El Dominio de toda función polinómica va de $-\infty$ a $+\infty$

Dominio de toda función polinómica: $(-\infty; +\infty)$

Primer Paso: Hallar la derivada de la función: $y=2x^3 - 24x$

$y' = 6x^2 - 24$

Segundo paso: Igualamos a 0 la derivada

$0 = 6x^2 - 24$

Hallamos las raíces (serán las abscisas correspondientes a puntos críticos) Los puntos críticos cuyas ordenadas corresponden a máximos y mínimos de la función:

$x_1 = 2$ $x_2 = -2$

Tercer paso: Subdividimos el Dominio de la función en intervalos o tramos (Recordemos que el Dominio de toda función polinómica está comprendido entre $-\infty$ y $+\infty$)

Las abscisas de los puntos críticos delimitan los tramos en los cuales vamos a analizar la función para determinar si es creciente o decreciente:

$(-\infty; -2)$ $(-2; 2)$ $(2; +\infty)$

Paso 4 y Paso 5: Análisis de los tramos

Intervalos o tramos	Valor prueba	Signo de $f'(x) = 6x^2 - 24$	Comportamiento de $y = 2x^3 - 24x$
Primer tramo $(-\infty; -2)$	**-3**	**$6(-3)^2 - 24 = 30$ Derivada positiva**	**Crece**
Segundo tramo $(-2; 2)$	**0**	**$6(0)^2 - 24 = -24$ Derivada negativa**	**Decrece**
Tercer tramo $(2; +\infty)$	**5**	**$6(5)^2 - 24 = 126$ Derivada positiva**	**Crece**

Paso 6: Análisis por tramos

Primer Tramo

La función alcanza un máximo en x= **-2**, porque la función crece hasta ese valor y luego decrece a partir ese valor

Para valores de x menores que -2 la función crece.

Es decir que, en el primer tramo la función crece hasta alcanzar el valor máximo en x= -2 por lo tanto, si en la en la función reemplazamos x por -2 obtendremos su valor máximo

La función alcanza un mínimo en x= **2**, porque la función decrece hasta ese valor y luego crece a partir de ese valor

Segundo Tramo

Para valores de x comprendidos entre **-2** y **2** la función decrece.

En el segundo tramo, la función decrece hasta alcanzar el valor mínimo en x= 2 es decir que, si en la en la función reemplazamos x por 2 obtendremos su valor mínimo.

Tercer Tramo

La función crece a partir de x igual a **2**.

Paso 7: Calculamos el valor máximo y el valor mínimo de la función

$y=2x^3-24x$

Reemplazamos en la función las abscisas de los puntos críticos:

Si reemplazamos x= **-2** en la función $y=2x^3-24x$ obtenemos el valor máximo de la función:

$f(-2)= 2(-2)^3 – 24(-2)$

$= 32$ Valor máximo de la función.

Si reemplazamos x= **2** en la función $y=2x^3-24x$ obtenemos el valor mínimo de la función:

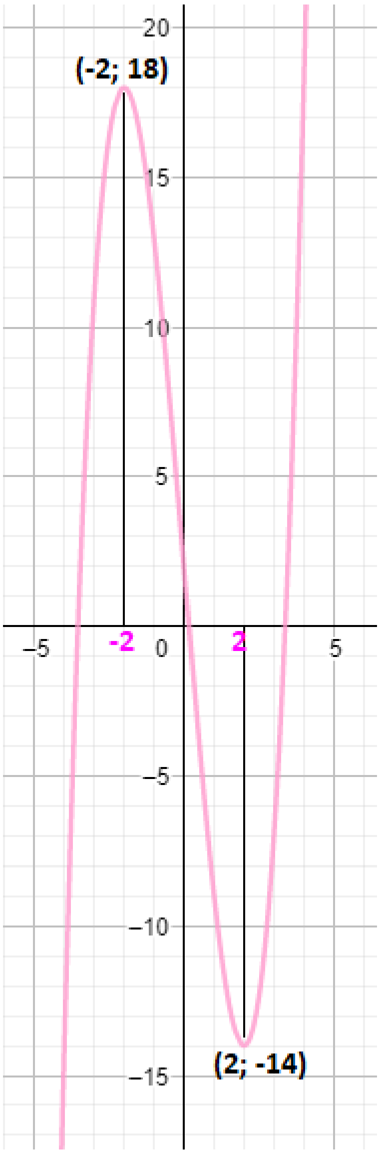
$f(2)= 2(2)^3 – 24(2)$

$= -32$ Valor mínimo de la función

Máximo (**-2**, 32)

Mínimo (**2**, -32)

Hallar los máximos y mínimos de la función $y= x^3-12x+2$



Obtenemos la derivada de la función $y= x^3-12x+2$

$y´=3x^2-12$

Igualamos a cero la derivada:

$0= 3x^2+0x-12$ a=3 b= 0 c= -12

Hallamos las raíces (serán las abscisas correspondientes a puntos críticos) Las ordenadas de los puntos críticos corresponden a máximos y mínimos de la función.

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4.3.(-12)}}{2.3}$$

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{144}}{6}$$

x_1= 12/6 x_2= -12/6

x_1= 2 **x_2= -2**

Las raíces: -2 y 2 son las abscisas de los puntos críticos. La ordenada (segunda coordenada) de un punto crítico es el valor máximo o el valor mínimo de la función)

Las abscisas de los puntos críticos delimitan los tramos en los cuales vamos a analizar la función para determinar si es creciente o decreciente.

Intervalo o tramo	Valor prueba	Signo de f´(x)= $3x^2$-12	Comportamiento de y= x^3-12x+2
Primer tramo $(-\infty; -2)$	**-3**	**$3(-3)^2$-12=15** **Derivada positiva**	**Creciente**
Segundo tramo $(-2; 2)$	**0**	**$3(0)^2$-12= -12** **Derivada negativa**	**Decreciente**
Tercer tramo $(2; +\infty)$	**5**	**$3(5)^2$-12= 63** **Derivada positiva**	**Creciente**

Primer tramo:

Hasta x= -2 la función es creciente y a partir de x= -2 la función es decreciente.

La función crece hasta alcanzar el valor máximo para **x = -2**, por lo tanto si reemplazamos x= -2 en la función obtendremos su valor máximo:

$y= x^3-12x+2$

$y= (-2)^3-12(-2) +2$

$= -8 +24 +2$

$= -8 +26$

$= 18$ Valor máximo de la función

Segundo tramo:

Desde x= -2 y hasta x=2 la función decrece hasta alcanzar su valor mínimo para **x = 2** por lo tanto si reemplazamos x=2 en la función obtendremos su valor mínimo:

$y= x^3-12x+2$

$y= (2)^3-12(2) +2$

$=8-24+2$

$= -14$ Valor mínimo de la función

Encontrar los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

1)y=$2x^3 - 24x$
2)y=$x^3 - 3x^2$
3)y=$2x^2 - 2x - 4$
4)y=$3x - x^3$
5)y=$x^3 - 3x^2 - 9x + 8$
6)y=$x^2 - 6x + 7$

Respuestas en la Guía de Estudio correspondiente a la Unidad 4.