UTN
Facultad Regional Córdoba

TUP

Tecnicatura Universitaria
en Programación

MATEMÁTICA

Unidad Temática N°2:
Matrices

Teórico
1° Año – 1° Cuatrimestre

Indice

MATRICES

Una matriz es un conjunto de elementos (números reales) alineados horizontalmente formando filas y verticalmente formando columnas.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Gráfico 1: Elaboración propia

Para definir una matriz se emplean letras mayúsculas dentro de corchetes o llaves. Cada elemento de la matriz tiene dos subíndices: a_{ij}

i: indica la fila que pertenece el elemento.

j:indica la columna que pertenece el elemento.

Orden de una matriz

El orden de una matriz está dado por la cantidad de filas (m) y columnas (n).

Ejemplos: A_{2x3} significa que la matriz tiene 2 filas y 3 columnas.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

B_{3x4} significa que la matriz tiene 3 filas y 4 columnas

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & -5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales cuando tienen el mismo orden y los elementos que ocupan la misma posición en ambas son iguales.

En símbolos $A_{mxn} = B_{mxn}$ $a_{ij} = b_{ij}$

Mismo orden Elementos correspondientes iguales

Ejemplo: $A_{2x2}=B_{2x2}$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Tipos de matrices

Matriz cuadrada: tiene igual número de filas y de columnas.

Es decir: A_{nxn}

Ejemplo: A= $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ B= $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

A_{2x2} B_{3x3}

Matriz diagonal: todos los elementos son nulos menos los de la diagonal principal.

Elementos de la diagonal principal: a_{ij} donde i = j

Ejemplo: A= $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Matriz identidad (I): todos los elementos de la diagonal principal son 1.

I= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ a_{ij}= 1 para i = j

Matriz escalar: cuando los elementos de la diagonal principal tienen el mismo valor.

Ejemplo: C= $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Matriz nula (O): todos los elementos son 0.

a_{ij}= 0 Se denota O_{mxn}

O= $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ O= $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

O_{3x3} O_{3x2}

Matriz transpuesta: matriz que tiene por filas y columnas, las columnas y filas de la matriz A en ese orden. Se simboliza A^t .

Ejemplo:

A= $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ A^t= $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

Matriz diagonal: cuando todos los elementos fuera de la diagonal principal son ceros.

$$[D]ij = \begin{cases} d_i & si \quad i = j \\ 0 \; si & i \neq j \end{cases}$$

Ejemplo:

$$C = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior: cuando los elementos por debajo de la diagonal principal son cero. En fórmula, A es triangular superior si aij = 0 para todo i < j.

Ejemplo: A= $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Matriz triangular inferior: cuando los elementos por arriba de la diagonal principal son cero. En fórmula, A es triangular inferior si aij = 0 para todo i > j.

Ejemplo: B= $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

Operaciones con matrices

Suma de matrices

La suma de dos matrices es otra matriz del mismo orden que se obtiene de sumar los elementos correspondientes de las matrices A y B.

En símbolos $\boldsymbol{A_{mxn}} + \boldsymbol{B_{mxn}} = \boldsymbol{C_{mxn}}$

$\boldsymbol{a_{ij}} + \boldsymbol{b_{ij}} = \boldsymbol{c_{ij}}$

Ejemplo: A= $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ B= $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

A + B = $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$

En este caso: $[a+b]_{11}$ = $[a]_{11}$+$[b]_{11}$= -1 + 7 = 6

$[a+b]_{12}$ = $[a]_{12}$+$[b]_{12}$= 3 + (-3) = 0

$[a+b]_{21}$ = $[a]_{21}$+$[b]_{21}$= 5 + 4 = 9

$[a+b]_{22}$ = $[a]_{22}$+$[b]_{22}$ = 6 + 5 = 11

Propiedades de la suma de matrices

Conmutativa:	A + B = B + A
Asociativa:	A+ (B + C) = (A + B) + C
Elemento Neutro:	A + 0 = 0 + A = A
Transpuesta de la matriz:	$(A+B)^t = A^t + B^t$

Multiplicación por un escalar

se multiplica el escalar (número real) por cada uno de los elementos a_{ij} de la matriz .

Ejemplo: 3 x A siendo A= $\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{6} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$ 3 x A= $\begin{bmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{9} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{18} & \mathbf{12} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$

Producto de dos matrices

Para poder realizar la multiplicación entre dos matrices, la cantidad de columnas de la primera matriz debe ser igual a la cantidad de filas de la segunda. El producto entre estas matrices es otra matriz que tiene tantas filas como la primera y tantas columnas como la segunda.

