UTN
Facultad Regional Córdoba

TUP

Tecnicatura Universitaria en Programación

ESTADÍSTICA

Unidad Temática N°3:
Teoría de las Probabilidades

Material de Estudio
1° Año – 2° Cuatrimestre

Índice

EXPERIMENTO

Es un proceso que da lugar a varios resultados posibles. Se conoce cuáles son esos resultados posibles, pero no se tiene la certeza respecto a cuál de esos resultados se presentará.

Experimento aleatorio

En un experimento aleatorio la presentación de un determinado resultado depende del azar.

Los juegos de azar son ejemplos de experimentos aleatorios.

ESPACIO MUESTRAL O ESPACIO PROBABILÍSTICO

Está formado por el conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio. Se simboliza con la letra griega Ω.

Por ejemplo si se arroja un dado, los posibles resultados son todas las caras del dado. Por lo tanto el espacio probabilístico para este experimento está compuesto de la siguiente manera:

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

EVENTOS

Es un subconjunto de un espacio probabilístico.

Ejemplos:

$I = \{1; 3; 5\}$

El evento I está formado por las caras impares del dado

$P = \{2; 4; 6\}$

El evento P está formado por las caras pares del dado

$A = \{2; 4; 5\}$

El evento B está formado por las caras dos, cuatro y cinco del dado

Evento simple

Está formado por un único elemento de Ω.

Ejemplo:

B = {2}

El evento B está formado por la cara dos.

Evento compuesto

Está formado por más de un elemento de Ω.

Los eventos I, P y A son ejemplos de eventos compuestos ya que están formados por varios elementos de Ω.

Eventos mutuamente excluyentes

Son eventos que **no tienen** elementos de Ω en común y por lo tanto son aquellos que no pueden ocurrir simultáneamente.

La intersección de dos eventos mutuamente excluyentes es igual al conjunto vacío

En el espacio probabilístico formado por las caras de un dado, los eventos I y P son mutuamente excluyentes

Se cumple que **$I \cap P = \{ \}$**

Eventos no mutuamente excluyentes

Son eventos que **si tienen** elementos que no tienen elementos de Ω en común y por lo tanto son aquellos que si pueden ocurrir simultáneamente.

Si dos eventos A y B son no excluyentes, se cumple que: **$A \cap B > 0$**

En el espacio probabilístico formado por las caras de un dado, los eventos A y P son no mutuamente excluyentes

A∩P = {2; 4}

Si al arrojar un dado sale la cara dos ó la cara cuatro se presentan simultáneamente estos dos eventos.

Un evento ocurre si al menos uno de sus elementos se presenta.

Eventos colectivamente exhaustivos

Dos o más eventos son colectivamente exhaustivos si la suma de ellos es igual a Ω (Espacio Probabilístico).

Si dos eventos A y B son colectivamente exhaustivos se cumple que **A + B = Ω**

PROBABILIDADES

Tal como se indicó anteriormente, no se tiene la certeza respecto a que resultado del experimento aleatorio se presentará, pero puede expresarse el grado incertidumbre en forma numérica, a través de las probabilidades.

La probabilidad de que se presente determinado evento, se simboliza como P(evento)

Las probabilidades son números comprendidos entre 0 y 1 $0 \leq P(\text{evento}) \leq 1$

P(evento) simboliza la probabilidad de que se presente determinado evento.

Ejemplo: P(B) es la probabilidad de que se presente el evento B, es decir, la probabilidad de que al arrojar el dado salga la cara 2.

TABLA DE CONTINGENCIA

- ✓ Representa dos atributos.
- ✓ Cada atributo abarca dos o más categorías.
- ✓ Las categorías correspondientes a un mismo atributo deben ser mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivas.
- ✓ Cada categoría coincide con un evento.

Ejemplo:

En la siguiente tabla contiene información sobre 100 empresas ubicadas en cierta región del país.

El Espacio Probabilístico está formado por las 100 empresas.

