UTN
Facultad Regional Córdoba

TUP

Tecnicatura Universitaria en Programación

MATEMÁTICA

Unidad Temática N°4:
Límites. Continuidad. Derivadas

Teórico
1 Año – 1° Cuatrimestre

Índice

LÍMITES 3
Límite de una función 3
Propiedades de los límites 6
Cálculo de límites 7
Indeterminaciones 7
CONTINUIDAD 13
Definición 13
Tipos de discontinuidad 15
DERIVADAS 19
Definición 19
Interpretación geométrica de la derivada 20
Recta tangente a una función 21
Diferencial de una función 23
Cálculo de derivadas 25
Regla de la cadena 29
Derivación sucesiva 39
Criterio de crecimiento o decrecimiento de las funciones 39
Máximos y mínimos relativos 42
BIBLIOGRAFÍA 50

LÍMITES

Límite de una función

La palabra límite a menudo se la asocia con una línea, puntos o momento que señala el final de un objeto material o no, a menudo en el lenguaje diario expresiones como: estoy llegando a gastar el límite de mi tarjeta de crédito, en tal sentido el concepto de límite implica la idea de aproximarse a un punto o a un valor tan cerca como se especifique, y sin alcanzarlo nunca. En lenguaje sencillo podríamos decir que el concepto de **límite** tiene que ver con la noción de **“acercarse cada vez más a algo”**, pero sin tocarlo.

Ejemplo:
Dada la función f(x)= x + 3. El dominio de esta función es: D = R
Se desea conocer cuál es el comportamiento de la función cuando se aproxima a 2.
Es decir, se desea calcular el

$$\lim_{x \to 2}(x+3)$$

En este caso 2 pertenece al dominio de (x +3), ya que f (2) =5
Se confecciona una tabla asignando **valores cercanos a 2**, algunos por la izquierda y otros por la derecha.

x tiende a 2 por izquierda $x \to 2^-$ **2** **x tiende a 2 por izquierda $x \to 2^+$**

x	1.5	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.05	2.1
f(x)	4.5	4.9	4.99	4.999	?	5.001	5.01	5.05	5.1

f(x) tiende a 5 **5** **f(x) tiende a 5**

Gráficamente

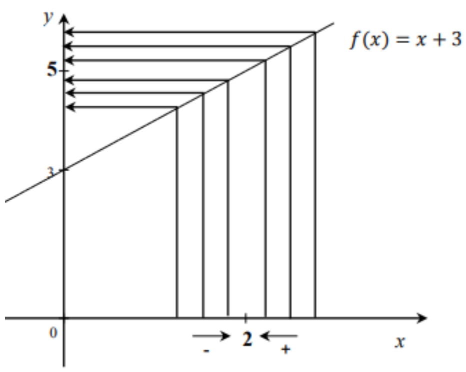


Gráfico1: Extraído de Recabarren, 2014.

Conclusión: $\lim_{x \to 2} (x + 3) = 5$

Ejemplo:

Dada la función f(x)= $\frac{x^3 - 1}{x-1}$. Cuando se tiene un cociente de funciones, su dominio **no está definido** cuando el **denominador se anula**. En este caso el denominador se anula en x=1, es decir : D= R - $\{1\}$

Se desea conocer cuál es el comportamiento de la función cuando se aproxima a 1. Es decir, se desea calcular el

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x-1}$$

Se confecciona una tabla asignando **valores cercanos a 1**, algunos por la izquierda y otros por la derecha.

x tiende a 1 por izquierda $x \to 1^-$ → **1** ← **x tiende a 1 por izquierda $x \to 1^+$**

x	0.9	0.95	0.99	0.999	1	1.001	1.005	1.01	1.1
f(x)	2.71	2.852	2.970	2.997	?	3.003	3.015	3.03	3.31

f(x) tiende a 3 → **3** ← **f(x) tiende a 3**

Conclusión: cuando x se aproxima a 1, ya sea por la izquierda o por la derecha, los valores de f(x) se acercan cada vez más a 3.

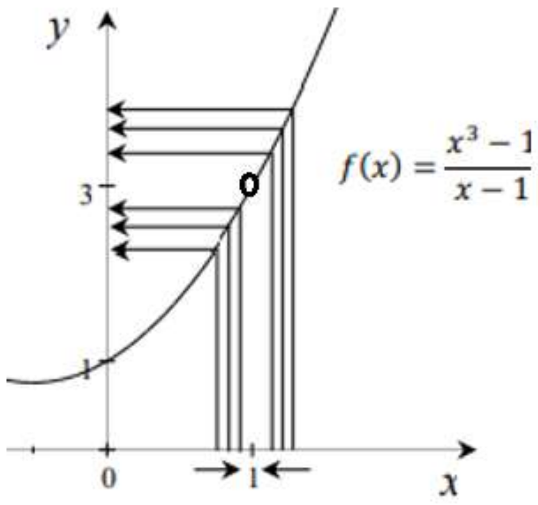


Gráfico2: Extraído de Recabarren, 2014.

Aunque la función **no está definida en x=1** (gráficamente se lo indica por un pequeño círculo vacío), los valores de la función se acercan a 3 a medida que se acerca a 1.

Se puede decir que el límite de la función existe en 1, aunque 1 no pertenece al dominio de la función.

Condición necesaria y suficiente de un límite de una función:

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ existe si sólo si } \begin{cases} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) \end{cases} \text{ existen y sean iguales}$$

Límite lateral derecho (LLD) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

Significa que **x** se aproxima al número **a** por **valores mayores que a** (por derecha de a, en la recta numérica).

Límite lateral izquierdo (LLI) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

Significa que **x** se aproxima al número **a** por **valores menores que a** (por izquierda de a en la recta numérica).

Ejemplo:

Dada la función f(x)= $\frac{1}{x}$. Su dominio no está definido cuando el denominador se anula.

En este caso el denominador se anula en x=0, es decir : D= R - $\{0\}$

Se desea conocer cuál es el comportamiento de la función cuando se aproxima a 0.

Es decir, se desea calcular el

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

Se confecciona una tabla asignando valores cercanos a 0, algunos por la izquierda y otros por la derecha.

x tiende a 1 por izquierda $x \to 0^-$ **0** **x tiende a 1 por izquierda $x \to 0^+$**

x	-0.1	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.1
f(x)	-10	-1000	-10000	?	10000	1000	10

Por tabla se puede ver que el límite no existe. Es decir, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \nexists$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad\qquad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Se puede concluir que: LLD:$+\infty$ y LLI:$-\infty$. Por lo tanto, al no ser iguales los límites laterales, no existe el límite en x=0.

Propiedades de los límites

1) El límite de una constante, es la constante misma.

$$\lim_{x\to a} \mathrm{c} = \mathrm{c}$$

Ejemplo: $\lim_{x\to a} 3 = 3$

2) El límite de una constante por una función, es igual a la constante por el límite de la función.

$$\lim_{x\to a} \mathrm{c.f(x)} = \mathrm{c.}\lim_{x\to a} \mathrm{f(x)}$$

Ejemplo: $\lim_{x\to 0} 4\,\mathrm{sen(x)} = 4 \lim_{x\to 0} \mathrm{sen(x)}$ = 4.sen(0)= 4.0= 0

3) El límite de una suma o resta de funciones, es igual a la suma o resta de los límites de las funciones.

$$\lim_{x\to a} (\mathrm{f(x)} \pm \mathrm{g(x)}) = \lim_{x\to a} \mathrm{f(x)} \pm \lim_{x\to a} \mathrm{g(x)}$$

Ejemplo: $\lim_{x\to 2} (7x^2 + \mathrm{x}) = \lim_{x\to 2} 7x^2 + \lim_{x\to 2} \mathrm{x} = 7(2)^2 + 2 = 28 + 2 = 30$

4) El límite de un producto de funciones, es igual al producto de los límites de las funciones.

$$\lim_{x\to a} (\mathrm{f(x)\,.\,g(x)}) = \lim_{x\to a} \mathrm{f(x)}\,.\lim_{x\to a} \mathrm{g(x)}$$

Ejemplo: $\lim_{x\to 0} (2x^2 + 3).\cos x = \lim_{x\to 0}(2x^2 + 3)\,.\lim_{x\to 0} \cos x$

$= (2.(0)^2 + 3).\cos(0) = 3.1 = 3$

5) El límite de un cociente de funciones, es igual al cociente de los límites de las funciones.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Ejemplo: $\lim_{x\to 1} \frac{3x+2}{x} = \frac{\lim_{x\to 1} 3x+2}{\lim_{x\to 1} x} = \frac{\lim_{x\to 1} 3(1)+2}{\lim_{x\to 1} 1} = \frac{5}{1} = 5$

6) El límite de un logaritmo de una función, es igual al logaritmo del límite de la función.

$$\lim_{x\to a} \ln f(x) = \ln \lim_{x\to a} \mathrm{f(x)}$$

Ejemplo: $\lim_{x\to 0} \ln \cos x = \ln \lim_{x\to 0} \cos x$ = ln cos0= ln1=0

7) El límite de una expresión exponencial es igual, al límite de la base, elevado al límite del exponente.

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x)^{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Ejemplo: $\lim_{x \to 3} (2x)^{x} = \lim_{x \to 3} (2x)^{\lim_{x \to 3} x} = (2.3)^{3} = 6^{3} = 216$

Cálculo de límites

El primer paso en la resolución de un límite consiste en reemplazar la variable "x" de la función, por el valor "a" al cual tiende "x" en el límite.

Ejemplo: $\lim_{x \to 0} \frac{x+3}{cosx} = \frac{0+3}{cos0} = \frac{3}{1} = 3$

Si por el simple reemplazo se obtiene como resultado valores finitos (incluido el cero) o infinito (con su signo), el ejercicio culminó. También es posible que al realizar dicho reemplazo nos encontremos con expresiones que se denominan Indeterminaciones. Estas indeterminaciones, no representan el Valor Verdadero del límite, nos indican que el ejercicio no ha terminado y se debe pasar al siguiente paso.

Indeterminaciones

Si al reemplazar la variable por el valor al cual tiende x en el límite se encuentran las siguientes expresiones:

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0.\infty$	$\infty - \infty$	1^{∞}	0^{0}	∞^{0}

significa que se está en presencia de una indeterminación matemática. Las indeterminaciones se pueden resolver haciendo uso del algebra según sea el caso y tipo de expresión. Las siguientes situaciones **NO** son Indeterminaciones:

$\lim_{x \to a} \frac{k}{\infty} = 0$	$\lim_{x \to a} \frac{\infty}{0} = \infty$	$\lim_{x \to a} e^{\infty} = \infty$
$\lim_{x \to a} . \frac{k}{0} = \infty$	$\lim_{x \to a} \frac{0}{\infty} = 0$	$\lim_{x \to a} e^{-\infty} = 0$
sen(0)=0	**cos(0)=1**	

Tabla 1: Elaboración propia

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x+1}{x^3-2} =$

Se reemplaza x por (-2) en el límite.

$$\lim_{x \to -2} \frac{2(-2)+1}{(-2)^3-2} = \frac{-4+1}{-8-2} = \frac{-3}{-10} = \frac{3}{10}$$

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{1^2-1} = \frac{1}{0} = \infty$

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 7} \sqrt{2+x} = \sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3$

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x+1} = \frac{2}{\infty+1} = \frac{2}{\infty} = 0$

Recordar: El primer paso en la resolución de un límite consiste en reemplazar la variable "x" de la función, por el valor "a" al cual tiende "x" en el límite.

