UTN
Facultad Regional Córdoba

TUP

Tecnicatura Universitaria
en Programación

ELEMENTOS DE INVESTIGACION OPERATIVA

Unidad Temática N°2:
Programación Lineal

Teórico
2° Año – 3° Cuatrimestre

Índice

Programación Lineal 2

Método Gráfico: Caso de maximización..3

Método Gráfico: Caso de minimización..16

Método Simplex..22

Análisis de Sensibilidad..39

BIBLIOGRAFÍA 57

Programación Lineal

Durante la Segunda Guerra Mundial se buscó una técnica que permitiera minimizar los costos y optimizar el uso de recursos del ejército, de este modo surgió la Programación Lineal. En la actualidad este método es utilizado con mucha frecuencia en empresas y organizaciones.

La Programación Lineal es un algoritmo que se utiliza en casos reales en los cuales se requiere optimizar la utilización de recursos a los fines maximizar una ganancia o bien, en casos en los cuales debemos minimizar un costo.

Por ejemplo, se puede recurrir a la programación lineal para identificar la cantidad que debe fabricarse de cada tipo de producto para obtener la máxima ganancia. Se considera que los recursos o insumos disponibles para fabricar los productos son limitados, en consecuencia la cantidad de producto que fabricarse debe ser tal que se ajuste a la restricción de recursos, por lo tanto la cantidad utilizada de insumos necesarios para fabricar los productos debe ser menor o igual que la cantidad disponible.

La ganancia o el costo, según corresponda, queda representada a través de una función **lineal** es por ello que el método se denomina Programación **Lineal**.

Desde el punto de vista matemático, a través de la Programación lineal se pretende obtener el valor de las variables que optimizan la función.

En el caso de la maximización se obtiene el valor que debe asumir cada variable para otorgarle a la función el máximo valor, en un problema de minimización se determina el valor que debe asumir cada variable para otorgarle a la función el máximo valor. Asimismo, el valor de cada variable debe ser tal que satisfaga el sistema de inecuaciones que surge a partir de las restricciones de recursos.

Un problema de programación lineal puede resolverse a través de dos Métodos:

- **Método Gráfico:**

  Se obtiene un polígono de posibles soluciones y la solución óptima del problema coincidirá con uno de sus vértices.

- **Método Simplex:**

  Implica el planteo de iteraciones, y en cada una de ellas se explora un vértice del polígono para determinar si corresponde a la solución óptima.

Método Gráfico: Caso de maximización

Se describirán los pasos que comprende a partir del siguiente caso:

Una fábrica se dedica a la producción de dos tipos de productos: acolchados y frazadas para viaje. Para fabricar un acolchado son necesarios 6 kilogramos de lana y 4 horas de mano de obra. Para fabricar una frazada son necesarios 5 kilogramos de lana y 2 horas de mano de obra. Se dispone de 20 kilogramos de lana y 25 horas de mano de obra. Por cada acolchado se obtiene una ganancia de $18 y por cada frazada se obtiene una ganancia de $10.

¿Cuántas máquinas de cada tipo deben fabricarse para obtener la máxima ganancia?

¿Cuál es la máxima ganancia?

Realizar un análisis de los insumos empleados en la fabricación de los productos.

Realizar un análisis de los insumos sobrantes.

Se organizan los datos en una tabla:

Productos / **Insumo**	Acolchados	Frazadas para viajes	Disponibilidad de insumos
Lana	6	5	20
Mano de obra	4	2	25
Ganancia unitaria	18	10	

Primer Paso: Identificación de las variables principales

Representan la cantidad que debe fabricarse de cada producto

x_1 = cantidad a fabricar de acolchados

x_2 = cantidad a fabricar de frazadas para viajes

Segundo Paso: Planteo de la Función Objetivo

Se pretende obtener el valor de las variables que le otorgan a la función el máximo valor.

$$\max z = \sum cj\ xj$$

cj: ganancia unitaria por cada tipo de producto

xi: variables principales

La Función Objetivo contiene un término por cada tipo de producto y representa la ganancia total.

En el caso planteado se fabrican dos tipos de productos, por lo tanto la función objetivo tiene dos términos:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$z = 18x_1 + 10x_2$$

El primer término $18x_1$ representa la ganancia total que se obtiene fabricando acolchados.

El segundo término $10x_1$ representa la ganancia total que se obtiene fabricando frazadas para viaje.

Tercer Paso: Sistema de restricciones:

Por cada insumo planteamos una inecuación que representa la siguiente relación:

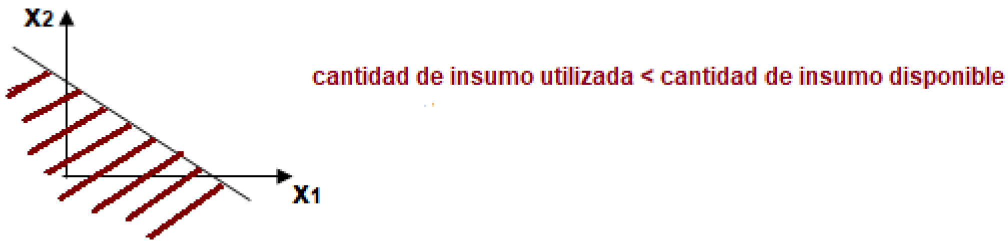
cantidad de insumo utilizada **≤** cantidad de insumo disponible

L (lana): $6x_1 + 5x_2 \leq 20$

M (mano de obra): $4x_1 + 2x_2 \leq 25$

Cuarto paso: Representación gráfica del Sistema de Inecuaciones

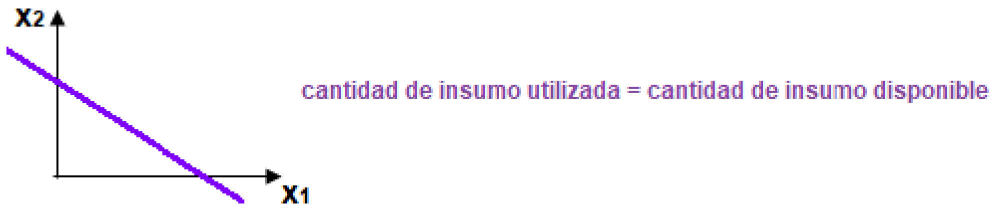
La relación "**menor que**" estará representada gráficamente a través del semiplano que se encuentra **por debajo de una recta**:



Para todo punto **(x_1; x_2)** que se encuentra **por debajo de la recta** se cumple que la **cantidad de insumo utilizada es menor que la cantidad disponible** y en consecuencia hay sobrantes del insumo.

Antes de trazar el semiplano debe graficarse la **recta**.

La relación "**igual que**" estará representada gráficamente por la **recta**:



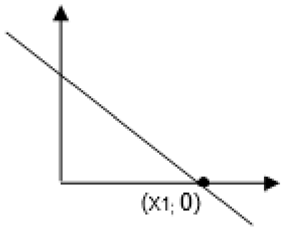
Para todo punto **(x_1; x_2)** que **pertenece a la recta** se cumple que la **cantidad de insumo utilizada es igual que la cantidad disponible** y en consecuencia no hay sobrantes del insumo.

A su vez, para poder trazar las rectas, por cada una de ellas deben hallarse dos puntos:

- Punto (x_1; 0)
- Punto (0; x_2)

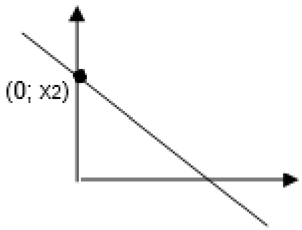
Punto (x_1; 0):

Es el punto en el cual la recta corta al eje horizontal. Para todo punto que se encuentra sobre el eje horizontal, la segunda coordenada es nula:



Punto (0; x_2):

Es el punto en el cual la recta corta al eje vertical. Punto (0; x_1) es el punto en el cual la recta corta al eje vertical. Para todo punto que se encuentra sobre el eje vertical, la primera coordenada es nula:



Cada recta representa gráficamente a una ecuación.

A continuación se plantea el correspondiente **Sistema de Ecuaciones.**

Para cada ecuación se cumple que la cantidad de insumo utilizada es igual que la cantidad de insumo disponible. Es decir que por cada ecuación se verifica la siguiente igualdad:

cantidad de insumo utilizada **=** cantidad de insumo disponible

L (lana): $6x_1 + 5x_2 = 20$

M (mano de obra): $4x_1 + 2x_2 = 25$

Por cada insumo se obtiene el par de puntos necesario para trazar cada recta:

Insumo **L(lana):**

La ecuación **L**: $6x_1 + 5x_2 = 20$ estará representada por una recta que se llamará recta **"L"**.

Deben hallarse los dos puntos correspondientes a la recta **"L":**

Se obtiene el punto **(x_1; 0):**

En la ecuación **L**: $6x_1 + 5x_2 = 20$ se reemplaza la coordenada nula que es x_2:

$6x_1 + 5 * \mathbf{0} = 20 \rightarrow \quad 6x_1 = 20$

Despejamos x_1:

$x_1 = 20/6 \rightarrow \quad x_1 = \mathbf{3,3}$

(3,3; 0) Es el punto en el cual la recta **"L"** corta al eje horizontal.

Se obtiene el punto **(0; x_2):**

En la ecuación **L**: $6x_1 + 5x_2 = 20$ se reemplaza la coordenada nula que es x_1:

$6 * \mathbf{0} + 5x_2 = 20 \rightarrow \quad 5x_2 = 20$

Despejamos x_2:

$X_2 = 20/5 \rightarrow \quad x_2 = \mathbf{4}$

(0; 4) Es el punto en el cual la recta **"L"** corta al eje vertical

Ya estamos en condiciones de trazar la recta **"L",** pero previamente obtendremos el par de puntos para la recta correspondiente al insumo **M (mano de obra)**:

Insumo **M (mano de obra)**

La ecuación **M**: $4x_1 + 2x_2 = 25$ estará representada por una recta que se llamará recta **"M".**

Deben hallarse los dos puntos correspondientes a la recta **"M".**

Se obtiene el punto **(x_1; 0)**

En la ecuación **M**: $4x_1 + 2x_2 = 25$ reemplazamos la coordenada nula que es x_2:

$4x_1 + 2 * \mathbf{0} = 25 \rightarrow 4x_1 = 25$

Se despeja x_1:

$x_1 = 25/4 \rightarrow \quad x_1 = \mathbf{6{,}25}$

(6,25; 0) Es el punto en el cual la recta **"M"** corta al eje horizontal.

