UTN
Facultad Regional Córdoba

TUP

Tecnicatura Universitaria en Programación

MATEMÁTICA

Unidad Temática N°2: Matrices

Guía de Estudio

1° Año – 1° Cuatrimestre

Producto entre matrices

Dadas las matrices:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Amxn Bnxp= Cmxp

Primera matriz: A: Tercer cuadrante

Segunda matriz: B Primer cuadrante

				Primer cuadrante	
			b11= 1	b12= 2	b13= 3
			b21= 2	b22= 4	b23= 6
			b31= 1	b32= 2	b33= 3
a11= 1	a12= -1	a13= 1	c11= 0	c12= 0	c13=
a21= -3	a22= 2	a23= -1	c21=	c22=	c23=
a31= -2	a32= 1	a33= 0	c31=	c32=	c33=
	Tercer cuadrante				

Para obtener cada elemento de la matriz producto debemos multiplicar una fila de la primera matriz por una columna de la segunda matriz

Primer elemento de la fila por primer elemento de la columna + segundo elemento de la fila por segundo elemento de la columna + tercer elemento de la fila por tercer elemento de la columna

c11= Fila 1 de la primera matriz por columna 1 de la segunda matriz

c11= 1.1 + (-1)2 + 1. 1 = 1-2 +1= 0

c12= Fila 1 de la primera matriz por columna 2 de la segunda matriz

c12= 1. 2 + (-1)4 + 1.2

= 2 – 4 + 2

c12 = 0

Primera columna de la matriz producto C

c11=

c21=

c31=

Segunda columna de la matriz producto C

c12=

c22=

c32=

Tercera columna de la matriz producto C

c13=

c23=

c33=

Matriz Transpuesta: Ejemplos

$$A=\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad A^t=\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

A(mxn) = A^t(nxm)

A(3x2) = A^t(2x3)

A^t: **es la transpuesta de la matriz A**

Entre los elementos de una matriz y su transpuesta se cumple la siguiente igualdad:

$$aij = (aji)t$$

$a21 = 1 \qquad (a21)t = 1$

$a32 = -1 \qquad (a23)t = -1$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad C^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

C^t: **es la transpuesta de la matriz C**

La cantidad de filas de una matriz coincide con la cantidad de columnas de la transpuesta.

La cantidad de columnas de una matriz coincide con la cantidad de filas de la transpuesta.

Rango de una matriz

Se llama **rango** de una matriz a la cantidad de **filas no nulas** de la matriz reducida por filas o escalonada.

Ejemplos

El rango de la siguiente matriz es 2:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

El rango de la siguiente matriz es 3:

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}$$

Elemento conductor: Es el primer elemento no nulo de una fila (de izquierda a derecha)

Matriz reducida por filas: Condiciones

1) **La filas nulas se encuentran por debajo de las filas no nulas**
2) **La filas no nulas están en escalera, es decir que cada elemento conductor tiene hacia su izquierda mayor cantidad de ceros que el de la fila anterior.**
3) **Todos los elementos conductores son iguales a 1.**
4) **En las columnas donde se ubican los elementos conductores, los restantes elementos son nulos.**

Operaciones Elementales de Filas:

Operación Tipo I: Intercambio de Filas

Ejemplo:

Dada la siguiente matriz:

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

Intercambiamos la fila 1 y fila 2:

$$\begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{matrix}$$

Operación Tipo II:

A la fila i la multiplicamos por un número real. Simbólicamente:

Fi → Fi*(número real)

A la fila del elemento que debemos transformar en 1 la multiplicamos por el inverso de dicho elemento

Si queremos transformar un elemento "a" de la fila, entonces a la fila de este elemento debemos multiplicarla por (1/a) es decir por su inverso

Ejemplo:

$$\begin{matrix} 2 & 0 \\ \underline{0} & \underline{1} \end{matrix}$$

F1*(1/2) Operación Tipo II

$$\begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{matrix}$$

Operación Tipo III:

A una fila le sumamos otra previamente multiplicada por un número real

Esta operación se aplica para transformar en 0 un elemento.

A la fila del elemento que debemos transformar en 0 le sumamos la fila que contenga el 1 (ubicado en la misma columna del elemento a transformar en 0) previamente multiplicada por el opuesto.

1 3

0 1

Fila 1 + Fila 2 (-3)

1+0(-3) 3+1(-3)= 3 + (-3)= 3-3

0 1

1 0

0 1

Para transformar en 0 un elemento, a la fila de dicho elemento se le suma otra fila previamente multiplicada por su opuesto.

La fila que debe sumarse es la que contiene el elemento conductor ubicado en la misma columna del elemento que debe transformarse en 0.

Dada la siguiente matriz A, obtener la reducida por filas de la matriz A:

2	-3	4
3	5	-1

1° a_{11} lo transformaremos en 1

2° a_{21} lo transformaremos en 0

3° a_{22} lo transformaremos en 1

4° a_{12} lo transformaremos 0

Para transformar en 1 al 2, a la fila 1 la multiplicamos por el inverso de 2 que es 1/2. Simbólicamente: F1 → F1 * ½

2(1/2)	**-3(1/2)**	**4(1/2)**
3	5	-1

Obtenemos la siguiente matriz:

1	**-3/2**	**2**
3	5	-1

Operación Tipo III: A una fila i le sumamos una fila j previamente multiplicada por un número real

Simbólicamente: Fi → Fi + Fj*(número real)

Esta operación se utiliza para transformar en 0 un elemento de la matriz.

1	-3/2	2
3	5	-1

Para transformar en 0 al 3 aplicamos la siguiente operación:

A la fila 2 le sumamos el producto entre la fila 1 y el opuesto de 3 que es -3.

