

Masterarbeit

**Effiziente Berechnung von  $K_5$ -Minoren  
in Graphen**

**Julian Sauer**

**13. September 2019**

Betreuer:

Prof. Dr. Petra Mutzel

Prof. Dr. Jens Schmidt

Fakultät für Informatik

Algorithm Engineering (LS 11)

Technische Universität Dortmund

<http://ls11-www.cs.tu-dortmund.de>



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation und Hintergrund . . . . .	1
1.2	Aufbau der Arbeit . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Definitionen</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Algorithmus von Kezdy und McGuinness</b>	<b>9</b>
3.1	Behandlung von $K_{3,3}$ -Minoren . . . . .	9
3.2	Sequenzieller Algorithmus zum Finden von $K_5$ -Minoren . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Wagner Struktur</b>	<b>19</b>
4.1	Algorithmus von Kezdy und McGuinness als Wagner-Struktur . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Implementierung</b>	<b>31</b>
<b>6</b>	<b>Experimentelle Analyse</b>	<b>33</b>
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>35</b>
<b>A</b>	<b>Weitere Informationen</b>	<b>37</b>
	Abbildungsverzeichnis	40
	Algorithmenverzeichnis	41
	Symbolverzeichnis	43
	Literaturverzeichnis	45
	Eidesstattliche Versicherung	45



# Kapitel 1

## Einleitung

1.1 Motivation und Hintergrund

1.2 Aufbau der Arbeit



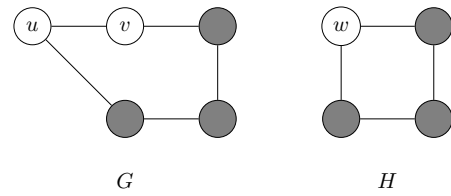
## Kapitel 2

### Definitionen

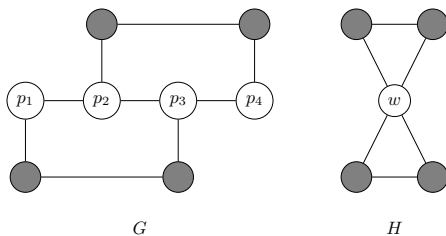
Vorab werden einige Definitionen und Notationen festgelegt, die im Verlauf der Arbeit verwendet werden. Der Algorithmus arbeitet mit einem ungerichteten Graph  $G = (V, E)$  ohne Mehrfachkanten, wobei  $E$  die Menge der Kanten und  $V$  die Knotenmenge sei.

Eine Kante  $e \in E$ , die zwei Knoten  $u$  und  $v$  verbindet, wird durch  $e = (u, v)$  angegeben. Ein Pfad  $P(u, v)$  verbindet zwei Knoten  $u$  und  $v$  über eine Folge von Knoten, die adjazent zueinander sind. Bei der Kontraktion einer Kante  $e = (u, v)$  wird diese mit ihren beiden End-

punkten aus dem Graph entfernt und einen neuen Knoten  $w$  ersetzt. Die Nachbarknoten von  $w$  werden auf die Menge der adjazenten Knoten von  $u$  und  $v$  gesetzt. In Abbildung 2.1 ist das Vorgehen skizziert. Analog kann, wie in Abbildung 2.2 gezeigt, ein Pfad kontrahiert werden, wobei der neu eingefügte Knoten  $w$  Kanten zu der Menge der adjazenten Knoten aller Knoten des Pfades besitzt.



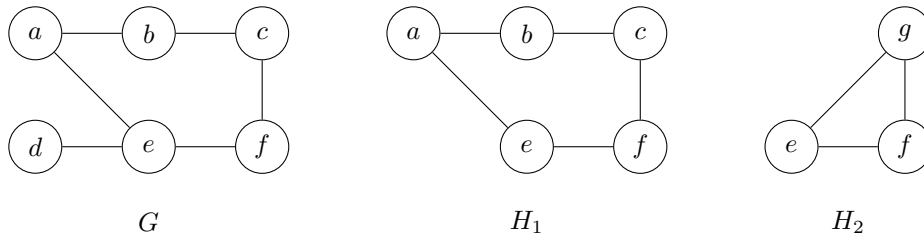
**Abbildung 2.1:** Die Kante, die  $u$  und  $v$  in  $G$  verbindet, wird kontrahiert, sodass sie in  $H$  durch den neuen Knoten  $w$  ersetzt wird.



**Abbildung 2.2:** Der Pfad von  $p_1$  bis  $p_4$  wird kontrahiert. Der neue Knoten  $w$  in  $H$  enthält alle Nachbarn der Pfadknoten in  $G$ .

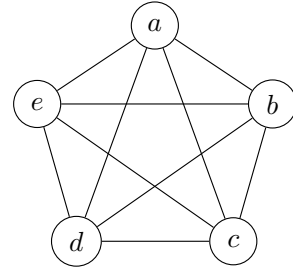
Ein Minor  $H$  eines Graphen  $G$  bezeichnet einen Graph, der isomorph zu  $G$  ist, nachdem eine beliebige Menge an Operationen von Kantenkontraktionen, Kantenentfernungen und Knotenentfernungen durchgeführt wurde. Ein Beispiel dazu findet sich in Abbildung 2.3. Jeder Graph ist sein eigener Minor, genauso ist jeder Teilgraph ein gültiger Minor. Dass  $H$  ein Minor von  $G$  ist, wird dargestellt durch  $H \prec_M G$ . Das Branch-Set eines Knotens  $w$  aus einem Minor von  $G$  bezeichnet die Menge an Knoten, die durch Kontraktionen zu  $w$  verschmolzen wurden. In

Abbildung 2.3 besteht beispielsweise das Branch-Set von  $g$  aus  $\{a, b, c\}$ , zu  $f$  in  $H_2$  gehört die Knotenmenge  $\{f\}$  in  $G$ . Für die Knotenmenge  $U \in V$  bezeichnet  $G - U$  den Teilgraph, der entsteht, wenn alle Knoten aus  $U$  mit ihren inzidenten Kanten aus  $G$  entfernt werden. Ein Homöomorph eines Graphen  $G$  enthält alle Knoten und Kanten aus  $G$ , zusätzlich können aber Kanten als gegenteilige Operation zur Kontraktion unterteilt werden. Für eine Kante  $e = (u, v)$  bedeute das, dass  $e$  entfernt wird, dafür ein neuer Knoten  $w$  und zwei neue Kanten  $(u, w)$  und  $(w, v)$  eingefügt werden.



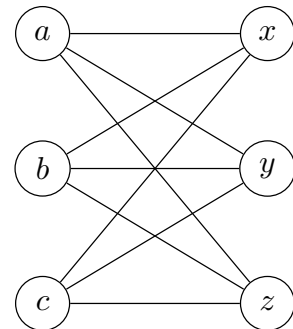
**Abbildung 2.3:** Ein Graph  $G$  mit seinen Minoren  $H_1$  und  $H_2$ . Um  $H_1$  zu erhalten, wurde in  $G$  die Kante  $(d, e)$  und anschließend der Knoten  $d$  entfernt. Für  $H_2$  wurden außerdem der Pfad  $P(a, c)$  kontrahiert.

Ein Graph wird als planar bezeichnet, wenn er sich so in der Ebene einbetten lässt, dass sich keine Kanten kreuzen. Ein  $K_5$  (s. Abb. 2.4) ist ein spezieller Graph, der aus fünf Knoten besteht, die alle zueinander adjazent sind. Ein  $K_{3,3}$  (s. Abb. 2.5) ist ein vollständig bipartiter Graph mit sechs Knoten. Er lässt sich also in zwei Knotenmengen unterteilen (im Folgenden als rote und blaue Menge bezeichnet), sodass alle Knoten der einen Menge zu allen Knoten der anderen Menge benachbart sind. Nach dem Satz von Kuratowski ist ein Graph planar, wenn er kein  $K_5$ - oder  $K_{3,3}$ -Homöomorph als Teilgraph beinhaltet. Eine alternative Formulierung von Wagner sagt aus, dass ein Graph planar ist, wenn er keinen  $K_5$ -Minor oder  $K_{3,3}$ -Minor enthält. [4]



**Abbildung 2.4:** Der Graph  $K_5$ .

Als nächstes wird ein  $K_{3,3}$  genauer betrachtet. Sei dessen rote Knotenmenge  $R = \{a, b, c\}$  und blaue  $B = \{x, y, z\}$ . Diese sechs Knoten werden in einem  $K_{3,3}$ -Homöomorph  $H$  als Branch-Ends genannt und zeichnen sich dadurch aus, dass sie als einzige Knoten in  $H$  den Grad 3 haben. Ein Branch-Path in  $H$  ist ein Pfad, der zwei Branch-Ends verbindet, beispielsweise  $P(a, x)$ . Ein Branch-Fan bezieht sich immer auf einen der Branch-Ends und wird z.B. für  $a$  als  $F(a)$  geschrieben. Bezeichnet werden

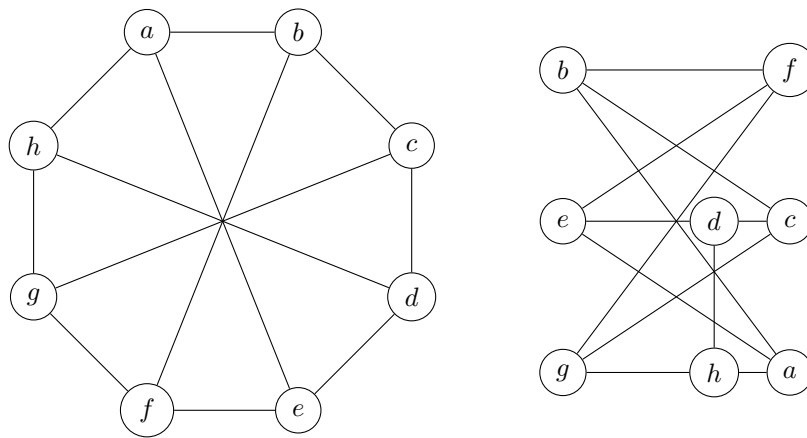


**Abbildung 2.5:** Der Graph  $K_{3,3}$ .

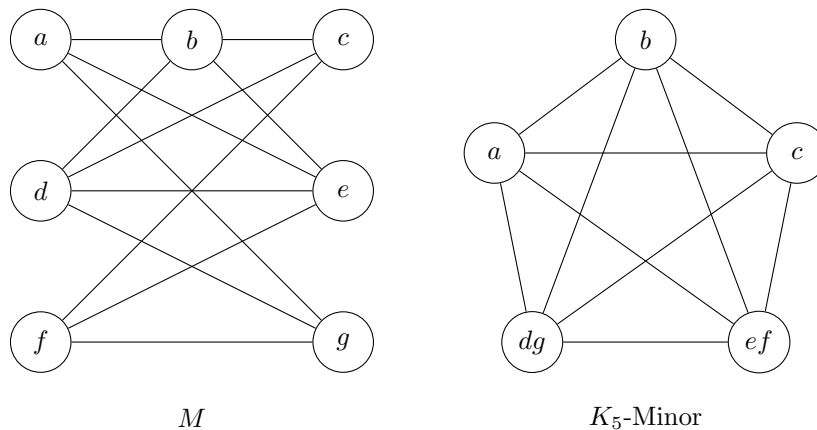


dadurch alle Pfade, die zu einem anderen Branch-End führen - für  $a$  also die Pfade  $P(a, x)$ ,  $P(a, y)$  und  $P(a, z)$ .