Los dos atributos son rubro y tamaño, a su vez cada atributo está dividido en dos categorías, tal como se puede observar en la tabla:

Tamaño / Rubro	Pequeñas	Medianas	Total
Alimenticio	**A ∩ P = 30**	**A ∩ M = 25**	**A = 55**
Textil	**T ∩ P = 35**	**T ∩ M = 10**	**T = 45**
Total	**P = 65**	**M =35**	**Ω = 100**

A ∩ P = 30 Hay 30 empresas que son Alimenticias y Pequeñas
A ∩ M = 25 Hay 25 empresas que son Alimenticias y Medianas
T ∩ P = 35 Hay 35 empresas que son Textiles y Pequeñas
T ∩ M = 10 Hay 10 empresas que son Textiles y Medianas

A = 55 Hay 55 empresas que son Alimenticias
T = 45 Hay 45 empresas que son Textiles
P = 65 Hay 65 empresas que son Pequeñas
M =35 Hay 35 empresas que son Medianas

TABLA DE PROBABILIDADES

- Es una tabla de contingencia en la cual se representan las probabilidades de los eventos
- Cada probabilidad se obtiene mediante el cociente entre las frecuencias indicadas en la tabla anterior y la cantidad de elementos que forman el Ω

Ejemplo:

Rubro \ Tamaño	Pequeñas	Medianas	Total
Alimenticio	$P(A \cap P) = 0,30$	$P(A \cap M) = 0,25$	$P(A) = 0,55$
Textil	$P(T \cap P) = 0,35$	$P(T \cap M) = 0,10$	$P(T) =0,45$
Total	$P(P) = 0,65$	$P(M) = 0,35$	$P(\Omega) = 1$

Las probabilidades se obtienen mediante el cociente de las frecuencias absolutas representadas en la tabla anterior sobre el número de elementos de Ω.

Tipos de Probabilidades

Probabilidad Conjunta

Es la probabilidad de que se presenten uno y el otro evento en forma simultánea o conjunta.

Las Probabilidades Conjuntas ocupan las celdas internas de la Tabla de Probabilidades.

Probabilidad Marginal

Es la probabilidad de que se presente un evento simple o individual.

Las Probabilidades Marginales se ubican en la última fila y la última columna de la Tabla de Probabilidades.

Probabilidades Conjuntas:

Probabilidad	Significado	Tipo
P(A ∩ P)	Probabilidad de que la empresa sea Alimenticia **y** Pequeña	**Conjunta**
P(A ∩ M)	Probabilidad de que la empresa sea Alimenticia **y** Mediana	**Conjunta**
P(T ∩ P)	Probabilidad de que la empresa sea Textil **y** Pequeña	**Conjunta**
P(T ∩ M)	Probabilidad de que la empresa sea Textil **y** Mediana	**Conjunta**

Probabilidades Marginales:

Probabilidad	Significado	**Tipo**
P(A)	Probabilidad de que la empresa sea Alimenticia	**Marginal**
P(T)	Probabilidad de que la empresa sea Textil	**Marginal**
P(P)	Probabilidad de que la empresa sea Pequeña	**Marginal**
P(M)	Probabilidad de que la persona sea Mediana	**Marginal**

Probabilidad Total

Es la probabilidad de que se presente un evento **o** el otro o ambos eventos.

REGLAS DE LA ADICIÓN

Las reglas de la adición indican como obtener las probabilidades totales según los eventos sean o no mutuamente excluyentes

La probabilidad de la unión de eventos mutuamente excluyentes es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de los eventos.

La probabilidad de la unión de eventos no mutuamente excluyentes es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de los eventos menos la probabilidad de la intersección de ambos eventos.

