Sección 1: Multiplicación de polinomios

Precálculo

Para realizar la multiplicación de polinomios, se aplicarán diversas propiedades matemáticas, tales como la **propiedad conmutativa**, **asociativa** y **distributiva** del producto en relación a la suma, además de las **leyes de exponentes** y **la ley de signos**, que se describen a continuación.

1 Lección 1: Ley de signos

Si los dos términos tienen el mismo signo, el signo del producto es + , es decir,

$$\begin{array}{ll} (+)(+) = + & (+ \text{ por } + \text{da}+) \\ (-)(-) = + & (- \text{ por } - \text{da}+). \end{array}$$

....

Si los dos términos tienen signo diferente, el signo del producto es - , es decir,

$$\begin{array}{ll} (+)(-) = - & (+ \text{ por } - \text{da}-) \\ (-)(+) = - & (- \text{ por } + \text{da}-). \end{array}$$

1.1 Ejemplo 1: Repaso

1. $(-2)z = -2z$
2. $\frac{1}{5}(-w) = -\frac{1}{5}w$
3. $(-7)(-5) = 35$
4. $b(-c) = -bc$
5. $(-d)(-w) = dw$
6. $5(-3) = -15$
7. $(-a)c = -ac$
8. $(-2)4 = -8$

1.2 Ejemplo 2: Utilizando leyes de exponentes

1. $b^5 \cdot b^3 = \underbrace{bbbbb}_{5 \text{ veces}} \cdot \underbrace{bbb}_{3 \text{ veces}} \underbrace{bbbbbbbb}_{8 \text{ veces}} = b^8$.
2. $z^3 z^6 = z^9$, ya que $3 + 6 = 9$.
3. $(x + y)^2 (x + y)^{13} = (x + y)^{15}$, ya que $2 + 13 = 15$.
4. $\left(-m^5\right)\left(m^7\right) = -m^{12}$, ya que - por + da $-$y$5 + 7 = 12$.
5. $\left(2z^3\right)^4 = 2^{1\times4} z^{3\times4} = 16z^{12}$, ya que $2^{1\times4} = 16$ y 3x4 = 12.

1.3 Ejercicios 1: Eliminando símbolos de agrupación

Realizar las operaciones señaladas en cada número, removiendo los signos de agrupación y simplificando los términos semejantes:

1. $\left(3y^3\right)\left(2y^2\right)$.
2. $\left(2x^2y^3\right)\left(3xz^2\right)(5y)$.
3. $\left(2a^2b^3\right)^3$.
4. $2x(x + 2y) - 3y(2x - y) + xy(2 - y)$.
5. $2x^2 - 3x\left[2x - y(x - 2y) - y^2\right]$.
6. $\left(3x^2 - 4y^2\right)\left(x^3 - 2x^2y + xy^2\right)$.
7. $\left(x^2 - xy - y^2\right)\left(x^2 + xy + y^2\right)$.

1.3.1 Solución Ejercicios

1. $\left(3y^3\right)\left(2y^2\right) = 6y^5$.
2. $\left(2x^2y^3\right)\left(3xz^2\right)(5y) = \left(2x^2y^3\right)\left(15xyz^2\right) = 30x^3y^4z^2$.

   Por las leyes asociativa y conmutativa de la multiplicación, podemos efectuar todas las operaciones simultáneamente:

   $\left(2x^2y^3\right)\left(3xz^2\right)(5y)$
   $= (2 \cdot 3 \cdot 5)x^{(2+1)}y^{(3+1)}z^2$
   $= 30x^3y^4z^2$

3. $\left(2a^2b^3\right)^3 = 2^3\left(a^2\right)^3\left(b^3\right)^3 = 8a^6b^9$.
4. $2x(x + 2y) - 3y(2x - y) + xy(2 - y)$
   $= 2x^2 + 4xy - 6xy + 3y^2 + 2xy - xy^2$
   $= 2x^2 + 3y^2 - xy^2$.

5. $2x^2 - 3x\left[2x - y(x-2y) - y^2\right] = 2x^2 - 3x\left[2x - xy + 2y^2 - y^2\right]$
$= 2x^2 - 6x^2 + 3x^2y - 6xy^2 + 3xy^2$
$= -4x^2 + 3x^2y - 3xy^2.$

6. $\left(3x^2-4y^2\right)\left(x^3-2x^2y+xy^2\right) = 3x^2\left(x^3-2x^2y+xy^2\right) - 4y^2\left(x^3-2x^2y+xy^2\right)$

$= 3x^2\left(x^3\right) + 3x^2\left(-2x^2y\right) + 3x^2\left(xy^2\right) + \left(-4y^2\right)\left(x^3\right) + \left(-4y^2\right)\left(-2x^2y\right) + \left(-4y^2\right)\left(xy^2\right) = 3x^5 - 6x^4y + 3x^3y^2$

7.

