technische universität
dortmund

Masterarbeit

Effiziente Berechnung von K_5-Minoren in Graphen

Julian Sauer
28. Juli 2019

Betreuer:
Prof. Dr. Petra Mutzel
Prof. Dr. Jens Schmidt

Fakultät für Informatik
Algorithm Engineering (LS 11)
Technische Universität Dortmund
http://ls11-www.cs.tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation und Hintergrund

1.2 Aufbau der Arbeit

Kapitel 2

Definitionen

Kapitel 3

Algorithmus von Kezdy und McGuinness

Da die Arbeit auf dem sequenziellen Algorithmus von Kezdy und McGuinness, den sie in [1] vorstellen, beruht, wird er im Folgenden erklärt. Als Eingabe wird ein ungerichteter Graph ohne Mehrfachkanten erwartet, ausgegeben wird, ob ein K_5-Minor enthalten ist oder nicht. Für den Fall, dass einer gefunden wurde, kann zusätzlich ausgegeben werden, welche Knoten den Minor formen. Die Laufzeit liegt in $\mathcal{O}(n^2)$

Planaritästests können bereits in linearer Laufzeit entscheiden, ob ein Graph planar ist oder einen K_5- bzw. $K_{3,3}$-Minor enthält. Es muss lediglich der Fall behandelt werden, in dem der der Test stoppt, weil er einen $K_{3,3}$-Minor gefunden hat, denn es kann nicht garantiert werden, ob zusätzlich ein K_5-Minor enthalten ist. Als Lösung testet der Algoritmus von Kezdy und McGuiness, ob ein gefundener $K_{3,3}$-Minor ein gültiger 3-Separator ist und zerlegt ggf. den Graph in augmentierte Komponenten. Anschließend kann der Planaritästest auf die einzelnen Komponenten rekursiv angewendet werden.

Um das zentrale Theorem aus [1], welches den $K_{3,3}$-Minor untersucht, zu erklären, wird zunächst die Gültigkeit augmentierter Komponenten behandelt:

3.0.1 Theorem. *Für $k \geq 3$: Sei G ein k-zusammenhängender Graph und C ein k-Schnitt in G. Alle durch C definierten augmentierten Komponenten sind Minoren von G, falls es entweder mindestens k Komponenten sind oder mindestens zwei der Komponenten jeweils aus mehr als einem Knoten bestehen.*

Beweis. Seien $c_1, c_2, ..., c_k$ die Knoten von C und $Z = \{Z_1, Z_2, ..., Z_k\}$ bzw. $Z = \{Z_1, Z_2, ..., Z_{k-1}\}$ die Zusammenhangskomponenten, die durch $G \cap C$ entstehen. Die zugehörigen augmentierten Komponenten seien $A_1, A_2, ..., A_k$ bzw. $A_1, A_2, ..., A_{k-1}$. Betrachtet wird eine beliebige dieser augmentierten Komponenten A_i. Der Definition der augmentierten Komponenten nach finden sich bereits alle Knoten von A_i in G wieder. Weiterhin enthält G mindestens alle Kanten in $A_i \cap C$ sowie die verbindenden Kanten zwischen A_i und C. Jedoch bilden in

A_i die Knoten von C eine Clique, es existieren also ggf. Kanten zwichen den Knoten von C in A_i, die es nicht in G gibt Es bleibt zu zeigen, dass die Kanten, die für diese Clique in A_i nötig sind, durch Kantenkontraktionen in G erzeugt werden können. Dadurch, dass G k-zusammenhängend ist, besitzt jede Zusammenhangskomponente von $G \cap C$ Kanten zu $c_1, c_2, ..., c_k$. Würde eine Kante zu einem Knoten c_j mit $1 \leq j \leq k$ fehlen, wäre ein $k-1$-Schnitt bestehend aus $C \backslash c_j$ möglich, was im Widerspruch zu dem k-Zusammenhang stehen würde. Das Theorem unterscheided nun zwei Fälle, um die fehlenden Kanten bereitstellen zu können:

1. Es existieren k Zusammenhangskomponenten. Wird A_i betrachtet, kommen die Knoten in $Z \setminus Z_i$ in Frage, um durch Kantenkontraktionen die fehlenden Kanten für die Clique von C in A_i zu erzeugen. Um die Kanten von C in A_i in G zu erzeugen, kann zunächst der Pfad, der c_1 mit Z_1 verbindet, kontrahiert werden. Anschließend ist c_1 mit allen Knoten in C verbunden. Dies kann analog für alle Knoten in C und den entsprechenden Zusammenhangskomponenten durchgeführt werden außer für c_i, da A_i der gesuchte Minor ist. Allerdings ist c_i aufgrund des k-Zusammenhangs mit allen anderen Zusammenhangskomponenten verbunden und nach den beschriebenen Kontraktionen bildet C eine Clique.