Se obtiene el punto **(0; x_2):**

En la ecuación **M**: $4x_1 + 2x_2 = 25$ se reemplaza la primera coordenada nula que es x_1:

$4 * \mathbf{0} + 2x_2 = 25 \rightarrow \quad 2x_2 = 25$

Se despeja x_2:

$X_2 = 25/2 \rightarrow \quad x_2 = \mathbf{12{,}5}$

(0; 12,5) Es el punto en el cual la recta **"M"** corta al eje vertical

En resumen, se obtuvo el par de puntos para las rectas **“L”** y **“M”:**

Recta	(x_1; 0)	(0; x_2)
“L”	**(3,3; 0)**	**(0; 4)**
“M”	**(6,25; 0)**	**(0; 12,5)**

A continuación se trazan las rectas **“M”** y **“L”**. Posteriormente se traza el semiplano por debajo de la **Recta “L”** y el semiplano por debajo de la **Recta “M”:**

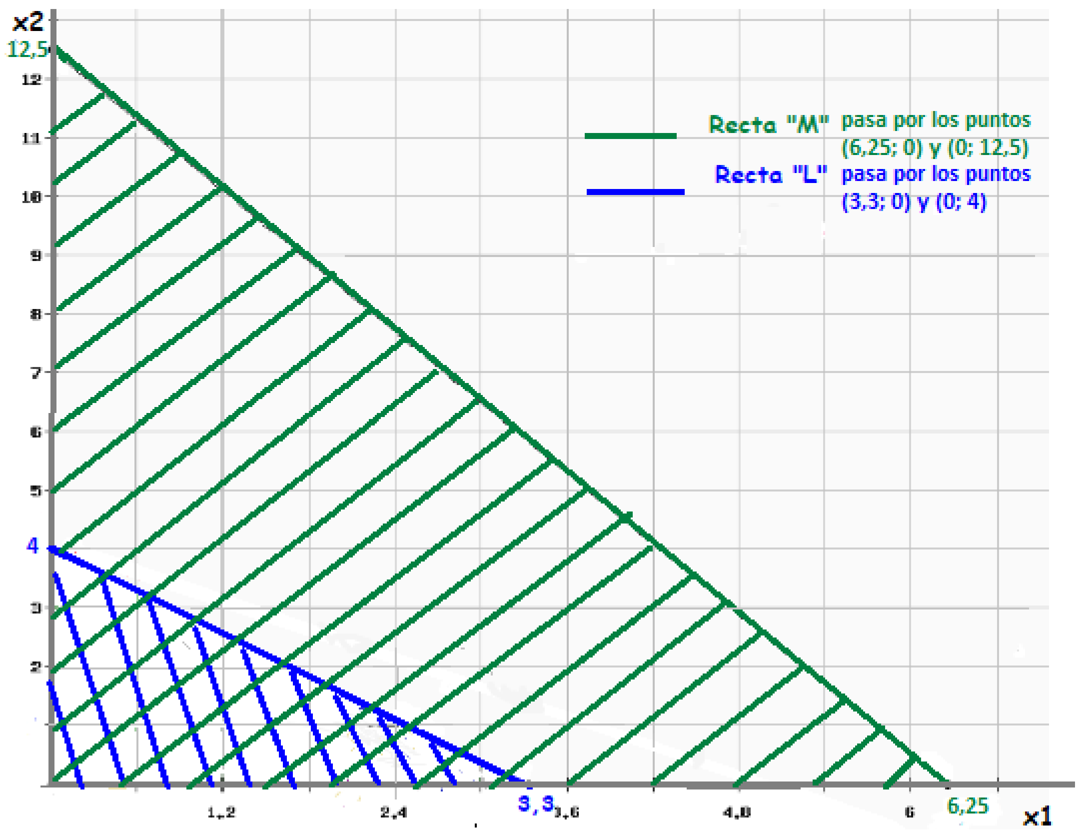


Gráfico 1- Programación Lineal- Método gráfico- Elaboración propia

El eje horizontal (eje x_1) representa la cantidad de acolchados que deben fabricarse.

El eje vertical (eje x_2) representa la cantidad de frazadas para viaje que deben fabricarse.

A partir del área en común (intersección entre los dos semiplanos) se forma un polígono que en este caso es un **triángulo**, pero en otros casos el polígono puede tener mayor cantidad de lados.

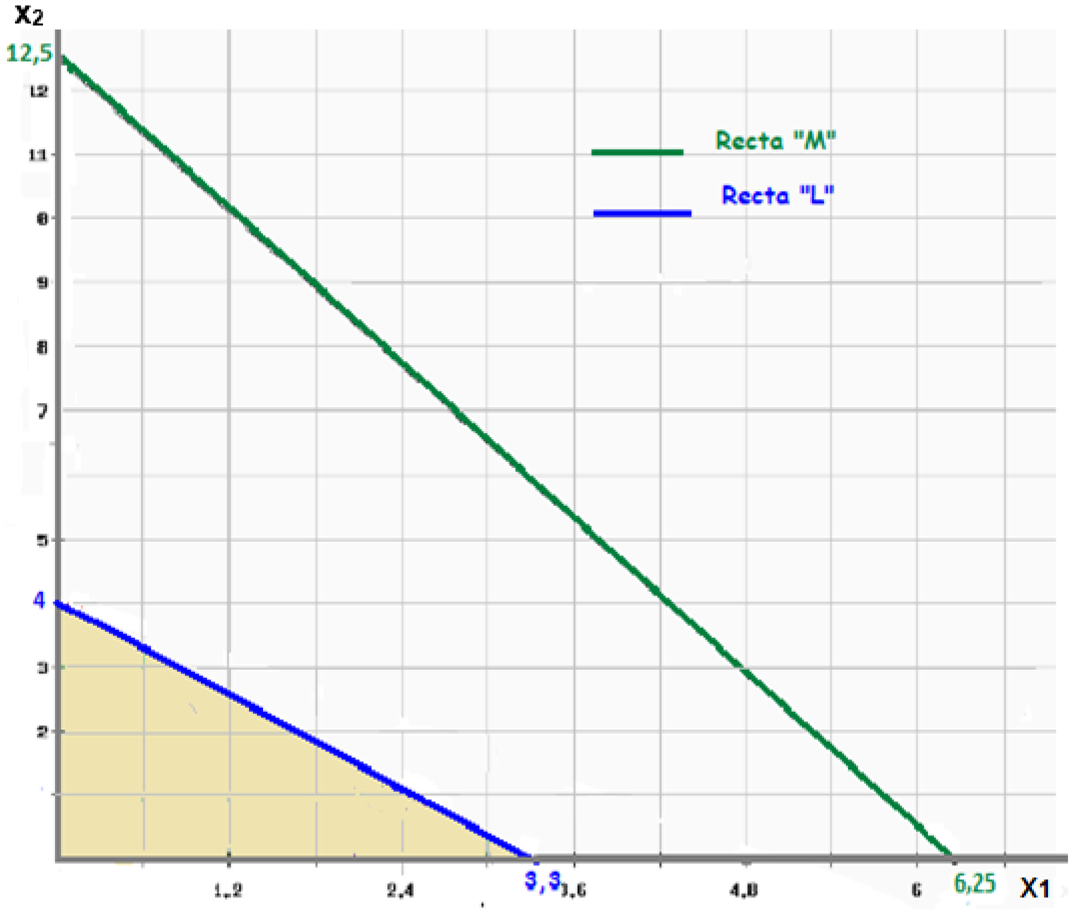


Gráfico 2- Programación Lineal- Método gráfico- Elaboración propia

A continuación se designarán los **vértices** del **triángulo**:

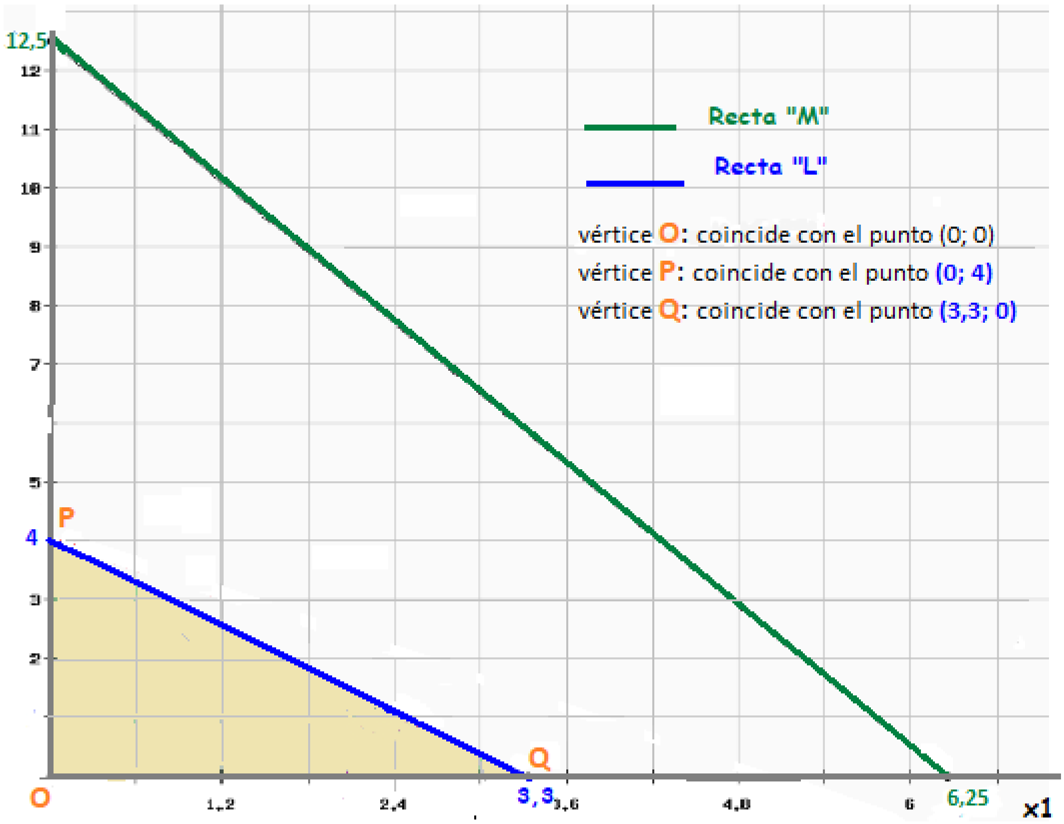


Gráfico 3- Programación Lineal- Método gráfico- Elaboración propia

Quinto paso: Identificación de la Solución Óptima a partir del gráfico obtenido:

Gráficamente la solución óptima será uno de los **vértices** del **polígono** que en este caso es un **triángulo**.

¿Cuál de los vértices representa la solución óptima?

Para averiguarlo deben reemplazarse las coordenadas de cada vértice en la Función Objetivo: $z = 18x_1 + 10x_2$

Vértice	$(x_1; x_2)$	$z = 18x_1 + 10x_2$
O	(0; 0)	z = 18*0 + 10*0 = 0
P	(0; **4**)	z = 18*0 + 10***4** = 40
Q	(**3,3**; 0)	z = 18***3,3** + 10*0 = **59,4 Máxima Ganancia**

La solución óptima está representada gráficamente por el **vértice** al cual le corresponde la **Máxima Ganancia**.