En todos estos ejercicios se obtuvo valores finitos, como: 0, 3, ∞, etc. Por lo tanto, la resolución terminó.

Indeterminación $\mathbf{\frac{0}{0}}$

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1-1}{1^2-1} = \frac{0}{0}$ indeterminación

En este tipo de ejercicios, la resolución no terminó y se debe hacer uso de los casos de factoreo y del factoreo de raíces para salvar la indeterminación.

(x^2- 1) = (x – 1) (x + 1) **Diferencia de cuadrados**

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{x^2-x} = \frac{2.0}{0^2-0} = \frac{0}{0}$ indeterminación

En este caso se realiza **factor común**.

$\lim_{x \to 0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\,(x-1)} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{-1} = -2$

Ejemplo: $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2-16} = \frac{4-4}{4^2-16} = \frac{0}{0}$ indeterminación

$(x^2 - 16) = (x - 4).(x + 4)$ **Diferencia de cuadrados**

$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2-16} = \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}(x+4)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}$

Ejemplo: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 1} \frac{(1)^2+(1)-2}{(1)^2-3(1)+2} = \frac{0}{0}$ indeterminación

En este caso como son polinomios de grado 2 se sacarán las raíces con Bhaskara.

$x^2 + x - 2$

a=1 b=1 c= -2

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-2)}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} =$$

$X_1 = 1$

$X_2 = -2$

$x^2 - 3x + 2$

a=1 b=-3 c=2

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.2}}{2.1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} =$$

$X_1 = 2$

$X_2 = 1$

Se reemplaza en el ejercicio

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{(x-2)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x-2} = \frac{1+2}{1-2} = \frac{3}{-1} = -3$

Recordar: $ax^2 + bx + c = a.(x - x_1).(x - x_2)$

X_1 y X_2 raíces del polinomio

Ejemplo: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6} = \lim_{x \to 2} \frac{(2)^2-(2)-2}{(2)^2-5(2)+6} = \frac{0}{0}$ indeterminación

En este caso como son polinomios de grado 2 se sacarán las raíces con Bhaskara.

$x^2 - x - 2$

a=1 b= -1 c= -2

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-2)}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} =$$

$X_{1}=$ 2

$X_{2}=$ -1

$x^2 - 5x + 6$

a=1 b= -5 c=6

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} =$$

$X_{1}=$ 3

$X_{2}=$ 2

Se reemplaza en el ejercicio

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{(x-3)\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x-3} = \frac{1+2}{2-3} = \frac{3}{-1} = -3$$

Resumiendo:

- Se valúa la expresión original y se verifica si es o no una indeterminación.
  Si no es una indeterminación, el ejercicio culminó. Si es una indeterminación se pasa al siguiente paso.
- Se reemplaza el polinomio por su equivalente como producto de factores.
- Se simplifican todos los factores que se puedan (este es el objetivo de la mecánica).
- Se valúa el límite resultante para encontrar su resultado.

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ P(x) y Q(x): polinomios

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + .a_0}{b_n x^m + b_{n-1}x^{m-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + .b_0} = \frac{\infty}{\infty}$$

- Si el grado del numerador es igual al grado del denominador, el resultado del límite es: $\frac{a_n}{b_n}$.
- Si el grado del numerador es más grande que el grado del denominador, el resultado del límite es ∞.
- Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, el resultado es cero.

Los tres posibles casos se resuelven de la misma forma, es decir se debe identificar el mayor grado existente, para luego dividir numerador y denominador por x elevado a ese grado.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5+2x}{3x^2+2}$

Se valúa en el límite y se verifica si es una indeterminación.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+2x}{3x^2+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\infty)^5+2(\infty)}{3(\infty)^2+2} = \frac{\infty}{\infty}$$

Se identifica el mayor grado existente, para luego dividir al numerador y denominador por dicha potencia. En este caso x^5.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^5+2x}{x^5}}{\frac{3x^2+2}{x^5}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^5}{x^5}+\frac{2x}{x^5}}{\frac{3x^2}{x^5}+\frac{2}{x^5}}$$

se distribuye el denominador y se simplifica

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1} + \frac{2}{x^4}}{\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^5}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+0}{0+0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\infty^4} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\infty^3}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\infty^5}=0$$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x}{6x^3+7x}$

Se valúa en el límite y se verifica si es una indeterminación.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x}{6x^3+7x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3(\infty)^2+2(\infty)}{6(\infty)^3+7(\infty)}=\frac{\infty}{\infty}$$

Se identifica el mayor grado existente, para luego dividir al numerador y denominador por dicha potencia. En este caso x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x}{6x^3+7x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2+2x}{x^3}}{\frac{6x^3+7x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}}{\frac{6x^3}{x^3}+\frac{7x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{\frac{6}{1}+\frac{7}{x^2}}=\frac{0+0}{6+0}=\frac{0}{6}=0$$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x}{7x^3-2x}$

Se valúa en el límite y se verifica si es una indeterminación.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x}{7x^3-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4(\infty)^3+2(\infty)}{7(\infty)^3-2(\infty)}=\frac{\infty}{\infty}$$

Se identifica el mayor grado existente, para luego dividir al numerador y denominador por dicha potencia. En este caso x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x}{7x^3-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3}-\frac{2x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{1}+\frac{2}{x^2}}{\frac{7}{1}-\frac{2}{x^2}}=\frac{4+0}{7+0}=\frac{4}{7}$$

Límites particulares o notables

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

CONTINUIDAD

Definición

Intuitivamente se puede afirmar que una función es continua en un punto si es posible dibujar la gráfica de la función cerca del punto sin levantar el lápiz del papel. Por el contrario, una función es discontinua en un punto si el lápiz debe levantarse del papel para dibujar la gráfica en ambos lados del punto.

Ejemplo:
En esta gráfica, la función presenta un círculo abierto en el punto (2,3) que indica que en ese punto hay un "agujero" en la gráfica. Es decir, en x=2 la función no está definida, aun cuando la función tiende a 3 cuando x se acerca a 2 por izquierda y por derecha. Luego la función tiene límite para x que tiende a 2.

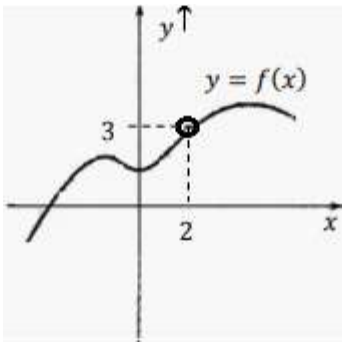


Gráfico 3: Elaboración propia

Ejemplo:
En esta gráfica, la función es discontinua en x= -3, debido al salto de 3 unidades que muestra en el gráfico. Es decir, cuando se acerca a -3 por izquierda la función tiende a 1 y cuando se acerca a -3 por derecha la función se aproxima a 4. Luego, la función no tiene límite para cuando x tiende a -3, ya que sus límites laterales son distintos.

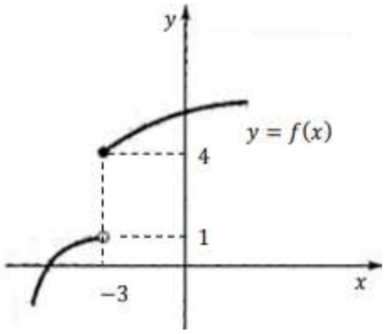


Gráfico 4: Elaboración propia

Ejemplo:
La función es discontinua en x=2. Se observa que cuando x está cerca de 2, los valores de f(x) tienden a 4, por lo que a cada lado de x=2, la función se aproxima a 4. Pero cuando x toma el valor de 2, la función toma el valor de 6. Es decir, que el límite de la función no coincide con la función evaluada en el punto x=2.

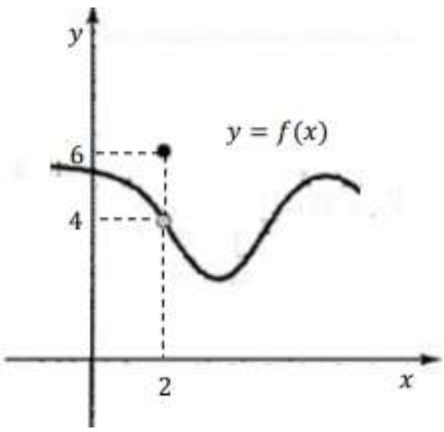


Gráfico 5: Elaboración propia

Del primer ejemplo podemos establecer que para que una función sea **continua** f(a) debe **estar definida**, de lo contrario la gráfica presentaría un “hueco”.
Pero el último ejemplo indica que esto no es suficiente para garantizar la **continuidad**, también es necesario que cuando **x** tienda a **a**, f(x) debe estar muy cerca de f(a).

Una función es continua en el punto x=a si cumple:

1) f(a) existe

2) $\lim_{x \to a-} f(x)$ **existe ;** $\lim_{x \to a+} f(x)$ **existe y** $\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$

3) Los límites laterales son iguales y coinciden con el valor de la función en ese punto: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si una función f no cumple alguna de esas 3 condiciones, se dice que la función no es continua en x=a.

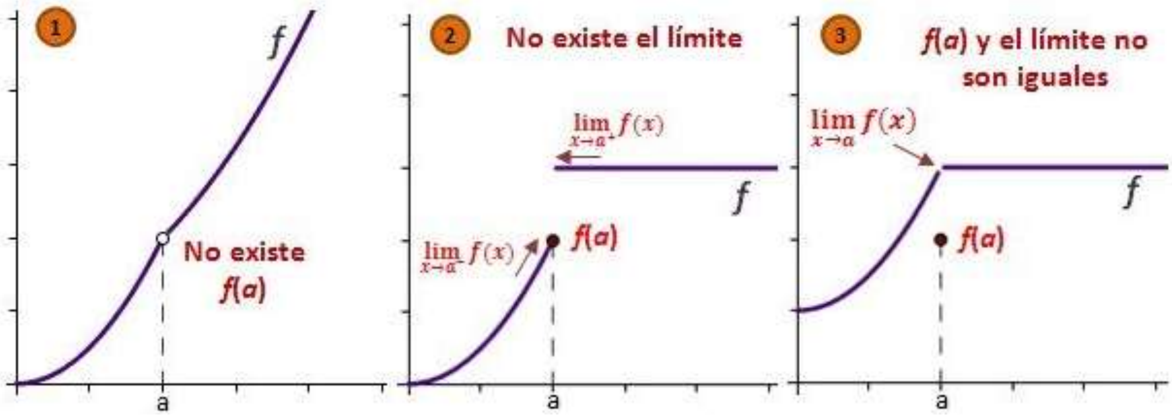


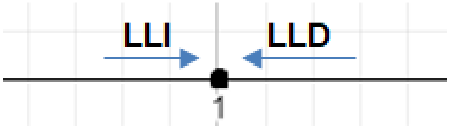
Gráfico 6:Extraído de Universo Formulas

Recordar: En la gráfica 1, la función presenta un círculo abierto en el punto que indica que en ese punto hay un "agujero" en la gráfica. Es decir, en x=a la función no está definida.