Der Graph  $W$  bezeichnet einen speziellen Graph, der aus acht Knoten besteht. Seine äußeren Kanten bilden einen Kreis, außerdem sind die Knoten jeweils adjazent zu den gegenüberliegenden. Eine Darstellung findet sich links in Abbildung 2.6. Er enthält einen  $K_{3,3}$  als Minor (in der Abbildung rechts angedeutet), jedoch keinen  $K_5$ . Als  $M$  wird ein Graph bezeichnet, der einen  $K_{3,3}$  als Teilgraph enthält, jedoch einen zusätzlichen Knoten und zwei zusätzliche Kanten enthält. Er ist insofern interessant, als dass er, wie in Abbildung 2.7 zu sehen, neben einem  $K_{3,3}$ -Minor auch einen  $K_5$ -Minor enthält.



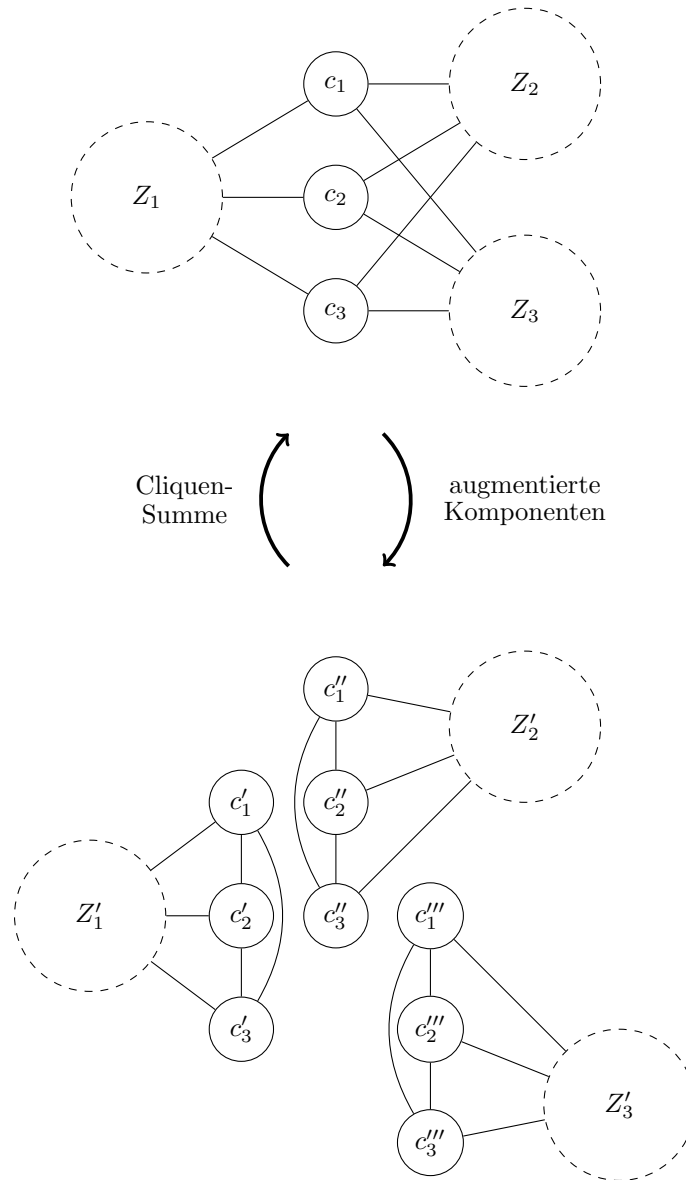
**Abbildung 2.6:** Der Graph  $W$ , links in seiner üblichen Darstellung, rechts mit angedeutetem  $K_{3,3}$ -Minor.



**Abbildung 2.7:** Der Graph  $M$  sowie ein  $K_5$ -Minor aus  $M$ .

Als  $(i)$ -Separator wird eine Menge  $S$  bestehend aus  $i$  Knoten in einem zusammenhängenden Graph  $G$  bezeichnet, sodass  $G - S$  nicht mehr zusammenhängend ist. Ein  $(i, j)$ -Separator ist ein  $i$ -Separator, sodass  $G - S$  aus mindestens  $j$  Zusammenhangskomponenten

besteht. In Abbildung 2.8 wird ein  $(3, 3)$ -Separator im linken Graph gezeigt. Durch einen Separator können augmentierte Komponenten definiert werden: Sind  $C \subseteq V$  die  $i$  Knoten, die zu einem  $(i, j)$ -Separator in  $G$  gehören, wird der Graph durch  $G - C$  zunächst in  $j$  Zusammenhangskomponenten zerlegt. Anschließend werden Kopien der Knoten aus  $C$  zu jeder Komponente hinzugefügt. Sie bilden dabei in jeder Zusammenhangskomponente eine Clique. Außerdem besitzen sie Kanten zu Knoten in der Zusammenhangskomponente, falls eine Kante  $e = (c, z)$  in  $G$  existierte,  $c \in C$  und  $z$  ein Knoten der Zusammenhangskomponente ist. Jeder der resultierenden Graphen ist eine augmentierte Komponente des Ursprungsgraphen  $G$  und wie in Theorem 3.1.1 bewiesen wird, evtl. ein Minor zu  $G$ . Als gegenteilige Operation kann eine Cliques-Summe verwendet werden, um zwei Graphen zu verschmelzen. Dazu müssen zwei Graphen  $H_1$  und  $H_2$  als Teilgraph eine gleich große Clique enthalten.  $H_1$  und  $H_2$  können zu einem Graph zusammengefügt werden, indem je ein Knoten von der Clique in  $H_1$  und in  $H_2$  zu einem zusammengefügt werden. Im resultierenden Graph dürfen außerdem Kanten zwischen den Knoten der Clique entfernt werden. Dadurch ist es möglich, einen Graph  $G$  in augmentierte Komponente zu zerlegen und anschließend durch eine Cliques-Summe wieder  $G$  zu erhalten. Dieses Vorgehen wird in Abbildung 2.8 gezeigt, dabei wird der linke Graph rechts in augmentierte Komponenten zerlegt bzw. von rechts nach links werden drei Graphen durch eine Cliques-Summe zusammengefügt.



**Abbildung 2.8:** Der linke Graph wird in drei augmentierte Komponenten durch den  $(3, 3)$ -Separator  $C = \{c_1, c_2, c_3\}$  geteilt. Alle  $Z_i$  und  $Z'_i$  stellen Teilgraphen dar, die zur Übersicht zu einem Knoten zusammengefügt wurden. Die drei rechten Graphen können durch die Cliques-Summe der Cliques  $\{c'_1, c'_2, c'_3\}$  sowie  $\{c''_1, c''_2, c''_3\}$  und  $\{c'''_1, c'''_2, c'''_3\}$  den rechten Graph erzeugen. Während der Cliques-Summen Operation dürfen die Kanten, die die Knoten in den Cliques verbinden, gelöscht werden.



## Kapitel 3

# Algorithmus von Kezdy und McGuinness

Da die Arbeit auf dem sequenziellen Algorithmus von Kezdy und McGuinness, den sie in [1] vorstellen, beruht, wird er im Folgenden erklärt. Als Eingabe wird ein ungerichteter Graph ohne Mehrfachkanten erwartet, ausgegeben wird, ob ein  $K_5$ -Minor enthalten ist oder nicht. Für den Fall, dass einer gefunden wurde, kann zusätzlich ausgegeben werden, welche Knoten den Minor formen. Die Laufzeit liegt in  $\mathcal{O}(n^2)$ .

Planaritätstests können bereits in linearer Laufzeit entscheiden, ob ein Graph einen  $K_5$ - oder  $K_{3,3}$ -Minor enthält. Es muss folglich der Fall behandelt werden, in dem der Test stoppt, weil er einen  $K_{3,3}$ -Minor gefunden hat. Denn es kann nicht garantiert werden, ob zusätzlich ein  $K_5$ -Minor enthalten ist. Als Lösung testet der Algorithmus von Kezdy und McGuinness, ob drei der Knoten eines gefundenen  $K_{3,3}$ -Minor einen  $(3,3)$ -Separator bilden und teilt den Graph in augmentierte Komponenten auf. Anschließend kann der Planaritätstest auf die einzelnen Komponenten rekursiv angewendet werden.

### 3.1 Behandlung von $K_{3,3}$ -Minoren

Die folgenden Theoreme und ihre Beweise sind [1] entnommen.

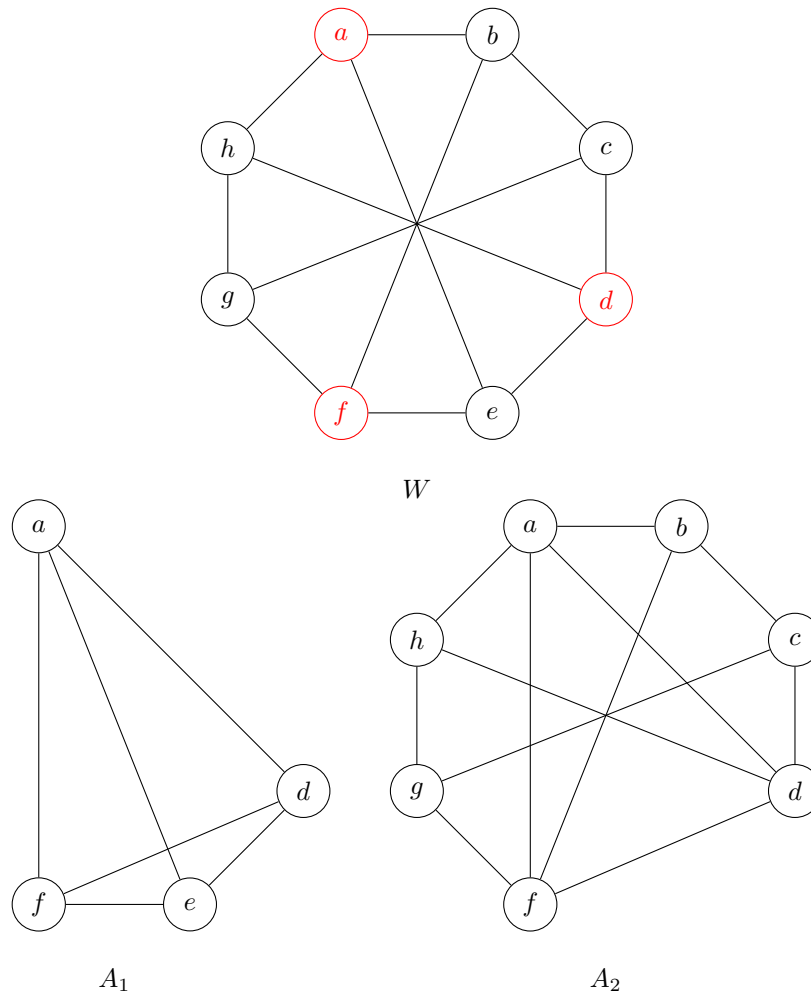
Um das zentrale Theorem aus [1], welches den  $K_{3,3}$ -Minor untersucht, zu erklären, wird zunächst die Gültigkeit augmentierter Komponenten behandelt:

**3.1.1 Theorem.** *Für  $k \geq 3$ : Sei  $G$  ein  $k$ -zusammenhängender Graph und  $C$  ein  $k$ -Separator in  $G$ . Alle durch  $C$  definierten augmentierten Komponenten sind Minoren von  $G$  genau dann, wenn es entweder mindestens  $k$  Komponenten sind oder mindestens zwei der Komponenten jeweils aus mehr als einem Knoten bestehen.*

