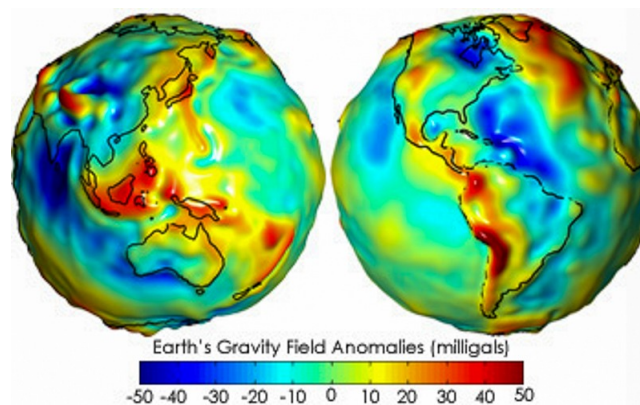


Análisis de la gravedad de la Tierra mediante ajuste de superficie

Sergio Andrés Mejía Tovar
sergio.mejia@javeriana.edu.co

Julián David Parada Galvis
julian_parada@javeriana.edu.co

29 de mayo de 2019



Datos del satélite GRACE de las anomalías gravitacionales en la Tierra.

1. Introducción

La gravedad en el planeta Tierra es parcialmente uniforme. Esto pretende que si bien el valor es muy similar en todos los lugares del globo (con una diferencia menor al 0.1 absoluto), existen variaciones dependiendo de la locación en la que se encuentre. Así, existe la necesidad de realizar mediciones en múltiples puntos del globo para hallar los valores de la aceleración gravitacional en ese punto.

Sin embargo, es insuficiente realizar estas mediciones, ya que estas dependen de la capacidad del lugar para contratar a los expertos en el tema, a la vez de la eficacia de estas mediciones. Por estas razones, es necesario utilizar un método que permita, basados en las mediciones existentes, poder calcular el valor de cualquier lugar dados únicamente valores conocidos de antemano.

Se parte de esta premisa para proceder a hacer una recolección de las mediciones mas actuales que se tienen de la gravedad al rededor del mundo en las principales ciudades, también en ciertos puntos estratégicos del globo con las cuales se realizaron diferentes análisis , el principal de ellos era realizar un ajuste de superficie y los demás secundarios consistían en analizar como la gravedad presentaba sus variaciones de acuerdo a la latitud y altitud.

Para esto, se creó una aplicación en R con el fin de recopilar, analizar y manejar los datos para realizar el ajuste de superficie y trabajar alrededor de este.

2. Sustentación Teórica

Después de la investigación realizada en el Anteproyecto, y basados en el objetivo del proyecto de comparar la gravedad con la altitud de un lugar, se encontró que los únicos valores teóricos que afectan el valor de la gravedad alrededor del globo (sin contar anomalías en los datos) son el valor de la Altitud (en metros sobre el nivel del mar) y el de la Latitud (en grados desde el Ecuador terrestre). Por estos motivos se planteó un modelo polinomial de grado 3 donde la gravedad depende de dos variables $x : \text{Latitud}, y : \text{Altitud}$. El modelo se presenta entonces de la siguiente manera:

$$G(x, y) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + c_0 \quad (1)$$

Donde $a_n \in \mathbb{R}$ y $b_n \in \mathbb{R}$ corresponden a coeficientes y c_0 correspondiente al intercepto de la función a calcular por el ajuste de superficie.

A su vez, en 1967 se definió la primera Fórmula Internacional de Gravedad (International Gravity Formula 1967), llamada también el Sistema de Fórmulas de Referencia Geodética 1967, ecuación de Helmert o fórmula de Clairaut.

$$g(\phi) = g_e(1 + A\sin^2(\phi) - B\sin^2(2\phi))ms^{-2} \quad (2)$$

Donde $g_e = 9,780327$, $A = 0,0053024$ y $B = 0,0000058$ y ϕ como la latitud geográfica del punto a calcular la gravedad.

