



Tecnicatura Universitaria en Programación

MATEMÁTICA

Unidad Temática N°3: Sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones lineales

Material Teórico

1 Año – 1° Cuatrimestre







Índice

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	3
Solución de sistemas de ecuaciones por el Método de Gauss Jordan	4
Teorema de Rouché Frobenius	7
INECUACIONES	15
Sistemas de inecuaciones con una incógnita	17
Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas	18
Sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas	19
BIBLIOGRAFÍA	23





SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Se define una ecuación lineal en las n variables x_1 , x_2 , x_3 , x_n como aquella que se puede expresar en la forma:

$$a_1x_{1+}a_2x_2+a_3x_{3+}...+a_nx_n=b$$

En donde $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ y b son contantes reales.

Por ejemplo:

Las siguientes son ecuaciones lineales:

$$X + 3y = 7$$

$$Y = 2x + 5z + 1$$

$$x_{1+}x_{2-}x_{3+}x_4=1$$

Se observa que una ecuación lineal no comprende productos o raíces de variables. Todas las variables se presentan únicamente a la primera potencia y no aparecen como argumento funciones trigonométricas, logarítmicas o exponenciales.

Las que siguen no son ecuaciones lineales:

$$X + 3y^2 = 7$$

$$Y - sen x = 0$$

$$\sqrt{x}$$
 + 2y –z =

Una solución de una ecuación lineal $a_1x_{1+}a_2x_2+a_3x_{3+}....+a_nx_n=$ b es una sucesión de n números $s_1,s_2,s_3,....,s_n$ tales que la ecuación se satisface cuando se hace la sustitución $s_1=x_1, s_2=x_2,.....s_n=x_n$. El conjunto de todas las soluciones de la ecuación es un conjunto solución.

Un conjunto finito de ecuaciones lineales en las variables x_1 , x_2 , x_3 , x_n se conoce como sistema de ecuaciones lineales o sistema lineal. Una sucesión de números $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ es una solución del sistema si $s_1 = x_1, s_2 = x_2, \ldots, s_n = x_n$ es una solución de toda la ecuación en tal sistema.

Ejemplo: sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 2x + 2y + 4z = -2 \\ -x + \frac{1}{2}y - z = 0 \end{cases}$

El objetivo consiste en hallar los valores desconocidos de las variables x, y, z que satisfacen simultáneamente a las 3 ecuaciones.





En general, un sistema con m ecuaciones lineales y n incógnitas puede ser escrito en forma general como:

$$a_{11}x_{1+}a_{12}x_2+a_{13}x_{3+}....+a_{1n}x_n=b_1$$

 $a_{21}x_{1+}a_{22}x_2+a_{23}x_{3+}....+a_{2n}x_n=b_2$
...
 $a_{m1}x_{1+}a_{m2}x_2+a_{m3}x_{3+}....+a_{mn}x_n=b_m$

Donde x_1 , $x_2, x_3, \dots x_n$ son las incógnitas y los números a_{11} hasta a_{mn} son los coeficientes del sistema. Es posible reescribir el sistema separando con coeficientes con forma matricial:

AX = B

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix}$$

Matriz de coeficientes

Matriz incógnita (incógnitas que queremos encontrar)

Matriz de los términos independientes o resultados de las ecuaciones

Solución de sistemas de ecuaciones por el Método de Gauss Jordan

El Método de Gauss Jordan consiste en calcular la matriz reducida por filas de los coeficientes, llegando de ser posible a la matriz identidad, y de esa manera se obtendrá directamente los valores de las incógnitas que satisfacen el sistema.

Recordar que, para obtener la matriz reducida por filas, se pueden aplicar 3 operaciones elementales de filas.

- 1) Multiplicar una fila por un escalar distinto de cero.
- 2) Sumar una fila a otra previamente multiplicada por un escalar.
- 3) Intercambiar filas.