En el caso planteado la solución óptima corresponde al vértice **Q**, y sus coordenadas indican la cantidad que debe fabricarse de cada producto para obtener la máxima ganancia:

El vértice **Q** es el punto de coordenadas **(3,3;** 0**)**

x_1 = **3,3** Cantidad de acolchados que deben producirse

x_2 = 0 Cantidad de frazadas para viaje que deben producirse

Sexto paso: Análisis de los insumos utilizados para fabricar los productos:

Tal como se expresó anteriormente, con relación a los insumos utilizados existen dos posibles casos:

Cantidad de insumo utilizada = Cantidad disponible Cantidad de insumo utilizada < Cantidad disponible

La cantidad de **Lana** utilizada para fabricar acolchados y frazadas para viaje puede ser menor o igual que 20 kg.

La cantidad de **Mano de obra** utilizada para fabricar acolchados y frazadas para viaje puede ser menor o igual que 25 horas.

A partir de la recta correspondiente a cada insumo puede identificarse cuál de los dos casos se presentó. El análisis se hace **por cada insumo** y se debe observar si el **vértice** que representa la solución óptima se encuentra sobre la recta o por debajo de la recta.

Análisis del insumo **"L" Lana**:

En el gráfico 3 puede observarse que el vértice **Q** cuyas coordenadas son **(3,3; 0)** **pertenece a la recta "L"** en consecuencia para fabricar **3,3** acolchados y **0** frazadas para viaje se utilizó el total disponible de **lana** que es de 20 kg. por lo tanto no hay sobrantes de este insumo.

El vértice **Q** pertenece a la recta **"L"** por lo tanto la cantidad utilizada de **lana** es igual que la cantidad disponible, esta relación puede demostrarse reemplazando las coordenadas del vértice **Q** en la ecuación correspondiente al insumo **"L"**

L: $6x_1 + 5x_2 = 20$

L: $6(\mathbf{3{,}3}) + 5(\mathbf{0}) = 20$

$19{,}8 + 0 \approx 20$

$19{,}8 \approx \mathbf{20}$ → Se verifica la igualdad

Interpretación: Para fabricar **3,3** acolchados y **0** frazadas para viaje se utilizó el total disponible de lana que es de 20 kilogramos y en consecuencia no hay sobrantes de lana.

En resumen:

Q pertenece a la recta **"L"** → cantidad de **lana** utilizada = cantidad de **lana** disponible → no hay sobrantes de **lana**

Análisis para el insumo **"M" Mano de obra**:

En el gráfico 3 puede observarse que el vértice **Q** cuyas coordenadas son **(3,3; 0)** se encuentra **por debajo** de la **recta "M",** en consecuencia para fabricar **3,3** acolchados y **0** frazadas para viaje la cantidad de **mano de obra** fue menor que la cantidad disponible que es de 25 horas, por lo tanto hay sobrantes de **mano de obra**.

Para averiguar la cantidad exacta de **mano de obra** empleada, se deben reemplazar las coordenadas del vértice **Q** en la inecuación correspondiente al insumo **"M"**:

M (mano de obra): $4x_1 + 2x_2 < 25$

M: $4x_1 + 2x_2 < 25$

M: $4(\mathbf{3{,}3}) + 2(\mathbf{0}) < 25$

$13,2 + 0 < 25$

$13,2 < 25 \rightarrow$ Se verifica la desigualdad

Interpretación: Para fabricar **3,3** acolchados y **0** frazadas para viaje. Se utilizaron menos de 25 horas de **mano de obra** en consecuencia si hay sobrantes de **mano de obra**. Exactamente se utilizaron 13, 2 horas de **mano de obra**.

Séptimo paso: Identificación de las variables Slacks

Las variables Slacks representan el sobrante de cada tipo de insumo.

Existe una variable Slack por cada tipo de insumo.

En el caso planteado se tienen dos variables Slacks:

x_3: cantidad sobrante de **lana**

x_4: cantidad sobrante de **mano de obra**

Octavo paso: Sistemas de ecuaciones con variables Slacks

Por cada insumo se plantea una ecuación en la cual se representa la siguiente relación:

cantidad de insumo utilizada + cantidad sobrante = cantidad disponible

L (lana): $6x_1 + 5x_2 + x_3 = 20$

M (mano de obra): $4x_1 + 2x_2 + x_4 = 25$

Para determinar la cantidad sobrante de insumo se deben reemplazar las coordenadas del vértice en la correspondiente ecuación y luego debe despejarse la variable Slack.

Se reemplazan las coordenadas del vértice **Q** en cada ecuación:

Insumo **L (lana)**:

cantidad de insumo utilizada + cantidad sobrante = cantidad disponible

$6x_1 + 5x_2$ $+ x_3 = 20$

$6($**3,3**$) + 5($**0**$) + x_3 = 20$

19,8 $+ 0 + x_3 = 20$

19,8 ≈ 20 → cantidad de lana utilizada (se redondea a 20 este valor debido a que el punto **(3,3; 0)** pertenece a la recta.

Se despeja x_3:

$x_3 = 20 -$ **20**

$x_3 = 0$ → No hubo sobrantes de lana

Insumo **M (mano de obra)**:

$4x_1 + 2x_2$ $+ x_4 = 25$

$4($**3,3**$) + 2($**0**$) + x_4 = 25$

$13,2 + 0 + x_4 = 25$

13,2 $+ x_4 = 25$

13,2 → cantidad de mano de obra utilizada

Se despeja x_4:

$x_4 = 25 –$ **13,2**

$x_4 = 11,8$ → Sobraron 11,8 hs. de mano de obra

Noveno paso: Valores de las variables en la solución óptima

$x_1 = 3,3$

$x_2 = 0$

$x_3 = 0$

$x_4 = 11,8$

Décimo paso: Conclusión final

En la conclusión final debe incluirse:

- Máxima ganancia (que obtuvimos en el quinto paso).
- Cantidad que debe fabricarse de cada tipo de producto para obtener la máxima ganancia.
- Cantidad utilizada de cada tipo de insumo.
- Cantidad sobrante de cada tipo de insumo.

Para obtener la máxima ganancia que es de 59,4 deben fabricarse 3,3 acolchados y ninguna manta. Se utilizó el total disponible de lana que es de 20 kilogramos, en consecuencia no hubo sobrantes de este insumo. Se utilizaron 13,2 horas de mano de obra y por lo tanto sobraron 11,8 horas.

Método Gráfico: Caso de minimización

Una fábrica se dedica a la producción de dos tipos de artículos: básico y premium. Durante el proceso de fabricación los artículos pasan por tres líneas de producción: "A", "B" y "C" que tienen una disponibilidad mínima de 260 horas, 380 horas y 400 horas respectivamente. La línea de producción "A" manufactura 2 unidades de artículo básico y 2 unidades de artículo premium. La línea de producción "B" manufactura 4 unidades de artículo básico y 2 unidades de artículo premium. La línea de producción "C" manufactura 2 unidades de artículo básico y 8 unidades de artículo premium. El costo unitario es de $4 para los artículos básicos y de $6 para los artículos premium.

¿Cuántas unidades deben fabricarse de cada artículo para minimizar el costo de producción?

Primer Paso: Identificación de las variables principales

Representan la cantidad de artículos que deben producirse de cada tipo para minimizar el costo.

x_1 = cantidad de artículos básicos que deben producirse

x_2 = cantidad de artículos premium que deben producirse

Segundo Paso: Planteo de la Función Objetivo

Se pretende obtener el valor de las variables que le otorgan a la función el mínimo valor.

$$\min z = \sum c_i x_i$$

c_i: costo unitario por cada tipo de producto

x_i: variables principales

La Función Objetivo contiene un término por cada tipo de producto, por lo tanto tiene dos términos. Se busca determinar cuántos artículos de cada tipo deben fabricarse para minimizar el costo de producción.

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$\min z = 4x_1 + 6x_2$$

El primer término $4x_1$ representa el costo total de producción correspondiente a los artículos básicos.

El segundo término $6x_1$ representa el costo total de producción correspondiente a los artículos premium.

Tercer Paso: Sistema de restricciones:

Por cada insumo se plantea una inecuación que representa la siguiente relación:

cantidad de insumo utilizada ≥ cantidad de insumo requerida

A (línea A): $2x_1 + 2x_2 \geq 260$

B (línea B): $4x_1 + 2x_2 \geq 380$

C (línea C): $2x_1 + 8x_2 \geq 400$

La cantidad de insumo utilizada debe ser mayor o igual que la requerida.

Planteamos el sistema de restricciones el cual contiene una inecuación por cada tipo de insumo.

Cada inecuación está representada gráficamente a través del semiplano que está por encima de la recta.

A continuación se plantea el correspondiente **Sistema de Ecuaciones** en el cual, para cada ecuación se cumple que la cantidad de insumo utilizada es igual a la cantidad de insumo disponible. Es decir que por cada ecuación se verifica la siguiente igualdad:

cantidad de insumo utilizada **=** cantidad de insumo disponible

A (línea A): $2x_1 + 2x_2 = 260$ → Recta **"A"**
B (línea B): $4x_1 + 2x_2 = 380$ → Recta **"B"**
C (línea C): $2x_1 + 8x_2 = 400$ → Recta **"C"**

A partir de la ecuación correspondiente a cada insumo, deben calcularse las coordenadas de los dos puntos necesarios para trazar las rectas **"A"**, **"B"** y **"C"** aplicando el mismo procedimiento utilizado en el caso anterior:

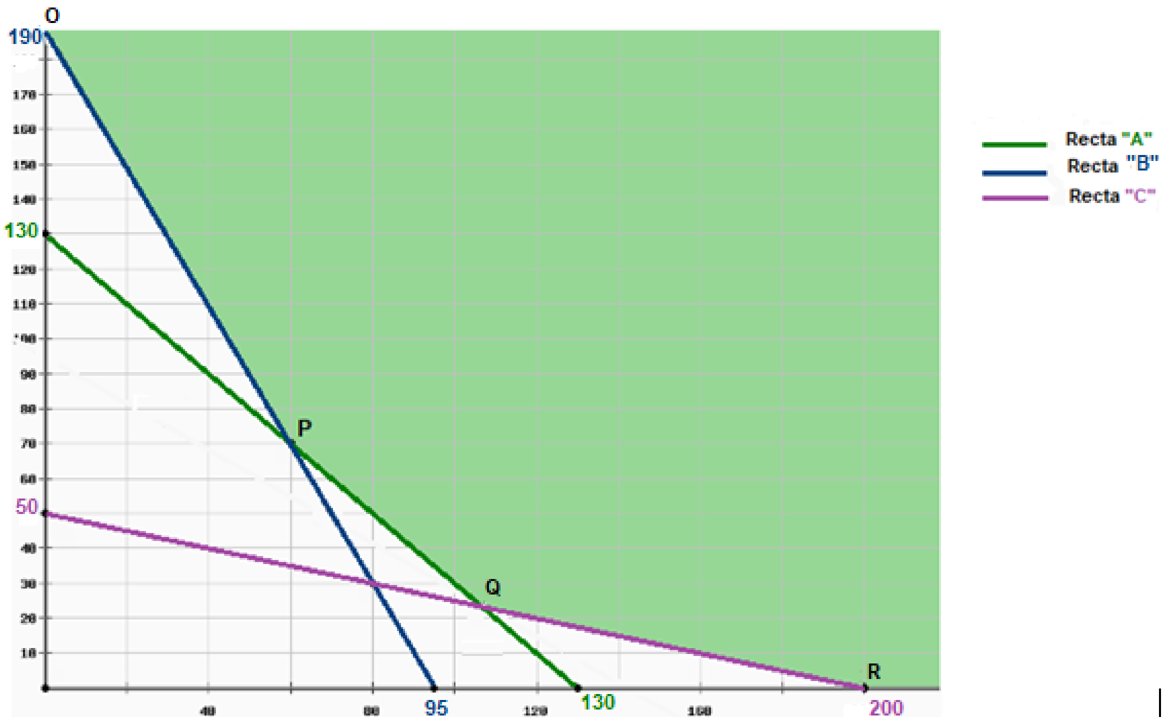
Recta	$(x_1; 0)$	$(0; x_2)$
"A"	**(130; 0)**	**(0; 130)**
"B"	**(95; 0)**	**(0; 190)**
"C"	**(200; 0)**	**(0; 50)**

Para todo punto $(x_1; x_2)$ que se encuentra por encima de la recta se verifica que la cantidad de insumo utilizada es mayor que la cantidad requerida.