Después de esto, en 1980 se postuló una nueva fórmula teórica basada en la ecuación Somigliana, conocida como la Fórmula Internacional de Gravedad 1980, basada en el WSG80.

$$g(\phi) = 9,7803267715 \left[\frac{1 + 0,001931851353\sin^2(\phi)}{\sqrt{1 - 0,0066943800229\sin^2(\phi)}} \right] ms^{-2} \quad (3)$$

3. Ecuaciones usadas

Dada la información de la sustentación teórica, se procedió en R a realizar el ajuste de superficie de los datos basados en el modelo de la función (1) utilizando la función `lm()` del core de R. Esta función retorna, entre otros valores, los coeficientes de la función. Haciendo referencia a la ecuación (1), los valores hallados de a_n , b_n y c_0 se muestran a continuación:

Coeficiente	Valor	Pr(> t)	Coeficiente	Valor	Pr(> t)
a_1	$4,2044 \cdot 10^{-5}$	0.3035	b_1	$7,5599 \cdot 10^{-6}$	0.0557
a_2	$1,2357 \cdot 10^{-5}$	$8,16 \cdot 10^{-13}$	b_2	$-4,3090 \cdot 10^{-8}$	0.0172
a_3	$-4,3090 \cdot 10^{-8}$	0.1200	b_3	$1,3883 \cdot 10^{-12}$	0.0182
c_0	9.7821	$<2 \cdot 10^{-16}$			

Tabla 1: Coeficientes del modelo de la gravedad experimental

La tabla anterior muestra los coeficientes hallados por el ajuste de superficie, cada uno con su nivel de significancia (valor-p). Con estos valores, se pudo hallar la ecuación que modela la gravedad dada una latitud x y una altitud y :

$$G(x, y) = 4,2044 \cdot 10^{-5}x + 1,2357 \cdot 10^{-5}x^2 - 4,3090 \cdot 10^{-8}x^3 + 7,5599 \cdot 10^{-6}y - 4,3090 \cdot 10^{-8}y^2 + 1,3883 \cdot 10^{-12}y^3 + 9,7821 \quad (4)$$

Hallada la ecuación modelada, se pudo generar resultados gráficos incluidos en la aplicación:

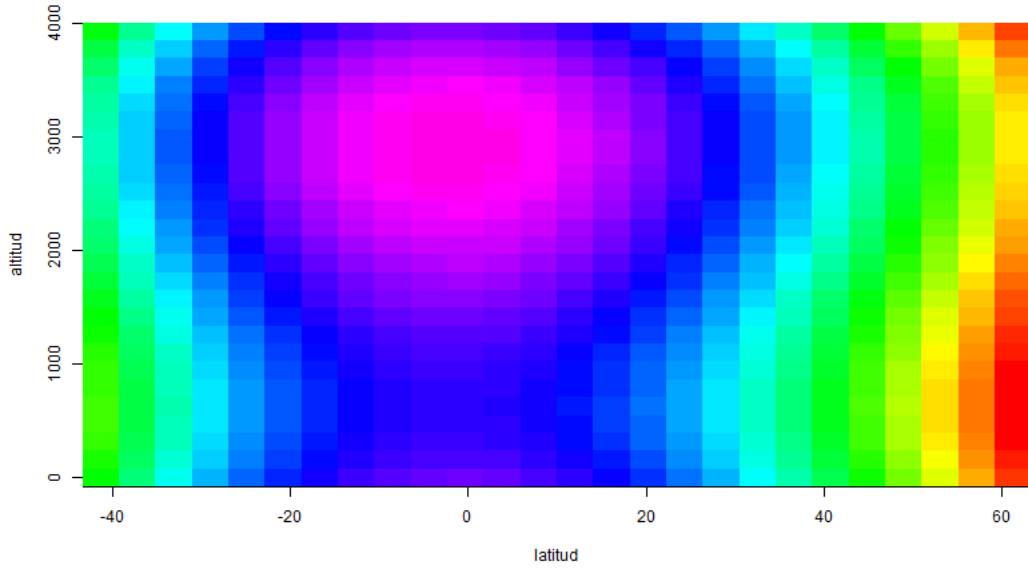


Figura 1: Mapa de calor. Los colores fríos indican baja gravedad, los colores cálidos alta gravedad.