Ejemplo:
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 5y - 3z = 10 \\ 4x + 8y + 2z = 4 \end{cases}$$

De la primera ecuación de la matriz reducida se obtiene:

$$1x + 0y + 0z = 2 \qquad \rightarrow x = 2$$

De la segunda ecuación se obtiene:

$$0x + 1y + 0z = 0 \qquad \rightarrow y = 0$$

De la tercera ecuación se obtiene:

$$0x + 0y + 1z = -2$$
 $\rightarrow z = -2$

Siendo entonces el conjunto solución (x, y, z) = (2, 0, -2)





Ejemplo:
$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación de la matriz reducida se obtiene:

$$1x + 0y + 0z = 1$$
 $\rightarrow x = 1$

De la segunda ecuación se obtiene:

$$0x + 1y + 0z = 2 \qquad \rightarrow y = 2$$

De la tercera ecuación se obtiene:

$$0x + 0y + 1z = 3$$
 $\rightarrow z = 3$

Siendo entonces el conjunto solución (x, y, z) = (1, 2, 3)

Los sistemas de ecuaciones lineales de los ejemplos tienen solución única. Pero no todo sistema de ecuaciones lineales siempre tiene solución única.

Puede suceder que tenga infinitas soluciones que satisfacen al sistema de ecuaciones o que no tenga solución.

Para ello se estudiará el Teorema de Rouché Frobenius.





Teorema de Rouché Frobenius

A: matriz de coeficientes.

AM: matriz ampliada del sistema (matriz de coeficientes + los términos independientes).

n: número de incógnitas del sistema.

Rango: número de filas no nulas de la matriz.

Para sistemas no homogéneos AX = B $(B \neq 0)$

Si r(A) = r(AM) = n sistema compatible determinado (única solución)

Si r(A) = r(AM) < n sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Si r(A) < r(AM) sistema incompatible (no tiene solución)

Para sistemas homogéneos AX=0 (B=0)

Si r(A) = n sistema compatible determinado (solución única $x_1 = x_2 = = x_n = 0$)
Solución trivial

r(A) < n sistema compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones además de la solución $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$)



Ejemplo:
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 5y - 3z = 10 \\ 4x + 8y + 2z = 4 \end{cases}$$

Como
$$r(A) = r(AM) = n$$

Sistema compatible determinado (solución única).

De la primera ecuación de la matriz reducida se obtiene:

$$1x + 0y + 0z = 2 \qquad \rightarrow x = 2$$

De la segunda ecuación se obtiene:

$$0x + 1y + 0z = 0 \qquad \rightarrow y = 0$$

De la tercera ecuación se obtiene:

$$0x + 0y + 1z = -2$$
 $\rightarrow z = -2$

Siendo entonces el conjunto solución (x, y, z) = (2, 0, -2)





Ejemplo:
$$\begin{cases} 2x - 7y - z = 4 \\ -4x + 5y - 7z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

Como
$$r(A) = r(AM) < n$$

Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

De la primera ecuación se obtiene:

$$x + 0y + 3z = -1/3$$
 \rightarrow $x = -1/3 - 3z$

De la segunda ecuación se obtiene:

$$0x + y + z = -2/3$$
 \rightarrow $y = -2/3 - z$

Asumiendo z cualquier valor.

Conjunto solución:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} - 3z \\ -\frac{2}{3} - z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3z \\ -z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Haciendo z=t
$$\begin{bmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$





Pudiendo "t" tomar cualquier valor real, resultando así las infinitas soluciones del sistema.

Por ejemplo:

Si t=0

Conjunto de solución: (x, y, z) = (-1/3, -2/3, 0)

Si t=1

Conjunto de solución: (x, y, z) = (-10/3, -5/3, 1)

Ejemplo:
$$\begin{cases} 4x - 6y - 2z = 4 \\ 3x + y - z = -2 \\ -x + 7y + 2z = -3 \end{cases}$$

Como r(A) < r(AM)

Sistema incompatible (no tiene solución).