Para todo punto (x_1; x_2) que pertenece a la recta se verifica que la cantidad de insumo utilizada es igual que la cantidad requerida.

A continuación deben trazarse las rectas "**A**", "**B**" y "**C**" y posteriormente debe trazarse el semiplano por encima de cada recta.

La superficie de color **verde** es el área en común entre los semiplanos que se encuentran por encima de las tres rectas.



Descripción y coordenadas de los vértices:

Vértice **O**:

Es la intersección entre el eje horizontal y la recta **"B"**, en consecuencia sus coordenadas son (0; **190**)

Vértice **P**:

Es la intersección entre las rectas **"A"** y **"B"**. Para hallar sus coordenadas debe resolverse el sistema de ecuaciones representadas por las rectas **"A"** y **"B"**:

A (línea A): $2x_1 + 2x_2 = 260$

B (línea B): $4x_1 + 2x_2 = 380$

Para resolver el sistema de ecuaciones puede utilizarse cualquier método, por ejemplo Gauss- Jordan, Sustitución, Determinantes, entre otros.

Gráficamente la solución del sistema de ecuaciones es la intersección entre ambas rectas, y en el caso planteado se obtiene el siguiente resultado:

Vértice P → **A** ∩ **B** → **(60; 70)**

Vértice **Q**:

Es la intersección entre las rectas **"A"** y **"C"**. Para hallar sus coordenadas debe resolverse el sistema de ecuaciones representadas por las rectas **"A"** y **"C"**:

A (línea A): $2x_1 + 2x_2 = 260$

C (línea C): $2x_1 + 8x_2 = 400$

Se obtiene el siguiente resultado:

Vértice **Q** → **A** ∩ **C** → **(106,67; 23,33)**

Vértice **R**:

Es la intersección entre el eje vertical y la recta **"C"**, en consecuencia sus coordenadas son (**200**; 0)

Uno de estos cuatro vértices representará gráficamente la solución óptima del problema.

Coordenadas de los vértices:

Vértice	**(x_1; x_2)**
O	**(0; 190)**
P	**(60; 70)**

Q	**(106,67; 23,33)**
R	**(200; 0)**

Identificación de la solución óptima:

Para identificar el vértice que representa a la solución óptima deben reemplazarse las coordenadas de cada vértice en la Función Objetivo: $z = 4x_1 + 6x_2$

Vértice	$(x_1; x_2)$	$Z = 4x_1 + 6x_2$
O	(0; 190)	z = 4*0 + 6*190 = 1140
P	(60; 70)	z = 4*60 + 6*70 = 660
Q	**(106,67; 23,33)**	**z = 4*106,67+ 6*23,33 = 566,67** **Costo Mínimo**

La solución óptima está representada gráficamente por el **vértice** al cual le corresponde el **costo mínimo**.

En el caso planteado la solución óptima corresponde al vértice **Q** y sus coordenadas indican la cantidad que debe fabricarse de cada producto para minimizar el costo:

El vértice **Q** es el punto de coordenadas **(106,67; 23,33)**

$\mathbf{x_1}$ = **106,67** Cantidad de artículos básicos que deben producirse
$\mathbf{x_2}$ = **23,33** Cantidad de artículos premium que deben producirse

Conclusión final:

Para minimizar el costo de producción deben fabricarse 106,67 artículos básicos y 23,33 artículos premium.

Método Simplex

La utilización de este método para resolver un problema de Programación Lineal, implica la utilización de las Operaciones Elementales de filas.

Operación Tipo I: Intercambio de filas.

Ejemplo:

Dada la siguiente matriz:

0	1
1	0

Intercambiamos la fila 1 y fila 2

1	0
0	1

Operación Tipo II: La fila i se multiplica por un número real.

Simbólicamente: Fi → Fi*(número real)

La operación Tipo II se utiliza para transformar en 1 un elemento de la matriz.

Ejemplo:

Dada la siguiente matriz:

2	**-3**	**4**
3	**5**	**-1**

Para transformar en "1" al "2", la fila 1 debe multiplicarse por el <u>inverso</u> de 2 que es 1/2. Simbólicamente: F1 → F1 * 1/2

2(1/2)	**-3(1/2)**	**4(1/2)**
3	**5**	**-1**

Obtenemos la siguiente matriz:

1	**-3/2**	**2**
3	**5**	**-1**

Operación Tipo III: A la fila i se le suma otra fila j previamente multiplicada por un número real.

Simbólicamente: Fi → Fi + Fj*(número real)

La operación Tipo III se utiliza para transformar en 0 un elemento de la matriz.

Ejemplo:
En la siguiente matriz:

1	-3/2	2
3	5	-1

Para transformar en 0 al 3 debe aplicarse la siguiente operación:
A la fila 2 se le suma el producto entre la fila 1 y el opuesto de 3 que es -3.

Simbólicamente: F2 → F2 + F1 * (-3)

1	-3/2	2
0	**5 + (-3/2) *(-3)**	**-1 + 2*(-3)**
1	-3/2	2
0	**19/2**	**-7**

Las operaciones elementales de filas se aplican sobre toda la fila y no solo sobre el elemento que debe transformarse.

A continuación, a partir del primer problema que ya fue resuelto a través del Método Gráfico se describirán los pasos que comprende el Método Simplex, de esta manera será posible comprobar que a través de uno u otro método obtenemos el mismo resultado.

Una fábrica se dedica a la producción de dos tipos de productos: acolchados y frazadas para viaje. Para fabricar un acolchado son necesarios 6 kilogramos de lana y 4 horas de mano de obra. Para fabricar una frazada son necesarios 5 kilogramos de lana y 2 horas de mano de obra. Se dispone de 20 kilogramos de lana y 25 horas de mano de obra. Por cada acolchado se obtiene una ganancia de $18 y por cada frazada se obtiene una ganancia de $10.

¿Cuántas acolchados y cuántas frazadas para viaje deben fabricarse a los fines de obtener la máxima ganancia?

¿Cuál es la máxima ganancia?

Realizar un análisis de los insumos empleados en la fabricación de los productos.

Realizar un análisis de los insumos sobrantes.

Pasos del Método Simplex:

Primer Paso:

Identificación de las variables principales: Representan la cantidad que debe fabricarse de cada producto

x_1 = cantidad a fabricar de acolchados

x_2 = cantidad a fabricar de frazadas para viaje

Segundo Paso: Planteo de la Función Objetivo

Se pretende obtener el valor de las variables que le otorgan a la función el máximo valor.

$$\max z = \sum c_i x_i$$

c_i: ganancia unitaria por cada tipo de producto

x_i: variables principales

La Función Objetivo contiene un término por cada tipo de producto y representa la ganancia total.

En el caso planteado se fabrican dos tipos de productos, por lo tanto la función objetivo tiene dos términos:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$z = 18x_1 + 10x_2$$

El primer término $18x_1$ representa la ganancia total que se obtiene fabricando acolchados.

El segundo término $10x_1$ representa la ganancia total que se obtiene fabricando frazadas para viaje.

Tercer Paso:

Sistema de restricciones: Planteamos el sistema de restricciones el cual comprende una inecuación por cada tipo de insumo empleado

Cantidad utilizada ≤ cantidad disponible

Por cada insumo se plantea una inecuación que representa la siguiente relación:

cantidad de insumo utilizada **≤** cantidad de insumo disponible

L (lana): $6x_1 + 5x_2 \leq 20$

M (mano de obra): $4x_1 + 2x_2 \leq 25$

Cuarto Paso:

Se identifican las variables slacks:

x_3: cantidad sobrante de lana

x_4: cantidad sobrante de mano de obra

Quinto Paso:

Se plantea el sistema de ecuaciones con el agregado de las variables slacks:

Cantidad utilizada + cantidad sobrante = cantidad disponible

$6x_1 + 5x_2 + x_3 = 20$

$4x_1 + 2x_2 + x_4 = 25$

Sexto Paso:

Se determina la cantidad de variables.

Cantidad total de variables (**n**)

En caso planteado existe un total de cuatro variables **n= 4** (2 variables principales + 2 variables slacks)

En cada iteración se tienen **m** variables no nulas o también llamadas variables básicas. La cantidad de variables básicas coincide con la cantidad de tipos de insumos.

En caso planteado se utilizan dos tipos de insumos, por lo tanto en cada iteración se tienen dos variables básicas: **m= 2**

De un total de n variables, m son variables básicas. Las restantes

(n – m) variables son variables no básicas o nulas: **n – m = 4 – 2**

n – m = 2

Séptimo Paso: Iteraciones del Método Simplex

Cada iteración se plantea en un cuadro que tiene la siguiente estructura:

c_j			$c_1 =$	$c_2 =$	$c_3 =$	$c_4 =$	
c_i	x_i	λ_i	x_1	x_2	x_3	x_4	λ_i / λ_{ij}
	x_3	$\lambda_3 =$	$\lambda_{31} =$	$\lambda_{32} =$	$\lambda_{33} =$	$\lambda_{34} =$	
	x_4	$\lambda_4 =$	$\lambda_{41} =$	$\lambda_{42} =$	$\lambda_{43} =$	$\lambda_{44} =$	
	z_j	$z_0 =$	$z_1 =$	$z_2 =$	$z_3 =$	$z_4 =$	
$c_j - z_j$			$c_1 - z_1 =$	$c_2 - z_2 =$	$c_3 - z_3 =$	$c_4 - z_4 =$	

Se plantea la **Primera Iteración** del Método Simplex partiendo de lo que en términos de la solución gráfica sería el vértice O que es el origen del sistema, es decir el punto (0; 0). Se elige este vértice porque en este punto podemos obtener fácilmente el valor de cada variable.

$x_1 = 0$ $x_2 = 0$ Al reemplazarse estos valores en el sistema de ecuaciones planteado en el Paso 5, los dos primeros términos se anulan, por lo tanto $x_3 = 20$ y $x_4 = 25$

En la **Primera Iteración** x_1 y x_2 son las variables no básicas o nulas, en tanto que x_3 y x_4 son las variables básicas o no nulas.