*Beweis.* Seien  $c_1, c_2, \dots, c_k$  die Knoten von  $C$  und  $Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_k\}$  beziehungsweise  $Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_{k-1}\}$  die Zusammenhangskomponenten, die durch  $G - C$  entstehen. Die

zugehörigen augmentierten Komponenten seien  $A_1, A_2, \dots, A_k$  bzw.  $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ . Betrachtet wird eine beliebige dieser augmentierten Komponenten  $A_i$ . Der Definition der augmentierten Komponenten nach finden sich bereits alle Knoten von  $A_i$  in  $G$  wieder. Weiterhin enthält  $G$  mindestens alle Kanten in  $A_i - C$  sowie die verbindenden Kanten zwischen  $A_i$  und  $C$ . Jedoch bilden in  $A_i$  die Knoten von  $C$  eine Clique, es existieren also ggf. Kanten zwischen den Knoten von  $C$  in  $A_i$ , die es nicht in  $G$  gibt. Es bleibt zu zeigen, dass die Kanten, die für diese Clique in  $A_i$  nötig sind, durch Kantenkontraktionen in  $G$  erzeugt werden können. Dadurch, dass  $G$   $k$ -zusammenhängend ist, besitzt jede Zusammenhangskomponente von  $G - C$  Kanten zu  $c_1, c_2, \dots, c_k$ . Würde eine Kante zu einem Knoten  $c_j$  mit  $1 \leq j \leq k$  fehlen, wäre ein  $k - 1$ -Separator bestehend aus  $C - c_j$  möglich, was im Widerspruch zu dem  $k$ -Zusammenhang stehen würde. Das Theorem unterscheidet nun zwei Fälle, um die fehlenden Kanten bereitstellen zu können:

1. Es existieren  $k$  Zusammenhangskomponenten. Wird  $A_i$  betrachtet, kommen die Knoten in  $Z - Z_i$  in Frage, um durch Kantenkontraktionen die fehlenden Kanten für die Clique von  $C$  in  $A_i$  zu erzeugen. Um die Kanten von  $C$  in  $A_i$  in  $G$  zu erzeugen, kann zunächst der Pfad, der  $c_1$  mit  $Z_1$  verbindet, kontrahiert werden. Anschließend ist  $c_1$  mit allen Knoten in  $C$  verbunden. Dies kann analog für alle Knoten in  $C$  und den entsprechenden Zusammenhangskomponenten durchgeführt werden außer für  $c_i$ , da  $A_i$  der gesuchte Minor ist. Allerdings ist  $c_i$  aufgrund des  $k$ -Zusammenhangs mit allen anderen Zusammenhangskomponenten verbunden und nach den beschriebenen Kontraktionen bildet  $C$  eine Clique.
2. Es existieren  $k - 1$  Komponenten, aber mindestens zwei bestehen aus mehr als einem Knoten. Analog zum vorherigen Fall können die Pfade zwischen den Knoten von  $C$  und den Zusammenhangskomponenten  $A$  kontrahiert werden. Es fehlt jedoch ein Pfad, da eine Zusammenhangskomponente weniger vorliegt. Es gibt mindestens eine Zusammenhangskomponente aus  $Z - Z_i$ , die aus zwei oder mehr Knoten besteht. Da der Graph  $k$ -zusammenhängend ist, sind mindestens zwei dieser Knoten mit allen in  $C$  verbunden, sodass sie durch Kontraktionen mit zwei unterschiedlichen Knoten aus  $C$  genutzt werden können um die gesuchte Clique zu erzeugen.  $\square$



**Abbildung 3.1:** Gegenbeispiel zu Theorem 3.1.1 für  $k = 3$  mit  $C = \{a, d, f\}$  in  $W$ , wodurch die  $k - 1$  Komponenten  $A_1$  und  $A_2$  entstehen, von denen nur eine aus mehr als einem Knoten besteht. Die Komponente  $A_1$  ist zwar ein gültiger Minor, da sie etwa durch die Kontraktionen der Kanten  $(a, b)$ ,  $(a, h)$ ,  $(f, g)$  und  $(c, d)$  aus  $W$  erzeugt werden kann.  $A_2$  dagegen kann nicht durch Kontraktionen aus  $W$  erzeugt werden - wird beispielsweise die Kante  $(d, e)$  in  $W$  kontrahiert, fehlt die Kante  $(a, f)$  in  $A_2$ . Analog kann  $e$  mit keiner seiner inzidenten Kanten kontrahiert werden, um einen zu  $A_2$  isomorphen Graph zu erhalten.

Als nächstes stellen Kezdy und McGuinness fest, dass im Fall eines  $(3, 3)$ -Separators der Graph in augmentierte Komponenten zerlegt werden kann:

**3.1.2 Theorem.** *Sei  $G$  ein 3-zusammenhängender Graph mit einem  $(3, 3)$ -Separator  $C$ .  $G$  hat einen  $K_5$ -Minor genau dann, wenn eine der durch  $C$  definierten augmentierten Komponenten einen  $K_5$ -Minor enthält.*

*Beweis.* Zunächst kann festgestellt werden, dass falls eine der augmentierten Komponenten einen  $K_5$ -Minor enthält, dieser laut Theorem 3.1.1 auch ein Minor von  $G$  ist. Es bleibt zu zeigen, dass sich ein  $K_5$ -Minor nicht auf zwei augmentierte Komponenten er-

streckt, sondern sich ausschließlich in einer befindet. Angenommen es gilt  $K_5 \prec_M G$  und zwei der Branch-Sets, die den  $K_5$ -Minor bilden, befinden sich jeweils vollständig in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten. In diesem Fall wäre  $C$  ein 3-Separator in dem gefundenen Minor, was im Widerspruch zu dem 4-Zusammenhang des  $K_5$  steht.  $\square$

Das zentrale Theorem ist darauf zurückzuführen, dass jeder Graph ohne  $K_5$ -Minor durch Cliques-Summen von Teilgraphen, die planar oder isomorph zu  $W$  sind, gebildet werden kann. [6] Eine genauere Betrachtung findet in Kapitel 4 statt.

**3.1.3 Theorem.** *Sei  $G$  ein 3-zusammenhängender Graph, der ein  $K_{3,3}$ -Homöomorph  $S$  enthält, dessen Branch-Ends in die rote Knotenmenge  $R = \{a, b, c\}$  und blaue  $B = \{x, y, z\}$  unterteilt sind. Eine der folgenden Bedingungen trifft auf  $G$  zu:*

1.  $G$  enthält einen  $K_5$ -Minor.
2.  $G$  ist isomorph zu  $W$ .
3.  $\{a, b, c\}$  bilden einen 3-Separator, sodass  $\{x, y, z\}$  in separaten Komponenten liegen.
4.  $\{x, y, z\}$  bilden einen 3-Separator, sodass  $\{a, b, c\}$  in separaten Komponenten liegen.

Durch die Theoreme 3.1.1 und 3.1.2 wurde gezeigt, dass der Graph in den Fällen 3 und 4 in augmentierte Komponenten zerlegt und darauf ein Planaritätstest ausgeführt werden kann. Anschließend stellen die Autoren einige Lemmata auf, mit denen untersucht wird, ob  $S$  einen  $K_5$ -Minor enthält - also ob Bedingung 1 zutrifft.

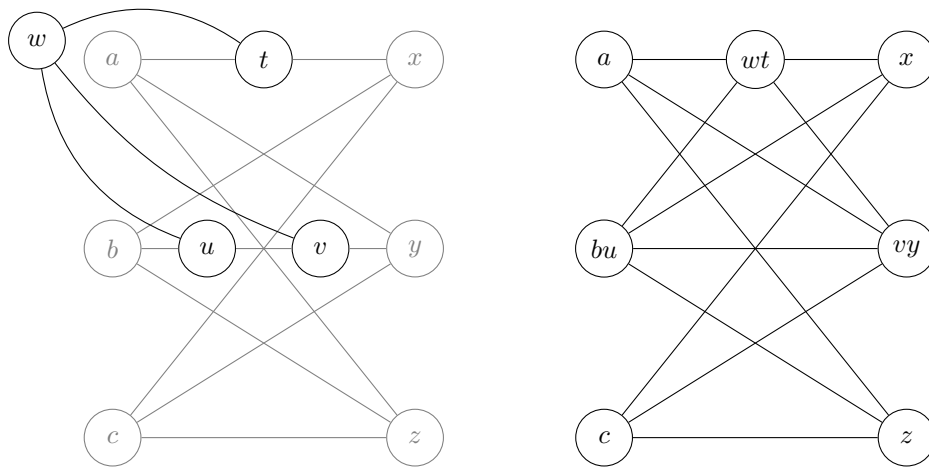
**3.1.4 Lemma.** *Sei  $G$  ein 3-zusammenhängender Graph und  $S$  ein  $K_{3,3}$ -Homöomorph in  $G$ . Enthält  $G$  drei Pfade von einem Knoten  $w \in G - S$  zu drei Knoten in  $S$ , die nicht alle im selben Branch-Fan liegen, enthält  $G$  einen  $K_5$ -Minor.*

*Beweis.* Seien  $t, u, v$  die drei Endpunkte der Pfade in  $S$ . Mindestens einer von ihnen ist ein innerer Knoten, da sonst alle im selben Branch-Fan liegen würden. Sei o. B. d. A.  $t$  ein solcher innerer Knoten auf dem Pfad  $P(a, x)$ . Folglich können  $u$  und  $v$  nicht beide in  $F(a)$  oder  $F(x)$  liegen, sonst lägen alle drei im gleichen Branch-Fan.

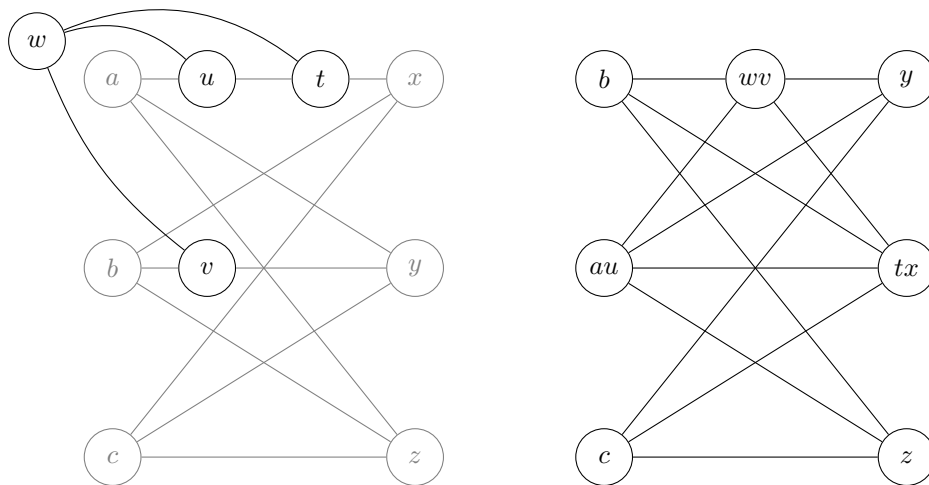
1.  $u$  und  $v$  sind nicht im gleichen Branch-Fan wie  $t$ . Dann müssen  $u$  und  $v$  ebenfalls innere Knoten sein, im Beispiel auf den Pfaden  $P(y, b)$  bzw.  $P(z, c)$ . Es kann ein  $M$ -Minor durch folgende Kontraktionen erzeugt werden:  $u$  mit einem der roten und  $v$  mit einem der blauen Knoten (analog  $u$  mit blau und  $v$  mit rot) sowie  $P(w, t)$ .
2.  $u$  oder  $v$  liegen auf  $P(a, x)$ . Sei o. B. d. A.  $u \in P(a, x)$ . Da  $t$  ebenfalls in diesem Pfad liegt, gilt  $\{t, u\} \in F(a) \cup F(x)$ , sodass  $v$  nicht in diesen beiden Branch-Fans liegen kann. Es können  $t$  und  $v$  getauscht werden, sodass eine Reduktion auf Fall 1 erreicht wird.