Ejemplos de **Probabilidad Total**:

Probabilidad	Significado	Eventos
P(A U P)	**Probabilidad de que la empresa sea Alimenticia o Pequeña**	no mutumente excluyentes
P(A U M)	**Probabilidad de que la empresa sea Alimenticia o Mediana**	no mutumente excluyentes
P(T U P)	**Probabilidad de que la empresa sea Textil o Pequeña**	no mutumente excluyentes
P(T U M)	**Probabilidad de que la empresa sea Textil o Mediana**	no mutumente excluyentes
P(T U A)	**Probabilidad de que la empresa sea Textil o Alimenticia**	mutuamente excluyentes
P(M U P)	**Probabilidad de que la empresa sea Mediana o Pequeña**	mutuamente excluyentes

Para calcular una probabilidad total, debe identificarse si los eventos son mutuamente excluyentes o no mutuamente excluyentes.

Para reconocerlos fácilmente debe tenerse en cuenta que los eventos mutuamente excluyentes corresponden a un mismo atributo; mientras que los eventos no mutuamente excluyentes siempre pertenecen a distintos atributos.

Tamaño / Rubro	Pequeñas	Medianas	Total
Alimenticio	$P(A \cap P) = 0{,}30$	$P(A \cap M) = 0{,}25$	$P(A) = 0{,}55$
Textil	$P(T \cap P) = 0{,}35$	$P(T \cap M) = 0{,}10$	$P(T) = 0{,}45$
Total	$P(P) = 0{,}65$	$P(M) = 0{,}35$	$P(\Omega) = 1$

En el cálculo de las probabilidades Totales intervienen las probabilidades incluidas en la Tabla de Probabilidades.

Los siguientes ejemplos corresponden a la Probabilidad Total de eventos **no mutuamente excluyentes:**

$$P(A \cup P) = P(A) + P(P) - P(A \cap P)$$
$$= 0{,}55 + 0{,}65 - 0{,}30$$
$$= \mathbf{0{,}90}$$

$$P(T \cup P) = P(T) + P(P) - P(T \cap P)$$
$$= 0{,}45 + 0{,}65 - 0{,}35$$
$$= \mathbf{0{,}75}$$

$$P(A \cup M) = P(A) + P(M) - P(A \cap M)$$
$$= 0{,}55 + 0{,}35 - 0{,}25$$
$$= \mathbf{0{,}65}$$

$$P(T \cup M) = P(T) + P(M) - P(T \cap M)$$
$$= 0{,}45 + 0{,}35 - 0{,}10$$
$$= \mathbf{0{,}70}$$

Los siguientes ejemplos corresponden a la probabilidad total de eventos **mutuamente excluyentes:**

$$P(P \cup M) = P(P) + P(M)$$
$$= 0{,}65 + 0{,}35$$

= 1

P(A U T) = P(A) + P(T)

= 0,55 + 0,45

= 1

Probabilidad Condicional

Este tipo de probabilidad tiene lugar cuando el elemento no es seleccionado del espacio probabilístico total (Ω), sino que se extrae de un espacio probabilístico formado por los elementos que cumplen cierta condición.

El elemento se extrae de un espacio probabilístico que se **reduce** a los elementos que cumplen cierta condición, es decir, se presenta determinado evento como como Ω reducido, es por ello que se define a esta probabilidad de la siguiente manera:

Es la probabilidad asociada a un espacio probabilístico **reducido**

Dados dos eventos A y B, pueden dar lugar a dos probabilidades condicionales diferentes:

Probabilidad	Significado
$P(A/\mathbf{B}) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(\mathbf{B})}$ **B** = Ω reducido Se presenta el evento B como espacio probabilístico reducido	Probabilidad de que ocurra el evento A, si el elemento se extrae del conjunto formado por los elementos que pertenecen al evento B. Es decir que, el espacio probabilístico se reduce a los elementos que cumplen la condición de pertenecer al evento B.
$P(B/\mathbf{A}) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(\mathbf{A})}$	Probabilidad de que ocurra el evento B, si el elemento se extrae del conjunto formado por los elementos que pertenecen al evento A Es decir que, el espacio probabilístico se

A = Ω reducido	reduce a los elementos que cumplen la condición de pertenecer al evento A.