Cada iteración quedará representada en un cuadro.

A continuación se describe la simbología utilizada en dicho cuadro:

Primera fila: **cj**: Coeficientes de los términos pertenecientes a la función objetivo planteada en el Paso 2

Primera columna: c_i: Coeficientes de los términos correspondientes a variables básicas en la función objetivo. Estos coeficientes provienen de la fila **cj**

Segunda columna: **xi**: Variables básicas o variables no nulas. Siempre asumen valores positivos, por lo tanto en esta columna no es posible tener valores negativos o nulos.

Tercera columna: $\boldsymbol{\lambda_i}$: Valores de las variables básicas.

A continuación se agrega una columna por cada variable desde x_1 hasta x_n.

Última columna: $\boldsymbol{\lambda_i / \lambda_{ij}}$: Estos cocientes son calculados por cada variable básica.

A partir de la tercera fila se agrega una fila por cada variable básica

Celdas $\boldsymbol{\lambda}$**ij:**

Son los coeficientes de los términos pertenecientes al sistema de ecuaciones planteado en el Paso 4, a partir de los cuales queda constituida la siguiente matriz:

$\lambda_{31} = 6$	$\lambda_{32} = 5$	$\lambda_{33} = 1$	$\lambda_{34} = 0$
$\lambda_4 = 4$	$\lambda_{41} = 2$	$\lambda_{42} = 0$	$\lambda_4 = 1$

Coeficientes $\boldsymbol{\lambda}$**ij**

El subíndice **ij** indica la ubicación del coeficiente

i: Es el subíndice de la variable a la cual pertenece la fila

j: Es el subíndice de la variable a la cual pertenece la columna

Ejemplos:

λ_{31}: Es el coeficiente que se ubica en la fila de la variable x_3 y la columna de la variable x_1

λ_{43}: Es el coeficiente que se ubica en la fila de la variable x_4 y la columna de la variable x_3

Penúltima fila: zj

z_0: $\sum c_i * \lambda_i = \mathbf{0*20} + \mathbf{0*25}$

$= 0$

z_1: $\sum c_i * \lambda_{i1} = \mathbf{0}*6 + \mathbf{0}*4$

$= 0$

z_2: $\sum c_i * \lambda_{i2} = \mathbf{0}*5 + \mathbf{0}*2$

$= 0$

z_3: $\sum c_i * \lambda_{i3} = \mathbf{0}*1 + \mathbf{0}*0$

$= 0$

z_4: $\sum c_i * \lambda_{i4} = \mathbf{0}*0 + \mathbf{0}*1$

$= 0$

cj: coeficientes en cada término de la función objetivo. Permanecen constantes durante todo el proceso, en todas las iteraciones.			**$c_1 = 18$**	**$c_2 = 10$**	**$c_3 = 0$**	**$c_4 = 0$**	**λ_i / λ_{ij}**
c_i **coeficientes de los términos correspondientes**	**xi** **variables**	**λ_i** **valores de las variables**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**λ_i: básicas coeficientes ubicados en la columna**

a variables básicas en la función objetivo. Provienen de la primera fila.	**básicas o no nulas**	**básicas**					**con la mayor diferencia** **$c_j - z_j$**
$c_3 = 0$	x_3	$\lambda_3 = 20$	$\lambda_{31} = 6$	$\lambda_{32} = 5$	$\lambda_{33} = 1$	$\lambda_{34} = 0$	
$c_4 = 0$	x_4	$\lambda_4 = 25$	$\lambda_{41} = 4$	$\lambda_{42} = 2$	$\lambda_{43} = 0$	$\lambda_{44} = 1$	
$Z_j = \sum c_i * \lambda_{ij}$		$z_0 = \sum c_i * \lambda_i$	$z_1 = \sum c_i * \lambda_{i1}$	$z_2 = \sum c_i * \lambda_{i2}$	$z_3 = \sum c_i * \lambda_{i3}$	$z_4 = \sum c_i * \lambda_{i4}$	
$c_j - z_j$			$c_1 - z_1 =$	$c_2 - z_2 =$	$c_3 - z_3 =$	$c_4 - z_4 =$	

En cada iteración las columnas de las variables básicas (que en esta primera iteración son x_3 y x_4 deben formar una **Submatriz Identidad**:

x_3	x_4
$\lambda_{33} = 1$	$\lambda_{34} = 0$
$\lambda_{43} = 0$	$\lambda_{44} = 1$

Submatriz Identidad

c j			$c_1 = 18$	$c_2 = 10$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	
C i	X_i	λ i	X_1	X_2	X_3	X_4	λ i / λ i j
0	X_3	$\lambda_3 = 20$	$\lambda_{31} = 6$	$\lambda_{32} = 5$	$\lambda_{33} = 1$	$\lambda_{34} = 0$	20/6 = 3,33 menor cociente
0	X_4	$\lambda_4 = 25$	$\lambda_{41} = 4$	$\lambda_{42} = 2$	$\lambda_{43} = 0$	$\lambda_{44} = 1$	25/4 = 6,25
Z j		$Z_0 =$ 0*7 + 0*12= 0	$Z_1 =$ 0*3 + 0*4= 0	$Z_2 =$ 0*2 + 0*3= 0	$Z_3 =$ 0*1 + 0*0= 0	$Z_4 =$ 0*0 + 0*1= 0	
C j – Z j			$C_1 - Z_1 =$ 18 – 0 = 18 mayor diferencia	$C_2 - Z_2 =$ 10 – 0 = 10	$C_3 - Z_3 = 0$	$C_4 – Z_4 = 0$	

Hay diferencias $c_j – z_j$ positivas por lo tanto la primera iteración no corresponde a la solución óptima, en consecuencia se debe pasar a la segunda iteración.

Al pasar de una iteración a la siguiente, una variable no básica se transformará en básica o no nula. A su vez una variable básica se transforma en no básica o nula.

Por lo tanto, al pasar a la siguiente iteración se produce un intercambio entre un par de variables.

Las diferencias ($c_j – z_j$) también indican cuál variable no básica se transformará en básica.

Luego deben calcularse los cocientes λ_i / λ_{ij} los cuales indicarán cuál variable básica se transformará en no básica.

En los cocientes λ_i / λ_{ij} los denominadores λ_{ij} son los coeficientes de la columna a la cual le corresponde la **mayor diferencia** (en este caso los denominadores son 3 y 4):

Se transforma en básica (o no nula) aquella variable a la cual le corresponde la **mayor diferencia** en este caso es la variable x_1.

Se transforma en no básica (o nula) aquella variable a la cual le corresponde el **menor cociente**, en este caso es la variable x_3.

Iteración	Variables no básicas (Variables nulas)	Variables básicas (Variables no nulas)
1°	x_1 x_2	x_3 x_4
2°	menor cociente x_3 x_2	mayor diferencia x_1 x_4

Primera Iteración:

c_j			$c_1 = 18$	$c_2 = 10$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	
c_i	x_i variables básicas	λ_i	x_1	x_2	x_3	x_4	λ_i / λ_{ij}
0	x_3	$\lambda_3 = 20$	$\boxed{\lambda_{31} = 6}$	$\lambda_{32} = 5$	$\lambda_{33} = 1$	$\lambda_{34} = 0$	$20/6 = 3,33$ **menor cociente**
0	x_4	$\lambda_4 = 25$	$\lambda_{41} = 4$	$\lambda_{42} = 2$	$\lambda_{43} = 0$	$\lambda_{44} = 1$	$25/4 = 6,25$
z_j		$z_0 = 0$	$z_1 = 0$	$z_2 = 0$	$z_3 = 0$	$z_4 = 0$	
$c_j - z_j$			$c_1 - z_1 = 3 - 0 = 3$ **mayor diferencia**	$c_2 - z_2 = 1 - 0 = 1$	$c_3 - z_3 = 0$	$c_4 - z_4 = 0$	

Debe recordarse que las columnas de las variables básicas deben formar parte de la matriz identidad.

En la siguiente iteración **x_1 pasará a ser básica en reemplazo de x_3**, en consecuencia x_1 deberá formar parte de la matriz identidad, para ello debe realizarse la siguiente transformación:

x_1		x_3
$\boxed{\lambda_{31} = 6}$	en la siguiente iteración el 6 debe transformarse en "1" →	$\lambda_{33} = 1$
$\lambda_{41} = 4$	y el 4 debe transformarse en "0" →	$\lambda_{43} = 0$

El elemento que debe transformarse en "1" se denomina **elemento pivote.**

$\lambda_{31} = 6$ ⇨ elemento pivote

El **elemento pivote** siempre se ubica en la columna con la mayor **mayor diferencia** y la fila con el **menor cociente**.

En la siguiente iteración siempre el **elemento pivote** debe transformarse en "1", mientras que los restantes elementos de la columna deben transformarse en "0". Para realizar estas transformaciones deben utilizarse las operaciones elementales de filas. Para transformar en "1" al **elemento pivote** la fila de dicho elemento debe multiplicarse por su inverso.

A continuación y a los fines de plantear de manera más ordenada las operaciones, es conveniente agregar una **matriz auxiliar** a modo de transición entre una iteración y la siguiente.

Matriz auxiliar:

En la columna xi se incluyen las variables básicas de la segunda iteración:

Tal como ya se indicó anteriormente, x_1 pasa a ser variable básica en reemplazo de x_3. La variable x_4 continúa siendo una variable básica.

En la matriz auxiliar solo se modificará la fila del elemento que debe transformarse en "1" (que en este caso es la fila de x_1), la otra fila que en este caso es la fila de x_4 queda sin cambios:

x_i variables básicas en la **segunda** iteración	λ_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$\lambda_1 =$	$\boldsymbol{\lambda_{11} =}$	$\lambda_{12} =$	$\lambda_{13} =$	$\lambda_{14} =$
x_4	$\lambda_4 = 12$	$\lambda_{41} = 4$	$\lambda_{42} = 2$	$\lambda_{43} = 0$	$\lambda_{44} = 1$

Se vuelve al cuadro correspondiente a la **primera** iteración:

c j			$c_1 = 18$	$c_2 = 10$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	
c i	x_i variables básicas	λ_i	x_1	x_2	x_3	x_4	λ_i / λ_{ij}
$c_3 = 0$	x_3	$\lambda_3 = 20$	$\lambda_{31} = 6$	$\lambda_{32} = 5$	$\lambda_{33} = 1$	$\lambda_{34} = 0$	20/6 = 3,33 **menor cociente**
$c_4 = 0$	x_4	$\lambda_4 = 25$	$\lambda_{41} = 4$	$\lambda_{42} = 2$	$\lambda_{43} = 0$	$\lambda_{44} = 1$	25/4 = 6,25
	z_j	$z_0 = 0$	$z_1 = 0$	$z_2 = 0$	$z_3 = 0$	$z_4 = 0$	
$c_j - z_j$			$c_1 - z_1 =$ $3 - 0 = 3$ **mayor diferencia**	$c_2 - z_2 =$ $1 - 0 = 1$	$c_3 - z_3 = 0$	$c_4 - z_4 = 0$	

Para transformar en "1" al **elemento pivote** que es $\lambda_{31} = 6$ la fila de dicho elemento (que en este caso es la fila de x_3) debe multiplicarse por el número inverso que es 1/6.