Ejemplo:
$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 3x - 5y - 3z = 0 \\ 6x + y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$2 \quad 3 \quad -1 \quad | 0$$

$$2 \quad -5 \quad -3 \quad 0 \qquad F_1 (1/2)$$

$$6 \quad 1 \quad -5 \quad 0$$

$$1 \quad 3/2 \quad -1/2 \quad 0$$

$$2 \quad -5 \quad -3 \quad 0 \qquad F_2 + F_1 (-2)$$

$$6 \quad 1 \quad -5 \quad 0 \qquad F_3 + F_1 (-6)$$

$$1 \quad 3/2 \quad -1/2 \quad 0$$

$$0 \quad -8 \quad -2 \quad 0$$

$$1 \quad 3/2 \quad -1/2 \quad 0$$

$$0 \quad 1 \quad 1/4 \quad 0$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$1 \quad 0 \quad -7/8 \quad 0$$

$$0 \quad 1 \quad 1/4 \quad 0$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$r(A) = 2$$

$$n = 3$$

Cuando r(A) < n, se dice que el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

De la primera ecuación se obtiene:

$$x + 0y - 7/8z = 0$$
 \rightarrow $x = 7/8z$

De la segunda ecuación se obtiene:

$$0x + y + 1/4z = 0 \rightarrow y = -1/4z$$

Asumiendo z cualquier valor.

Conjunto solución:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/8z \\ -1/4z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/8z \\ -1/4z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 7/8 \\ -1/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$
Haciendo z=t
$$t \begin{bmatrix} 7/8 \\ -1/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pudiendo "t" tomar cualquier valor real, resultando así las infinitas soluciones del sistema.

Por ejemplo:

Si t=0





Conjunto de solución: (x, y, z) = (0, 0, 0)

Si t=1

Conjunto de solución (x, y, z) = (7/8, -1/4, 1)

Ejemplo:
$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Como r(A) = n, se dice que el sistema tiene solución única.

De la primera ecuación se obtiene:

$$x = 0$$

De la segunda ecuación se obtiene:

$$y = 0$$

De la última ecuación se obtiene:

$$z = 0$$

Conjunto de solución: $(x, y, z) = (0, 0, 0) \rightarrow$ solución trivial





IMPORTANTE: todo sistema homogéneo SIEMPRE tiene solución que es la solución trivial.

En el caso de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, se puede determinar sin resolver.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$

Sistema compatible determinado si:

$$\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$$

Única solución.

Las rectas se intersectan en un punto.

Ejemplo: $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x + y = 3 \end{cases}$

$$\frac{3}{5}\neq\frac{-2}{1}$$

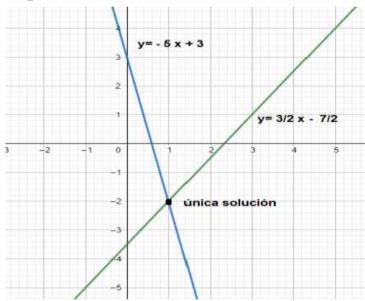


Gráfico 1: Elaboración propia.



Sistema compatible indeterminado si: $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$

Infinitas soluciones.

Las rectas son coincidentes.

Ejemplo:
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$





$$\frac{1}{2}$$
 ; $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

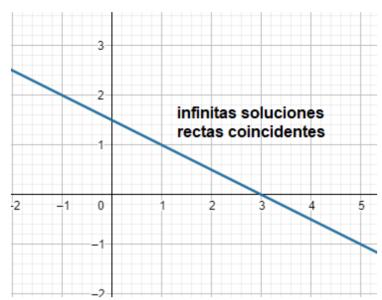


Gráfico 2: Elaboración propia.



Sin solución.

Las rectas son paralelas.

No se intersectan.

Ejemplo:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 15 \end{cases}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
 ; $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$





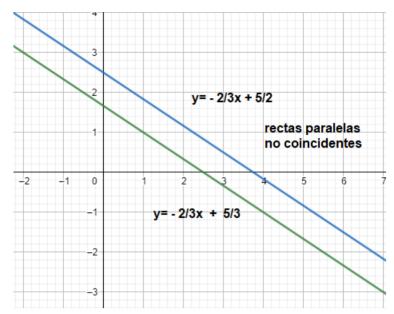


Gráfico 3: Elaboración propia.

