Sección 2: Productos Notables

Precálculo

1 Lección 1: Productos Notables

En esta lección, se aprenderán algunos productos que se presentan con frecuencia y son fáciles de memorizar debido a su forma especial. Estos productos permiten realizar multiplicaciones de manera abreviada. A continuación, se realizarán los siguientes productos:

1. $(a+b)(a-b)$.
2. $(a+b)^2$
3. $(a-b)^2$
4. $(a+b)^3$.
5. $(a-b)^3$.
6. $(x+a)(x+b)$.

1.0.1 Solución

1. $$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a\cdot a + a(-b) + b\cdot a + b(-b)\\ &= a^2 - ab + ab - b^2\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b\\ &= a^2 + ab + ba + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a\cdot a + a(-b) + (-b)a + (-b)(-b)\\ &= a^2 - ab - ba + b^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

4. $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$

$$\begin{aligned}
&= (a+b)\left(a^2+2ab+b^2\right)\\
&= a\cdot a^2 + a(2ab) + a\cdot b^2 + b\cdot a^2 + b(2ab) + b\cdot b^2\\
&= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{aligned}$$

5. $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2$

$$\begin{aligned}
&= (a-b)\left(a^2-2ab+b^2\right)\\
&= a\cdot a^2 + a(-2ab) + a\cdot b^2 + (-b)a^2 + (-b)(-2ab) + (-b)b^2\\
&= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\
&= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.
\end{aligned}$$

6. $(x+a)(x+b) = x\cdot x + x\cdot b + a\cdot x + a\cdot b$

$$\begin{aligned}
&= x^2+bx+ax+ab\\
&= x^2+(a+b)x+ab.
\end{aligned}$$

1.1 Resumen

Los productos que se presentan en la tabla siguiente son conocidos como Productos Notables. Estos productos son utilizados con frecuencia y tienen la ventaja de simplificar las operaciones en las que intervienen. Por esta razón, es recomendable memorizarlos, y esto se logra mediante la práctica.

- **Suma por diferencia de dos expresiones**
  $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
- **Cuadrado de una suma**
  $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- **Cuadrado de una diferencia**
  $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
- **Cubo de una suma**
  $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- **Cubo de una diferencia**
  $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
- **Producto de dos binomios de la forma**
  $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

Si consideramos dos números positivos, a y b, podemos representar los productos mencionados anteriormente de manera geométrica utilizando áreas o volúmenes de figuras conocidas. Si se tiene un cuadrado con un lado de longitud $(a+b)$. El área de este cuadrado sería igual a $(a+b)^2$. Al descomponer este cuadrado, podemos observar que está compuesto por un cuadrado de área a^2, otro cuadrado de área b^2 y dos rectángulos de área ab cada uno. La siguiente figura ilustra esta descomposición:

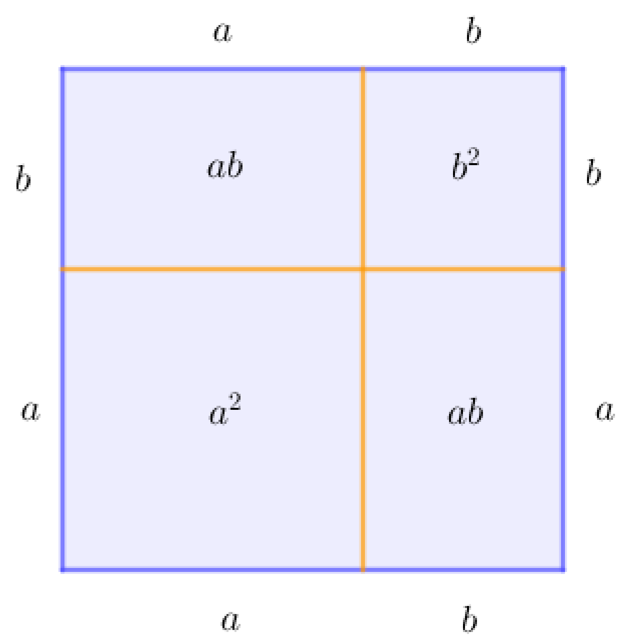

Figure 1: Binomio, explicación gráfica

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

1.2 Aplicación

Utilizar los Productos Notables para realizar las operaciones indicadas en cada numeral.

1. $(x-5)^2$.
2. $\left(a^2-b\right)\left(a^2+b\right)$.
3. $(1-2y)^3$
4. $(x+y+z)(x-y-z)$.