Ejemplo: f(x) = $\frac{x}{x-1}$

Cuando se tiene un cociente de funciones, su dominio no está definido cuando el denominador se anula.

En este caso el denominador se anula en x=1, es decir : D= R - $\{1\}$



$$\lim_{x \to 1-} \frac{x}{x-1} = \frac{0.999}{0.999-1} = -999 = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x}{x-1} = \frac{1.001}{1.001-1} = 1001 = +\infty$$

Cuando se toman los límites laterales por izquierda y por derecha, se toman valores muy cercanos al punto.
Como los límites laterales no son iguales la función no es continua en x=1.

Tipos de discontinuidad

• **Discontinua inevitable de salto infinito**:

Una discontinuidad es inevitable o de primera especie si los límites laterales en x=a son distintos. Y es de salto Infinito si alguno de los límites laterales es infinito o no existe.

Ejemplo:

$$f(x)\begin{cases} x^2 & si\ x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} & si\ x > 1 \end{cases}$$

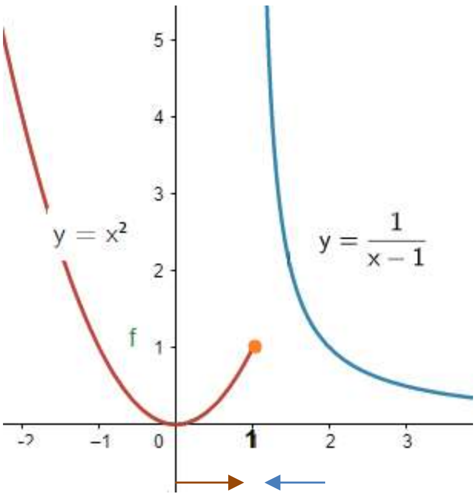
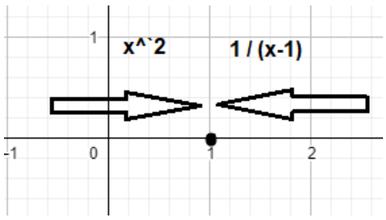


Gráfico 7: Elaboración propia



$$\lim_{x \to 1-} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \to 1+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1.001-1} = \infty$$

• **Discontinua inevitable de salto finito**:

Si los dos límites laterales son finitos pero distintos. El salto es la diferencia, en valor absoluto, de los límites laterales.

Existe $\lim_{x \to a-} f(x)$; Existe $\lim_{x \to a+} f(x)$
Pero $\lim_{x \to a-} f(x) \neq \lim_{x \to a+} f(x)$
Salto = $\lim_{x \to a-} f(x) - \lim_{x \to a+} f(x)$

Ejemplo:

f(x)$\begin{cases} x^2 & si\ x \leq 2 \\ 5 & si\ x > 2 \end{cases}$

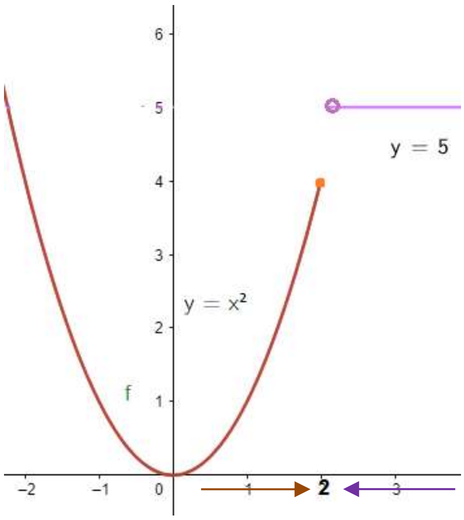
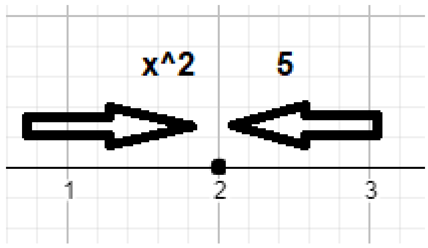


Gráfico 8: elaboración propia



$\lim_{x \to 2-} x^2 = 4$

$\lim_{x \to 2+} 5 = 5$

En x=2 hay una discontinuidad inevitable de salto finito 1.

• **Discontinua Evitable**:

Si los dos límites laterales son finitos e iguales, pero su valor no coincide con f(a) o no existe f(a).

Existe $\lim_{x \to a-} f(x)$; Existe $\lim_{x \to a+} f(x)$
Pero f(a)$\neq \lim_{x \to a} f(x)$

Ejemplo:

f(x)$\begin{cases} \frac{x^2-x}{x-1} & si\ x \neq 1 \\ 2 & si\ x = 1 \end{cases}$

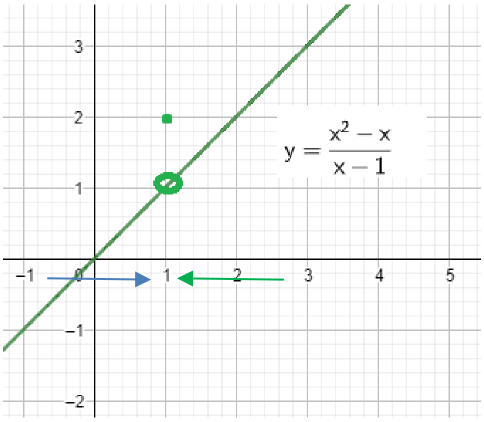


Gráfico 9: Elaboración propia

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{(0.99)^2 - (0.99)}{(0.99) - 1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1+} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{(1.01)^2 - (1.01)}{(1.01) - 1} = 1$$

f(1)=2

La función presenta una discontinuidad evitable en x=1 porque los límites laterales coinciden pero ese valor es distinto al valor de la función en ese punto.

Ejemplo: estudiar la continuidad de la siguiente función:

f(x)=$\begin{cases} x^2 - 1 & si\ x \leq 0 \\ 2x - 3 & si\ x > 0 \end{cases}$

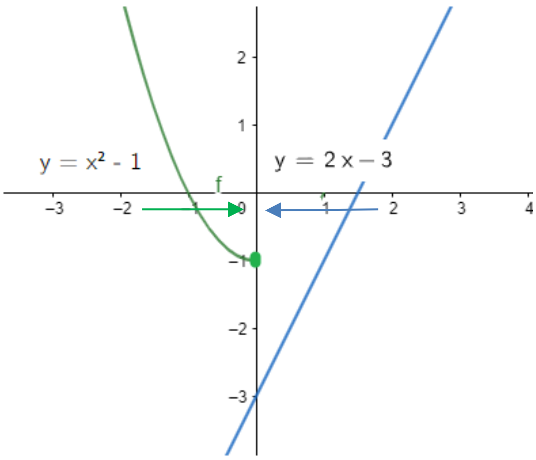


Gráfico 10: Elaboración propia.

Esta es una función por partes o definida a trozos, que consiste en la parábola $x^2 - 1$ para los valores de $x \leq 0$ y en la recta $2x - 3$ cuando $x > 0$.

Si queremos acercarnos a x=0 desde la izquierda, en tal caso se toma la parte de la función que es válida para $x \leq 0$:

$\lim_{x\to 0-} x^2 - 1 = 0^2 - 1 =$ -1

Si queremos acercarnos a x=0 desde la derecha, en tal caso se toma la parte de la función que es válida para $x > 0$:

$\lim_{x\to 0+} 2x - 3 = 2(0) - 3 =$ -3

f(0)= -1

Los dos límites laterales son finitos pero distintos. La función presenta una discontinuidad inevitable de salto 2 en x=0

Salto: $|-1-(-3)|$= 2

Ejemplo: estudiar la continuidad de la siguiente función:

(x)=$\begin{cases} x+1 & si\ x < 2 \\ 2x-1 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

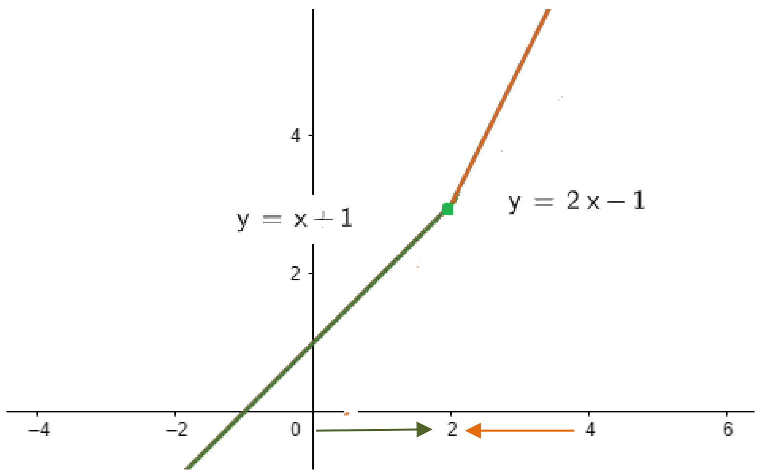


Gráfico 11: Elaboración propia

Si queremos acercarnos a x=2 desde la izquierda, en tal caso se toma la parte de la función que es válida para $x < 2$:

$\lim_{x\to 2-} x + 1 = 2 + 1 =$ 3

Si queremos acercarnos a x=2 desde la derecha, en tal caso se toma la parte de la función que es válida para $x \geq 2$:

$\lim_{x\to 2+} 2x - 1 = 2(2) - 1 =$ 3

f(2)= 3

Como todos los límites son iguales, la función es continua.

DERIVADAS

En la unidad 1 se estudió que una variable puede variar en función de otra y así surgió el concepto de función. Por ejemplo, si un auto se desplaza sobre una recta su posición x es función del tiempo t, es decir que para cada instante t el auto está en una determinada posición.

En esta unidad se estudiará la velocidad de variación de una variable con respecto a otra variable. Es decir, medir la rapidez con que se produce el cambio de una situación. Por ejemplo, si el auto anterior recorre 100 Km en 1 hora, la variable posición varió más rápido que si el mismo auto recorre 55 Km en 1 hora. Esta idea de rapidez de variación, está asociada al concepto de Derivada.

La derivada de y=f(x) en cada punto x es f´ (x) e indica la velocidad, tasa o rapidez con que cambia la función en el punto x.