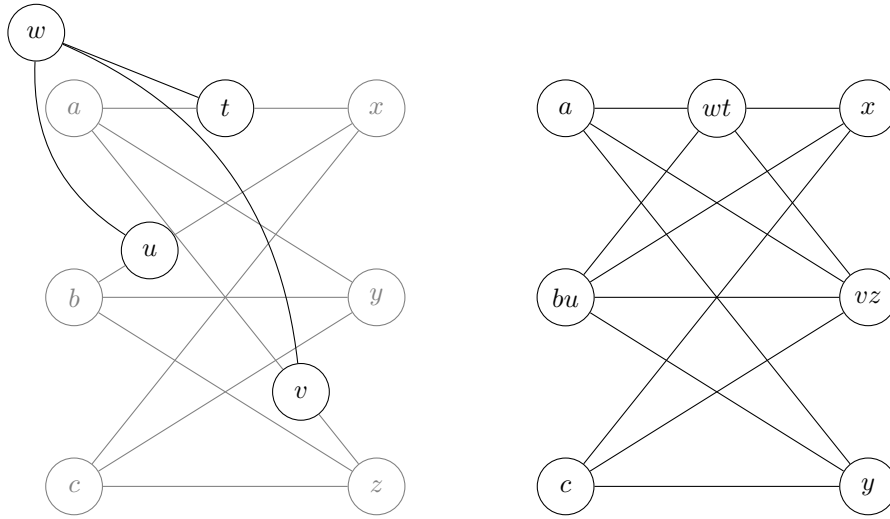
3. Entweder  $u$  oder  $v$  liegen im gleichen Branch-Fan wie  $t$ . Sei o.B.d.A.  $u \in F(x) - P(a, x)$ , im Beispiel auf dem Pfad  $P(b, x)$ . Es gilt  $\{t, u\} \in F(x)$ , weshalb  $v$  in einem anderen Branch Fan sein muss. Da alle roten Knoten in  $F(x)$  liegen, gilt konkreter  $v \in (F(y) \cup F(z)) - \{a, b, c\}$ . Es können  $P(b, u)$  kontrahiert werden sowie je nach Fall entweder  $P(v, y)$  oder  $P(v, z)$ . Wird  $P(w, t)$  ebenfalls kontrahiert, entsteht erneut ein  $M$ -Minor.  $\square$



**Abbildung 3.2:** Beispiel zum ersten Fall von Lemma 3.1.4.



**Abbildung 3.3:** Beispiel zum zweiten Fall von Lemma 3.1.4.



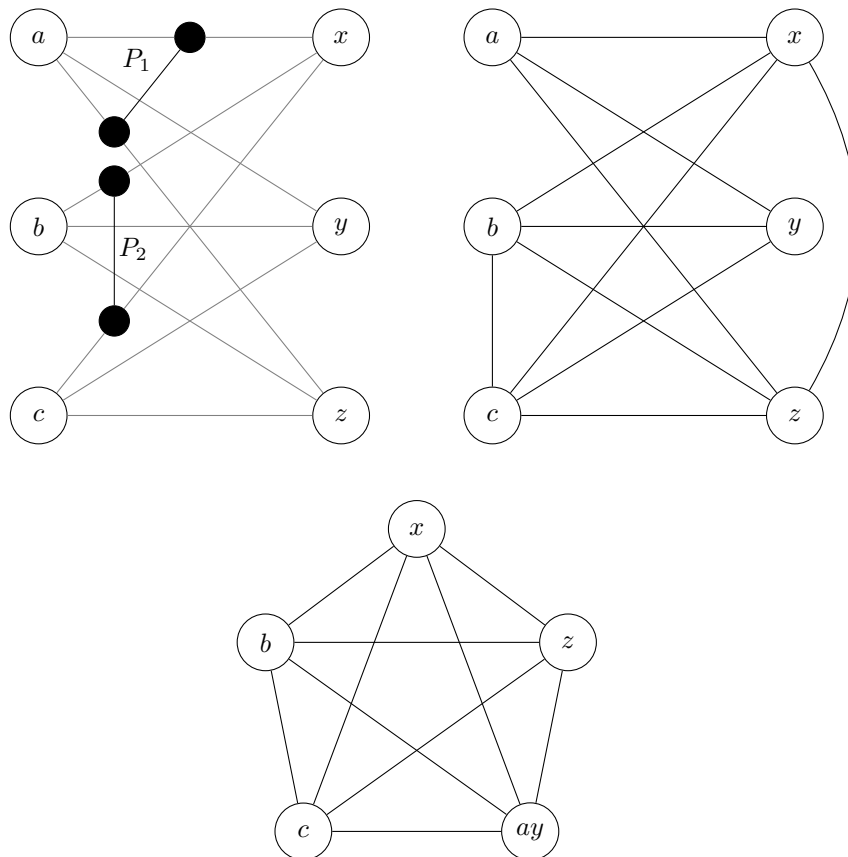
**Abbildung 3.4:** Beispiel zum dritten Fall von Lemma 3.1.4.

**3.1.5 Lemma.** Sei  $G$  ein 3-zusammenhängender Graph und  $S$  ein  $K_{3,3}$ -Homöomorph in  $G$ . Betrachtet wird ein Pfad außerhalb von  $S$ , der zwei Knoten in einem roten Branch-Fan verbindet, welche jedoch nicht beide auf dem gleichen Pfad in  $S$  liegen. Analog dazu wird ein Pfad außerhalb von  $S$  gesucht, der zwei Knoten in einem blauen Branch-Fan verbindet, ohne dass diese beide auf dem gleichen Pfad in  $S$  liegen. Existieren diese beiden Pfade in  $G$ , dann enthält  $G$  einen  $K_5$ -Minor.

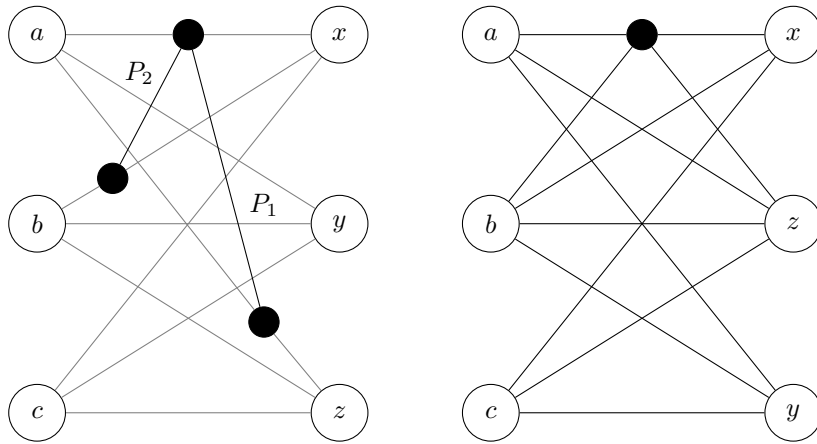
*Beweis.* Sei  $P_1$  der Pfad, der zwei Knoten in einem roten Branch-Fan verbindet und  $P_2$  der, der zwei in einem blauen Branch-Fan verbindet. O.B.d.A. hat  $P_1$  Endpunkte in  $F(a)$  und  $P_2$  in  $F(x)$ . Da laut Bedingung die Endpunkte nicht in einem einzelnen Pfad von  $S$  liegen, kann  $a$  kein Endpunkt von  $P_1$  und  $x$  kein Endpunkt von  $P_2$  sein. Es ergeben sich zwei Fälle:

1. Die beiden Pfade haben keine gemeinsamen Knoten. Da  $P_1$  beide Endpunkte in  $F(a)$  hat, liegen diese beiden Endpunkte in zwei unterschiedlichen blauen Branch-Fans. Entsprechend sind die Endpunkte von  $P_2$  in unterschiedlichen roten Branch-Fans. Werden die Endpunkte von  $P_1$  je mit den beiden blauen und die von  $P_2$  mit den beiden roten Knoten von  $S$  kontrahiert, entsteht ein  $K_5$ -Minor. Abbildung 3.5 skizziert den Fall beispielhaft.
2. Die beiden Pfade haben einen gemeinsamen Knoten  $w$ . Liegt dieser gemeinsame Knoten außerhalb von  $S$ , kann Lemma 3.1.4 angewendet werden, da die Endpunkte der Pfade nicht alle im gleichen Branch-Fan liegen. Liegt  $w$  innerhalb von  $S$ , ist er ein Endpunkt von  $P_1$  und  $P_2$  und muss auf dem Pfad  $P(a, x)$  liegen, da dieser der einzige gemeinsame Pfad ist, siehe links in 3.6. Sei  $P_1 = P(w, u)$  und  $P_2 = P(w, v)$ . Da  $u$  nicht in  $F(x)$  liegt und  $v$  nicht in  $F(a)$ , gibt es einen Pfad von  $u$  zu einem

blauen Knoten und von  $v$  zu einem roten Knoten, die sich nicht kreuzen und daher kontrahiert werden können. Durch die Kontraktion dieser beiden Pfade entsteht, wie in Abbildung 3.6 rechts zu sehen, ein  $M$ -Minor.  $\square$



**Abbildung 3.5:** Beispiel zum ersten Fall von Lemma 3.1.5. Links oben ist  $S$  mit zwei zusätzlichen Pfaden aus  $G$  abgebildet.  $P_1$  hat beide Endpunkte in  $F(a)$  sowie den blauen Branch-Fans  $F(x)$  und  $F(y)$ , mit denen die Endpunkte kontrahiert werden.  $P_2$  hat seine Endpunkte in den roten Branch-Fans  $F(b)$  und  $F(c)$ , mit denen sie kontrahiert werden. Rechts oben ist der dadurch entstehende Minor abgebildet und unten wird der enthaltene  $K_5$ -Minor gezeigt.



**Abbildung 3.6:** Beispiel zum zweiten Fall von Lemma 3.1.5. Rechts ist der enthaltene  $M$ -Minor abgebildet.

**3.1.6 Lemma.** Sei  $G$  ein 3-zusammenhängender Graph und  $S$  ein  $K_{3,3}$ -Homöomorph in  $G$ . Betrachtet wird ein Pfad außerhalb von  $S$ , der zwei innere Knoten paralleler Pfade in  $S$  verbindet sowie ein Pfad außerhalb von  $S$ , dessen Endpunkte nicht beide im gleichen Pfad von  $S$  liegen. Bestehen die Endpunkte der beiden Pfade aus mindestens drei unterschiedlichen Knoten in  $S$ , enthält  $G$  einen  $K_5$ -Minor.

**3.1.7 Lemma.** Sei  $G$  ein 3-zusammenhängender Graph und  $S$  ein  $K_{3,3}$ -Homöomorph in  $G$  mit den roten Knoten  $R = \{a, b, c\}$  und den blauen Knoten  $B = \{x, y, z\}$ . Bilden weder  $R$ , noch  $B$  einen  $(3, 3)$ -Separator, enthält  $G$  einen  $K_5$ -Minor.

*Beweis.* Falls  $R$  und  $B$  keinen  $(3, 3)$ -Separator bilden, ist sowohl der Graph  $G - R$  als auch  $G - B$  zusammenhängend. Beide liegen außerhalb von  $S$ . Die Endpunkte von  $P_1$  seien  $u_1$  und  $v_1$ , die von  $P_2$  seien  $u_2$  und  $v_2$ .  $u_1$  und  $v_1$  besitzen jeweils einen Pfad in  $S$  zu einem der roten Knoten. Folglich gibt es einen dritten roten Knoten, der keinen solchen Pfad besitzt -  $u_2$  wird so gewählt, dass er in dem Branch-Fan dieses Knotens liegt. Demnach sind  $u_1$ ,  $v_1$  und  $u_2$  unterschiedliche Knoten. Anschließend kann je nach vorliegendem Fall die Aussage auf eines der vorherigen Lemmata reduziert werden:

1.  $P_1$  oder  $P_2$  verbindet zwei parallele Pfade in  $S$ . In dem Fall kann Lemma 3.1.6 angewendet werden und  $G$  enthält einen  $K_5$ -Minor.
2. Die Endpunkte von  $P_1$  liegen in einem einzelnen roten Branch-Fan - analog liegen die von  $P_2$  in einem blauen. Nach Lemma 3.1.5 enthält  $G$  einen  $K_5$ -Minor.  $\square$

Als nächstes folgt der Beweis zu 3.1.3.