Ejemplos de Probabilidad Condicional:

Significado	Espacio probabilístico reducido	Probabilidad
Si la empresa es **Pequeña**, ¿cuál es la probabilidad de que sea Alimenticia?	**P**	**P(A/P)**
Si la empresa es **Pequeña**, ¿cuál es la probabilidad de que sea Textil?	**P**	**P(T/P)**
Si la empresa es **Mediana**, ¿cuál es la probabilidad de que sea Alimenticia?	**M**	**P(A/M)**
Si la empresa es **Mediana**, ¿cuál es la probabilidad de que sea Textil?	**M**	**P(T/M)**
Si la empresa es **Alimenticia**, ¿cuál es la probabilidad de que sea Pequeña?	**A**	**P(P/A)**
Si la empresa es **Textil**, ¿cuál es la probabilidad de que sea Pequeña?	**T**	**P(P/T)**
Si la empresa es **Alimenticia**, ¿cuál es la probabilidad de que sea Mediana?	**A**	**P(M/A)**
Si la empresa es **Textil**, ¿cuál es la probabilidad de que sea Mediana?	**T**	**P(M/T)**

Para calcular una probabilidad condicional debemos identificar el **Espacio probabilístico reducido** y luego se obtiene mediante el cociente entre la **Probabilidad Conjunta** de ambos eventos sobre la **Probabilidad Marginal** del evento que forma el Ω reducido.

Para obtener las probabilidades condicionales tenemos en cuenta las probabilidades expresadas en la Tabla de Probabilidades:

Tamaño / Rubro	Pequeñas	Medianas	Total
Alimenticio	$P(A \cap P) = 0,30$	$P(A \cap M) = 0,25$	$P(A) = 0,55$
Textil	$P(T \cap P) = 0,35$	$P(T \cap M) = 0,10$	$P(T) = 0,45$
Total	$P(P) = 0,65$	$P(M) = 0,35$	$P(\Omega) = 1$

$$P(A/P) = \frac{P(A \cap P)}{P(P)} = \frac{0,30}{0,65} = 0,462$$

Ω reducido: P

$$P(T/P) = \frac{P(T \cap P)}{P(P)} = \frac{0,35}{0,65} = 0,538$$

Ω reducido: P

$$P(A/M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{0,25}{0,35} = 0,714$$

Ω reducido: M

$$P(T/M) = \frac{P(T \cap M)}{P(M)} = \frac{0,10}{0,35} = 0,286$$

Ω reducido: M

$$P(P/A) = \frac{P(A \cap P)}{P(A)} = \frac{0,30}{0,55} = 0,545$$

Ω reducido: A

$$P(P/T) = \frac{P(T \cap P)}{P(T)} = \frac{0,35}{0,45} = 0,778$$

Ω reducido: T

$$P(M/A) = \frac{P(A \cap M)}{P(A)} = \frac{0,25}{0,55} = 0,455$$

Ω reducido: A

$$P(M/T) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0{,}10}{0{,}45} = 0{,}222$$

Ω reducido: T

EVENTOS DEPENDIENTES

Dos eventos son **dependientes** si la ocurrencia de un evento **si afecta o si modifica la probabilidad** de ocurrencia del otro evento.

Si dos eventos A y B son **dependientes** se cumple que:

$P(A/B) \neq P(A)$

La probabilidad del evento A cambia al presentarse el evento B.

$P(B/A) \neq P(B)$

La probabilidad del evento B cambia al presentarse el evento A.

Por lo tanto, si al comparar las probabilidades se observa que no son iguales, entonces los eventos son Dependientes.

EVENTOS INDEPENDIENTES

Dos eventos son **independientes** si la ocurrencia de un evento **no afecta o no modifica la probabilidad** de ocurrencia del otro evento.

Si dos eventos A y B son **independientes** se cumple que:

$P(A/B) = P(A)$

Si la probabilidad del evento A no cambia al presentarse el evento B, entonces los eventos son independientes.