Definición

Sea f una función definida sobre un intervalo abierto (a,b) y x_o número real perteneciente al intervalo. Se denomina **derivada** de una función f en el valor x_o
Y se simboliza f´(x_0) o también $\frac{dy}{dx}$ al valor:

$$f'(xo) = \lim_{x \to xo} \frac{f(x)-f(xo)}{x-xo}$$

Siempre que el límite exista. En caso contrario se dice que f no es derivable.
También existe otra forma de definir la derivada de la función f en xo, resulta de realizar un cambio de variable en el límite que la define. Sea h= x – xo entonces

$h \to 0$ y $x = xo + h$

$$\boxed{f'(xo) = \lim_{x \to xo} \frac{f(x)-f(xo)}{x-xo} = \lim_{h \to 0} \frac{f(xo+h)-f(xo)}{h}}$$

Interpretación geométrica de la derivada

Sea f una función continua representada por medio de una curva C. Consideremos un punto fijo P = (x0, f(x0)) y otro punto Q = (x, f(x)) pertenecientes a esta curva. La diferencia entre f(x) y f(x0) se denomina incremento de la función y se simboliza ∆f, mientras que la diferencia entre los valores x y x_0 se denomina incremento de la variable y se simboliza ∆x. Luego la pendiente de la recta que pasa por los puntos P y Q es el cociente entre estos incrementos.

$$pendiente = \lim_{x \to \text{xo}} \frac{f(x) - f(\text{xo})}{x - \text{xo}}$$

Y se denomina **cociente incremental.**

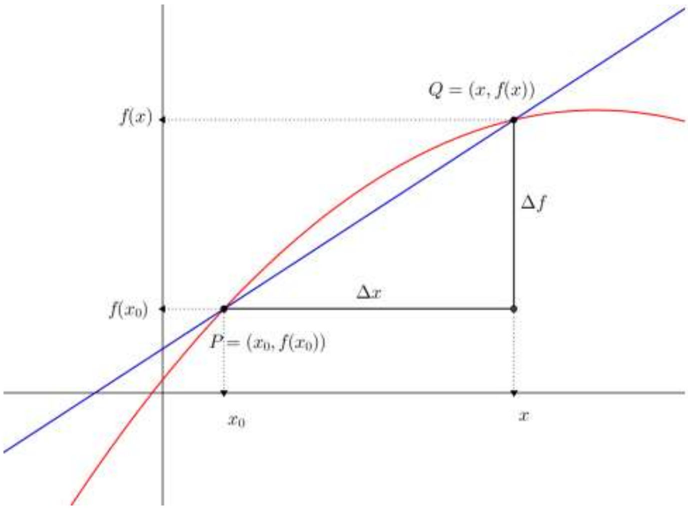


Gráfico 12:Elaboración propia.

Se puede reescribir la definición como:

$$f'(\text{xo}) = \lim_{x \to \text{xo}} \frac{f(x) - f(\text{xo})}{x - \text{xo}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Este límite se interpreta gráficamente como: a medida que x se acerca cada vez más a x0 (o lo que es equivalente que ∆x se aproxime cada vez más a 0), el punto Q se aproxima al punto P; luego la recta secante que pasa por P y Q se aproxima a la recta tangente a la curva en el punto P (el cociente incremental se aproxima al valor de la pendiente de la recta tangente).

Por lo que podemos concluir que **la derivada de la función f en x_0 es la pendiente de la recta tangente en P a la curva que representa a f**.

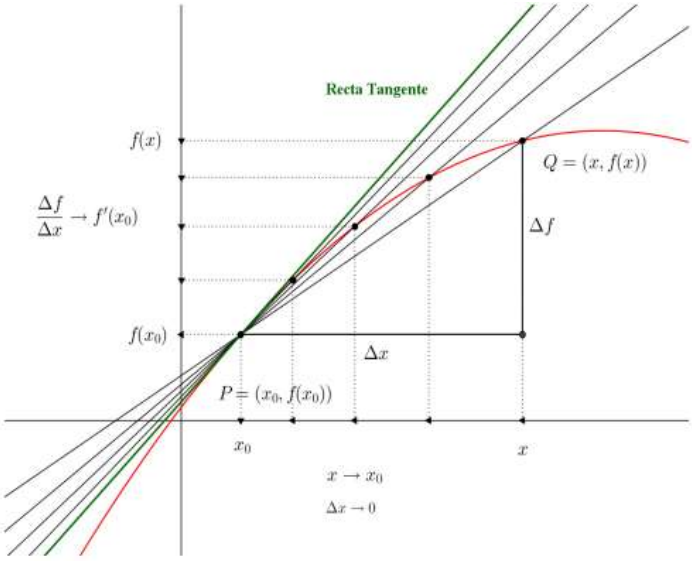


Gráfico 13: Elaboración propia.

Recta tangente a una función

Ecuación de la Recta Tangente	**y = f´(x_0) (x – x_0) + f(x_0)**

Ejemplo: Sea f(x)=$x^2 + 5x$. Encontrar la recta tangente de la función en x_0=1

Procedimiento:

Paso 1: Se valúa la función en el punto.

f(x_0)= $(\mathrm{xo})^2 + 5(\mathrm{xo})$

f(1)= $(1)^2 + 5(1)$

f(1)= 6

Paso 2: Se deriva la función

f(x)=$x^2 + 5x$

f´(x)=2x+5

Paso 3: Se valúa la derivada en x_0

f´(x)=2x+5

f´(1)=2(1)+5

f´(1)=7

Paso 4: Se reemplazan estos valores obtenidos en la fórmula de la recta tangente.

y = f´(x_0).(x –x_0) + f(x_0)

y = f´(1).(x –1) + f(1)

y = 7. (x – 1) + 6

y = 7x -7 +6

y= 7x – 1 (ecuación de la recta tangente de la función en el punto x_0=1)

Ejemplo: Sea f(x)=x^2. Encontrar la recta tangente de la función en x_0=2

Procedimiento:

Paso 1: Se valúa la función en el punto.

f(x_0)= $(xo)^2$

f(2)= $(2)^2$

f(2)= 4

Paso 2: Se deriva la función

f(x)=x^2

f´(x)=2x

Paso 3: Se valúa la derivada en x_0

f´(x)=2x

f´(2)=2(2)

f´(2)=4

Paso 4: Se reemplazan estos valores obtenidos en la fórmula de la recta tangente.

y = f´(x_0).(x –x_0) + f(x_0)

y = f´(2).(x –2) + f(2)

y = 4. (x – 2) + 4

y = 4x -8 +4

y= 4x – 4 (ecuación de la recta tangente de la función en el punto x_0=1

Gráficamente

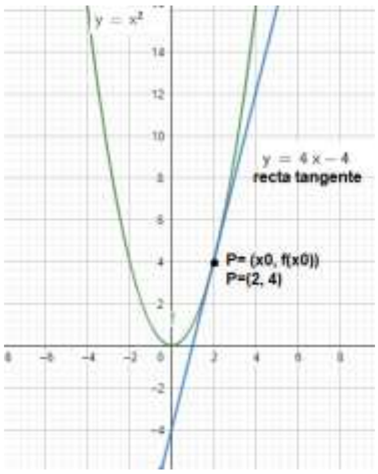


Gráfico 14: Elaboración propia.

Ejemplo: Sea f(x)=$-x^2+1$. Encontrar la recta tangente de la función en x_0=3

Procedimiento:

Paso 1: Se valúa la función en el punto.

f(x0)= $-(xo)^2 + 1$

f(2)= $-(3)^2 + 1$

f(2)= - 8

Paso 2: Se deriva la función

f(x)=$-x^2 + 1$

f´(x)= - 2x

Paso 3: Se valúa la derivada en x_0

f´(x)= - 2x

f´(2)= -2(3)

f´(2)= -6

Paso 4: Se reemplazan estos valores obtenidos en la fórmula de la recta tangente.

y = f´(x_0).(x –x_0) + f(x_0)

y = f´(3).(x –3) + f(3)

y = -6. (x – 3) - 8

y = -6x +18- 8

y= -6x +10 (ecuación de la recta tangente de la función en el punto x_0=1

Diferencial de una función

Si f(x) es una función derivable, la **diferencial de una función** correspondiente al incremento h de la variable independiente, es el producto f´(x).h. se representa por dy. dy= f´(x). h

dy= f´(x).dx

Interpretación geométrica de la diferencial

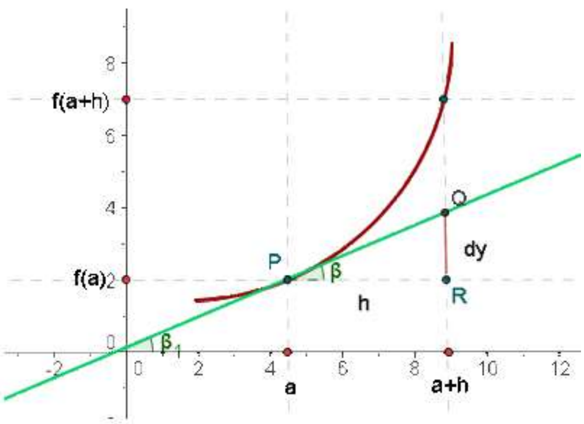


Gráfico 15:Extraído de Super Prof Material Didáctico

$$f'(x) = tg\ \alpha = \frac{QR}{PR} = \frac{QR}{h}$$

$$QR = f'(x).\ h, \qquad QR = (dy)_{x=a}$$

La diferencial en un punto representa el incremento de la ordenada de la tangente correspondiente a un incremento de la variable independiente.