*Beweis.* Gezeigt wird, dass falls  $S$  keinen  $(3, 3)$ -Separator bildet,  $G$  entweder einen  $K_5$ -Minor enthält oder isomorph zu  $W$  ist. Falls kein  $K_5$ -Minor enthalten ist, gilt nach Lemma

3.1.7, dass  $G - R$  oder  $G - B$  nicht zusammenhängend ist. Demnach ist  $B$  ein 3-Separator, der den Graph teilt, aber die Knoten aus  $R$  liegen nicht alle in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten. Deshalb muss es außerhalb von  $S$  mindestens einen Pfad  $P_1$  geben, der zwei der roten Knoten in  $G - B$  verbindet. Analog gibt es einen Pfad  $P_2$ , der zwei blaue Knoten in  $G - R$  verbindet. Da  $P_1$  zwei rote Branch-Fans verbindet, liegen seine Endpunkte in zwei verschiedenen Pfaden von  $S$ . Gleiches gilt für die Endpunkte von  $P_2$ . Liegen die Endpunkte von  $P_1$  beide in einem einzelnen blauen Branch-Fan und die von  $P_2$  in einem einzelnen roten, dann enthält  $G$  laut Lemma 3.1.5 einen  $K_5$ -Minor. Liegen die Endpunkte von  $P_1$  in parallelen Pfaden von  $S$ , enthält  $G$  laut Lemma 3.1.6 einen  $K_5$ -Minor, da die Endpunkte von  $P_2$  nicht auf einem Pfad von  $S$  liegen (analog falls  $P_2$  auf parallelen Pfaden liegt). Übrig bleibt die Möglichkeit, dass die Endpunkte der beiden Pfade paarweise identisch sind, siehe rechts in Abbildung 2.6. Dann ist  $G$  ein Homöomorph zu  $W$  und enthält laut Lemma 3.1.3 keinen  $K_5$ -Minor bei Isomorphie zu  $W$ .  $\square$

## 3.2 Sequenzieller Algorithmus zum Finden von $K_5$ -Minoren

Da die Theoreme größtenteils auf 3-zusammenhängenden Graphen arbeiten, muss der Eingabegraph ggf. zunächst angepasst werden, bevor der Planaritätstests angewendet werden kann. Ist der Graph 1-zusammenhängend, gibt es einen Knoten, der einen  $(1, j)$ -Separator für  $j \geq 2$  bildet. Genauso müssen zwei Knoten existieren, die einen  $(2, j)$ -Separator bilden, falls der Graph 2-zusammenhängend ist. In beiden Fällen kann der Separator benutzt werden, um den Graph in  $j$  augmentierte Komponenten zu zerlegen. Anschließend kann der 3-Zusammenhang der einzelnen Komponenten rekursiv geprüft werden. Sind die Komponenten alle 3-zusammenhängend, kann auf jede ein Planaritätstest angewendet werden. Kezdy und McGuinness verwenden den Williamson-Algorithmus, [7] welcher in Linearzeit für einen Graph einen  $K_5$ - bzw.  $K_{3,3}$ -Homöomorph ausgibt oder feststellt, dass der Graph planar ist. In der Implementierung wird stattdessen der etwas neuere Planaritätstest von Boyer und Myrvold [5] verwendet, der bereits in OGDF existiert. Ergibt der Planaritätstest, dass eine Komponente planar ist, wird sie nicht weiter beachtet. Enthält sie einen  $K_5$ -Minor, kann der Algorithmus stoppen und diesen ausgeben. Wird ein  $K_{3,3}$ -Minor gefunden, wird geprüft, welcher der vier Fälle aus Theorem 3.1.3 zutrifft. Bei Isomorphie zu  $W$  wird die Komponente nicht weiter beachtet. Ist der  $K_{3,3}$ -Minor ein  $(3, 3)$ -Separator in der untersuchten Komponente, kann sie in weitere augmentierte Komponenten zerlegt und der Algorithmus rekursiv darauf angewendet werden. Andernfalls müssen genügend Pfade in der Komponente existieren, sodass der  $K_{3,3}$ -Minor auch einen  $K_5$ -Minor bildet und der Algorithmus ihn ausgeben und anhalten kann. Diese Schritte werden solange wiederholt, bis alle augmentierten Komponenten planar, isomorph zu  $W$  sind oder ein  $K_5$ -Minor gefunden wurde.

```

1 find_k5(g):
2   if u = find_1_separator(g) != null:
3     for component in augmented_components(g, (u)):
4       if k5 = find_k5(a) != null:
5         return k5
6     return null
7   if (u, v) = find_2_separator(g) != null:
8     for component in augmented_components(g, (u, v)):
9       if k5 = find_k5(a) != null:
10        return k5
11   return null
12
13 homeomorph = boyer_myrvold(g)
14 if homeomorph.is_planar():
15   return null
16 if homeomorph.is_k5:
17   return homeomorph
18 if homeomorph.is_k33:
19   if is_isomorphic_to_w(homeomorph):
20     return null
21
22 ((a, b, c), (x, y, z)) = homeomorph
23 if component_count(g - (a, b, c)) >= 3:
24   for component in augmented_components(g, (a, b, c)):
25     if k5 = find_k5(a) != null:
26       return k5
27   return null
28 if component_count(g - (x, y, z)) >= 3:
29   for component in augmented_components(g, (x, y, z)):
30     if k5 = find_k5(a) != null:
31       return k5
32   return null
33
34 return construct_k5_from_k33(g, homeomorph)

```

**Listing 3.1:** Algorithmus von Kezdy und McGuinness als Pseudo Code.

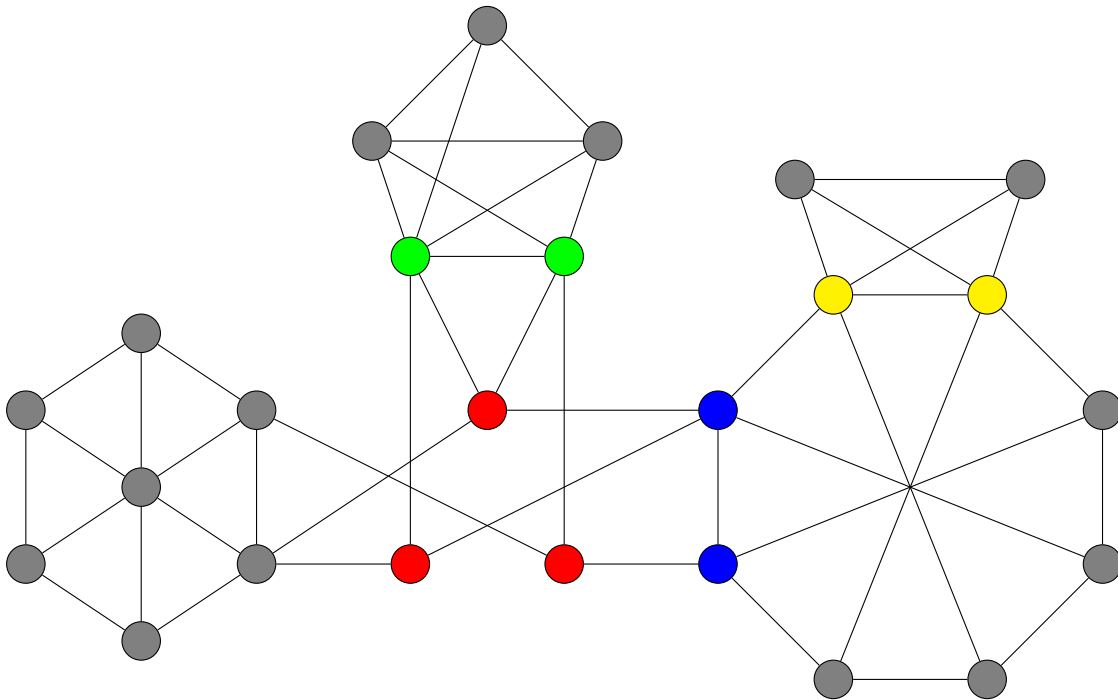
## Kapitel 4

# Wagner Struktur

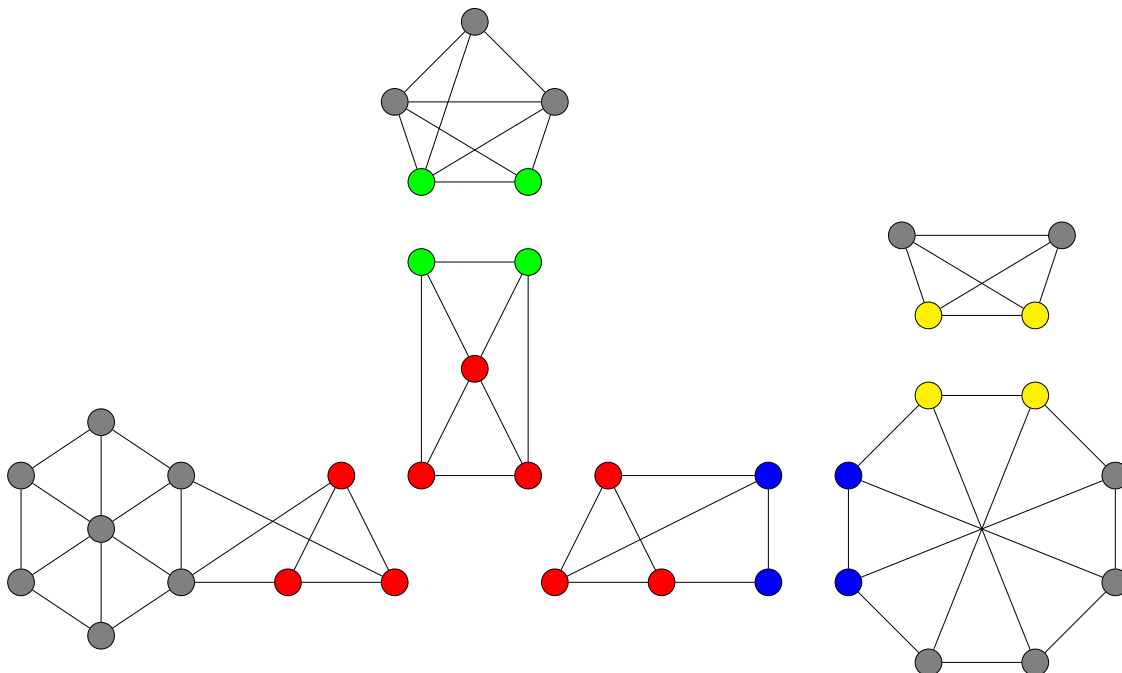
In diesem Kapitel soll Theorem 3.1.3 genauer betrachtet werden. Es ist, wie erwähnt, auf Wagner zurückzuführen:

**4.0.1 Theorem.** *Ein Graph enthält genau dann keinen  $K_5$ -Minor, wenn er ein Teilgraph eines Graphen ist, der aus planaren Graphen und Kopien von  $W$  erzeugt werden kann, welche an Cliques zusammengeführt wurden. [6]*

Als Beispiel ist dazu in Abbildung 4.1 ein Graph  $G$  zu sehen, der nicht planar ist, aber keinen  $K_5$ -Minor enthält und durch Cliques-Summen aus dem Graph  $G'$  aus Abbildung 4.2 erzeugt werden kann.  $G$  enthält demgegenüber nur planare Zusammenhangskomponente bzw. eine, die isomorph zu  $W$  ist. Einige Cliques sind hier mit je einer Farbe hervorgehoben, sodass durch das Zusammenfügen gleichfarbiger Knoten ein Graph  $G''$  erzeugt werden kann, der  $G$  als Teilgraph enthält. Zusätzlich bilden in  $G''$  die roten Knoten eine Clique, in  $G$  sind sie nicht adjazent. Um einen isomorphen Graph zu erzeugen, muss  $G'$  durch Cliques-Summen erzeugt werden, da bei der Operation Kanten zwischen Cliquesknoten im Anschluss entfernt werden dürfen. Somit kann Theorem 4.0.1 so umformuliert werden, dass jeder Graph ohne  $K_5$ -Minor durch Cliques-Summen von planaren Graphen und Kopien von  $W$  erzeugt werden kann. Problematisch ist allerdings, dass eine Cliques-Summe nicht festlegt, ob und welche Kanten innerhalb der Clique gelöscht werden. Das Theorem kann aber genutzt werden, um einen Graph in seine planaren Komponenten und Kopien von  $W$  aufzuteilen, sollte er keinen  $K_5$ -Minor enthalten.



