Sección 3: Triangulo de Pascal

Precálculo

1 Lección 1: El Triángulo de Pascal

En esta lección, se presentará una herramienta conocida como el Triángulo de Pascal, que facilita el cálculo de los coeficientes en la expansión de expresiones de la forma $(a+b)^n$, donde n es un número entero positivo o cero.

Hasta el momento, se han estudiado las expansiones de las siguientes potencias de un binomio:

$$\begin{aligned}
&(a+b)^0 = 1\\
&(a+b)^1 = a+b\\
&(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2\\
&(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.
\end{aligned}$$

Si multiplicamos $(a+b)^3$ por $a+b$ se tiene:

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

Si este resultado se multiplica por $a+b$ se tiene:

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

Continuando de esta forma se puede obtener las potencias enteras positivas de $a+b$. Luego, se observa el desarrollo de estas potencias de $a+b$, vemos que:

1. El número de términos en la expansión siempre es uno más que el exponente del binomio.

2. El exponente del primer y último término coincide con el exponente del binomio. Además, ambos términos tienen un coeficiente de 1.

3. A medida que se avanza de izquierda a derecha, el exponente de a disminuye en uno, mientras que el exponente de "b" aumenta en uno.

4. En cada término, la suma de los exponentes de a y b es igual al exponente del binomio.

5. Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales.
6. Si multiplicamos el coeficiente de cualquier término por el exponente de a en ese término y dividimos el resultado por la posición del término en la expansión, obtenemos el coeficiente del término siguiente. Estas propiedades son aplicables a la expansión de $(a+b)^n$, donde n es cualquier número entero positivo o cero.

En los desarrollos, los coeficientes de los términos exhiben una simetría que facilita su disposición en forma de un arreglo triangular de números llamado Triángulo de Pascal. Este triángulo permite obtener de manera sencilla los coeficientes de la expansión de potencias de un binomio. A continuación se muestra el Triángulo de Pascal

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
(a+b)^0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
(a+b)^1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
(a+b)^2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
(a+b)^3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
(a+b)^4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
(a+b)^5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
(a+b)^6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Se puede construir el Triángulo de Pascal así:

- El primer renglón es 1.
- El segundo renglón es 11.
- Los extremos de cada renglón son iguales a 1.
- Todos los números diferentes de 1, se obtienen sumando los dos números del renglón inmediatamente anterior, que aparecen a la izquierda y derecha del número.

1.1 Ejemplo

Hallar, usando el Triángulo de Pascal, el desarrollo de:

1. $(y+3)^3$
2. $(1+2x)^5$.

1.1.1 Solución

1. De acuerdo con el Triángulo de Pascal, se sabe que los coeficientes en la expansión son 1, 3, 3, 1. Considerando las propiedades del desarrollo de una potencia de un binomio, se tiene:

$$(y+3)^3 = y^3 + 3\left(y^2\right)(3) + 3(y)(3)^2 + 3^3 = y^3 + 9y^2 + 27y + 27$$

2. Los coeficientes para el desarrollo son 1, 5, 10, 10, 5, 1. Al utilizar las propiedades del desarrollo de una potencia de un binomio, se puede afirmar que:

$$(1+2x)^5 = (1)^5+5(1)^4(2x)^1+10(1)^3(2x)^2+10(1)^2(2x)^3+5(1)^1(2x)^4+(2x)^5$$

es decir

$$(1+2x)^5 = 1 + 10x + 40x^2 + 80x^3 + 80x^4 + 32x^5$$

Se observan los siguientes desarrollos:

$$\begin{aligned}
&(a-b)^0 = 1\\
&(a-b)^1 = a-b\\
&(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\\
&(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.
\end{aligned}$$

Los términos en la expansión de estas potencias comparten las mismas características que las correspondientes potencias de $(a+b)$, excepto que los signos de los términos son alternativamente positivos y negativos, comenzando siempre con un signo positivo. Por lo tanto, podemos utilizar el Triángulo de Pascal para la expansión de las potencias de $(a-b)$, teniendo en cuenta los signos adecuados.

2 Lección 2: Exponentes más altos

Hallar, usando el Triángulo de Pascal, el desarrollo de:

1. $(x-1)^7$

2. $\left(3a^3 - 2b\right)^4$

2.0.1 Solución

1. En el Triángulo de Pascal mostrado al principio de esta lección, vimos los coeficientes del desarrollo del binomio hasta el exponente 6. A partir de éste, podemos encontrar los coeficientes para el desarrollo con exponente

7. Estos son 1, $1+6=7$, $6+15=21$, $15+20=35$, $20+15=35$, $15+6=21$, $6+1=7$ y 1. Con estos coeficientes y usando las propiedades del desarrollo de una potencia de un binomio tenemos entonces:

$$(x-1)^7 = x^7 - 7(x)^6(1)^1 + 21(x)^5(1)^2 - 35(x)^4(1)^3 +$$

$$35(x)^3(1)^4 - 21(x)^2(1)^5 + 7(x)^1(1)^6 - (1)^7$$

Luego,

$$(x-1)^7 = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$$

2. $\left(3a^3 - 2b\right)^4$

$$= \left(3a^3\right)^4 - 4\left(3a^3\right)^3(2b)^1 + 6\left(3a^3\right)^2(2b)^2 - 4\left(3a^3\right)^1(2b)^3 + (2b)^4$$

y simplificando se obtiene

$$\left(3a^3 - 2b\right)^4 = 81a^{12} - 216a^9b + 216a^6b^2 - 96a^3b^3 + 16b^4$$

3 Conclusión

El Triángulo de Pascal es útil para obtener los coeficientes en el desarrollo de una potencia de un binomio, cuando el exponente es pequeño; sin embargo, para exponentes grandes, por ejemplo 100, el triángulo de Pascal no es práctico.

3.1 Ejercicios propuestos

Hallar, utilizando el Triángulo de Pascal, el desarrollo de:

1. $\left(4 - x^4\right)^3$.
2. $(y+3)^4$.
3. $\left(x - y^2\right)^6$.
4. $(a+b)^8$.

3.1.1 Respuestas

Al realizar los ejercicios, se debe concluir en las siguientes respuestas:

1. $64 - 48x^4 + 12x^8 - x^{12}$.
2. $y^4 + 12y^3 + 54y^2 + 108y + 81$.
3. $x^6 - 6x^5y^2 + 15x^4y^4 - 20x^3y^6 + 15x^2y^8 - 6xy^{10} + y^{12}$.
4. $a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$.