Ejemplo: Hallar la diferencial de f(x)= $3x^2 + 5x - 6$

Se calcula la derivada de la función

f´(x)= 6x + 5

Se multiplica la derivada por el incremento dx.

f´(x)= (6x + 5).dx

Ejemplo: Hallar la diferencial de f(x)= 4^{cosx}

Se calcula la derivada de la función

f´(x)= 4^{cosx}.(-senx)

Se multiplica la derivada por el incremento dx

f´(x)= 4^{cosx}.(-senx).dx

Ejemplo: Hallar la diferencial de f(x)= $\sqrt{x}$

Se calcula la derivada de la función

f´(x)= $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Se multiplica la derivada por el incremento dx.

f´(x)= $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ .dx

TABLA DE DERIVADAS FUNDAMENTALES

y= c	y´= 0		
y= x	y´= 1		
y= $u \pm v \pm w$	y´= $u' \pm v' \pm w'$		
y= $u.v$	y´= $u'.v + u.v'$		
y= $\frac{u}{v}$	y´= $\frac{u'.v - u.v'}{v^2}$		
y= $c.x$	y´= c	y= $c.u$	y´= $c.u'$
y= x^n	y´= $n.x^{n-1}$	y= u^n	y´= $n.u^{n-1}.u'$
y= e^x	y´= e^x	y= e^u	y´= $e^u.u'$
y= a^x	y´= $a^x.lna$	y= a^u	y´= $a^u.lna.u'$
y= $\ln(x)$	y´= $\frac{1}{x}$	y= $ln(u)$	y´= $\frac{u'}{u}$
y= $sen(x)$	y´= $\cos(x)$	y= $sen(u)$	y´= $cos(u).u'$
y= $\cos(x)$	y´= $-sen(x)$	y= $cos(u)$	y´= $-sen(u).u'$
y= $tg(x)$	y´= $\frac{1}{cos^2(x)}$	y= $tg(u)$	y´= $\frac{u'}{cos^2(u)}$
y= $cotg(x)$	y´= $\frac{-1}{sen^2(x)}$	y= $cotg(u)$	y´= $\frac{-u'}{sen^2(u)}$
y= $arc\,sen(x)$	y´= $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	y= $arc\,sen(u)$	y´= $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
y= $arc\cos(x)$	y´= $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	y= $arc\,cos(u)$	y´= $\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
y= $arc\,tg(x)$	y´= $\frac{1}{1+x^2}$	y= $arc\,tg(u)$	y´= $\frac{u'}{1+u^2}$
y= $arc\,cotg(x)$	y´= $\frac{-1}{1+x^2}$	y= $arc\,cotg(u)$	y´= $\frac{-u'}{1+u^2}$

Tabla 2: Elaboración propia.

Cálculo de derivadas

Ejemplo: y= 3x +5 y´= 3 | y= k.x y´=k | y= k y´=0

Ejemplo: y= 3x +5	y= k.x	y´=k
y´= 3	y= k	y´=0
Ejemplo: y= $x^4 - 2e^x$	y= x^n	y´= n. x^{n-1}
y´= 4. x^3- $2e^x$	y=e^x	y´=e^x
Ejemplo: y= 2 +5^x	y= a^x	y´=a^x. lna
y´= 5^x. Ln5		

Ejemplo: y= $\underset{u}{\underbrace{x^2}}.\ \underset{v}{\underbrace{e^x}}$

y= u´. v + u . v´

u´= 2x

v´=e^x

y´= $u´.e^x \ + \ x^2$.v´

y´= 2x. $e^x \ + \ x^2.e^x$

se extrae factor común

y´= x. $e^x(\,2 + x.e^x)$

Ejemplo: y= $\dfrac{e^x}{x+2} \rightarrow \dfrac{u}{v}$

y= $\dfrac{u´.v-u.v´}{v^2}$

y´= $\dfrac{u´.(x+2)-e^x.v´}{(e^x)^2}$

u´=e^x

v´=1

y´= $\dfrac{e^x.(x+2)-e^x.1}{(e^x)^2}$

y´= $\dfrac{e^x.x+2.e^x-e^x}{(e^x)^2}$

y´= $\dfrac{e^x.x+e^x}{(e^x)^2}$

y´= $\dfrac{\cancel{e^x}.(x+1)}{(e^x)^{\cancel{2}}}$

y´= $\dfrac{(x+1)}{e^x}$

Ejemplo: y=$\dfrac{senx}{x^3+2x} \rightarrow \dfrac{u}{v}$

y= $\dfrac{u´.v-u.v´}{v^2}$

y´=$\dfrac{u´.(x^3+2x)-senx.v´}{(x^3+2x)^2}$

u´= cosx

v´= $3x^2+2$

y´=$\dfrac{cosx.(x^3+2x)-senx.(\ 3x^2+2)}{(x^3+2x)^2}$

Ejemplo: y= senx + lnx - 5^x

y´= cosx + $\frac{1}{x}$ - 5^x. Ln5

Ejemplo: y = x. $\sqrt[3]{x^2}$ y=$x.x^{2/3}$ y=$x^{5/3}$

y´= $\frac{5}{3}\,x^{2/3}$ y´= $\frac{5}{3}\,\sqrt[3]{x^2}$

Recordar: producto de potencia de la misma base, es la misma base y los exponentes se suman.

Cociente de potencia de la misma base, es la misma base y los exponentes se restan.

Siempre se puede convertir una raíz en potencia. $\sqrt[m]{x^n} = x^{n/m}$

Ejemplo: $y = 8x^2 + 4\sqrt{x} - e$

$$y = 8x^2 + 4x^{\frac{1}{2}} - e$$

$$y´ = 8\,.\,2x + 4\,.\frac{1}{2}\,x^{\frac{-1}{2}}$$

$$y´ = 16x + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Recordar $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$

Ejemplo: $y = \frac{3x+1}{2x+5}$ → U U´=3

→ V V´=2

$$y = \frac{U´.(2x+5)-(3x+1).V´}{(2x+5)^2}$$

$$y´ = \frac{3\,.(2x+5)-(3x+1).2}{(2x+5)^2}$$

Aplico distributiva para eliminar paréntesis

$$y´ = \frac{6x+15-(6x+2)}{(2x+5)^2}$$

$$y´ = \frac{\cancel{6x}+15-\cancel{6x}-2}{(2x+5)^2}$$

$$y´ = \frac{13}{(2x+5)^2}$$

Ejemplo: $y = -6x^4$

$y' = -6\ .\ 4\,.\,x^3$

$y' = -24\,.\,x^3$

Ejemplo: $y = \frac{1}{2}\ e^x + \ln x - \operatorname{tg} x$ $\qquad y = lnx \qquad y' = \frac{1}{x}$

$y' = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{x} - \frac{1}{cos^2 x}$ $\qquad y = tgx \qquad y' = \frac{1}{cos^2 x}$

Ejemplo: $y = 3x^2 - 4\ x + 2$

$y' = 3\,.\,2x - 4$

$y' = 6x - 4$

Ejemplo : $y = \frac{2}{3}\,.\ x^{-3} + 8^x + 2\ \text{sen}\ x$

$y' = \frac{2}{\cancel{3}}\,.\,(\cancel{-3})x^{-4} + 8^x.\ln 8 + 2\cos x$

$y' = -2\,.\,x^{-4} + 8^x\,.\ln 8 + 2\cos x$

$y' = \frac{-2}{x^4} + 8^x.\ln 8 + 2\,.\cos x$

Ejemplo: $y = \frac{\pi}{x}$ $\longrightarrow$ U $\quad$ U´=0

$\longrightarrow$ V $\quad$ V´=1

$y' = \frac{u'.x - \pi\,.v'}{x^2}$

$y' = \frac{0\,.\ x - \pi\,.1}{x^2}$

$y' = \frac{-\pi}{x^2}$

Ejemplo: $y = \frac{5}{x^5}$ $\longrightarrow$ U $\quad$ U´=0

$\longrightarrow$ V $\quad$ V´= $5x^4$

$y' = \frac{u'.\ x^5 - 5\,.\ v'}{(x^5)^2}$

$y' = \frac{0\,.\ x^5 - 5\,.\ 5x^4}{x^{10}}$

$y' = -\frac{25\ x^4}{x^{10}}$

$$y´ = -\frac{25}{x^6}$$

El mismo ejercicio, pero de otra forma.

Ejemplo: $\mathrm{y} = \frac{5}{\mathrm{x}^5} = 5\,.\,\mathrm{x}^{-5}$

$$y´ = 5.(-5)x^{-6}$$

$$y´ = -25\,x^{-6}$$

$$y´ = -\frac{25}{x^6}$$

Cuando se tiene que derivar $y = \frac{cte}{x^n}$ resulta más fácil hacer la derivada como producto que como cociente.

$$\mathrm{y} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}}} = \frac{1}{\mathrm{x}^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{x}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{y}´ = -\frac{1}{2}\,\mathrm{x}^{\frac{-3}{2}} = -\frac{1}{2}\,.\frac{1}{\mathrm{x}^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}\,.\frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}^3}}$$

Se recomienda cuando hay raíces, transformar en potencia.

Ejemplo: $\mathrm{y} = \frac{\ln x}{x^2}$ $\longrightarrow$ U $\quad \mathrm{U}´ = \frac{1}{\mathrm{x}}$

$\longrightarrow$ V $\quad$ V´= 2x

$$y = \frac{U´.x^2 - \ln x\ .\ V´}{(x^2)^2}$$

$$y´ = \frac{\frac{1}{x}.\ x^2 - \ln x\ .\ 2x}{x^4}$$

$$y´ = \frac{x - \ln x\,.2x}{x^4} = \frac{\cancel{x}\,(1 - 2\ln x\,)}{x^{\cancel{4}\ 3}}$$

$$y´ = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

Regla de la cadena

Si se tiene una función **y** que admite derivada con respecto a **x** y que es la composición de dos funciones, o sea **y= f(g(x))**. Entonces:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\left(\mathbf{f}\left(\mathbf{g}(\mathbf{x})\right)\right) = \mathbf{f}´\left(\mathbf{g}(\mathbf{x})\right).\mathbf{g}(\mathbf{x})$$

La Regla de la cadena consiste:

1) Aplicar la regla de derivación a la operación principal.
2) Multiplicar a la expresión anterior por la derivada de la función intermedia, en este caso g(x).

La matemática que se ha estudiado en todos estos años, nos enseñaron a resolver los ejercicios eliminando paréntesis, corchetes, llaves, es decir, de adentro hacia afuera.
La regla de la cadena en derivación es todo lo contrario, se resuelve de afuera hacia adentro.

y = $\boldsymbol{u^n}$ **y=**$\boldsymbol{n.u^{n-1}.u'}$

Ejemplo:

y = $(x^3 + x^2 + 5)^4$ u = $x^3 + x^2 + 5$
y= u^4 u´=$3x^2 + 2x$
y´=$4.u^3.u'$
y´= 4. $(x^3 + x^2 + 5)^3.(3x^2 + 2x)$

Ejemplo:

y = $(3x^2 + 2)^3$ u=$3x^2 + 2$
y= u^3 u´= $3.2x = 6x$
y´=$3.u^2.u'$
y´= 3. $(3x^2 + 2)^2.(6x)$
y´= $18x(3x^2 + 2)^2$

Ejemplo:

y = $(1 - 5x)^7$ u=$1 - 5x$
y= u^7 u´=-5
y´=$7.u^6.u'$
y´= 7. $(1 - 5x)^6.(-5)$
y´= $-35.(1 - 5x)^6$

Ejemplo:

y = $8.(3 + \frac{1}{2}x^4)^5$ u=$3 + \frac{1}{2}x^4$
y= $8.5.u^4$ u´=$\frac{1}{2}.4x^3 = 2x^3$

y´=40. $u^4 . u´$

y´=40. $(3+\frac{1}{2}x^4)^4.(2x^3)$

y´= 80. $(3+\frac{1}{2}x^4)^4 . x^3$

y= k. f(x)   y´= k. f´(x)