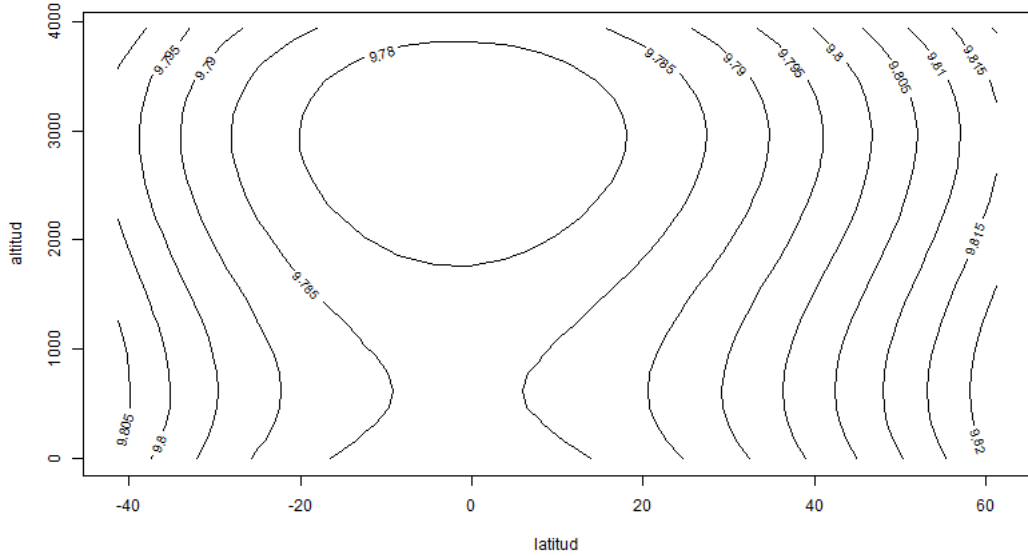


Figura 2: Mapa de contornos mostrando las zonas con sus valores gravitacionales correspondientes.

Estos gráficos fueron incluidos en el aplicativo, principalmente el gráfico tridimensional con la posibilidad de rotarlo utilizando unos manejadores del ángulo theta (θ , rotación horizontal) y el ángulo phi (ϕ , rotación vertical).

En esta imagen se evidencia el análisis realizado por medio de la normalización mediante el comando `qqnorm()` de R. Así, se confrontaron los puntos a la distribución normal y a las varianzas del cálculo, con la esperanza que los resultados de los cuantiles sea un crecimiento constante. Cuanto más constante sea el crecimiento, se puede decir que los errores están distribuidos normalmente y son aceptables. Como se puede ver en las gráficas, se observa una relación aproximadamente constante de crecimiento entre los valores de

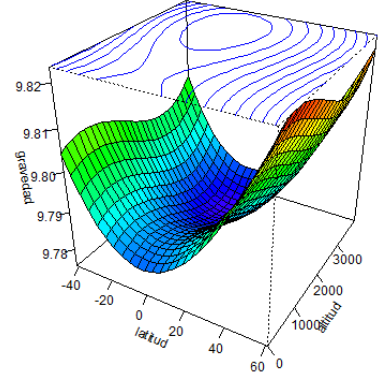
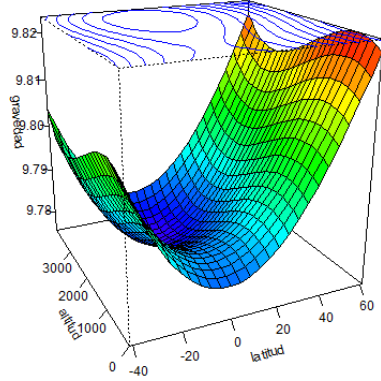


Figura 3: Ajuste de superficie, los colores indican zonas con baja gravedad (fríos) y con alta gravedad (cálidos).

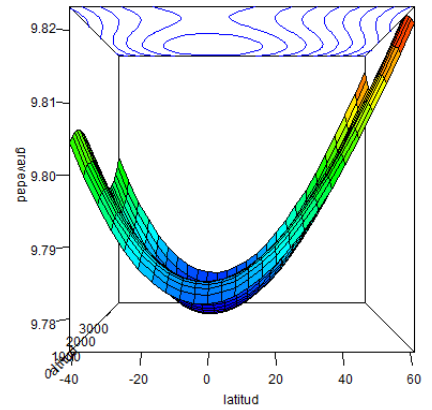
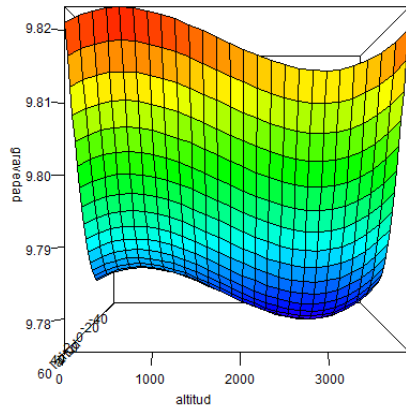