$$\begin{array}{ccccc}
x^2 & -xy & -y^2 & & \\
x^2 & +xy & +y^2 & & \\
\hline
x^4 & -x^3y & -x^2y^2 & & \\
 & x^3y & -x^2y^2 & -xy^3 & \\
 & & x^2y^2 & -xy^3 & -y^4 \\
\hline
x^4 & & -x^2y^2 & -2xy^3 & -y^4
\end{array}$$

Luego, $\left(x^2-xy-y^2\right)\left(x^2+xy+y^2\right) = x^4 - x^2y^2 - 2xy^3 - y^4$

2 Lección 2

Multiplicación de polinomios, segunda lección:

1. Multiplicar $\frac{5}{6}a^2b^3$ por $-\frac{3}{10}ab^2c$.
2. Simplificar $\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)\left(-\frac{3}{5}xy^2\right)\left(-\frac{10}{3}x^3\right)\left(-\frac{3}{4}x^2y\right)$
3. Multiplicar y^2-2y+1 por y^4-2y^2+2.
4. Multiplicar $\frac{1}{4}a^2 - ab + \frac{2}{3}b^2$ por $\frac{1}{4}a - \frac{3}{2}b$.

2.1 Solución ejercicios propuestos

1. $\left(\frac{5}{6}a^2b^3\right)\left(-\frac{3}{10}ab^2c\right)$

$$= \frac{5}{6}\left(-\frac{3}{10}\right)a^{2+1}b^{3+2}c$$

$$= -\frac{1}{4}a^3b^5c$$

2. $\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)\left(-\frac{3}{5}xy^2\right)\left(-\frac{10}{3}x^3\right)\left(-\frac{3}{4}x^2y\right)$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{10}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)x^{2+1+3+2}y^{1+2+1}$$

$$= \frac{3}{4}x^8y^4$$

3. $\left(y^2-2y+1\right)\left(y^4-2y^2+2\right)$

$$= y^2\left(y^4-2y^2+2\right) - 2y\left(y^4-2y^2+2\right) + 1\left(y^4-2y^2+2\right)$$

$$= y^2\left(y^4\right)+y^2\left(-2y^2\right)+y^2(2)-2y\left(y^4\right)$$
$$-2y\left(-2y^2\right)-2y(2)+y^4-2y^2+2$$
$$= y^6-2y^4+2y^2-2y^5+4y^3-4y+y^4-2y^2+2$$
$$= y^6-y^4+0y^2-2y^5+4y^3-4y+2$$
$$= y^6-2y^5-y^4+4y^3-4y+2$$

4. $\left(\frac{1}{4}a^2-ab+\frac{2}{3}b^2\right)\left(\frac{1}{4}a-\frac{3}{2}b\right)$

$$= \frac{1}{4}a^2\left(\frac{1}{4}a-\frac{3}{2}b\right)-ab\left(\frac{1}{4}a-\frac{3}{2}b\right)+\frac{2}{3}b^2\left(\frac{1}{4}a-\frac{3}{2}b\right)$$
$$= \frac{1}{4}a^2\left(\frac{1}{4}a\right)+\frac{1}{4}a^2\left(-\frac{3}{2}b\right)-ab\left(\frac{1}{4}a\right)-ab\left(-\frac{3}{2}b\right)+\frac{2}{3}b^2\left(\frac{1}{4}a\right)+\frac{2}{3}b^2\left(-\frac{3}{2}b\right)$$
$$= \frac{1}{16}a^3-\frac{3}{8}a^2b-\frac{1}{4}a^2b+\frac{3}{2}ab^2+\frac{1}{6}b^2a-b^3$$
$$= \frac{1}{16}a^3+\left(-\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\right)a^2b+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\right)ab^2-b^3$$
$$= \frac{1}{16}a^3-\frac{5}{8}a^2b+\frac{5}{3}ab^2-b^3$$

3 Resumen Multiplicación de Polinomios

En los siguientes ejercicios efectuar las multiplicaciones indicadas y simplificar el resultado:

1. $\left(a^8-a^6b^2+a^4b^4-3a^2b^6+b^8\right)\left(-5a^3b^2\right)$.
2. $\left(x^4-3x^3y+2x^2y^2+xy^3\right)\left(-y^2-xy-x^2\right)$.
3. $\left(a^3-a+a^2+1\right)\left(a^2+a^3-2a-1\right)$.
4. $3x\left(x^2-2x+1\right)(x-1)(x+1)$.

3.1 Respuestas

Al realizar los ejercicios, se debe concluir en las siguientes respuestas:

1. $-5a^{11}b^2+5a^9b^4-5a^7b^6+15a^5b^8-5a^3b^{10}$.
2. $-x^6+2x^5y-3x^2y^4-xy^5$.
3. $a^6+2a^5-2a^4-3a^3+2a^2-a-1$.
4. $3x^5-6x^4+6x^2-3x$.