La comparación también puede efectuarse a partir de la otra Probabilidad Condicional:

$P(B/A) = P(B)$

Si la probabilidad del evento B no cambia al presentarse el evento A, entonces los eventos son independientes.

A través de cualquiera de las tres comparaciones se obtendrá la misma conclusión, en el caso planteado se verifica que los eventos son independientes porque la ocurrencia de un evento no modifica la probabilidad del otro evento. Es suficiente realizar una de las tres comparaciones.

Tamaño / Rubro	Pequeñas	Medianas	Total
Alimenticio	$P(A \cap P) = 0,30$	$P(A \cap M) = 0,25$	$P(A) = 0,55$
Textil	$P(T \cap P) = 0,35$	$P(T \cap M) = 0,10$	$P(T) = 0,45$
Total	$P(P) = 0,65$	$P(M) = 0,35$	$P(\Omega) = 1$

$$P(T/M) = \frac{P(T \cap M)}{P(M)} = \frac{0,10}{0,35} = 0,286$$

Ω reducido: M

$$P(P/A) = \frac{P(A \cap P)}{P(A)} = \frac{0,30}{0,55} = 0,545$$

Ω reducido: A

$$P(P/T) = \frac{P(T \cap P)}{P(T)} = \frac{0,35}{0,45} = 0,778$$

Ω reducido: T

$$P(M/A) = \frac{P(A \cap M)}{P(A)} = \frac{0,25}{0,55} = 0,455$$

Ω reducido: A

$$P(A/M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{0,25}{0,35} = 0,714$$

Ω reducido: M

¿Son independientes los eventos M y A?

Para hacer la correspondiente demostración, tenemos en cuenta las probabilidades calculadas anteriormente:

$$P(M/A) \neq P(M)$$

0,455 ≠ 0,35

La probabilidad del evento M cambia al presentarse el evento A, por lo tanto los eventos M y A no son independientes, **son eventos dependientes**.

La comparación también puede efectuarse a partir de la otra Probabilidad Condicional:

P(A/M) ≠ P(A)

0,714 ≠ 0,55

La probabilidad del evento A cambia al presentarse el evento M, por lo tanto los eventos M y A no son independientes, **son eventos dependientes**.

La verificación también puede realizarse efectuando la siguiente comparación:

P(A ∩ M) ≠ P(A) . P(M)

0,25 ≠ 0,55 . 0,35

0,25 ≠ 0,1925

En cualquiera de los tres casos, la relación de desigualdad indica que los eventos no son independientes, son dependientes. Es la conclusión obtenida a partir de las tres verificaciones siempre será la misma, por lo tanto es suficiente realizar una de las tres comprobaciones.

Regla Multiplicativa

Cuando solo se tienen como datos las probabilidades Condicionales y Marginales, en tal caso las probabilidades Conjuntas se aplica la Regla Multiplicativa

REGLA MULTIPLICATIVA

Regla Multiplicativa:

La probabilidad Conjunta es igual al producto de la probabilidad Condicional por la probabilidad Marginal del evento que se presenta como espacio probabilístico reducido.

Aplicación de la Regla Multiplicativa

Del total de empresas de cierta región el 30% son grandes, el 25% son medianas y el resto son pequeñas empresas. El 70% de las grandes empresas, el 80% de las medianas empresas y el 90% de las pequeñas empresas son exportadoras. El resto no son exportadoras.

Identificamos las Probabilidades **Marginales** y **Condicionales** que tenemos como datos:

30% G **P(G)= 0,30**

25% M **P(M)= 0,25**

45% P **P(P)= 0,45**

El 70% de las grandes empresas son exportadoras (E).

Del total de las Grandes empresas, el 70% son exportadoras (estamos considerando el conjunto de las grandes empresas, es decir que el **espacio probabilístico se reduce a las empresas que cumplen la condición de ser grandes**) por lo tanto 0,70 es una probabilidad **condicional**

Simbólicamente:

Del total de G el 70% son E P(E/G)= 0,70

El 80% de las medianas empresas son exportadoras (E).