Número de filas de la matriz A

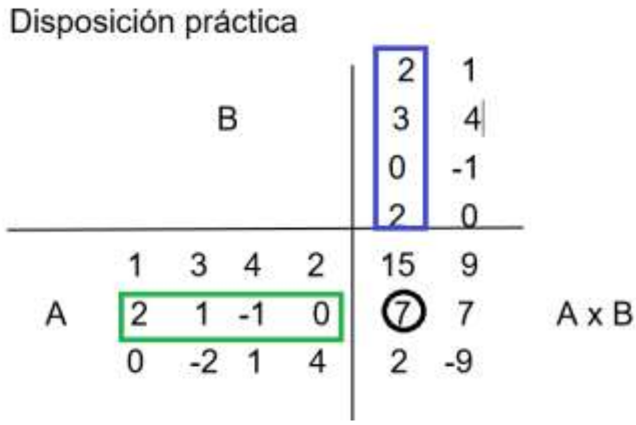
A_{mxn} **x** $\boldsymbol{B_{nxp}}$ **=** $\boldsymbol{C_{mxp}}$

Condición necesaria

número de columnas de la matriz B

Ejemplo: Sea A_{3x4} x B_{4x2} $\rightarrow$ C_{3x2}

A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ y B= $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$



Para obtener los elementos de la matriz A x B, se multiplica elemento a elemento sumando la fila “i” de la matriz A con la columna “j” de la matriz B.

Ejemplo: 2x2 + 1x3 + (-1)x0 + 0x2 = 7

Este esquema muestra cómo se relacionan las filas y las columnas para realizar el producto.

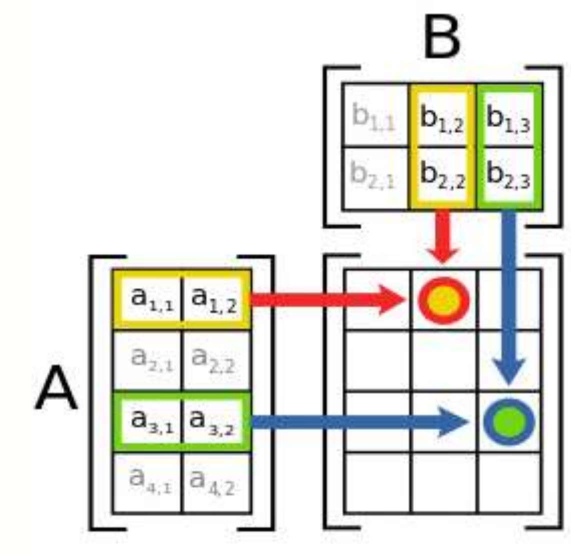


Imagen 1: Extraído de Stack Exchange

Las componentes de la matriz C, matriz que resulta de realizar el producto de AxB se calculan de la siguiente manera:

$c_{11}= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+a_{14}b_{41}$ = 1x2+3x3+4x0+2x2= 15

$c_{12}= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+a_{14}b_{42}$ = 1x1+3x4+4x(-1)+2x0= 9

$c_{21}= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}+a_{24}b_{41}$ = 2x2+1x3+(-1)x0+0x2= 7

$c_{22}= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}+a_{24}b_{42}$ = 2x1+1x4+(-1)x(-1)+0x0=7

$c_{31}= a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}+a_{34}b_{41}$ = 0x2+(-2)x3+1x0+4x2 = 2

$c_{32}= a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}+a_{34}b_{42}$ = 0x1+(-2)x4+1x(-1)+4x0= -9

Ejemplo: B= $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ C=$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

B_{2x2} x C_{2x4} $\rightarrow$ D_{2x4}

Disposición práctica

$$\begin{array}{cc|cccc} & & 3 & 0 & -2 & -3 \\ & & 1 & 4 & 0 & 5 \\ \hline 2 & -1 & 5 & -4 & -4 & -11 \\ 4 & 5 & 17 & 20 & -8 & 13 \end{array}$$