**Abbildung 4.1:** Ein nicht-planarer Graph  $G$ , der keinen  $K_5$ -Minor enthält.



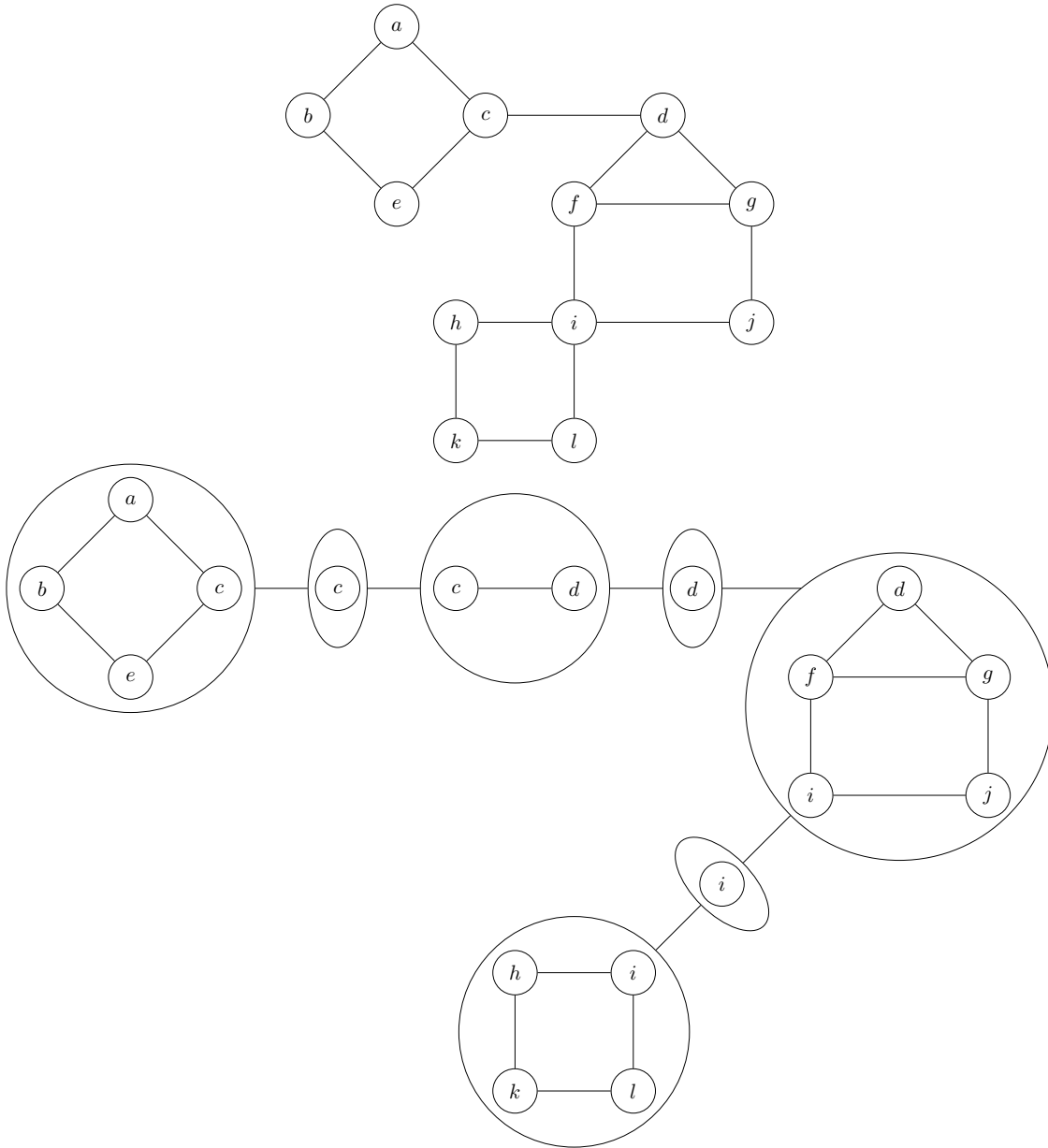
**Abbildung 4.2:** Ein nicht zusammenhängender Graph  $G'$ , dessen Zusammenhangskomponenten planar oder isomorph zu  $W$  sind.

In [3] und etwas detaillierter in [2] stellen Reed und Li eine Möglichkeit vor, einen  $K_5$ -Minor freien Graph als Baum (oder Wald für nicht zusammenhängende Graphen)



darzustellen, der die im obigen Theorem beschriebene Struktur besitzt. Diese wird im Folgenden als *Wagner-Struktur* bezeichnet und später wird gezeigt, dass der Algorithmus von Kezdy und McGuinness sie durch leichte Modifikation erzeugen kann. Reed und Li verwandeln dazu jede Zusammenhangskomponente des Eingabegraphen in sogenannte *Block-Trees*. Die Knoten dieser Bäume seien entweder als *Cliquenknoten* bezeichnet, falls sie Cliques-Summen repräsentieren, oder als *Graphknoten*, falls sie einen beliebigen Teilgraph des Eingabegraphen darstellen.

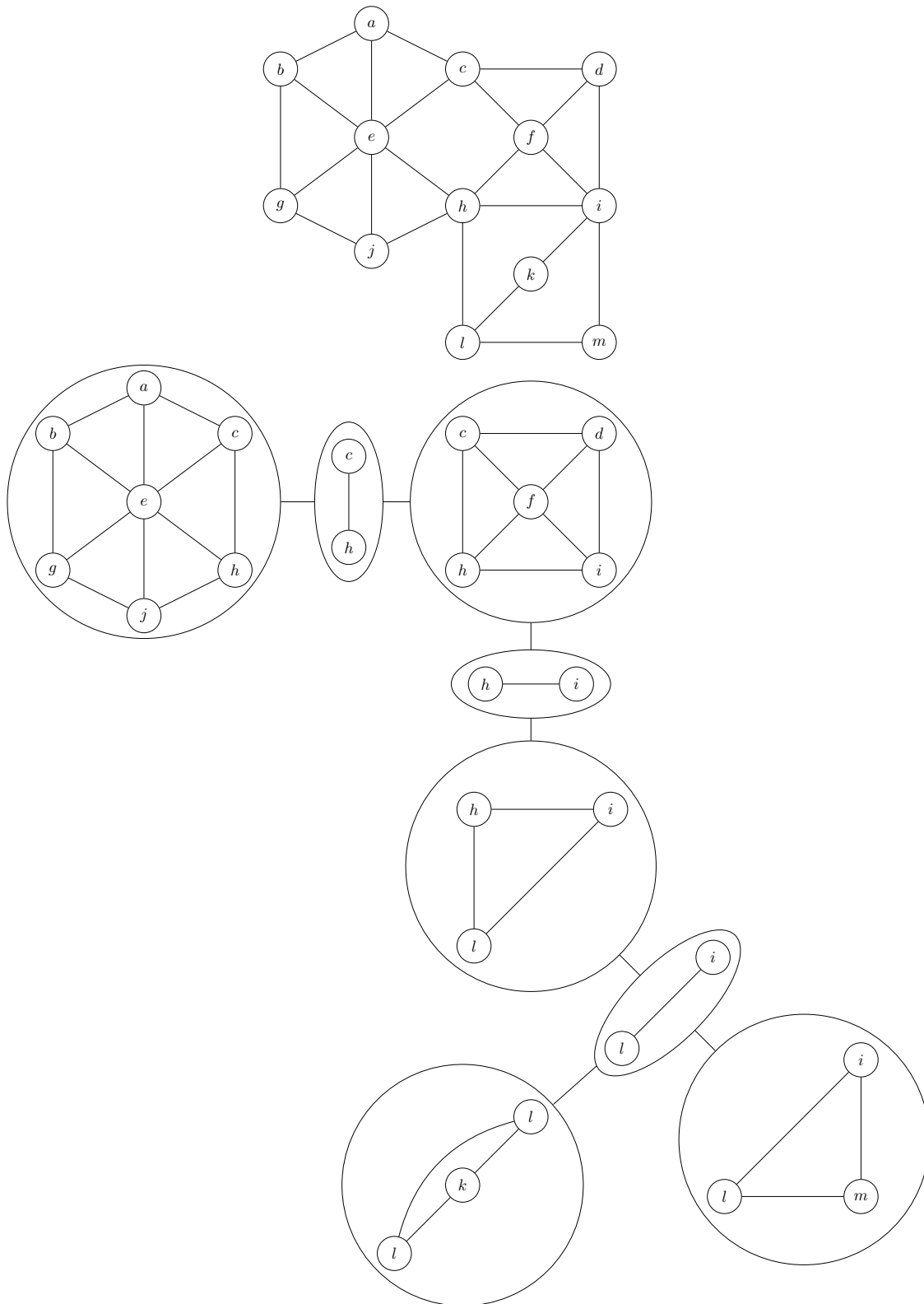
**1-Block-Tree:** Sei  $G = (V_G, E_G)$  ein zusammenhängender, aber nicht 2-zusammenhängender,  $K_5$ -Minor freier Graph und  $T_1 = (V_T, E_T)$  der 1-Block-Tree. Sei  $v \in V_G$  ein  $(1, j)$ -Separator in  $G$  für  $j \geq 2$  und  $Z_1, \dots, Z_j$  die Zusammenhangskomponenten von  $G - v$ . Dann wird für jedes  $Z_i$  ein Graphknoten  $t_{Z_i}$  in  $T_1$  angelegt, der den Teilgraph  $Z_i \cup v$  enthält. Außerdem wird ein Cliquenknoten  $t_v$  angelegt, der  $v$  enthält sowie Kanten zu allen  $t_{Z_i}$  besitzt. Wird das für alle  $(1, j)$ -Separator wiederholt, ist das Ergebnis ein Baum, dessen Graphknoten 2-zusammenhängende Teilgraphen in  $G$  repräsentieren und Cliquenknoten, die auf  $(1, j)$ -Separatoren in  $G$  verweisen. Ein Beispiel dazu findet sich in Abbildung 4.3.



**Abbildung 4.3:** Oben ist ein Graph mit einem dazugehörigen 1-Block-Tree unterhalb. Die Cliquenknoten sind ovalförmig und enthalten einzelne Knoten, die Graphknoten sind rund und enthalten Teilgraphen aus dem Eingabegraph.