INECUACIONES

Se define a una desigualdad como cualquier expresión en la que se utilice alguno de los siguientes símbolos:

< (menor que) > (mayor que) ≤ (menor o igual que) ≥ (mayor o igual que)

Por ejemplo: 2 > 0 (2 es mayor que 0) $x \le 5$ (x menor igual que 5)

Una inecuación se define como una desigualdad entre expresiones algebraicas. En este curso sólo se estudiará las de primer grado.

Una inecuación de primer grado es una inecuación en la que sus dos miembros son polinomios de grado menor o igual que 1. Las soluciones de una inecuación son todos los números reales que hacen que dicha inecuación sea cierta.

Inecuaciones equivalentes

El proceso de resolución de inecuaciones se basa en la transformación de la inecuación inicial en otra equivalente más sencilla.

Se dice que dos ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.

- Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o resta la misma cantidad, se obtiene una inecuación equivalente.
- Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por una misma





cantidad, se obtiene una inecuación equivalente con el mismo sentido de la desigualdad, si esa cantidad es positiva, y con el mismo sentido, y con el sentido contrario si esa cantidad es negativa.

Ejemplo: $x + 2 \le 1$ primer miembro segundo miembro

Resto a ambos miembros 2.

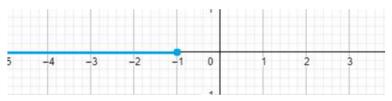
$$x + 2 - 2 \le 1 - 2$$

Se efectúan las operaciones y se obtiene el valor de x.

$$x \leq -1$$

El conjunto de soluciones se representa de cualquiera de las siguientes maneras:

- a) Como conjunto $\{x \in R \ x \le -1\}$
- b) Como intervalo $(-\infty, -1]$
- c) En forma gráfica: en este caso se incluye a 1 porque tiene el signo menor igual.



Gráfica 4: Elaboración propia

Ejemplo: x - 3 > 5

Sumo a ambos miembros 3.

$$x - 3 + 3 > 5 + 3$$

 $x > 8$

El conjunto solución se representa de cualquiera de las siguientes maneras:

- a) Como conjunto $\{x \in R \ x > 8\}$
- b) Como intervalo $(8, +\infty)$
- c) En forma gráfica: en este caso no se incluye al 8 porque tiene el signo mayor.

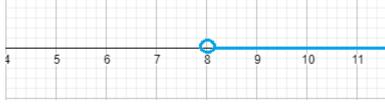


Gráfico 5: Elaboración propia





Ejemplo: -x + 3 > 2

Se resta a ambos miembros 3.

$$-x + 3 - 3 > 2 - 3$$

$$-x > -1$$

Como el coeficiente de x es negativo, se multiplica a ambos miembros por (-1) y se cambia el sentido a la desigualdad.

El conjunto solución se representa de cualquiera de las siguientes maneras:

- a) Como conjunto $\{x \in R \mid x < 1\}$
- b) Como intervalo $(-\infty, 1)$
- c) En forma gráfica: en este caso no se incluye al 1 porque tiene el signo menor.

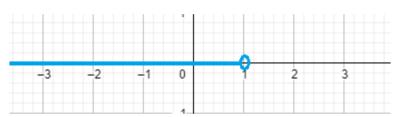


Gráfico 6: Elaboración propia

Sistemas de inecuaciones con una incógnita

Definición: conjunto de dos o más inecuaciones.

Para resolver un sistema de inecuaciones con una incógnita se resuelve cada inecuación por separado, siendo el conjunto solución del sistema la intersección de los conjuntos soluciones de las inecuaciones dadas.

Ejemplo: $\begin{cases} x < 2 \\ x < 4 \end{cases}$

Conjunto solución (-∞, 2)

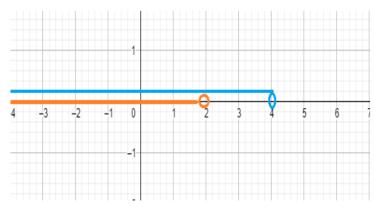


Gráfico 7: Elaboración propia.