Ejemplo:

y = $\frac{1}{6}.(3x^2+5)^4$ | u=$3x^2+5$

y=$\frac{1}{6}. u^4$ | u´=3.2$x^2 = 6x$

y´=$\frac{1}{6}. 4u^3 . u´$

y´=$\frac{2}{3}.(3x^2+5)^3.(6x)$

y´= $4x.(3x^2+5)^3$

Ejemplo:

y = $-5.(1-\frac{x^3}{10})^2$ | u=$1-\frac{x^3}{10}$= 1- $\frac{1}{10} . x^3$

y=$-5. u^2$ | u´=$-\frac{3x^2}{10}$

y´=$-5.2. u^1 . u´$

y´=$-10.(1-\frac{x^3}{10})^1.(-\frac{3x^2}{10})$

y´= $\left(1-\frac{x^3}{10}\right). 3x^2$

y´= $3x^2 . \left(1-\frac{x^3}{10}\right)$

Ejemplo:

$y = (2x^4 - x^2 - 5)^{10}$ | $u = 2x^4 - x^2 - 5$

y= u^{10} | u´=2.4$x^3 - 2.x^1$=$8x^3 - 2x$

y´=10. $u^9 . u´$

y´= 10. $(2x^4 - x^2 - 5)^9.(8x^3 - 2x)$

Ejemplo:

y =$\sqrt[5]{2x^3-7}$= $(2x^3-7)^{(\frac{1}{5})}$ | u = $2x^3 - 7$

y= $u^{(\frac{1}{5})}$ | u´=2.3x^2=$6x^2$

y´= $\frac{1}{5}. u^{(-\frac{4}{5})}. u´$

y´= $\frac{1}{5}.(2x^3-7)^{(-\frac{4}{5})}. 6x^2$

$y' = \frac{6}{5}.(2x^3 - 7)^{(-\frac{4}{5})}.x^2$

$y' = \frac{6x^2}{5.\sqrt[5]{(2x^3-7)^4}}$

y = $\boldsymbol{e^u}$	**y=** $\boldsymbol{e^u.u'}$

Ejemplo:

y= e^{2x}	u=2x
y= e^u	u´=2
y´=$e^u.u'$	
y´=$e^{2x}.2$	

Ejemplo:

y= $4.e^{-3x}$	u=-3x
y= $4.e^u$	u´=-3
y´=$4.e^u.u'$	
y´=$4.e^{-3x}.(-3)$	
y´=$-12.e^{-3x}$	

Ejemplo:

y= $3.e^{senx}$	u=senx
y= $3.e^u$	u´=cosx
y´=$3.e^u.u'$	
y´=$3.e^{senx}.cosx$	

Ejemplo:

y= $9.e^{\frac{2}{3}x}$	u=$\frac{2}{3}x$
y= $9.e^u$	u´=$\frac{2}{3}$
y´=$9.e^u.u'$	
y´=$9.e^{\frac{2}{3}x}.\frac{2}{3}$	
y´=$6.e^{\frac{2}{3}x}$	

Ejemplo:

y= $5.e^{-x}$ u= - x

y= $5.e^{u}$ u´= -1

y´=$5.e^{u}.u´$

y´=$5.e^{-x}.(-1) = -5.e^{-x}$

y = $\boldsymbol{a^{u}}$ **y=** $\boldsymbol{a^{u}.lna.u´}$

Ejemplo:

y= $2^{\,x^2-e}$ u=$x^2 - e$

y=a^{u} u´= 2x

y´=$a^{u}.lna.u´$

y´=$2^{x^2-e}.ln2.(2x)$

Ejemplo:

y= $5^{\,x^2-1}$ u=$x^2 - 1$

y=a^{u} u´= 2x

y´=$a^{u}.lna.u´$

y´=$5^{x^2-1}.ln5.(2x)$

Ejemplo:

y= $4^{\sqrt{x^3-1}}$ u=$\sqrt{x^3-1}$=$(x^3-1)^{\left(\frac{1}{2}\right)}$

y=a^{u} u´=$\frac{1}{2}.(x^3-1)^{\left(-\frac{1}{2}\right)}.(3x^2)$

y´=$a^{u}.lna.u´$ u´= $\frac{3x^2}{2.(x^3-1)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}$= $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$

y´=$4^{\sqrt{x^3-1}}.ln4.\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$

y= lnu **y=** $\boldsymbol{\frac{u´}{u}}$

Ejemplo:

y= ln $(x^3 + 5x^2 + 3)$ u= $x^3 + 5x^2 + 3$

y= lnu

y´=$\frac{u´}{u}$ u´=$3x^2 + 10x$

y´=$\frac{3x^2+10x}{x^3+5x^2+3}$

Ejemplo:

y= ln (5x +1) u= 5x + 1

y= lnu u´=5

y´=$\frac{u´}{u}$

y´=$\frac{5}{5x+1}$

y= sen u y´= cos u. u´

Ejemplo:

y= sen (4x) u= 4x

y= sen u u´= 4

y´= cos u. u´

y´= cos (4x). 4

y´= 4.cos (4x)

Ejemplo:

y= sen $(\frac{1}{2}x)$ u= $\frac{1}{2}x$

y= sen u u´= $\frac{1}{2}$

y´= cos u. u´

y´= cos $(\frac{1}{2}x)$. $\frac{1}{2}$

y´=$\frac{1}{2}$. cos $(\frac{1}{2}x)$

Ejemplo:

y= sen (x^3) u= x^3

y= sen u u´=$3x^2$

y´= cos u. u´

y´= cos (x^3). $3x^2$

y´=$3x^2$. cos (x^3)

Ejemplo:

y=$sen^3x = (senx)^3$ u=senx

y= u^3 u=cosx

y´= $3.u^2.u´$

y´= $3.(senx)^2.cosx$

y´=$3sen^2x.cosx$

Ejemplo:

y= $\sqrt{senx} = (senx)^{(\frac{1}{2})}$

y= $u^{(\frac{1}{2})}$ u=senx

y´= $\frac{1}{2}.u^{(-\frac{1}{2})}.u´$ u´=cosx

y´= $\frac{1}{2}.(senx)^{(-\frac{1}{2})}.cosx$

y´=$\frac{\text{cosx}}{2\,.(\text{senx})^{(\frac{1}{2})}}$

y´=$\frac{\text{cosx}}{2\sqrt{\text{senx}}}$

y= cos u y´= - sen u. u´

Ejemplo:

y= cos (7x -1) u= 7x - 1

y= cos u u´= 7

y´= - sen u. u´

y´= -sen (7x - 1). 7

y´= - 7.sen (7x - 1)

Derivada de un cociente

Ejemplo:

y= cos $(\frac{x}{e^x})$ u= $\frac{x}{e^x}$

y= cos u u´= $\frac{1.e^x - x.e^x}{(e^x)^2} = \frac{\cancel{e^x}(1-x)}{(e^x)^{\cancel{2}}} = \frac{1-x}{e^x}$

y´= - sen u. u´

y´= - sen $(\frac{x}{e^x}).(\frac{1-x}{e^x})$

Derivada de un producto

Ejemplo:

y= cos($x^2.4^x$)

y= cos u

y= - sen u. u´

y= - sen ($x^2.4^x$).($x(2.4^x + x.4^x ln4)$)

u= $x^2.4^x$

u´= $2x.4^x + x^2.4^x ln4$

u´=$x(2.4^x + x.4^x ln4)$

y= tg u **y´=** $\boldsymbol{\frac{u´}{cos^2 u}}$

Ejemplo:

y= tg(3x -5)

y= tgu

y´=$\frac{u´}{\cos^2 u}$

y´=$\frac{3}{\cos^2(3x-5)}$

u=3x - 5

u´=3

Ejemplo:

y= tg(lnx)

y= tgu

y´=$\frac{u´}{\cos^2 u}$

y´=$\frac{\frac{1}{x}}{\cos^2(\ln x)}$

y´=$\frac{1}{x.\cos^2(\ln x)}$

u=lnx

u´=$\frac{1}{x}$

y= cotg u **y´=** $\boldsymbol{-\frac{u´}{sen^2 u}}$

Ejemplo:

y= cotg($\frac{x-3}{5}$)

y= cotg u. u´

y´=$-\frac{1/5}{\mathrm{sen}^2(\frac{x-3}{5})}$

u=$\frac{x-3}{5}$

u´=$\frac{1.5-(x-3).0}{(5)^2}$=$\frac{5}{(5)^2}$=$\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

o también se puede u=$\frac{1}{5}.(x-3)$

y´= $-\frac{1}{5.\text{sen}^2(\frac{x-3}{5})}$ u´= $\frac{1}{5}$ (1)= $\frac{1}{5}$

y= arc senu	**y´=** $\frac{u´}{\sqrt{1-u^2}}$

Ejemplo:

y= arc sen(x^2-4) u= x^2-4

y= arc sen u u´= 2x

y´= $\frac{u´}{\sqrt{1-u^2}}$

y´= $\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-4)^2}}$

y= arc cosu	**y´= -** $\frac{u´}{\sqrt{1-u^2}}$

Ejemplo:

y= arc cos(e^x) u= e^x

y= arc cos u u´= e^x

y´= $-\frac{u´}{\sqrt{1-u^2}}$

y´= $-\frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}$

y= arc tg u	**y´=** $\frac{u´}{1+u^2}$

Ejemplo:

y=arc tg $(3.x^2)$ u=$3.x^2$

y= arc tg u u´=3. 2x=6x

y´= $\frac{u´}{1+u^2}$

y´= $\frac{6x}{1+(3.x^2)^2}$

y´= $\frac{6x}{1+9\,x^4}$

y=$f(x).g(x)$	**y´=**$f´(x).g(x)+f(x).g´(x)$

Ejemplo:

y= sen(2x). cos(3x)

y´=cos(2x).2.cos(3x)+sen(2x).(-sen(3x).3)

y´=2.cos(2x).cos(3x) – 3.sen(2x).sen(3x)

Ejemplo:

y=$(x^2-1).(x^3+3x)$

y´=2x.(x^3+3x)+$(x^2-1).(3x^2+3)$ Se aplica distributiva para eliminar paréntesis

y´= $2x^4+6x^2$ +$6x^4$+$3x^2$-$3x^2$-3 Se suman los coeficientes del mismo grado

y´= $8x^4$+$6x^2$- 3

Recordar: producto de potencia de la misma base, es la misma base y los exponentes se suman.