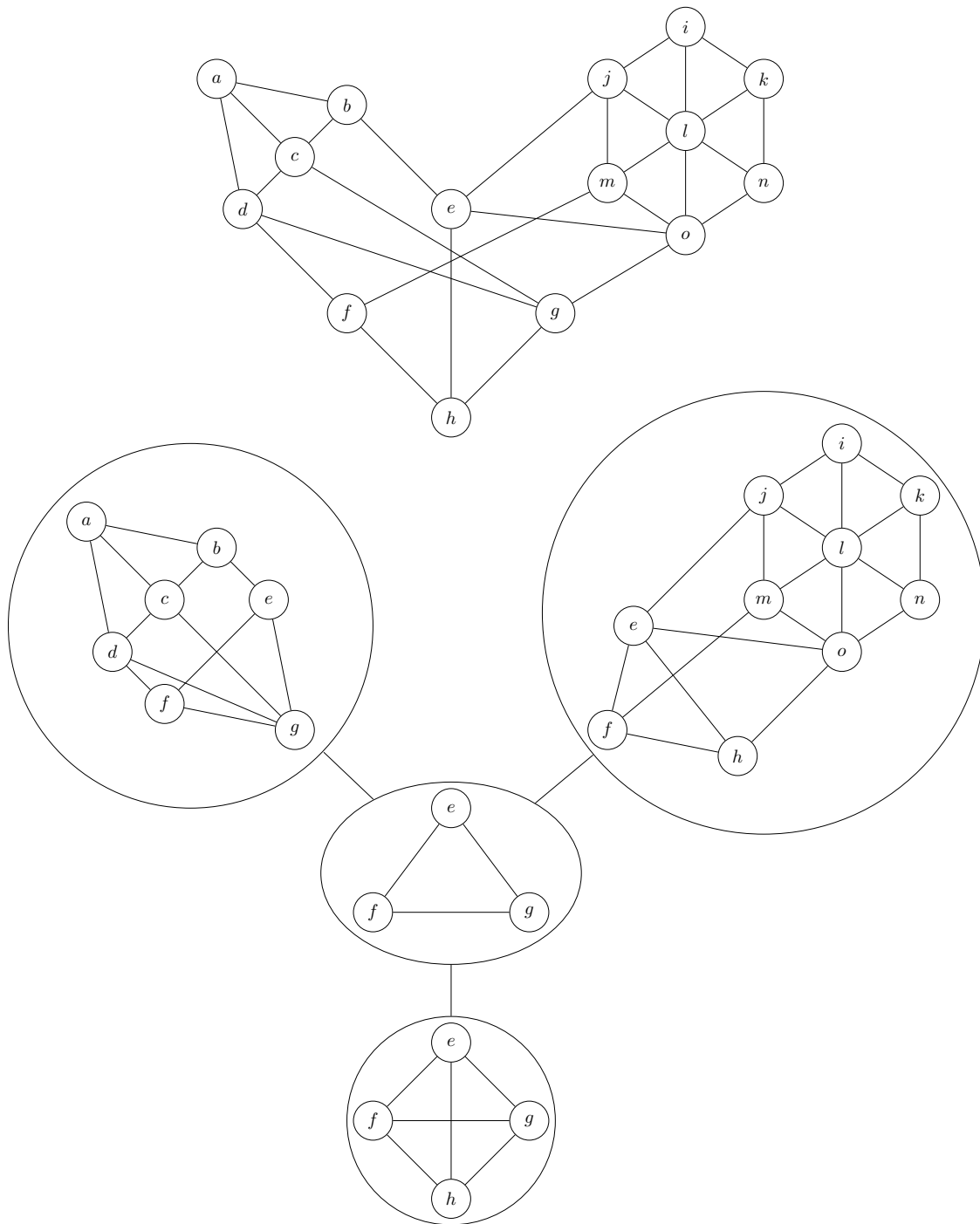
**2-Block-Tree:** Sei  $G = (V_G, E_G)$  ein 2-zusammenhängender, aber nicht 3-zusammenhängender,  $K_5$ -Minor freier Graph und  $T_2 = (V_T, E_T)$  der 2-Block-Tree. Bilden die Knoten  $u, v \in V_G$  einen  $(2, j)$ -Separator in  $G$  für  $j \geq 2$ , dann seien erneut  $Z_1, \dots, Z_j$  die Zusammenhangskomponenten von  $G - \{u, v\}$ . Analog zum 1-Block-Tree wird ein Cliquenknoten für den Teilgraph, der die Knoten  $u$  und  $v$  enthält, angelegt, der alle  $Z_i \cup \{u, v\}$  als Nachbarn besitzt. Außerdem wird die Kante  $(u, v)$  sowohl in den Graph- als auch in dem Cliquenknoten hinzugefügt, falls sie nicht vorhanden ist. Es entsteht ein Baum mit Graphknoten,

der 3-zusammenhängende Minoren von  $G$  darstellt. Ein 2-Block-Tree ist in Abbildung 4.4 zu sehen. Es ist zu beobachten, dass Knoten wie etwa  $h$  oder  $i$  Teil mehrerer Separatoren sein können und somit nicht nur in mehreren Graph-, sondern auch in mehreren Cliquenknoten enthalten sind.



**Abbildung 4.4:** Oben ist ein Graph mit dazugehörigem 2-Block-Tree unterhalb. Die Cliquennoten sind ovalförmig und enthalten immer genau zwei Knoten, alle übrigen sind Graphknoten.

**(3,3)-Block-Tree:** Sei  $G = (V_G, E_G)$  ein 3-zusammenhängender,  $K_5$ -Minor freier Graph und  $T_{(3,3)} = (V_T, E_T)$  der (3,3)-Block-Tree. Enthält  $G$  keinen  $(3, j)$ -Separator für  $j \geq 3$ , so besitzt  $T_{(3,3)}$  einen einzigen Graphknoten, der  $G$  komplett enthält. Sei andernfalls  $C$  ein Graph, der die drei Knoten eines solchen  $(3, j)$ -Separators als Clique beinhaltet. Dann werden Graphknoten in  $T_{(3,3)}$  für alle  $Z_i \cup C$  mit  $1 \leq i \leq j$  angelegt, wobei  $Z_i$  die durch den Separator entstandenen Zusammenhangskomponenten sind. Außerdem wird ein Cliquenknoten mit  $C$  erzeugt, der im Baum Kanten zu allen zuvor erzeugten Graphknoten hat. Ein Beispiel ist in Abbildung 4.5 skizziert.



**Abbildung 4.5:** Ein 3-zusammenhängender Graph mit dazugehörigem  $(3, 3)$ -Block-Tree. Der Separator wird durch  $e, f, g$  gebildet. Es ist zu sehen, dass der Eingabegraph nicht planar ist, da ein  $K_{3,3}$ -Minor enthalten ist. Die Graphknoten enthalten jedoch alle planare Minoren des ursprünglichen Graphs.

Um nun aus einem schlichten nicht zusammenhängenden Graph  $G$  ohne  $K_5$ -Minor eine Wagner-Struktur zu erzeugen, wird zunächst für jede Zusammenhangskomponente ein 1-

Block-Tree  $T_1$  angelegt. Jeder Graphknoten  $t \in T_1$  beinhaltet einen 2-zusammenhängenden Teilgraph  $G'$  von  $G$ , welcher als Eingabe für einen 2-Block-Tree  $T_2$  dient. Ist  $G$  bereits 2- bzw. 3-zusammenhängend, kann der entsprechende Block-Tree übersprungen und  $G$  direkt als Eingabe für den 2- bzw.  $(3, 3)$ -Block-Tree verwendet werden. Anschließend kann jeder 3-zusammenhängende Teilgraph  $G''$ , der mit einem Graphknoten von  $T_2$  assoziiert wird, als Eingabe für einen  $(3, 3)$ -Block-Tree verwendet werden. Dadurch entsteht ein Baum, der zeigt, wie nach Theorem 4.0.1 der Graph  $G$  aus planaren Graphen und Kopien von  $W$  durch Cliques-Summen erzeugt werden kann. Wie zuvor angedeutet, ist zwar der Eingabegraph nicht immer eindeutig aus der Wagner-Struktur wiederherstellbar, allerdings ist die relevante Eigenschaft einer solchen Struktur vielmehr, dass sie nur für  $K_5$ -Minor freie Graphen existiert. Scheitert der Aufbau einer Wagner-Struktur, ist der Graph nicht  $K_5$ -Minor frei.

## 4.1 Algorithmus von Kezdy und McGuinness als Wagner-Struktur

Im Folgenden wird die Wagner-Struktur von Reed und Li mit dem Algorithmus von Kezdy und McGuinness verglichen und dieser so modifiziert, dass er sie erzeugen kann. Zunächst wird der Zusammenhang zwischen augmentierten Komponenten und den verschiedenen Block-Trees gezeigt.

**Behauptung:** Wird der Graph in augmentierte Komponenten aufgeteilt, sind diese genau dann isomorph zu mindestens einem Graphknoten der verschiedenen Block-Trees, wenn alle Separatoren gleich gewählt wurden. Im Algorithmus von Kezdy und McGuinness wird der Graph in augmentierte Komponenten aufgeteilt, wenn ein  $(1, 2)$ -,  $(2, 2)$ - oder  $(3, 3)$ -Separator gefunden wird. Sei  $C$  ein solcher  $(i, j)$ -Separator, der einen zusammenhängenden Graph  $G$  in genau  $j$  Zusammenhangskomponenten  $Z_1, \dots, Z_j$  aufteilt, wenn die  $i$  Knoten von  $C$  aus  $G$  entfernt werden. Dann wird für ein beliebiges  $k$  mit  $1 \leq k \leq j$  aus dem Teilgraph  $Z_k \cup C$  eine neue augmentierte Komponente erzeugt und, falls noch nicht vorhanden, aus den Knoten von  $C$  in der Komponente eine Clique gebildet. Wurde dadurch der 2-Zusammenhang in allen Zusammenhangskomponente von  $G$  hergestellt, existiert bei gleicher Wahl der Separatoren für jede augmentierte Komponente mindestens ein Graphknoten im 1-Block-Tree, der auf einen zu dieser Komponente isomorphen Graph verweist. Genauso gibt es für jeden Graph eines Graphknotens im 1-Block-Tree mindestens eine augmentierte Komponente, die isomorph zu ihm ist. Angenommen, es gäbe eine augmentierte Komponenten  $G_a$ , zu der es keinen Graphknoten  $t$  mit assoziiertem Graph  $G_t$  gibt, sodass  $G_a$  und  $G_t$  isomorph sind. Dann gibt es einen  $(1, 2)$ -Separator  $C_a$  in  $G$ , aus dem  $G_a$  entstanden ist. Da es kein  $t$  mit einem zu  $G_a$  isomorphen  $G_t$  gibt, wurden keine Knoten im Block-Tree mit  $C_a$  erzeugt, sodass es ebenfalls keinen Cliquesknoten mit  $C_a$

gibt. Dann wurde mindestens ein Separator  $C'_a$  für den 1-Block-Tree gewählt, wodurch die Knoten von  $C_a$  so in Graphknoten enthalten sind, dass sie dort keinen Separator bilden, was der gleichen Wahl von Separatoren widerspricht. Oder  $C_a$  ist vollständig in einem Graphknoten enthalten und bildet dort einen Separator, was dem 2-Zusammenhang des 1-Block-Trees widerspricht.

Der Algorithmus von Kezdy und McGuinness erzeugt also zu Beginn alle Graphknoten eines 1-Block-Trees. Zusätzlich können die Knoten der gefundenen Separatoren gespeichert werden, um ebenfalls die Cliquenknoten zu erhalten, sodass der Algorithmus einen 1-Block-Tree erzeugt. Im zweiten Schritt werden die augmentierten Komponenten bzw. Graphknoten des 1-Block-Tree in 3-zusammenhängende augmentierte Komponenten bzw. einen 2-Block-Tree überführt. Analog zum vorherigen Fall gibt es für jede augmentierte Komponente, die aus einem Graphknoten des 1-Block-Trees mit einem  $(2, 2)$ -Separator gebildet wird, einen isomorphen Graphknoten im 2-Block-Tree, falls alle Separatoren gleich gewählt wurden. Erneut können aus den Separatorknoten Cliquen gebildet und in zusätzlichen Knoten gespeichert werden, um als Ausgabe des zweiten Schrittes einen 2-Block-Tree zu erzeugen.