Ejemplo: $\begin{cases} x \le -5 \\ x \ge 4 \end{cases}$

Conjunto solución: no tiene.

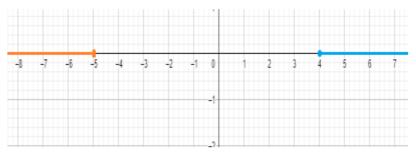


Gráfico 8: Elaboración propia.

Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Forma general: ax + by + c < 0 ax + by + c > 0

 $ax + by + c \le 0$ $ax + by + c \ge 0$

En este caso las soluciones no serán un conjunto de números, sino conjuntos de parejas de números, por lo que no pueden representarse sobre una línea recta: se debe representar como subconjuntos del plano.

Resolución gráfica

Para resolver una inecuación gráficamente se despeja en ella la **incógnita y**, y se considera la ecuación que resulta al reemplazar el signo de desigualdad por el de igualdad.

Ejemplo: y > 2x + 3

Se reemplaza el signo de mayor por el de igual y se obtiene la ecuación: y=2x+3 que, como se sabe, en el plano es una recta.

Se la dibuja y como la inecuación se impone que el valor de y sea mayor que el segundo miembro, las infinitas soluciones serán las coordenadas de los puntos del semiplano superior con respecto a la recta, excluida la recta.





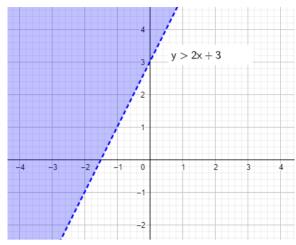


Gráfico 9: Elaboración propia.

Ejemplo: $4 y +3x \le 1 +3y$

Se despeja y:

$$4y - 3y \le 1 - 3x$$
$$y \le -3x + 1$$

Se dibuja la recta y se obtiene la solución, gráficamente:

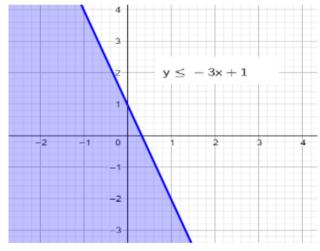


Gráfico 10: Elaboración propia.

Sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas es un conjunto formado por dos o más inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Como en el caso de los sistemas con una incógnita se resuelve cada inecuación por separado, y el conjunto de todas las soluciones comunes a todas las inecuaciones del sistema es el conjunto solución del mismo.





Ejemplo:
$$\begin{cases} y \le 2x + 1 \\ y \ge 2x - 3 \end{cases}$$

Gráficamente



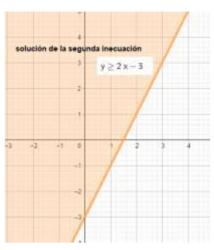


Gráfico 11: Elaboración propia.

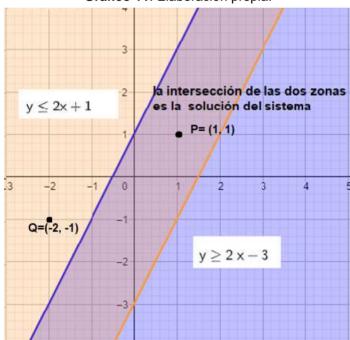


Gráfico 12: Elaboración propia.