Figura 1: Altitud vs. Gravedad

Figura 2: Latitud vs. Gravedad

Figura 4: Ajuste de superficie, los colores indican zonas con baja gravedad (fríos) y con alta gravedad (cálidos).

la gravedad obtenidos de forma experimental con mediciones directas en algunos puntos sobre la tierra y del valor que se obtuvo después del ajuste de superficie realizado contra la gravedad que nos ofrece el modelo teórico de acuerdo con la latitud del punto, por lo que se puede decir que los errores no son muy grandes o erráticos.

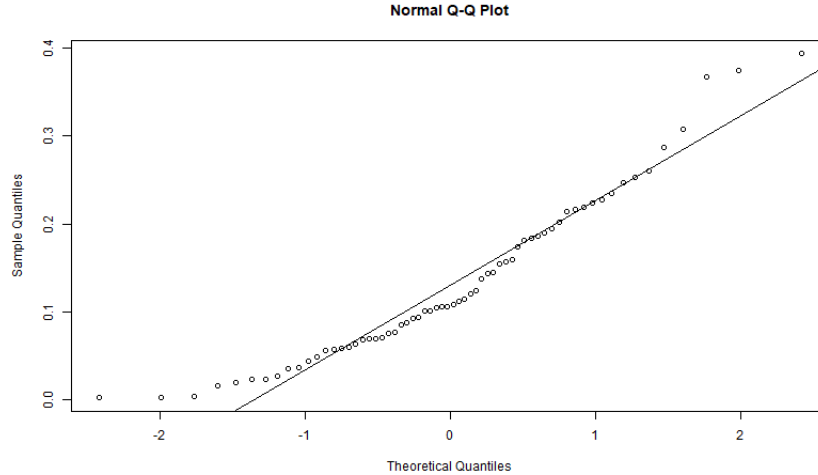


Figura 5: Gráfica del error entre la gravedad experimental y la gravedad Teórica.

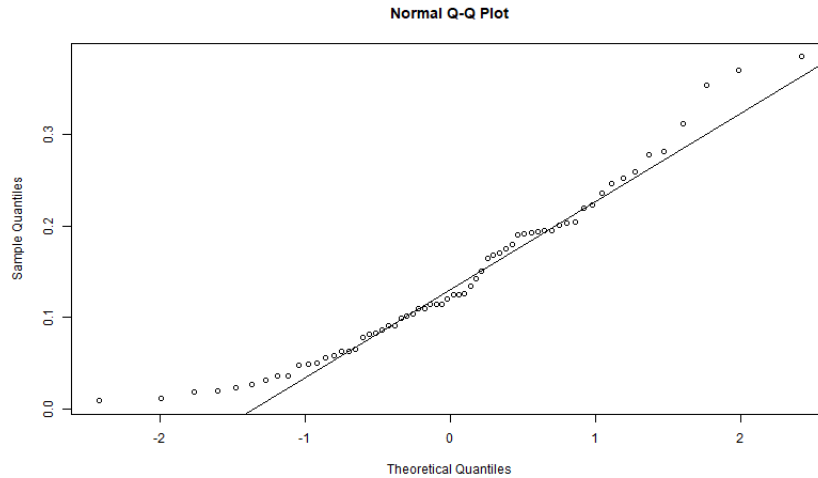


Figura 6: Gráfica del error entre la gravedad del Ajuste de Superficie y la gravedad Teórica.

Por último, aprovechando el modelo polinomial hallado, se decidió hallar un valor promedio de la gravedad. Para esto, se tomaron los valores mínimos y máximos de los datos en latitud y altitud para aplicar la fórmula de valor promedio de una función en \mathbb{R}^3 :

$$\frac{1}{(3931 - 0)(61,21631 - (-41,28875))} \int_0^{3931} \int_{-41,2888}^{61,2163} G(x) dx dy = \mathbf{9.7911 \text{ ms}^{-2}}(5)$$

4. Referencias

LOCAL GRAVITY CHART. Tomado de: http://www.physics.montana.edu/demonstrations/video/1_mechanics/demos/localgravitychart.html

Gravity of Earth. Tomado de: https://en.wikipedia.org/wiki/Gravity_of_Earth