Las componentes de la matriz D se calculan del modo siguiente:

c_{11}= $a_{11}b_{11}$ + $a_{12}b_{21}$= 2x3+(-1) x1=5

c_{12}= $a_{11}b_{12}$ + $a_{12}b_{22}$= 2x0+(-1)x4= -4

c_{13}= $a_{11}b_{13}$ + $a_{12}b_{23}$= 2x(-2)+(-1)x0=-4

c_{14}= $a_{11}b_{14}$ + $a_{12}b_{24}$= 2x(-3)+(-1)x5 =-11

c_{21}= $a_{21}b_{11}$ + $a_{22}b_{21}$= 4x3+5x1= 17

c_{22}= $a_{21}b_{12}$ + $a_{22}b_{22}$= 4x0+5x4= 20

c_{23}= $a_{21}b_{13}$ + $a_{22}b_{23}$=4x(-2)+5x0= -8

c_{24}= $a_{21}b_{14}$ + $a_{22}b_{24}$=4x(-3)+5x5= 13

Ejemplo: M= $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ N=$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

M_{1x3} x N_{3x1} $\rightarrow$ S_{1x1}

Disposición gráfica

$$\begin{array}{c|c} & 1 \\ & 4 \\ & 5 \\ \hline & \end{array}$$

2 1 3 21

Las componentes del resultado se obtienen de:

c_{11}= $a_{11}b_{11}$ + $a_{12}b_{21}$+ $a_{13}b_{31}$= 21

Propiedades del producto de matrices

Asociativa (A x B)x C=A x(B x C)
Conmutativa A x B ≠ B x A
Distributiva con respecto a la suma de matrices
A izquierda A x (B+C) = A x B + A x C
A derecha (A+B) x C= A x C +B x C
Elemento Neutro A x I=I x A=A
Transpuesta del producto $(AxB)^t = B^t x A^t$
Asociativa para la multiplicación por escalar
$\alpha(AxB) = (\alpha A)xB = A(\alpha B)$
El producto de una matriz por la matriz nula es igual a una matriz nula
Ax0=0xA=0
Siendo la matriz nula (0), la matriz que tiene todos sus elementos 0.

Matrices equivalentes por filas

Una matriz es equivalente a una matriz A si se pueden aplicar una sucesión de operaciones elementales que transformen la matriz A en B operaciones elementales.

Operaciones elementales

- Multiplicar una fila por un escalar distinto de 0.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow F_1\ (2) \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Sumar una fila a otra previamente multiplicada por un escalar.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow F_2 + F_1(2) \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Intercambiar filas.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow F_{13} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz reducida por filas

- Tiene forma escalonada.
- El primer elemento no nulo (elemento conductor) de una fila se encuentra más a la derecha de los de la fila anterior.
- Los elementos conductores (EC) se hacen iguala uno.
- En las columnas de los EC los restantes elementos son ceros.
- Las filas nulas están por debajo de las no nulas.

Ejercicio: Obtener la reducida por filas de la siguiente matriz.

					cálculos auxiliares			
1	-1	-4	4					
5	-4	1	-19	$F_2 + F_1(-5)$	5	-4	1	-19
2	1	-3	7		-5	5	20	-20
1	-1	-4	4		0	1	21	-39
0	1	21	-39					
2	1	-3	7	$F_3 + F_1(-2)$	2	1	-3	7
1	-1	-4	4		-2	2	8	-8
0	1	21	-39		0	3	5	-1
0	3	5	-1	$F_1 + F_2(1)$				
1	0	17	-35		1	-1	-4	4
0	1	21	-39		0	1	21	-39
0	3	5	-1	$F_3 + F_2(-3)$	1	0	17	-35
1	0	17	-35		0	3	5	-1
0	1	21	-39		0	3	-63	117
0	0	-58	116	$F_3(-1/58)$	0	0	-58	116
1	0	17	-35					
0	1	21	-39		0	0	1	2
0	0	1	- 2	$F_2 + F_3(-21)$	0	1	21	-39
1	0	17	-35		0	0	-21	42
0	1	0	3		0	1	0	3
0	0	1	-2	$F_1 + F_3(-17)$				
1	0	0	-1		1	0	17	-35
0	1	0	3		0	0	-17	34
0	0	1	-2		1	0	0	-1

De esta manera aplicando las operaciones elementales se logra obtener una matriz escalonada

Matriz inversa

Una matriz cuadrada B es la inversa de una matriz cuadrada A si A x B= I → B=A^{-1}
Es la inversa de la matriz A y se cumple: A x A^{-1}= A^{-1}x A= I

Obtención de la matriz inversa mediante operaciones elementales

$$\begin{array}{c|c} A & I \\ \hline \vdots & \vdots \\ & \\ \hline I & A^{-1} \end{array}$$

se aplican operaciones elementales de de filas hasta obtener la matriz Identidad

Si durante el proceso se obtiene la matriz identidad I entonces la matriz A tiene inversa. De lo contrario no tiene (puede suceder que alguna fila se anule o aparezca un cero en la diagonal principal).