Por ejemplo: P = (1, 1) es un par ordenado solución del sistema. Satisface simultáneamente a ambas inecuaciones. Se reemplaza el punto P en las dos inecuaciones

$$\begin{cases} y \le 2x + 1 \\ y \ge 2x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \le 2x1 + 1 = 3 & 1 \le 3 \text{ s´i verifica} \\ 1 \ge 2x1 - 3 = -1 & 1 \ge -1 \text{ s´i verifica} \end{cases}$$

$$1 \le 3$$
 sí verifica

En cambio, el punto Q = (-2, -1) no es solución del sistema.

$$\begin{cases} y \leq 2x + 1 \\ y \geq 2y \end{cases}$$

$$\int -1 \le 2x(-2) + 1 = -3$$

$$-1 \le -3$$
 no verifica

$$\begin{cases} y \ge 2x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \le 2x + 1 \\ y \ge 2x - 3 \end{cases} \begin{cases} -1 \le 2x(-2) + 1 = -3 \\ -1 \ge 2x(-2) - 3 = -7 \end{cases} -1 \le -3 \text{ no verifica}$$

$$-1 \ge -7$$
 sí verifica





Ejemplo:
$$\begin{cases} y > 2x - 5 \\ y < -x + 7 \\ x > -1 \end{cases}$$

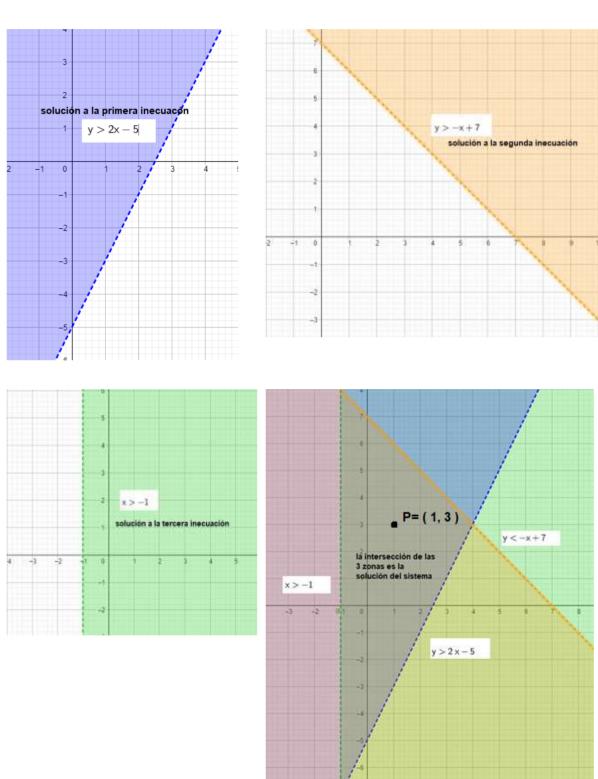


Gráfico 13: Elaboración propia.



Matemática

Tecnicatura Universitaria en Programación Secretaría Académica



Pág. 22

Por ejemplo: P= (1, 3) satisface simultáneamente las 3 inecuaciones. Para verificar se reemplaza el punto P en las inecuaciones.

$$\begin{cases} y > 2x - 5 \\ y < -x + 7 \\ x > -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 > 2x1 - 5 \\ 3 < -1 + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 2x - 5 \\ y < -x + 7 \\ x > -1 \end{cases} \begin{cases} 3 > 2x1 - 5 \\ 3 < -1 + 7 \\ 1 > -1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 3 > -3 \\ 3 < 6 \\ 1 > -1 \end{array} \quad \text{sí verifica}$$

Material teórico – U3





BIBLIOGRAFÍA

Anton, H. and Rorres, C. (2013). *Introducción al álgebra lineal*. México, D.F.: Limusa. UTN (2020). Apuntes de la Cátedra de Álgebra y Geometría Analítica de Ingeniería en Sistemas de Información.

Calculo S (05.03.2021). Clasificación de sistemas lineales. Disponible en:

https://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/primero_ciencias_sociales/ecuaciones_sistemas/sist_clasificacion.html

CideAd (03.03.2021). Inecuaciones. Matemáticas B. Disponible en:

http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/inecuaciones/impresos/quincena5.pdf

Atribución-No Comercial-Sin Derivadas

Se permite descargar esta obra y compartirla, siempre y cuando no sea modificado y/o alterado su contenido, ni se comercialice. Referenciarlo de la siguiente manera: Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Córdoba (S/D). Material para la Tecnicatura Universitaria en Programación, modalidad virtual, Córdoba, Argentina