Satz von Myhill-Nerode für reguläre Baumsprachen und Minimierung von Baumautomaten

Julian Oestreich

,Seminarmodul Automatentheorie
Universität Leipzig

15. Juni 2020

UNIVERSITÄT LEIPZIG

1. Erinnerung: Äquivalenzrelationen

- Eine Relation $\equiv \subseteq A \times A$ nenn man *Äquivalenzrelation* gdw. sie *reflexiv*, *transitiv* und *symetrisch* ist,
- Die Menge $[a]_{\equiv} := \{a^{'} | a^{'} \equiv a\}$ wird *Äquivalenzklasse* von a genannt
- Eine Äquivalenzrelation hat *endlichen Index*, wenn sie endlich viele Äquivalenzklassen bildet

2. Kongruenz

Kongruenz

Eine Äquivalenzrelation $\equiv$, auf $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ ist eine *Kongruenz* gdw.

$$\forall f \in \mathcal{F}_n : (\forall i \leq n : u_i \equiv v_i) \Longrightarrow f(u_1, ..., u_n) \equiv f(v_1, ..., v_n)$$

- Intuition: Funktionen sind äquivalent bei Anwendung auf äquivalente Funktionsargumente
- $\equiv$ ist kongruent gdw. abgeschlossen unter (1-löchrigen) Kontexten, d.h.

$$\forall Cuv : u \equiv v \Longrightarrow C[u] \equiv C[v]$$

2. Kongruenz

Für eine Sprache L definieren wir die Kongruenz $\equiv_L$ als

$$u \equiv_L v \; gdw. \; \forall C : C[u] \in L \; gdw. \; C[v] \in L$$

- Offensichtlich *Äquivalenzrelation*
- Offensichtlich *kongruent*
- Intuition: Die Sprache L unterscheidet nicht zwischen u und v

3. Deterministische endliche Baumautomaten

Vollständige DFTA $(Q, \mathcal{F}, Q_f, \delta)$

- mit $\delta : (\mathcal{F}_n \times Q^n \to Q)_n$
- entspricht Δ:

$$f(q_1, ..., q_n) \to q \; gdw. \; \delta(f, q_1, ..., q_n) = q$$

- Erweiterung für Bäume:

$$\delta(f(t_1, ..., t_n)) = \delta(f, \delta(t_1), ..., \delta(t_n))$$

- kompatibel mit $\to_A$, d.h

$$t \to_A q \; gdw. \; \delta(t) = q$$

4. Das Myhill-Nerode Theorem

Anwendung

- *Notwendiges und hinreichendes Kriterium* dafür ob $\mathcal{L}$ *regulär* ist.
- Verglichen mit *Pumping-Lemma* kann man mit Myhill-Nerode immer eine Aussage tätigen ob $\mathcal{L}$ regulär ist.
- Anzahl der Zustände des minimalen DFTA $\mathcal{A}_{min}$ der $\mathcal{L}$ akzeptiert entspricht dem Index der Äquivalenzklassen der Nerode Relation $\sim$

,

4. Das Myhill-Nerode Theorem

Theorem

Diese 3 Aussagen sind äquivalent:

1. L ist eine erkennbare Baumsprache
2. L ist die Vereinigung einiger Äquivalenzklassen von endlicher Kongruenz
3. Die Relation $\equiv_L$ ist eine endliche Kongruenz

4.1. Beweis 1 $\to$ 2

- L reg. $\to$ L wird von DFTA $(Q, \mathcal{F}, Q_f, \delta)$ erkannt
- δ Übergangsfunktion
- Ann.: $\equiv_A$ auf T$(\mathcal{F})$: $u \equiv_A v$ *gdw*. $\delta(u) = \delta(v)$
- offens. kongruent
- $\equiv_A$, hat endlichen Index (max. $|Q|$)
- Also haben wir $L = \cup\{[u] \mid \delta(u) \in Q_f\}$

4.2. Beweis 2 $\rightarrow$ 3

- $\sim$ Kongruenz mit endl. Index
- $\mathcal{F}(\mathcal{T})/\sim \; = \{\underbrace{[t_1],[t_2],...,[t_i]}_{L \overset{(2)}{=} \bigcup_{j=1}^{i}[t_j]},...,[t_n]\}$
- Ann.: u $\sim$ v
- Dann

$$
\begin{aligned}
&\forall C \in C(\mathcal{F}) : \; C[u] \sim C[v] \\
&\xrightarrow{(i)} C[u] \in L \\
&\xrightarrow{(ii)} \exists j : C[u] \in t_j \\
&\xrightarrow{(i)} C[v] \in t_j \\
&\xrightarrow{(ii)} C[v] \in L
\end{aligned}
$$

4.2. Beweis $2 \rightarrow 3$

- $C[v] \in L \longrightarrow C[u] \in L$ analog
- $\implies \forall C : C[u] \in L \iff C[v] \in L$
- $u \equiv_L v$
- da $(u, v) \in\ , \sim \longrightarrow (u, v) \in \equiv_L$
- und $\sim \subseteq\ , \equiv_L$, da $\sim$ *Verfeinerung* von $\equiv_L$

,

4.3. Beweis 3 $\rightarrow$ 1