Simbólicamente: $e_3(1/6)$ La fila de la variable x_3 debe multiplicarse por 1/6

Matriz Auxiliar:

En la columna xi deben ubicarse las variables básicas correspondientes a la segunda iteración:

x_i	λ_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$\lambda_1 = 20*1/6 = 3,3$	**$\lambda_{11} = 6*1/6 = 1$**	$\lambda_{12} = 5*1/6 = 5/6$	$\lambda_{13} = 1*1/6 = 1/6$	$\lambda_{14} = 0*1/6 = 0$
x_4	$\lambda_4 = 25$	**$\lambda_{41} = 4$**	$\lambda_{42} = 2$	$\lambda_{43} = 0$	$\lambda_{44} = 1$

Se transformó en "1" al **elemento pivote**

Debe **transformarse en "0" al otro elemento de la columna en la cual se encuentra el elemento pivote, que es $\lambda_{41} = 4$**; para ello a la fila del elemento **λ_{41}** (que en este caso es la fila de x_4), debe sumarse la fila del elemento pivote (que en este caso es la fila de x_1) previamente multiplicada por el número opuesto que es -4.

Puede expresarse simbólicamente la operación de la siguiente manera: $e_{41}(-4)$

Se lee: A la fila de x_4 se le suma la fila de x_1 previamente multiplicada por -4

(fila de x_4) + (fila de x_1) *(-4)

$\lambda_4 = 25 + 3,3 *(-4)$
$= 11,8$

$\lambda_{41} = 4 + 1*(-4)$
$= 0$

$\lambda_{42} = 2 + (5/6) *(-4)$
$= -1,33$

$\lambda_{43} = 0 + (1/6) *(-4)$
$= -0,67$

$\lambda_{44} = 1 + 0 *(-4)$
$= 1$

Importante:

Debe aplicarse correctamente el criterio de redondeo en las cifras decimales.

Los resultados deberán expresarse con dos cifras decimales.

Debe efectuarse el redondeo simétrico, es decir que, si el tercer decimal es mayor o igual que 5 entonces el redondeo se efectúa hacia arriba.

Ejemplos:

0,66667 ≈ 0,67

0,3333 ≈ 0,33

Octavo Paso: Segunda iteración

En este cuadro, la fila de x_4 surge de aplicar la operación que permitió transformar **"4"** en **"0"**

c j			$c_1 = 18$	$c_2 = 10$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$
c i	x_i	λ_i	x_1	x_2	x_3	x_4
$c_1 = 18$	x_1	$\lambda_1 = 3{,}3$	$\boldsymbol{\lambda_{11} = 1}$	$\lambda_{12} = 5/6$	$\lambda_{13} = 1/6$	$\lambda_{14} = 0$
$c_4 = 0$	x_4	$\lambda_4 = 11{,}8$	$\lambda_{41} = \mathbf{0}$	$\lambda_{42} = -1{,}33$	$\lambda_{43} = -0{,}67$	$\lambda_{44} = 1$
z j		$z_0 =$ **59,4**	$z_1 = 18$	$z_2 = 15$	$z_3 = 3$	$z_4 = 0$
$c_j - z_j$: Diferencia entre los c j de la primera fila y los z j de la penúltima fila			$c_1 - z_1 =$ $= 18 - 18$ $= 0$	$c_2 - z_2 =$ $= 10 - 15$ $= -5$	$c_3 - z_3 =$ $= 0 - 6$ $= -6$	$c_4 - z_4 = 0$

Se obtienen los valores z j que están ubicados en la penúltima fila:

$z_0 = \sum c_i * \lambda_i$

$z_0 = 18 * 3{,}3 + 0 * (11{,}8)$

$z_0 = \mathbf{59{,}4}$

$z_1 = \sum c_i * \lambda_{i1}$

$z_1 = 18 * 1 + 0 * 0$

$= \mathbf{18}$

$z_2 = \sum c_i * \lambda_{i2}$

$z_2 = 18 * (5/6) + 0 * (-1{,}33)$

$= \mathbf{15}$

$z_3 = \sum c_i * \lambda_{i3}$

$z_3 = 18 * (1/6) + 0 * (-0{,}67)$

$= \mathbf{3}$

$z_4 = \sum c_i * \lambda_{i4}$

$z_4 = 18 * 0 + 0 * 1$

$= \mathbf{0}$

Se obtienen las diferencias cj – zj y se ubican los resultados en la última fila. Se observa que ninguna diferencia es positiva, por lo tanto la segunda iteración corresponde a la solución óptima.

Noveno Paso: Se indica el valor de cada variable en la solución óptima.

Las variables que no están incluidas en la columna xi del cuadro (segunda columna) son las variables nulas o no básicas.

La columna xi sólo contiene las variables básicas o no nulas

$x_1 = 3{,}3$ Deben fabricarse 3,3 acolchados

$x_2 = 0$ No deben fabricarse frazadas

$x_3 = 0$ No hay sobrantes de lana

$x_4 = 11{,}8$ Sobraron 11,8 horas de mano de obra

Décimo Paso: Se obtiene la cantidad utilizada de cada tipo de insumo

Se reemplazan los valores de las variables principales (x_1 y x_2) en la ecuación correspondiente a cada insumo.

La cantidad de insumo utilizada se obtiene sumando los términos que contienen las variables x_1 y x_2.

Insumo **L (lana)**:

cantidad de insumo utilizada + cantidad sobrante = cantidad disponible

$6x_1 + 5x_2 + x_3 = 20$

$6(3,3) + 5(0) + x_3 = 20$

$19,8 + 0 + x_3 = 20$

$19,8 \approx 20 \rightarrow$ cantidad de lana utilizada

$x_3 = 0 \rightarrow$ No hubo sobrantes de lana

Insumo **M (mano de obra)**:

$4x_1 + 2x_2 + x_4 = 25$

$4(3,3) + 2(0) + x_4 = 25$

$13,2 + 0 + x_4 = 25$

$13,2 + x_4 = 25$

$x_4 = 25 - 13,2$

$x_4 = 11,8$

$13,2 \rightarrow$ cantidad de mano de obra utilizada

Undécimo Paso: Calculamos la máxima ganancia

Para ello reemplazamos los valores de x_1 y x_2 en la función objetivo:

$z = 18x_1 + 10x_2$

$z = 18*3,3 + 10*0 =$ **59,4 Máxima Ganancia**

Duodécimo Paso: Confección del informe

Para obtener la máxima ganancia que es de 59,4 deben fabricarse 3,3 acolchados y ninguna frazada para viaje. Se utilizó el total disponible de lana que es 20 kilogramos, en consecuencia no hubo sobrantes de este insumo. Se utilizaron 13,2 horas de mano de obra y por lo tanto sobraron 11,8 horas.

Pudo comprobarse que ambos métodos, el Método Gráfico y el Método Simplex nos permiten llegar a la misma solución.

Para resolver:

La empresa Decorart se dedica la fabricación de alfombras y cortinas artesanales. Para producir una alfombra son necesarios 1 metro de tela y 16 horas de bordado, mientras que para producir una cortina son necesarios 2 metros de tela y 16 horas de bordado. Se dispone de 20 metros de tela y 240 horas de bordado. Por cada alfombra se obtiene una ganancia de $8 y por cada cortina se obtiene una ganancia de $10.

Aplicar el Método Simplex para luego redactar un informe que incluya los siguientes puntos:

a) Cantidad que debe fabricarse de cada tipo de producto para obtener la máxima ganancia. Respuesta: (10; 5)
b) Cantidad sobrante de cada tipo de insumo.
c) Máxima ganancia. Respuesta: 130

Análisis de Sensibilidad

Permite identificar los cambios que la modificación de los insumos utilizados producen en el valor de la Función Objetivo, asimismo permite obtener la variación en la ganancia obtenida por cada unidad de insumo que se incrementa.

Posteriormente pueden efectuarse comparaciones con respecto a la influencia de distintos insumos, para determinar a cuál de ellos tiene mayor impacto sobre la ganancia, de este modo será posible tomar la decisión más conveniente.

Para realizar el Análisis de Sensibilidad se utilizará la Programación Lineal.

Ejemplo:

Un taller produce jarrones y macetas artesanales. Para fabricar un jarrón son necesarias 3 horas de torneado y 4 horas de pulido, en tanto que para fabricar una maceta son necesarios 2 horas de torneado y 3 horas de pulido. Se dispone diariamente de 7 horas de torneado y 12 horas de pulido. Por cada jarrón se obtiene un beneficio de 3 u$s y por cada cada maceta se obtiene un beneficio de 1 u$s.

a) ¿Cuántos jarrones y cuántas macetas deben producirse diariamente para obtener la máxima ganancia?
b) Si la disponibilidad de mano de obra se incrementara en 4 horas, indicar a cuál producto resulta conveniente asignarlas.

   b.1.Realizar el Análisis de Sensibilidad por medio de la Programación Lineal.

   b.2 Realizar el Análisis de Sensibilidad a través de las fórmulas específicas.

c) Determinar de qué manera se vería afectada la ganancia diaria con relación a cada tipo de insumo.
d) Indicar cuál es la decisión más conveniente.

Datos:

	Tipo de producto		**Disponibilidad diaria**
Insumos utilizados	**Jarrones**	**Macetas**	
Torneado (hs.)	**3**	**2**	**7**
Pulido (hs.)	**4**	**3**	**12**
Ganancia unitaria	**3**	**1**	

Desarrollo:

a) Cuántos jarrones y cuántas macetas deben producirse diariamente para obtener la máxima ganancia?

Debemos resolver el problema de Programación Lineal, para ello aplicaremos el método simplex.

Paso 1) **Identificamos las variables principales**

Existe una variable principal por cada tipo de producto:

x_1= cantidad de jarrones que deben producirse

x_2= cantidad de macetas que deben producirse

Paso 2) Identificamos la función objetivo:

$z= 3x_1 + x_2$ Debemos maximizar esta función.

Paso 3) **Planteamos el sistema de restricciones el cual comprende una inecuación por cada tipo de insumo empleado**

Cantidad utilizada ≤ cantidad disponible

$3x_1 + 2x_2 \leq 7$

$4x_1 + 3x_2 \leq 12$

Paso 4) Identificamos las variables slacks:

$x_{3:}$ tiempo sobrante de torneado

$x_{4:}$ tiempo sobrante de pulido

Paso 5) **Planteamos el sistema de ecuaciones con el agregado de las variables slacks**

Cantidad utilizada + cantidad sobrante = cantidad disponible

$3x_1 + 2x_2 + x_3= 7$

$4x_1 + 3x_2 + x_4 = 12$

Paso 6) **Determinamos la cantidad de variables**

Cantidad total de variables (**n**)

En caso planteado tenemos un total de cuatro variables **n= 4**

En cada iteración existen **m** variables no nulas o también llamadas variables básicas. La cantidad de variables básicas coincide con la cantidad de tipos de insumos.