Simbólicamente: F2 → F2 + F1 * (-3)

1	-3/2	2
3+1(-3)=0	**5 + (-3/2)*(-3)**	**-1 + 2*(-3)**

1	-3/2	2
0	**19/2**	**-7**

F2*(2/19) Operación Tipo II

1	-3/2	2
0	**1**	**-14/19**

F1 →F1 + F2(3/2)

1+0(3/2)	**-3/2 + 1(3/2)**	**2+ (-14/19)(3/2)**
0	**1**	**-14/19**

1	**0**	**17/19**
0	**1**	**-14/19**

2	**4**	**6**	18
4	**5**	**6**	24
3	**1**	**-2**	4

A continuación se obtendrá la Matriz Reducida por filas.

Transformamos en 1 el elemento conductor de la primera fila y en orden descendente transformamos en 0 los elementos que se ubican en la misma columna del elemento conductor:

Las matrices obtenidas en cada paso son Matrices Equivalentes por Filas.

2	4	6	18
4	5	6	24
3	1	-2	4

Transformaremos el elemento $a_{11}=2$ en 1, para ello aplicaremos la operación Tipo II:

A la fila 1 la multiplicamos por el inverso de 2 que es ½. Simbólicamente: $F1 \rightarrow F1^{*}$ ½

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2(1/2) & 4(1/2) & 6(1/2) & 18(1/2) \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Obtenemos la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Transformaremos en 0 los restantes elementos de la columna 1, para ello aplicamos la Operación Tipo III en la fila 2 y en la fila 3:

Transformaremos al elemento $a_{21} = 4$ en cero, para ello aplicaremos la siguiente operación:

A la fila 2 le sumamos la fila 1 previamente multiplicada por el opuesto de 4. Simbólicamente:

$F2 \rightarrow F2 + F1^{*}(-4)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4+1(-4) & 5+2(-4) & 6+3(-4) & 24+9(-4) \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Obtenemos la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Transformaremos al elemento $a_{31} = 3$ en cero, para ello aplicaremos la siguiente operación:

A la fila 3 le sumamos la fila 1 previamente multiplicada por el opuesto de 3. Simbólicamente:

$F3 \rightarrow F3 + F1^{*}(-3)$

Obtenemos la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 3+1(-3) & 1+2(-3) & -2+3(-3) & 4+9(-3) \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

Transformamos en 1 el elemento conductor de la segunda fila y en orden descendente transformamos en 0 los elementos que se ubican en la misma columna del elemento conductor

Transformaremos el elemento $a_{22}= -3$ en 1, para ello aplicaremos la Operación Tipo II:

A la fila 2 la multiplicamos por el inverso de -3 que es -1/3. Simbólicamente: F2 → F2*(-1/3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3(-1/3) & -6(-1/3) & -12(-1/3) \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

Obtenemos la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

Transformaremos en 0 los restantes elementos de la columna 2, para ello aplicaremos la Operación Tipo III en la fila 1 y en la fila 3:

Transformaremos el elemento $a_{12}=2$ en cero, para ello aplicaremos la siguiente operación:

A la fila 1 le sumamos la fila 2 previamente multiplicada por el opuesto de 2.

Simbólicamente:

F1 → F1 + F2*(-2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+0(-2) & 2+1(-2) & 3+2(-2) & 9+4(-2) \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

Obtenemos la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

Transformaremos el elemento $a_{32}=-5$ en cero, para ello aplicaremos la siguiente operación:

A la fila 3 le sumamos la fila 2 previamente multiplicada por el opuesto de -5. Simbólicamente:

$F3 \rightarrow F3 + F2*(5)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & & 1 \\ 0 & 1 & 2 & & 4 \\ 0+0(5) & -5+1(5) & -11+2(5) & & -23+4(5) \end{array}\right)$$

Obtenemos la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Transformamos en 1 el elemento conductor de la tercera fila y en orden descendente transformamos en 0 los elementos que se ubican en la misma columna del elemento conductor:

Transformaremos el elemento $a_{33}= -1$ en 1, para ello aplicaremos la operación Tipo II:

A la fila 3 la multiplicamos por el inverso de -1 que es 1/-1= -1. Simbólicamente: $F3 \rightarrow F3*(-1)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0(-1) & 0(-1) & -1(-1) & -3(-1) \end{array}\right)$$

Obtenemos la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Transformaremos en 0 los restantes elementos de la columna 3, para ello aplicaremos la operación Tipo III en la fila 1 y en la fila 2:

Transformaremos el elemento $a_{13}= -1$ en cero, para ello aplicaremos la siguiente operación:

A la fila 1 le sumamos la fila 3 previamente multiplicada por el opuesto de -1. Simbólicamente:

F1 → F1 + F3*(1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+0(1) & 0+0(1) & -1+1(1) & 1+3(1) \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Obtenemos la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Transformaremos el elemento $a_{23}=2$ en cero, para ello aplicaremos la siguiente operación:

A la fila 2 le sumamos la fila 3 previamente multiplicada por el opuesto de 2. Simbólicamente:

F2 → F2 + F3*(-2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0+0(-2) & 1+0(-2) & 2+1(-2) & 4+3(-2) \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Obtenemos la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

En resumen, los elementos se transformaron en el siguiente orden:

1°	**5°**	**8°**
2°	**4°**	**9°**
3°	**6°**	**7°**

Los elementos del 1°, 4° y 7° pasos deben tranformarse en 1, los elementos de los pasos: 2°, 3°, 5°, 6°, 8° y 9° deben transformarse en 0