5. $(x-5)(x+4)$

6. $\left(x^5-2\right)\left(x^5-7\right)$.

1.2.1 Solución

1. $(x-5)^2$ es el cuadrado de una diferencia. Luego,

$$\begin{aligned}(x-5)^2 &= x^2-2x(5)+5^2\\ &= x^2-10x+25\end{aligned}$$

2. $\left(a^2-b\right)\left(a^2+b\right)$ es el producto de la suma por la diferencia de dos términos. Así,

$$\begin{aligned}\left(a^2-b\right)\left(a^2+b\right) &= \left(a^2\right)^2-(b)^2\\ &= a^4-b^2\end{aligned}$$

3. $(1-2y)^3$ es el cubo de una diferencia $a-b$, con $a=1$ y $b=2y$. Luego,

$$\begin{aligned}(1-2y)^3 &= 1^3-3(1)^2(2y)+3(1)(2y)^2-(2y)^3\\ &= 1-6y+12y^2-8y^3\end{aligned}$$

4. Reagrupando de manera apropiada los términos de cada paréntesis podemos obtener la suma por diferencia de dos expresiones:

$$\begin{aligned}(x+y+z)(x-y-z) &= [x+(y+z)][x-(y+z)]\\ &= x^2-(y+z)^2\\ &= x^2-y^2-2yz-z^2\end{aligned}$$

5. $(x-5)(x+4)$ es un producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$ con $a=-5$ y $b=4$. Luego

$$\begin{aligned}(x-5)(x+4) &= x^2+(-5+4)x+(-5)(4)\\ &= x^2-x-20.\end{aligned}$$

6. Estamos en una situación similar a la del ejemplo anterior con $a=-2$ y $b=-7$ y además el primer término de cada binomio es x^5 en lugar de x. Luego,

$$\begin{aligned}\left(x^5-2\right)\left(x^5-7\right) &= \left(x^5\right)^2+(-2-7)x^5+(-2)(-7)\\ &= x^{10}-9x^5+14\end{aligned}$$

2 Lección 2: Aplicaciones Productos Notables

Resolver utilizando los Productos Notables.

1. $\left(3ab-5x^2\right)^2$
2. $\left[\left(x^2+3\right)+x\right]\left[\left(x^2+3\right)-x\right]$.
3. $(1-4ax)^3$.
4. $\left(x^3+6\right)\left(x^3-8\right)$.
5. $(a+2)(a-3)(a-2)(a+3)$.

2.0.1 Solución

1. $\left(3ab-5x^2\right)^2=(3ab)^2-2(3ab)\left(5x^2\right)+\left(5x^2\right)^2$

$$=9a^2b^2-30abx^2+25x^4$$

2. $\left[\left(x^2+3\right)+x\right]\left[\left(x^2+3\right)-x\right]=\left(x^2+3\right)^2-x^2$

$$\begin{aligned}&=x^4+6x^2+9-x^2\\&=x^4+5x^2+9\end{aligned}$$

3. $(1-4ax)^3=1^3-3(1)^2(4ax)+3(1)(4ax)^2-(4ax)^3$

$$=1-12ax+48a^2x^2-64a^3x^3.$$

4. $\left(x^3+6\right)\left(x^3-8\right)=\left(x^3\right)^2+(6-8)x^3+6(-8)$

$$=x^6-2x^3-48$$

5. $(a+2)(a-3)(a-2)(a+3)=[(a+2)(a-2)][(a-3)(a+3)]$

$$\begin{aligned}&=\left[a^2-4\right]\left[a^2-9\right]\\&=\left(a^2\right)^2+(-4-9)a^2+(-4)(-9)\\&=a^4-13a^2+36.\end{aligned}$$

2.1 Ejercicios propuestos

Efectuar las siguientes operaciones usando los Productos Notables:

1. $(1-a)(a+1)$.
2. $\left(a^2+8\right)\left(a^2-7\right)$.
3. $(a+b-1)(a+b+1)$.
4. $\left(2a^3-5b^4\right)^2$
5. $(2a+x)^3$.
6. $(1-a+b)(b-a-1)$.

2.1.1 Solución

Al realizar los ejercicios, se debe concluir en las siguientes respuestas:

1. $1-a^2$.
2. a^4+a^2-56.
3. $a^2+2ab+b^2-1$.
4. $4a^6-20a^3b^4+25b^8$.
5. $8a^3+12a^2x+6ax^2+x^3$.
6. $a^2-2ab+b^2-1$.