No todo matriz tiene inversa.

Ejercicio:

Sea la matriz A =$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ Encontrar la inversa de A.

$$\begin{array}{cc|cc l}
2 & 5 & 1 & 0 & \\
1 & 3 & 0 & 1 & F_{12} \\ \hline
1 & 3 & 0 & 1 & \\
2 & 5 & 1 & 0 & F_2 + F_1(-2) \\ \hline
1 & 3 & 0 & 1 & \\
0 & -1 & 1 & -2 & F_2(-1) \\ \hline
1 & 3 & 0 & 1 & \\
0 & 1 & -1 & 2 & F_1 + F_2(-3) \\ \hline
1 & 0 & 3 & -5 & \\
0 & 1 & -1 & 2 & \\
\multicolumn{2}{c}{I} & \multicolumn{2}{c}{A^{-1}} &
\end{array}$$

Verificación **A x A^{-1} = I = A^{-1}x A**

$$
\begin{array}{cc|cc}
 & & 3 & -5 \\
 & & -1 & 2 \\
\hline
2 & 5 & 1 & 0 \\
1 & 3 & 0 & 1
\end{array}
$$

Ejercicio: Sea la matriz B =$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ Encontrar la inversa de B.

$$
\begin{array}{cc|cc}
1 & 3 & 1 & 0 \\
4 & 5 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 3 & 1 & 0 \\
0 & -7 & -4 & 1 \\
\hline
1 & 3 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 4/7 & -1/7 \\
\hline
1 & 0 & -5/7 & 3/7 \\
0 & 1 & 4/7 & -1/7
\end{array}
$$

F_2 + F_1(-4)

$F_2(-\frac{1}{7})$

F_1 + F_2(-3)

$$
\underbrace{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}}_{I}
\;\Big|\;
\underbrace{\begin{array}{cc} -5/7 & 3/7 \\ 4/7 & -1/7 \end{array}}_{B^{-1}}
$$

Verificación **B x B^{-1} = I = B^{-1}x B**

$$
\begin{array}{cc|cc}
 & & -5/7 & 3/7 \\
 & & 4/7 & -1/7 \\
\hline
1 & 3 & 1 & 0 \\
4 & 5 & 0 & 1
\end{array}
$$

Ejercicio: Sea C=$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ Encontrar la inversa de C

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
2 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -7 & -5 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 4 & -2 & -4 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 5/7 & 2/7 & -1/7 & 0 \\
0 & 4 & -2 & -4 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 2/7 & 5/7 & 1/7 & 0 \\
0 & 1 & 5/7 & 2/7 & -1/7 & 0 \\
0 & 0 & -34/7 & -36/7 & 4/7 & 1
\end{array}
$$

F2+F1(-2)

F3+F1(-4)

F2(-1/7)

F1+F2(-1)

F3+F2(-4)

F3(-7/34)

$$\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 2/7 & 5/7 & 1/7 & 0 \\
0 & 1 & 5/7 & 2/7 & -1/7 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 18/17 & -2/17 & -7/34
\end{array}$$

F1+F3(-2/7)

F2+F3(-5/7)

$$\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 7/17 & 3/17 & 1/17 \\
0 & 1 & 0 & -8/17 & -1/17 & 5/34 \\
0 & 0 & 1 & 18/17 & -2/17 & -7/34
\end{array}$$

Verificación **A x A^{-1} = I = A^{-1}x A**

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & 7/17 & 3/17 & 1/17 \\
 & & & -8/17 & -1/17 & 5/34 \\
 & & & 18/17 & -2/17 & -7/34 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
2 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

Propiedades de la inversa

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

$(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$

Rango de una matriz

Se llama **rango** de una matriz a la cantidad de **filas no nulas** de la matriz reducida por filas o escalonada. Se denota r(A).

Ejemplos:

A=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ r(A)=2

B=$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ r(B)=2

C=$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ r(C)=1

BIBLIOGRAFÍA

Universidad Tecnológica Nacional – FRC. (2020) Apuntes de la Cátedra de Álgebra 1 de la Carrera de Ingeniería en Sistemas de Información. Disponible en: https://drive.google.com/file/d/1U0vG3AJcQT-WNpxGmNQKFj4BpFSnAiEm/view?usp=sharing_eil&ts=60359cf6