En caso planteado se utilizan dos tipos de insumos por lo tanto en cada iteración existirán dos variables básicas: **m= 2**

De un total de n variables, m son variables básicas. Las restantes
(n – m) variables son variables no básicas o nulas: **n – m = 4 – 2**
n – m = 2

Paso 7) **Iteraciones del Método Simplex**

Planteamos cada iteración en un cuadro con la siguiente estructura:

c_j			$c_1 =$	$c_2 =$	$c_3 =$	$c_4 =$	
c_i	x_i	λ_i	x_1	x_2	x_3	x_4	λ_i / λ_{ij}
		$\lambda_3 =$	$\lambda_{31} =$	$\lambda_{32} =$	$\lambda_{33} =$	$\lambda_{34} =$	
		$\lambda_4 =$	$\lambda_{41} =$	$\lambda_{42} =$	$\lambda_{43} =$	$\lambda_{44} =$	
	Z_j	$z_0 =$	$z_1 =$	$z_2 =$	$z_3 =$	$z_4 =$	
$c_j - z_j$			$c_1 - z_1 =$	$c_2 - z_2 =$	$c_3 - z_3 =$	$c_4 - z_4 =$	

Se plantea la **Primera Iteración** del Método Simplex partiendo de lo que en términos de la solución gráfica sería el vértice O que es el origen del sistema, es decir el punto (0; 0). Se elige este vértice porque en este punto podemos obtener fácilmente el valor de cada variable.

$x_1 = 0$ $x_2 = 0$ Al reemplazarse estos valores en el sistema de ecuaciones del Paso 5, los dos primeros términos se anulan por lo tanto $x_3 = 7$ y $x_4 = 12$

En la **Primera Iteración** x_1 y x_2 son las variables no básicas o nulas, en tanto que x_3 y x_4 son las variables básicas o no nulas.

Cada iteración quedará representada en un cuadro.

A continuación se describe la simbología utilizada en dicho cuadro:

Primera fila: **cj**: Contiene los coeficientes de los términos pertenecientes a la función objetivo planteada en el Paso 2

Primera columna: c_i: Contiene los coeficientes de los términos correspondientes a variables básicas en la función objetivo. Estos coeficientes provienen de la fila **cj**

Segunda columna: **xi**: Variables básicas o variables no nulas. Siempre asumen valores positivos, por lo tanto en esta columna no es posible tener valores negativos o nulos.

Tercera columna: λ_i: Valores de las variables básicas.

A continuación se agrega una columna por cada variable desde x_1 hasta x_n.

Última columna: λ_i **/** λ_{ij}: Deben calcularse estos cocientes por cada variable básica.

A partir de la tercera fila se agrega una fila por cada variable básica

Celdas **λij:**

Son los coeficientes de los términos pertenecientes al sistema de ecuaciones planteado en el Paso 5, a partir de los cuales queda constituida la siguiente matriz:

λ_{31}= 3	λ_{32}= 2	λ_{33}= 1	λ_{34} = 0
λ_{4} = 4	λ_{41} = 3	λ_{42} = 0	λ_{4} = 1

↓

Coeficientes **λ i j**

El subíndice **i j** indica la ubicación del coeficiente

i: Es el subíndice de la variable a la cual pertenece la fila

j: Es el subíndice de la variable a la cual pertenece la columna

Ejemplos:

λ_{31}: Es el coeficiente que se ubica en la fila de la variable x_3 y la columna de la variable x_1

λ_{43}: Es el coeficiente que se ubica en la fila de la variable x_4 y la columna de la variable x_3

Penúltima fila: zj

z_0: $\sum c_i * \lambda_i$ = **0***7 + **0***12

= 0

z_1: $\sum c_i * \lambda_{i\,1}$ = **0***3 + **0***4

= 0

z_2: $\sum c_i * \lambda_{i\,2}$ = **0***2 + **0***3

= 0

z_3: $\sum c_i * \lambda_{i\,3}$= **0***1 + **0***0

= 0

z_4: $\sum c_i * \lambda_{i\,4}$ = **0***7 + **0***1

= 0

c_j: coeficientes en cada término de la función objetivo			$c_1 = 3$	$c_2 = 1$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	λ_i / λ_{ij}
C_i coeficientes de los términos correspondientes a variables básicas en la función objetivo.	x_i variables básicas o no nulas	λ_i valores de las variables básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	λ_i: valores de las variables básicas λ_{ij}: coeficientes ubicados en la columna con la mayor diferencia $c_j - z_j$
$c_3 = 0$	x_3	$\lambda_3 = 7$	$\lambda_{31} = 3$	$\lambda_{32} = 2$	$\lambda_{33} = 1$	$\lambda_{34} = 0$	
$c_4 = 0$	x_4	$\lambda_4 = 12$	$\lambda_{41} = 4$	$\lambda_{42} = 3$	$\lambda_{43} = 0$	$\lambda_{44} = 1$	
$Z_j = \sum C_i * \lambda_{ij}$		$Z_0 = \sum c_i * \lambda_i$	$Z_1 = \sum c_i * \lambda_{i1}$	$Z_2 = \sum c_i * \lambda_{i2}$	$Z_3 = \sum c_i * \lambda_{i3}$	$Z_4 = \sum c_i * \lambda_{i4}$	
$C_j - Z_j$			$C_1 - Z_1 =$	$C_2 - Z_2 =$	$C_3 - Z_3 =$	$C_4 - Z_4 =$	

En cada iteración las columnas de las variables básicas (que en esta primera iteración son x_3 y x_4) deben formar una **Submatriz Identidad**:

x_3	x_4
$\lambda_{33} = 1$	$\lambda_{34} = 0$
$\lambda_{43} = 0$	$\lambda_{44} = 1$

Submatriz Identidad

c j			$c_1 = 3$	$c_2 = 1$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	
C i	x_i	λ i	x_1	x_2	x_3	x_4	λ i / λ i j
0	x_3	$\lambda_3 = 7$	$\lambda_{31} = 3$	$\lambda_{32} = 2$	$\lambda_{33} = 1$	$\lambda_{34} = 0$	7/3 = 2,33 **menor cociente**
0	x_4	$\lambda_4 = 12$	$\lambda_{41} = 4$	$\lambda_{42} = 3$	$\lambda_{43} = 0$	$\lambda_{44} = 1$	12/4 = 3
Z j		$Z_0 =$ 0*7 + 0*12= 0	$Z_1 =$ 0*3 + 0*4= 0	$Z_2 =$ 0*2 + 0*3= 0	$Z_3 =$ 0*1 + 0*0= 0	$Z_4 =$ 0*0 + 0*1= 0	
C j – Z j			$C_1 - Z_1 =$ 3 – 0 = 3 **mayor diferencia**	$C_2 - Z_2 =$ 1 – 0 = 1	$C_3 - Z_3 = 0$	$C_4 - Z_4 = 0$	

Hay diferencias $c_j - z_j$ positivas por lo tanto la primera iteración no corresponde a la solución óptima, en consecuencia se debe pasar a la segunda iteración.

Al pasar de una iteración a la siguiente, una variable no básica se transformará en básica o no nula. A su vez una variable básica se transforma en no básica o nula.

Por lo tanto, al pasar a la siguiente iteración se produce un intercambio entre un par de variables.

Las diferencias ($c_j - z_j$) también indican cuál variable no básica, se transformará en básica.

Luego deben obtenerse los cocientes λ_i / λ_{ij} los cuales indicarán cuál variable básica se transformará en no básica.

En los cocientes λ_i / λ_{ij} los denominadores λ_{ij} son los coeficientes de la columna a la cual le corresponde la **mayor diferencia** (en este caso los denominadores son 3 y 4):

Se transforma en básica (o no nula) aquella variable a la cual le corresponde la **mayor diferencia**, en este caso es la variable x_1.

Se transforma en no básica (o nula) aquella variable a la cual le corresponde el **menor cociente**, en este caso es la variable x_3.

Iteración	Variables no básicas (Variables nulas)	Variables básicas (Variables no nulas)
1°	x_1 x_2	x_3 x_4
2°	menor cociente x_3 x_2	mayor diferencia x_1 x_4

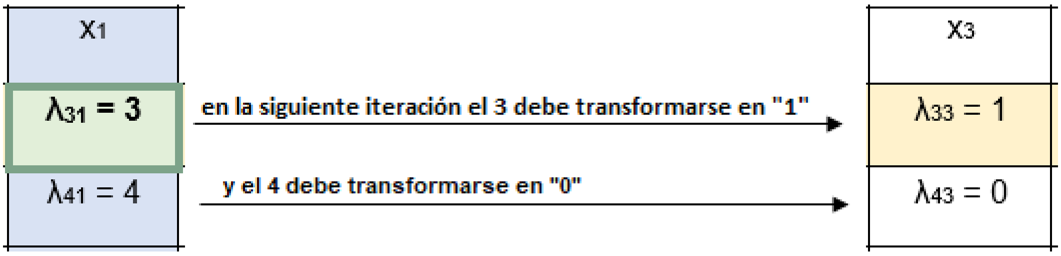
Primera Iteración:

c j			$c_1 = 3$	$c_2 = 1$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	
c_i	x_i variables básicas	λ_i	x_1	x_2	x_3	x_4	λ_i / λ_{ij}
0	x_3	$\lambda_3 = 7$	$\boxed{\lambda_{31} = 3}$	$\lambda_{32} = 2$	$\lambda_{33} = 1$	$\lambda_{34} = 0$	$7/3 = 2{,}33$ **menor cociente**
0	x_4	$\lambda_4=12$	$\lambda_{41} = 4$	$\lambda_{42} = 3$	$\lambda_{43} = 0$	$\lambda_{44} = 1$	$12/4 = 3$

z_j	$z_0 = 0$	$z_1 = 0$	$z_2 = 0$	$z_3 = 0$	$z_4 = 0$	
$c_j - z_j$		$c_1 - z_1 =$ $3 - 0 = 3$ **mayor diferencia**	$c_2 - z_2 =$ $1 - 0 = 1$	$c_3 - z_3 = 0$	$c_4 - z_4 =$ 0	

Debe recordarse que las columnas de las variables básicas deben formar parte de la matriz identidad.

En la siguiente iteración **x_1 pasará a ser básica en reemplazo de x_3**, en consecuencia x_1 deberá formar parte de la matriz identidad, para ello debe realizarse la siguiente transformación:



El elemento que debe transformarse en “1” se denomina **elemento pivote.**

El **elemento pivote** siempre se ubica en la columna con la mayor **mayor diferencia** y la fila con el **menor cociente**.

En la siguiente iteración siempre el **elemento pivote** debe transformarse en “1”, mientras que los restantes elementos de la columna deben transformarse en “0”. Para realizar estas transformaciones deben utilizarse las operaciones elementales de filas. Para transformar en “1” al **elemento pivote,** la fila de dicho elemento debe multiplicarse por su inverso.

A continuación y a los fines de plantear de manera más ordenada las operaciones, es conveniente agregar una **matriz auxiliar** a modo de transición entre una iteración y la siguiente.