Del total de las medianas empresas, el 80% son exportadoras (estamos considerando el conjunto de las grandes empresas, es decir que el **espacio probabilístico se reduce a las empresas que cumplen la condición de ser medianas**) por lo tanto 0,80 es una probabilidad **condicional**

Simbólicamente:

Del total de M el 80% son E P(E/M)= 0,80

El 90% de las pequeñas empresas son exportadoras (E).

Del total de las Pequeñas empresas, el 90% son exportadoras (estamos considerando el conjunto de las grandes empresas, es decir que el **espacio probabilístico se reduce a las empresas que cumplen la condición de ser Pequeñas**) por lo tanto 0,90 es una probabilidad **Condicional**

Simbólicamente:

Del total de P el 90% son E **P(E/P)= 0,90**

En resumen, se tienen como datos las siguientes probabilidades:

Probabilidades Marginales:

P(G)= 0,30

P(M)= 0,25

P(P)= 0,45

Probabilidades Condicionales:

P(E/G)= 0,70

P(E/M)= 0,80

P(E/P)= 0,90

Se pide:

a. ¿Cuál es la probabilidad de una empresa seleccionada aleatoriamente sea mediana dado que no es exportadora.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que una empresa seleccionada aleatoriamente sea grande y exportadora?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que una empresa seleccionada aleatoriamente sea pequeña o exportadora?

Antes de calcular las probabilidades solicitadas es conveniente construir la Tabla de Probabilidades:

Se indican en la Tabla las tres Probabilidades Marginales que vienen dadas como datos:

Tamaño / Tipo	G	M	P	Total
E	P(E∩G)	P(E∩M)	P(E∩P)	P(E)
E´	P(E´∩G)	P(E´∩M)	P(E´∩P)	P(E´)
total	P(G)= 0,30	P(M)= 0,25	P(P)= 0,45	1

Si tuviese que calcularse P(E/G), se plantearía de la siguiente manera:

P(E/G)= P(E∩G)/P(G)

Se conoce P(E/G) y P(G) por lo tanto la incógnita es la probabilidad P(E∩G):

P(E/G) = P(E∩G)/P(G)

0,70 = P(E∩G) / 0,30

Se despeja la incógnita (0,30 está dividiendo y pasa multiplicando al primer miembro de la igualdad):

P(E∩G) = P(E/G)* P(G)

= 0,70* **0,30**

= **0,21**

P(E∩M)= P(E/M) P(M)

= 0,80* **0,25**

= **0,20**

P(E∩P)= **P(E/P) P(P)**

= 0,90* **0,45**

= **0,405**

Se obtuvieron las probabilidades Conjuntas mediante el producto de la probabilidad Condicional por la probabilidad Marginal del evento que se presenta como espacio probabilístico reducido esta regla que se aplicó se denomina Regla Multiplicativa.

Se completa la Tabla de Probabilidades:

Tamaño / Tipo	G	M	P	Total
E	$P(E \cap G)= 0,21$	$P(E \cap M)=0,2$	$P(E \cap P)= 0,405$	$P(E)=0,815$
E´	$P(E´ \cap G)= 0,09$	$P(E´ \cap M)=0,05$	$P(E´ \cap P)= 0,045$	$P(E´)=0,185$
total	$P(G)= 0,30$	$P(M)= 0,25$	$P(P)= 0,45$	1

BIBLIOGRAFÍA

Espejo, I. Fernández, F. López, M. Muñoz, M. Rodríguez, A. Sánchez, A. Valero, C. (2009) Estadística Descriptiva y Probabilidad: (Teoría y problemas). Editorial: Cádiz Universidad de Cádiz, 2009. https://libros.metabiblioteca.org/handle/001/140

Ronald E. Walpole (2012) Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias, 9na. Edición Pearson Educación, México. ISBN: 978-607-32-1417-9.