Cociente de potencia de la misma base, es la misma base y los exponentes se restan.

y= $\boldsymbol{\frac{f(x)}{g(x)}}$ **y´=** $\boldsymbol{\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{(g(x))^2}}$

Ejemplo:

y=$\frac{sen(10x)}{x}$

y´=$\frac{\cos(10x).10.x-\text{sen}(10x).1}{x^2}$

y´=$\frac{\cos(10x).10.x-\text{sen}(10x)}{x^2}$

Ejemplo:

y=$\frac{x^3}{e^x}$

y´=$\frac{3x^2.e^x-x^3.e^x}{(e^x)^2}$ Se extrae factor común siempre que se pueda.

y´=$\frac{x^2.\cancel{e^x}(3-x)}{(e^x)^{\cancel{2}}}$ Se simplifica

y´=$\frac{x^2.(3-x)}{e^x}$

Ejemplo:

y=$\frac{(3x+9)}{(2-x)}$

y´=$\frac{3.(2-x)-(3x+9).(-1)}{(2-x)^2}$ Se aplica distributiva para eliminar paréntesis

y´=$\frac{6-3x-(-3x-9)}{(2-x)^2}$

y´=$\frac{6-3x+3x+9}{(2-x)^2}$ Se suman las potencias del mismo grado

y´=$\frac{15}{(2-x)^2}$

Derivación sucesiva

Si derivamos la derivada de una función, se obtiene una nueva función que se llama derivada primera. (f´(x))
Si se vuelve a derivar se obtiene la derivada segunda. (f´´(x))
Si se vuelve a derivar se obtiene la derivada tercera. (f´´´(x))
Y así sucesivamente.

Ejemplo:
f(x)=$2x^3 - 15x^2 + 35x - 10$
f´(x)=$6x^2 - 30x + 35$
f´´(x)= 12x - 30
f´´´(x)=12

Criterio de crecimiento o decrecimiento de las funciones

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b), entonces:

Si f´(x) > 0 $\forall x \in (a,b)$ → f es una función Creciente en (a,b)

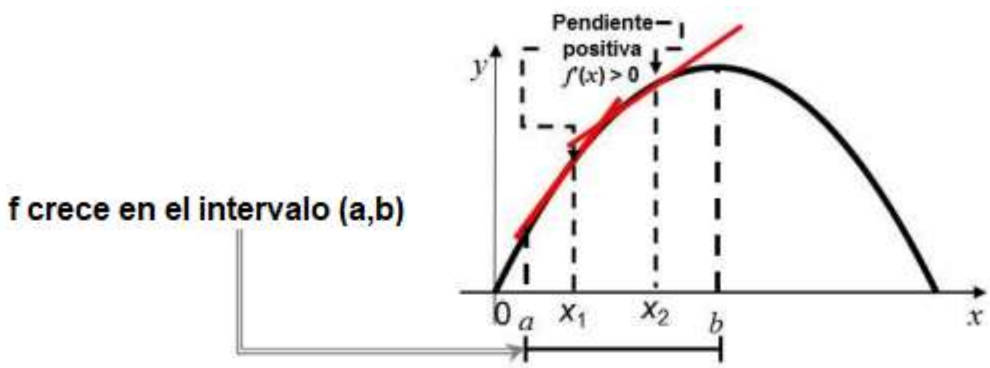
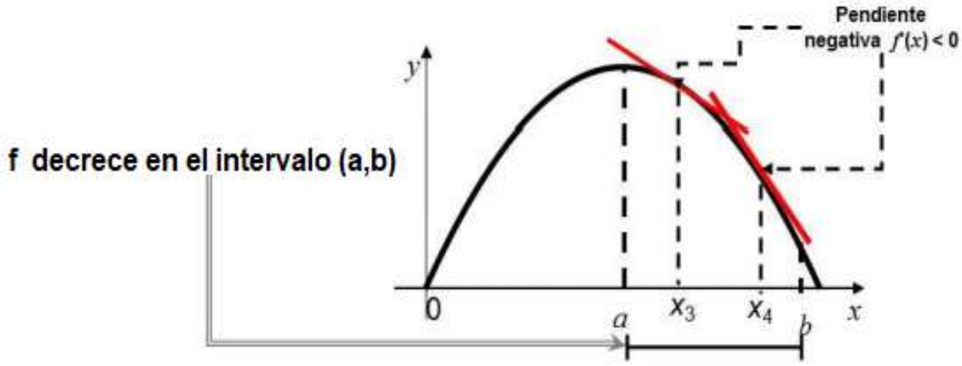


Gráfico 16: Elaboraciòn propia.

Si f´(x) $< 0\ \forall x \in (a,b) \rightarrow$ **f es una función Decreciente en** (a,b)



Gráficos 17: Extraído de Recabarren 2014.

Ejemplo: Dada la siguiente función y= $5x^2 - 20x + 3$

Se pide determinar los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función.

Procedimiento:

Paso 1: Se calcula la derivada primera de la función f.

f´(x)=2. 5x – 20 f´(x)= 10x – 20

Paso 2: Se debe resolver la inecuación **f´(x)**$>$ **0** para hallar los valores del dominio para los cuales la función derivada primera es **positiva**:

10x – 20> 0

10.x> 20

x$> 20:10$

x> 2

Se concluye que la función y= $5x^2 - 20x + 3$ es **creciente** en el intervalo (2, ∞)

Paso 3: Se debe resolver la inecuación **f´(x)**$<$ **0** para hallar los valores del dominio para los cuales la función derivada primera es **negativa**:

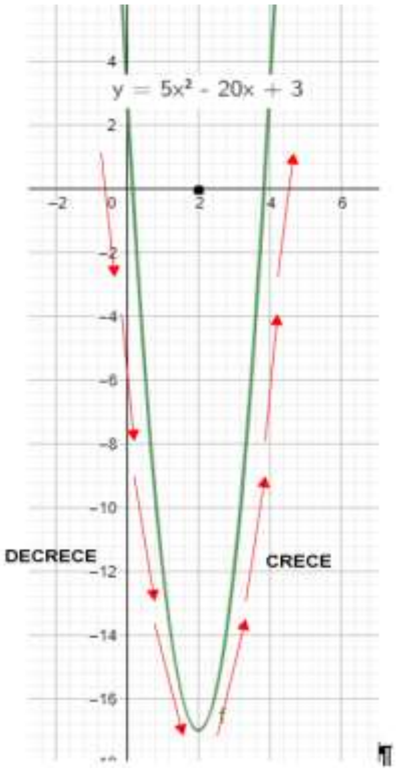
10x – 20< 0

10.x< 20

x$< 20:10$

x< 2

Se concluye que la función y= $5x^2 - 20x + 3$ es **decreciente** en el intervalo $(-\infty, 2)$



Gráfica 18: Elaboración propia.

Se logró determinar en el ejercicio que cuando $\mathbf{x > 2}$ la función **crece** y que cuando $\mathbf{x < 2}$ la función **decrece**.

También se puede observar en el gráfico que la función en el punto x=2, no es creciente ni decreciente.

Máximos y mínimos relativos

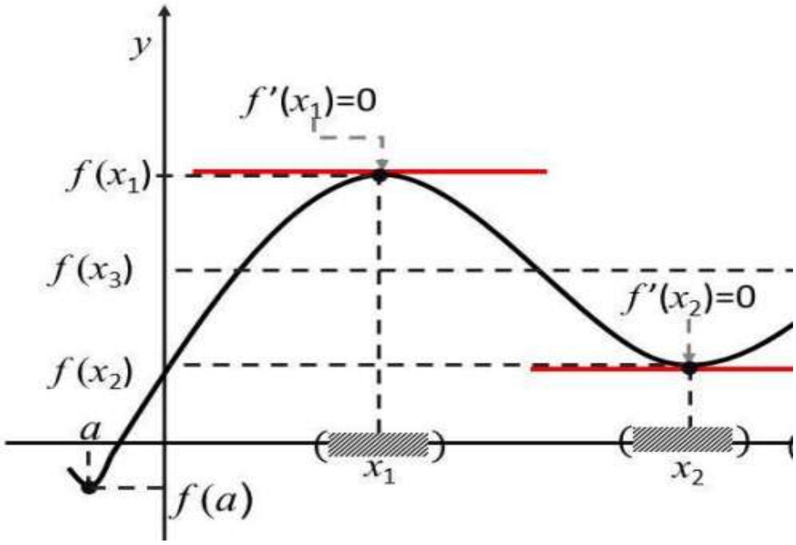


Gráfico 19: Extraído de Recabarren 2014.

Si se observa en la gráfica **f(x_1)** es el **mayor valor que toma la función**. Cuando esto ocurre se dice que **f(x_1) es un máximo relativo de f(x) o que en x_1 la función alcanza un máximo relativo**. Además, si se traza la recta tangente en el punto (x_1, f(x_1)), ocurre que **f´(x_1) = 0**

Con el mismo razonamiento, se puede llegar a la conclusión que **f(x_2)** es el **menor valor que toma la función**. Cuando esto ocurre se dice que **f(x_2) es un mínimo relativo de f(x) o que en x_2 la función alcanza un mínimo relativo**. Si se traza la recta tangente en el punto (x_2, f(x_2)), ocurre que **f´(x_2) = 0**

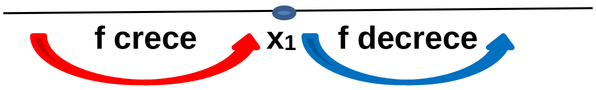
Con la expresión extremos relativos se nombra tanto a un máximo como a un mínimo.

Condición necesaria para extremos relativos
Si f(x) alcanza un extremo relativo en x=x_0, entonces f´(x_0) = 0

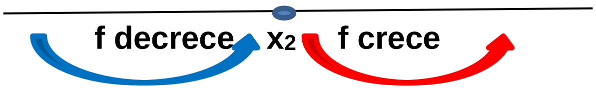
Puntos críticos

Sea f una función definida en un intervalo (a, b). un número x_0 perteneciente al intervalo (a, b) es un **punto crítico** de f si **f´(x_0) = 0**
De acuerdo a esta definición, los valores **x_1** y **x_2** son los **puntos críticos de la función** y se puede advertir que **la función en esos puntos críticos presenta un cambio en su comportamiento de crecimiento**.

➡ En **x_1** la función f presenta un **Máximo Relativo** y tenemos



En x_2 la función f presenta un **Mínimo Relativo** y tenemos



Si $x=x_0$ es un punto crítico de la función f se tiene:

Si la derivada **f´(x_0)** cambia en $x=x_0$ de **positiva (+) a negativa (-)**, entonces f alcanza un punto **máximo relativo en $x=x_0$**.

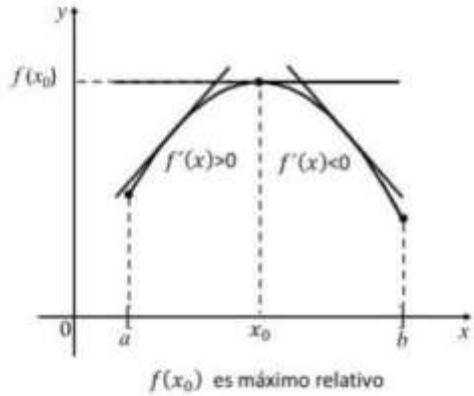


Gráfico 20: Extraído de Recabarren 2014.

Si la derivada **f´(x_0)** cambia en $x=x_0$ de **negativa (-) a positiva (+)**, entonces f alcanza un punto **mínimo relativo en $x=x_0$**.