2. Es existieren $k-1$ Komponenten, aber mindestens zwei bestehen aus mehr als einem Knoten. Analog zum vorherigen Fall können die Pfade zwischen den Knoten von C und den Zusammenhangskomponenten A kontrahiert werden. Es fehlt jedoch ein Pfad, da eine Zusammenhangskomponente weniger vorliegt. Es gibt mindestens eine Zusammenhangskomponente aus $Z \setminus Z_i$, die aus zwei oder mehr Knoten besteht. Da der Graph k-zusammenhängend ist, sind mindestens zwei dieser Knoten mit allen in C verbunden, sodass sie durch Kontraktionen mit zwei unterschiedlichen Knoten aus C genutzt werden könnenm um die gesuchte Clique zu erzeugen. □

Als nächstes stellen Kezdy und McGuinness fest, dass im Fall eines 3-Separators der Graph Komponenten zerlegt werden kann:

3.0.2 Theorem. *Sei G ein 3-zusammenhängender Graph mit einem 3-Schnitt C, der den Graph in mindestens 3 Zusammenhangskomponenten zerlegt. G hat einen K_5-Minor, falls eine der durch C definierten augmentierten Komponenten einen K_5-Minor enthält.*

Beweis. Zunächst kann festgestellt werden, dass falls eine der augmentierten Komponenten einen K_5-Minor enthält, dieser laut Theorem 3.0.1 auch ein Minor von G ist. Es bleibt zu zeigen, dass sich ein K_5-Minor nicht auf zwei augmentierte Komponenten erstreckt, sondern sich ausschließlich in einer befindet. Angenommen es gilt $K_5 \prec_M G$ und zwei der Branch-Sets, die den K_5-Minor bilden, befinden sich jeweils vollständig in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten. In diesem Fall wäre C ein 3-Schnitt in dem gefundenen Minor, was im Widerspruch zu dem 4-Zusammenhang des K_5 steht. □

Das zentrale Theorem ist darauf zurückzuführen, dass jeder Graph ohne K_5-Minor durch Cliquen-Summen von Teilgraphen, die planar oder isomorph zu W sind, gebildet werden kann. [2]

3.0.3 Theorem. *Sei G ein 3-zusammenhängender Graph mit einem $K_{3,3}$-Homeomorph S, dessen Knoten gemäß einer 2-Färbung in $R = \{a, b, c\}$ und $B = \{x, y, z\}$ unterteilt sind. Eine der folgenden Bedingungen trifft auf G zu:*

1. *G enthält einen K_5-Minor.*
2. *G ist isomorph zu W.*
3. *$\{a, b, c\}$ bilden einen 3-Separator, sodass $\{x, y, z\}$ in separaten Komponenten liegen.*
4. *$\{x, y, z\}$ bilden einen 3-Separator, sodass $\{a, b, c\}$ in separaten Komponenten liegen.*

Durch die Theoreme 3.0.1 und 3.0.2 wurde gezeigt, dass der Graph in den Fällen 3 und 4 in augmentierte Komponenten zerlegt und darauf der Planaritästest ausgeführt werden kann. Daher stellen die Autoren einige Lemmata auf, mit denen untersucht wird, ob S einen K_5-Minor enthält - also ob Bedingung 1 zutrifft.