Um die Graphknoten des 2-Block-Trees in je einen  $(3, 3)$ -Block-Tree zu verwandeln, müssen nicht nur entsprechende Separatoren gefunden und augmentierte Komponente gebildet, sondern auch garantiert werden, dass die Graphknoten der  $(3, 3)$ -Block-Trees entweder planar oder isomorph zu  $W$  sind und in keinem ein  $K_5$ -Minor enthalten ist. Hier kann das Theorem 3.1.3 in Kombination mit dem zuvor angewendeten Planaritätstest genutzt werden, um die Struktur aufzubauen. Sei dazu  $G_t$  der Graph, der zu einem beliebigen Graphknoten  $t$  im 2-Block-Tree gehört.  $G_t$  muss 3-zusammenhängend sein, da er als Graph vollständig in  $t$  vorkommt. Im Algorithmus von Kezdy und McGuinness wird  $G_t$  nun im dritten Schritt durch einen Planaritätstest überprüft. Wird ein  $K_5$ -Minor gefunden, ist die Wagner-Struktur ungültig und der Algorithmus terminiert. Andernfalls kann  $G_t$  planar sein - dann wird im  $(3, 3)$ -Block-Tree ein einzelner Graphknoten angelegt, der  $G_t$  enthält und als planar markiert ist. Letztlich kann der Planaritätstest ein  $K_{3,3}$ -Homöomorph  $S$  finden, sodass die Voraussetzungen für Theorem 3.1.3 gegeben sind. Im ersten Fall von Theorem 3.1.3 enthält  $G_t$  jedoch einen  $K_5$ -Minor, da keine Knoten von  $S$  einen  $(3, 3)$ -Separator bilden - der Beweis dazu findet sich in Lemma 3.1.7. Damit wäre die Wagner-Struktur erneut ungültig. Im zweiten Fall ist  $G_t$  isomorph zu  $W$ . Analog zum planaren Fall wird ein neuer Graphknoten im  $(3, 3)$ -Block-Tree angelegt, der  $G_t$  enthält und entsprechend gekennzeichnet ist. Der dritte und vierte Fall treten ein, falls drei Knoten aus  $S$  einen  $(3, 3)$ -Separator bilden. Kezdy und McGuinness erzeugen hier augmentierte Komponenten, die wie zuvor isomorph zu Graphknoten des  $(3, 3)$ -Block-Trees sein können. Zusätzlich müssen die drei Knoten des Separators als neuer Cliquenknoten eingefügt und mit den entstandenen augmentierten Komponenten verbunden werden. Der Algorithmus wird rekursiv auf jeden der Graphknoten angewendet, bis alle zugehörigen Teilgraphen



planar oder isomorph zu  $W$  sind bzw. ein  $K_5$ -Minor gefunden wurde. Somit ist das Ergebnis des modifizierten Algorithmus entweder eine Wagner-Struktur, die aus einem Wald von 1-Block-Trees mit Graphknoten, die aus 2-Block-Trees mit Graphknoten aus  $(3, 3)$ -Block-Trees bestehen und die die planaren Teilgraphen und Kopien von  $W$  im Eingabegraph zeigen. Oder es wird ein  $K_5$ -Minor als Teilgraph des Eingabegraphen gefunden, sodass die Wagner-Struktur ungültig ist, die Frage, ob ein  $K_5$ -Minor enthalten ist, jedoch in beiden Fällen eindeutig beantwortet werden kann.



## Kapitel 5

# Implementierung



## Kapitel 6

# Experimentelle Analyse



## Kapitel 7

# Zusammenfassung und Ausblick





Anhang A

Weitere Informationen



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Die Kante, die $u$ und $v$ in $G$ verbindet, wird kontrahiert, sodass sie in $H$ durch den neuen Knoten $w$ ersetzt wird. . . . .	3
2.2	Der Pfad von $p_1$ bis $p_4$ wird kontrahiert. Der neue Knoten $w$ in $H$ enthält alle Nachbarn der Pfadknoten in $G$ . . . . .	3
2.3	Ein Graph $G$ mit seinen Minoren $H_1$ und $H_2$ . Um $H_1$ zu erhalten, wurde in $G$ die Kante $(d, e)$ und anschließend der Knoten $d$ entfernt. Für $H_2$ wurden außerdem der Pfad $P(a, c)$ kontrahiert. . . . .	4
2.4	Der Graph $K_5$ . . . . .	4
2.5	Der Graph $K_{3,3}$ . . . . .	4
2.6	Der Graph $W$ , links in seiner üblichen Darstellung, rechts mit angedeutetem $K_{3,3}$ -Minor. . . . .	5
2.7	Der Graph $M$ sowie ein $K_5$ -Minor aus $M$ . . . . .	5
2.8	Der linke Graph wird in drei augmentierte Komponenten durch den $(3, 3)$ -Separator $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ geteilt. Alle $Z_i$ und $Z'_i$ stellen Teilgraphen dar, die zur Übersicht zu einem Knoten zusammengefügt wurden. Die drei rechten Graphen können durch die Cliques-Summe der Cliques $\{c'_1, c'_2, c'_3\}$ sowie $\{c''_1, c''_2, c''_3\}$ und $\{c'''_1, c'''_2, c'''_3\}$ den rechten Graph erzeugen. Während der Cliques-Summen Operation dürfen die Kanten, die die Knoten in den Cliques verbinden, gelöscht werden. . . . .	7
3.1	Gegenbeispiel zu Theorem 3.1.1 für $k = 3$ mit $C = \{a, d, f\}$ in $W$ , wodurch die $k - 1$ Komponenten $A_1$ und $A_2$ entstehen, von denen nur eine aus mehr als einem Knoten besteht. Die Komponente $A_1$ ist zwar ein gültiger Minor, da sie etwa durch die Kontraktionen der Kanten $(a, b), (a, h), (f, g)$ und $(c, d)$ aus $W$ erzeugt werden kann. $A_2$ dagegen kann nicht durch Kontraktionen aus $W$ erzeugt werden - wird beispielsweise die Kante $(d, e)$ in $W$ kontrahiert, fehlt die Kante $(a, f)$ in $A_2$ . Analog kann $e$ mit keiner seiner inzidenten Kanten kontrahiert werden, um einen zu $A_2$ isomorphen Graph zu erhalten. . . . .	11
3.2	Beispiel zum ersten Fall von Lemma 3.1.4. . . . .	13

3.3	Beispiel zum zweiten Fall von Lemma 3.1.4. . . . .	13
3.4	Beispiel zum dritten Fall von Lemma 3.1.4. . . . .	14
3.5	Beispiel zum ersten Fall von Lemma 3.1.5. Links oben ist $S$ mit zwei zusätzlichen Pfaden aus $G$ abgebildet. $P_1$ hat beide Endpunkte in $F(a)$ sowie den blauen Branch-Fans $F(x)$ und $F(y)$ , mit denen die Endpunkte kontrahiert werden. $P_2$ hat seine Endpunkte in den roten Branch-Fans $F(b)$ und $F(c)$ , mit denen sie kontrahiert werden. Rechts oben ist der dadurch entstehende Minor abgebildet und unten wird der enthaltene $K_5$ -Minor gezeigt. . . . .	15
3.6	Beispiel zum zweiten Fall von Lemma 3.1.5. Rechts ist der enthaltene $M$ -Minor abgebildet. . . . .	16
4.1	Ein nicht-planarer Graph $G$ , der keinen $K_5$ -Minor enthält. . . . .	20
4.2	Ein nicht zusammenhängender Graph $G'$ , dessen Zusammenhangskomponenten planar oder isomorph zu $W$ sind. . . . .	20
4.3	Oben ist ein Graph mit einem dazugehörigen 1-Block-Tree unterhalb. Die Cliquenknoten sind ovalförmig und enthalten einzelne Knoten, die Graphknoten sind rund und enthalten Teilgraphen aus dem Eingabegraph. . . . .	22
4.4	Oben ist ein Graph mit dazugehörigem 2-Block-Tree unterhalb. Die Cliquenknoten sind ovalförmig und enthalten immer genau zwei Knoten, alle übrigen sind Graphknoten. . . . .	24
4.5	Ein 3-zusammenhängender Graph mit dazugehörigem $(3, 3)$ -Block-Tree. Der Separator wird durch $e, f, g$ gebildet. Es ist zu sehen, dass der Eingabegraph nicht planar ist, da ein $K_{3,3}$ -Minor enthalten ist. Die Graphknoten enthalten jedoch alle planare Minoren des ursprünglichen Graphs. . . . .	26

# Algorithmenverzeichnis



## Symbolverzeichnis





# Literaturverzeichnis

- [1] ANDRÉ E. KÉZDY, PATRICK MCGUINNESS: *Sequential and Parallel Algorithms to Find a  $K_5$  Minor*. In: *Proceedings of the Third Annual ACM/SIGACT-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 27-29 January 1992, Orlando, Florida, USA.*, Seiten 345–356, 1992.
- [2] BRUCE A. REED, ZHENTAO LI: *A Linear Time Algorithm for Testing if  $G$  has a  $K_5$  Minor*.
- [3] BRUCE A. REED, ZHENTAO LI: *Optimization and Recognition for  $K_5$ -minor Free Graphs in Linear Time*. In: *LATIN 2008: Theoretical Informatics, 8th Latin American Symposium, Búzios, Brazil, April 7-11, 2008, Proceedings*, Seiten 206–215, 2008.
- [4] DIESTEL, REINHARD: *Graph Theory, 4th Edition*, Band 173 der Reihe *Graduate texts in mathematics*. Springer, 2012.
- [5] JOHN M. BOYER, WENDY J. MYRVOLD: *On the Cutting Edge: Simplified  $O(n)$  Planarity by Edge Addition*. *J. Graph Algorithms Appl.*, 8(3):241–273, 2004.
- [6] WAGNER, KLAUS: *Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe*. *Mathematische Annalen*, 114:570–590, 1937.
- [7] WILLIAMSON, S. G.: *Depth-First Search and Kuratowski Subgraphs*. *J. ACM*, 31(4):681–693, 1984.



## Eidesstattliche Versicherung

---

Sauer, Julian

---

197859

Name, Vorname

Matr.-nr.

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Masterarbeit mit dem Titel

### Effiziente Berechnung von $K_5$ -Minoren in Graphen

selbstständig und ohne unzulässige fremde Hilfe erbracht habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie wörtliche und sinngemäße Zitate kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

---

Dortmund, den 13. September 2019

Ort, Datum

---

Unterschrift

### Belehrung:

Wer vorsätzlich gegen eine die Täuschung über Prüfungsleistungen betreffende Regelung einer Hochschulprüfungsordnung verstößt, handelt ordnungswidrig. Die Ordnungswidrigkeit kann mit einer Geldbuße von bis zu 50.000,00 € geahndet werden. Zuständige Verwaltungsbehörde für die Verfolgung und Ahndung von Ordnungswidrigkeiten ist der Kanzler/ die Kanzlerin der Technischen Universität Dortmund. Im Falle eines mehrfachen oder sonstigen schwerwiegenden Täuschungsversuches kann der Prüfling zudem exmatrikuliert werden. (§ 63 Abs. 5 Hochschulgesetz - HG - )

Die Abgabe einer falschen Versicherung an Eides statt wird mit Freiheitsstrafe bis zu 3 Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.

Die Technische Universität Dortmund wird gfs. elektronische Vergleichswerkzeuge (wie z.B. die Software „turnitin“) zur Überprüfung von Ordnungswidrigkeiten in Prüfungsverfahren nutzen.

Die oben stehende Belehrung habe ich zur Kenntnis genommen:

---

Dortmund, den 13. September 2019

Ort, Datum

---

Unterschrift