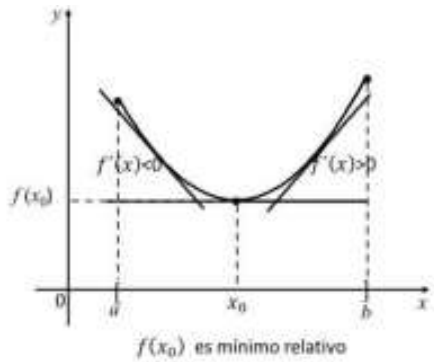


Gráfico 21: Extraído de Recabarren 2014.

Procedimiento práctico para encontrar los máximos y mínimos

Paso 1: Se calcula la derivada primera de la función f´(x).

Paso 2: Se obtienen los puntos críticos, posibles extremos relativos de la función, resolviendo: f´(x) = 0.

Paso 3: Se determina los intervalos en los que se subdivide el dominio de la función teniendo en cuenta los puntos críticos hallados.

Paso 4: Se calcula la derivada primera en valores pertenecientes a cada intervalo obtenido y se establece su signo. El valor prueba es un valor que está dentro del intervalo en estudio.

Paso 5: Se recomienda una tabla como la siguiente, para ordenar los resultados que se van obteniendo.

Intervalo	Valor prueba	Signo de f´(x)	Crec. o decrec de f

Paso 6: Se hallan los máximos y mínimos de la función a través del cambio de signo de la derivada primera.

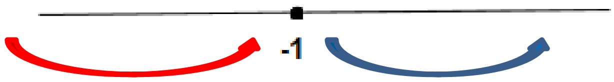
Paso 7: Se calcula las coordenadas de los máximos y/o mínimos.

Ejemplo:
Dada la siguiente función y= $2x^2$+ 4x +6.
Se pide encontrar máximos y mínimos.

Paso 1: y= $2x^2$+ 4x +6
y´=4x +4

Paso 2: y´= 0
4x +4 = 0   4x= - 4   x= - 4:4   x= - 1
Punto crítico (posible extremo)

Paso 3: Se determina los intervalos en los que se subdivide el dominio de la función



Paso 4 y Paso 5:

Intervalo	Valor prueba	Signo de f´(x)	Crec. o decrec de f
$(-\infty, -1)$	-2	-	decrece
(-1, ∞)	0	+	crece

y´(-2)=4(-2) +4= -4

y´(0)=4(0) +4= 4

Paso 6: La función alcanza un mínimo en x= - 1, ya que decrece y luego crece.

Paso 7: y= $2x^2$+ 4x +6 y(-1)= 2.(-1)^2 + 4 (-1) +6= 4 mínimo: (-1, 4)

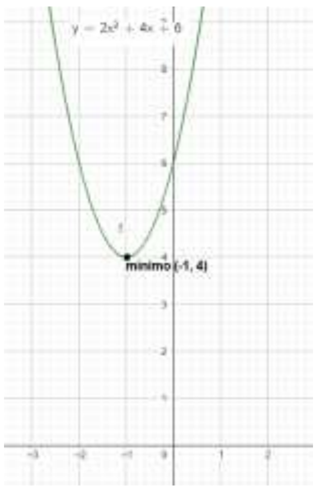


Gráfico 22: Elaboración propia.

Puesto que se trata de una función cuadrática, el mínimo coincide con el vértice.

Ejemplo: Calcular máximos y mínimos de la función f(x)=$x^2 + 20x - 8$

Paso 1: y= $x^2 + 20x - 8$

y´= 2x + 20

Paso 2: y´= 0

2 x +20 = 0 2x= - 20 x= - 20:2 x= - 10

Punto crítico (posible extremo)

Paso 3: Se determina los intervalos en los que se subdivide el dominio de la función

Paso 4 y Paso 5:

Intervalo	Valor prueba	Signo de f´(x)	Crec. o decrec de f
$(-\infty, -10)$	-11	-	decrece
(-10, ∞)	0	+	crece

y´(-11)=2.(-11) + 20= -2

y´(0)=2.(0) +20= 20

Paso 6: La función alcanza un mínimo en x= -10, ya que decrece y luego crece.

Paso 7: y=$x^2 + 20x - 8$ y(-10)= $(-10)^2$ + 20(-10) -8= mínimo: (-10, -108)

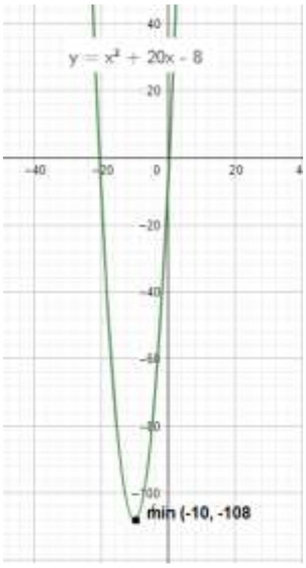


Gráfico 23: Elaboración propia.

Ejemplo: Calcular máximos y mínimos de la función f(x)=$x^3 - 3x^2 - 9x + 20$

Paso 1: y= $x^3 - 3x^2 - 9x + 20$

y´= $3x^2 - 6x - 9$

Paso 2: y´= $3x^2 - 6x - 9$=0 como es un polinomio de segundo grado se aplica Bhaskara.

a=3 b=-6 c=-9

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.3.(-9)}}{2.3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{2.3}$$

$$\frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{2.3} = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{6} = \frac{6 \pm 12}{6}$$

x_1= 3 puntos críticos (posibles extremos)

x_2= -1

Paso 3: Se determina los intervalos en los que se subdivide el dominio de la función.

Paso 4 y Paso 5:

Intervalo	Valor prueba	Signo de f´(x)	Crec. o decrec de f
$(-\infty, -1)$	-2	+	crece
(-1, 3)	0	-	decrece
(3, ∞)	4	+	crece

y´(-2)= $3(-2)^2 - 6(-2) - 9$= 15

y´= $3(0)^2 - 6(0) - 9$= - 9

y´= $3(4)^2 - 6(4) - 9$= 15

Paso 6: La función alcanza un máximo en x= -1, ya que crece y luego decrece.
La función alcanza un mínimo en x= 3, ya que decrece y luego crece.

Paso 7: f(x)=$x^3 - 3x^2 - 9x + 20$

f(3)=$(3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 20$= -7

f(-1)=$(-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 20$=25

mínimo (3, -7)

máximo (-1, 25)

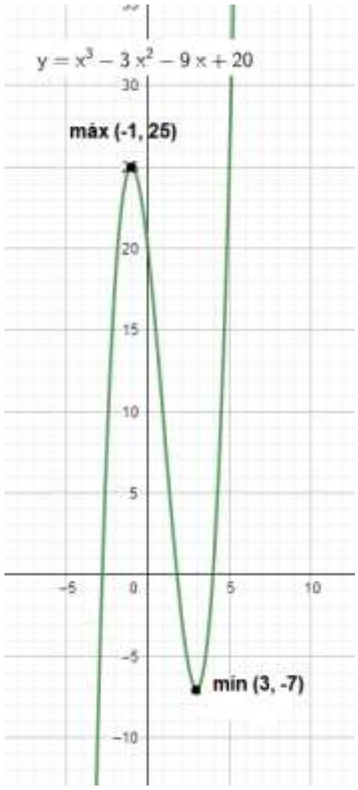


Gráfico 24: Elaboración propia.

Ejemplo: Calcular máximos y mínimos de la función f(x)= $-2x^2+3$

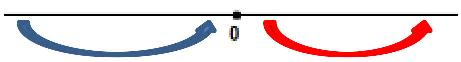
Paso 1: y= $-2x^2+3$

y´= -4x

Paso 2: y´= 0

-4x= 0 x= 0:(-4) x= 0 Punto crítico (posible extremo)

Paso 3: Se determina los intervalos en los que se subdivide el dominio de la función.



Paso 4 y Paso 5:

Intervalo	Valor prueba	Signo de f´(x)	Crec. o decrec de f
$(-\infty, 0)$	-1	+	crece
(0, ∞)	1	-	decrece

y´(-1)= -4(-1)= 4

y´(1)= -4(1)= -4

Paso 6: La función alcanza un máximo en x= 0, ya que crece y luego decrece.

Paso 7: y=$-2x^2+3$ y(0)=$-2(0)^2+3$ y(0)=3
máximo: (0, 3)

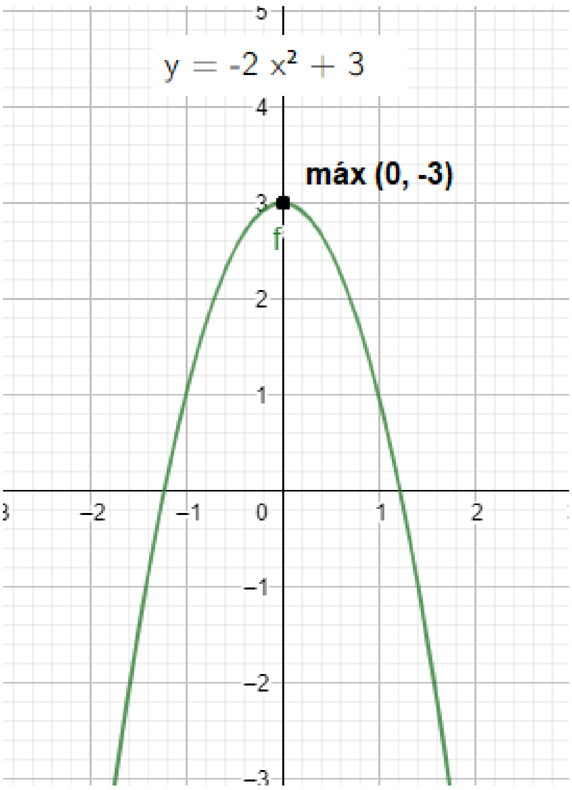


Gráfico 25: Elaboración propia.

Puesto que se trata de una función cuadrática, el máximo coincide con el vértice.

BIBLIOGRAFÍA

GeoGebra. (07.03.2021). Calculadora gráfica. Disponible en: https://www.geogebra.org/graphing?lang=es-AR

Calculadora de derivadas (09.03.2021) . Disponible en: https://es.symbolab.com/solver/derivative-calculator

Rabuffetti, H (2021) - Introducción Al Análisis Matemático (cálculo 1)

Recabarren G (2014). Análisis Matemático I. Uni Río. Córdoba. Disponible en: https://www.unrc.edu.ar/unrc/comunicacion/editorial/repositorio/978-987-688-077-0.pdfSerra, B.

Universo Formulas (09.03.2021). Funciones continuas y discontinuas. Disponible en: https://www.universoformulas.com/matematicas/analisis/funciones-continuas-discontinuas/

Universidad Tecnológica Nacional (2021). Apuntes de la Cátedra de Análisis 1.