Matriz auxiliar:

En la columna xi se ubican las variables básicas correspondientes a la **segunda** iteración:

Tal como se señaló anteriormente, x_1 pasa a ser variable básica en reemplazo de x_3, mientras que la variable x_4 continúa siendo una variable básica.

En la matriz auxiliar solo debe modificarse la fila del elemento que debe transformarse en "1" (que en este caso es la fila de x_1), la otra fila que en este caso es la fila de x_4 queda sin cambios:

x_i variables básicas en la **segunda** iteración	λ_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$\lambda_1 =$	$\boldsymbol{\lambda_{11} =}$	$\lambda_{12} =$	$\lambda_{13} =$	$\lambda_{14} =$
x_4	$\lambda_4 = 12$	$\lambda_{41} = 4$	$\lambda_{42} = 3$	$\lambda_{43} = 0$	$\lambda_{44} = 1$

Se vuelve al cuadro correspondiente a la **primera** iteración:

c j			$c_1 = 3$	$c_2 = 1$	$\boldsymbol{c_3 = 0}$	$\boldsymbol{c_4 = 0}$	
c i	x_i variables básicas	λ_i	x_1	x_2	x_3	x_4	λ_i / λ_{ij}

$c_3 = 0$	x_3	$\lambda_3 = 7$	$\lambda_{31} = 3$	$\lambda_{32} = 2$	$\lambda_{33} = 1$	$\lambda_{34} = 0$	$7/3 = 2,33$ **menor cociente**
$c_4 = 0$	x_4	$\lambda_4=12$	$\lambda_{41} = 4$	$\lambda_{42} = 3$	$\lambda_{43} = 0$	$\lambda_{44} = 1$	$12/4 = 3$
	z_j	$z_0 = 0$	$z_1 = 0$	$z_2 = 0$	$z_3 = 0$	$z_4 = 0$	
$c_j – z_j$			$c_1 - z_1 =$ $3 – 0 = 3$ **mayor diferencia**	$c_2 - z_2 =$ $1 – 0 = 1$	$c_3 - z_3 = 0$	$c_4 – z_4 =$ 0	

Para transformar en "1" al **elemento pivote** que es $\lambda_{31} = 3$ la fila de dicho elemento (que en este caso es la fila de x_3) debe multiplicarse por el número inverso que es 1/3.

Simbólicamente: $e_3(1/3)$ La fila de la variable x_3 debe multiplicarse por 1/3

Matriz Auxiliar:

En la columna xi se incluyen las variables básicas de la **segunda iteración**.

x_i	λ_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$\lambda_1 = 7*1/3$ $= 7/3$	$\lambda_{11} = 3*1/3$ $= 1$	$\lambda_{12} = 2*1/3$ $= 2/3$	$\lambda_{13} = 1*1/3$ $= 1/3$	$\lambda_{14} = 0*1/3$ $= 0$
x_4	$\lambda_4=12$	$\lambda_{41} = 4$	$\lambda_{42} = 3$	$\lambda_{43} = 0$	$\lambda_{44} = 1$

Se transformó en "1" al **elemento pivote**

Debe **transformarse en "0" al otro elemento de la columna en la cual se encuentra el elemento pivote, dicho elemento es λ_{41} = 4**; para ello a la fila del elemento x_4, debe sumarse la fila del elemento pivote previamente multiplicada por el número opuesto que es -4.

Puede expresarse simbólicamente la operación de la siguiente manera: $e_{41}(-4)$

Se lee: A la fila de x_4 se le suma la fila de x_1 previamente multiplicada por -4

(fila de x_4) + (fila de x_1) *(-4)

$\lambda_4 = 12 + (7/3) *(-4)$

$= 2,67$

$\lambda_{41} = 4 + 1*(-4)$

$= 0$

$\lambda_{42} = 3 + (2/3) *(-4)$

$= 0,33$

$\lambda_{43} = 0 + (1/3) *(-4)$

$= -1,33$

$\lambda_{44} = 1 + 0 *(-4)$

$= 1$

Paso 8) **Segunda iteración:**

En el siguiente cuadro, la fila de x_4 surge de aplicar la operación que permitió transformar **"4"** en "0"

c j			$c_1 = 3$	$c_2 = 1$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$
c i	x_i	λ_i	x_1	x_2	x_3	x_4

$c_1 = 3$	x_1	$\lambda_1 = 7/3 = 2{,}33$	**$\lambda_{11} = 1$**	$\lambda_{12} = 2/3$	$\lambda_{13} = 1/3$	$\lambda_{14} = 0$
$c_4 = 0$	x_4	$\lambda_4 = 2{,}67$	$\lambda_{41} = 0$	$\lambda_{42} = 0{,}33$	$\lambda_{43} = -1{,}33$	$\lambda_{44} = 1$
z_j		$z_0 = 7$	$z_1 = 3$	$z_2 = 2$	$z_3 = 1$	$z_4 = 0$
$c_j - z_j$: **Diferencia entre los c j de la primera fila y los z j de la penúltima fila**			$c_1 - z_1 = 3 - 3 = 0$	$c_2 - z_2 = 1 - 2 = -1$	$c_3 - z_3 = 0$	$c_4 - z_4 = 0$

Se obtienen los valores z j ubicados en la penúltima fila:

$\mathbf{z_0} = \sum c_i * \lambda_i$

$\mathbf{z_0} = 3 * (7/3) + 0 * (2{,}67)$

$\mathbf{z_0} = 7$

$\mathbf{z_1} = \sum c_i * \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i1}}$

$\mathbf{z_1} = 3 * 1 + 0 * 0$

$= 3$

$\mathbf{z_2} = \sum \mathbf{c_i} * \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i2}}$

$\mathbf{z_2} = 3 * (2/3) + 0 * 0{,}33$

$= 2$

$\mathbf{z_3} = \sum \mathbf{c_i} * \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i3}}$

$\mathbf{z_3} = 3 *(1/3) + 0*(-1{,}33)$

$= 1$

$\mathbf{z_4} = \sum \mathbf{c_i} * \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i4}}$

$\mathbf{z_4} = 3 * 0 + 0* 1$

$= 0$

Se obtienen las diferencias cj – zj y ubicamos los resultados en la última fila. Puede observarse que ninguna diferencia es positiva, por lo tanto la segunda iteración corresponde a la solución óptima.

Paso 9) **Se indica el valor que tiene cada variable en la solución óptima.**

Las variables que **no** están incluidas en la columna xi del cuadro son las variables nulas o no básicas.

La columna xi sólo contiene las variables básicas o no nulas

$x_1 = 2{,}33$ Deben fabricarse 2,33 jarrones

$x_2 = 0$ No deben fabricarse macetas

$x_3 = 0$ No hay sobrantes de horas de torneado

$x_4 = 2{,}67$ Sobraron 2,67 horas de pulido

Paso 10) **Calculamos la máxima ganancia**

Para ello deben reemplazarse los valores de x_1 y x_2 en la función objetivo:

$z = 3x_1 + x_2$

$z = 3*2{,}33 + 1*0 =$ **6,99 Máxima Ganancia Diaria**

Paso 11) **Confección del informe**

Para obtener la máxima ganancia que es de 6,99 deben fabricarse 2,33 jarrones y ninguna maceta. No hay sobrantes de horas de torneado y sobran 2,67 horas de pulido.

b) Si la disponibilidad de mano de obra se incrementara en 4 horas, indicar a cuál de las dos secciones resulta conveniente asignarlas.

b.1. Análisis de sensibilidad utilizando la Programación Lineal:

Debe identificarse a cuál recurso resulta más conveniente asignarle las 4 horas adicionales:

Función objetivo: max $z = 3x_1 + x_2$

Se plantea el sistema de restricciones de acuerdo al esquema original:

Cantidad utilizada ≤ cantidad disponible

Torneado (hs.): $3x_1 + 2x_2 \leq 7$
Pulido (hs.): $4x_1 + 3x_2 \leq 12$

Análisis de sensibilidad para horas de torneado:

Si se incrementa en 4 horas la disponibilidad de horas de torneado, el sistema de restricciones quedaría planteado de la siguiente manera:

Torneado (hs.): $3x_1 + 2x_2 \leq 11$ (7 + 4)
Pulido (hs.): $4x_1 + 3x_2 \leq 12$

Utilizando nuevamente alguno de los Métodos de la Programación Lineal, se obtiene la solución óptima correspondiente a este nuevo esquema y se llega al siguiente resultado:

$x_1 = 3$ $x_2 = 0$

Función objetivo:

$z = 3x_1 + x_2$

$z = 3(3) + 1(0)$

$z = 9$

La máxima ganancia de acuerdo al esquema original del punto "a" es de 6,99

Es decir que pasó de 6,99 a 9 en consecuencia se incrementó en **2,01**.

Cuando la disponibilidad de horas de torneado se incrementa en 4 horas, la ganancia aumenta en **2,01**

Incremento de ganancia: $\Delta g = 9 - 6{,}99 =$ **2,01**

Incremento de tiempo de torneado: $\Delta t = 11 - 7 =$ **4**

A continuación, se obtiene el cociente entre el incremento de la ganancia y el incremento de tiempo en la sección torneado.

$\Delta g / \Delta t =$ **2,01 / 4**

$= 0{,}5025$ Aumento que se produce en la ganancia diaria por cada hora de torneado que se agrega.

Análisis de sensibilidad para horas de pulido:

Si se incrementa en 4 horas la disponibilidad de tiempo en la sección **pulido**, el sistema de restricciones quedaría planteado de la siguiente manera:

Torneado (hs): $3x_1 + 2x_2 \leq 7$

Pulido (hs): $4x_1 + 3x_2 \leq 16$ (12 + 4)

Utilizando nuevamente alguno de los Métodos de la Programación Lineal, se obtiene la solución óptima correspondiente a este nuevo esquema y se llega al siguiente resultado:

$x_1 = 2{,}33$ $x_2 = 0$

$z = 3x_1 + x_2$

$z = 3(2{,}33) + 1(0)$

$z = 6{,}99$

Al incrementarse, en 4 horas la disponibilidad de tiempo en la sección **pulido**, la ganancia diaria se mantiene en 6,99 y puede comprobarase al aplicar la fórmula correspondiente:

Incremento de ganancia: Δg = 6,99 – 6,99 = **0**

Incremento de tiempo de **pulido**: Δp = 16 – 12 = **4**

A continuación, se obtiene el cociente entre el incremento de la ganancia y el incremento de tiempo en la sección torneado.

Δg / Δp = **0 / 4**

= 0 Aumento que se produce en la ganancia diaria por cada hora de **pulido** que se agrega.

Conclusión:

Al incrementar en una hora el tiempo disponible en la sección **torneado,** la ganancia diaria tiene un aumento de 0,5025

Al incrementar en una hora el tiempo disponible en la sección **pulido,** la ganancia diaria permanece sin cambios.

BIBLIOGRAFÍA

- **Libros:**

  Hillier, F.; Lieberman, G.J. (2008) Introducción a la Investigación de Operaciones, 8va. Edición. Ed. McGraw-Hill. México.

  Gallagher, Charles A. (1994) Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en administración. Ed. McGraw-Hill. México.