3.0.4 Lemma. *Sei G ein 3-zusammenhängender Graph und S ein $K_{3,3}$-Homeomorph in G. Hat ein Knoten w in $G \cap S$ drei Pfade zu Knoten in S, die nicht alle im selben Branch-Fan liegen, enthält G einen K_5-Minor.*

Beweis. Seien t, u, v die drei Endpunkte der Pfade in S. Mindestens einer von ihnen ist ein innerer Knoten, da sonst alle im selben Branch-Fan liegen würden. Sei o. B. d. A. t ein solcher innerer Knoten auf dem Pfad $P(a, x)$. Folglich können u und v nicht beide in $F(a)$ oder $F(x)$ liegen, sonst lägen alle drei im gleichen Branch-Fan.

1. u und v sind nicht im gleichen Branch-Fan wie t. Dann müssen u und v ebenfalls innere Knoten sein, im Beispiel auf den Pfaden $P(y, b)$ bzw. $P(z, c)$. Es kann ein M-Minor durch folgende Kontraktionen erzeugt werden: u mit einem der roten und v mit einem der blauen Knoten (analog u mit blau und v mit rot) sowie $P(w, t)$.

2. u oder v liegen auf $P(a, x)$. Sei o. B. d. A. $u \in P(a, x)$. Da t ebenfalls in diesem Pfad liegt, gilt $\{t, u\} \in F(a) \cup F(x)$, sodass v nicht in diesen beiden Branch-Fans liegen kann. Es können t und v getauscht werden, sodass eine Reduktion auf Fall 1 erreicht wird.

3. Entweder u oder v liegen im gleichen Branch-Fan wie t. Sei o. B. d. A. $u \in F(x) \cap P(a, x)$, im Beispiel auf dem Pfad $P(b, x)$. Es sind $\{t, u\} \in F(x)$, weshalb v in einem anderen Branch Fan sein muss. Da alle roten Knoten in $F(x)$ liegen, gilt konkreter $v \in (F(y) \cup F(z)) \cap \{a, b, c\}$ Es können $P(b, u)$ kontrahiert werden sowie je nach Fall entweder $P(v, y)$ oder $P(v, z)$. Wird $P(w, t)$ ebenfalls kontrahiert, entsteht erneut ein M-Minor. $\square$

Kapitel 4

Wagner Struktur

Kapitel 5

Implementierung

Kapitel 6

Experimentelle Analyse

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Anhang A

Weitere Informationen

Abbildungsverzeichnis

Algorithmenverzeichnis

Symbolverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] A. Kézdy, P. McGuiness: *Sequential and Parallel Algorithms to Find a K_5 Minor.* In: *Proceedings of the Third Annual ACM/SIGACT-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 27-29 January 1992, Orlando, Florida, USA.*, Seiten 345–356, Philadelphia, PA, USA, 1992. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[2] Wagner, K.: *Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe.* Mathematische Annalen, 114:570–590, 1937.

Eidesstattliche Versicherung

Sauer, Julian	197859
Name, Vorname	Matr.-nr.

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Masterarbeit mit dem Titel

Effiziente Berechnung von K_5-Minoren in Graphen

selbstständig und ohne unzulässige fremde Hilfe erbracht habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie wörtliche und sinngemäße Zitate kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Dortmund, den 28. Juli 2019	
Ort, Datum	Unterschrift

Belehrung:

Wer vorsätzlich gegen eine die Täuschung über Prüfungsleistungen betreffende Regelung einer Hochschulprüfungsordnung verstößt, handelt ordnungswidrig. Die Ordnungswidrigkeit kann mit einer Geldbuße von bis zu 50.000,00 € geahndet werden. Zuständige Verwaltungsbehörde für die Verfolgung und Ahndung von Ordnungswidrigkeiten ist der Kanzler/ die Kanzlerin der Technischen Universität Dortmund. Im Falle eines mehrfachen oder sonstigen schwerwiegenden Täuschungsversuches kann der Prüfling zudem exmatrikuliert werden. (§ 63 Abs. 5 Hochschulgesetz - HG -)

Die Abgabe einer falschen Versicherung an Eides statt wird mit Freiheitsstrafe bis zu 3 Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.

Die Technische Universität Dortmund wird gfls. elektronische Vergleichswerkzeuge (wie z.B. die Software „turnitin“) zur Überprüfung von Ordnungswidrigkeiten in Prüfungsverfahren nutzen.

Die oben stehende Belehrung habe ich zur Kenntnis genommen:

Dortmund, den 28. Juli 2019	
Ort, Datum	Unterschrift