

Masterarbeit

**Effiziente Berechnung von K_5 -Minoren
in Graphen**

**Julian Sauer
30. Juli 2019**

Betreuer:

Prof. Dr. Petra Mutzel

Prof. Dr. Jens Schmidt

Fakultät für Informatik

Algorithm Engineering (LS 11)

Technische Universität Dortmund

<http://ls11-www.cs.tu-dortmund.de>

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation und Hintergrund	1
1.2	Aufbau der Arbeit	1
2	Definitionen	3
3	Algorithmus von Kezdy und McGuinness	5
4	Wagner Struktur	11
5	Implementierung	13
6	Experimentelle Analyse	15
7	Zusammenfassung und Ausblick	17
A	Weitere Informationen	19
	Abbildungsverzeichnis	21
	Algorithmenverzeichnis	23
	Symbolverzeichnis	25
	Literaturverzeichnis	27
	Eidesstattliche Versicherung	27

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation und Hintergrund

1.2 Aufbau der Arbeit

Kapitel 2

Definitionen

Kapitel 3

Algorithmus von Kezdy und McGuinness

Da die Arbeit auf dem sequenziellen Algorithmus von Kezdy und McGuinness, den sie in [1] vorstellen, beruht, wird er im Folgenden erklärt. Als Eingabe wird ein ungerichteter Graph ohne Mehrfachkanten erwartet, ausgegeben wird, ob ein K_5 -Minor enthalten ist oder nicht. Für den Fall, dass einer gefunden wurde, kann zusätzlich ausgegeben werden, welche Knoten den Minor formen. Die Laufzeit liegt in $\mathcal{O}(n^2)$

Planaritätstests können bereits in linearer Laufzeit entscheiden, ob ein Graph planar ist oder einen K_5 - bzw. $K_{3,3}$ -Minor enthält. Es muss lediglich der Fall behandelt werden, in dem der Test stoppt, weil er einen $K_{3,3}$ -Minor gefunden hat, denn es kann nicht garantiert werden, ob zusätzlich ein K_5 -Minor enthalten ist. Als Lösung testet der Algorithmus von Kezdy und McGuinness, ob ein gefundener $K_{3,3}$ -Minor ein gültiger 3-Separator ist und zerlegt ggf. den Graph in augmentierte Komponenten. Anschließend kann der Planaritätstest auf die einzelnen Komponenten rekursiv angewendet werden.

Um das zentrale Theorem aus [1], welches den $K_{3,3}$ -Minor untersucht, zu erklären, wird zunächst die Gültigkeit augmentierter Komponenten behandelt:

3.0.1 Theorem. *Für $k \geq 3$: Sei G ein k -zusammenhängender Graph und C ein k -Separator in G . Alle durch C definierten augmentierten Komponenten sind Minoren von G , falls es entweder mindestens k Komponenten sind oder mindestens zwei der Komponenten jeweils aus mehr als einem Knoten bestehen.*

Beweis. Seien c_1, c_2, \dots, c_k die Knoten von C und $Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_k\}$ bzw. $Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_{k-1}\}$ die Zusammenhangskomponenten, die durch $G \cap C$ entstehen. Die zugehörigen augmentierten Komponenten seien A_1, A_2, \dots, A_k bzw. A_1, A_2, \dots, A_{k-1} . Betrachtet wird eine beliebige dieser augmentierten Komponenten A_i . Der Definition der augmentierten Komponenten nach finden sich bereits alle Knoten von A_i in G wieder. Weiterhin enthält G mindestens alle Kanten in $A_i \cap C$ sowie die verbindenden Kanten zwischen A_i und C . Jedoch

bilden in A_i die Knoten von C eine Clique, es existieren also ggf. Kanten zwischen den Knoten von C in A_i , die es nicht in G gibt. Es bleibt zu zeigen, dass die Kanten, die für diese Clique in A_i nötig sind, durch Kantenkontraktionen in G erzeugt werden können. Dadurch, dass G k -zusammenhängend ist, besitzt jede Zusammenhangskomponente von $G \cap C$ Kanten zu c_1, c_2, \dots, c_k . Würde eine Kante zu einem Knoten c_j mit $1 \leq j \leq k$ fehlen, wäre ein $k - 1$ -Separator bestehend aus $C \setminus c_j$ möglich, was im Widerspruch zu dem k -Zusammenhang stehen würde. Das Theorem unterscheidet nun zwei Fälle, um die fehlenden Kanten bereitstellen zu können:

1. Es existieren k Zusammenhangskomponenten. Wird A_i betrachtet, kommen die Knoten in $Z \setminus Z_i$ in Frage, um durch Kantenkontraktionen die fehlenden Kanten für die Clique von C in A_i zu erzeugen. Um die Kanten von C in A_i in G zu erzeugen, kann zunächst der Pfad, der c_1 mit Z_1 verbindet, kontrahiert werden. Anschließend ist c_1 mit allen Knoten in C verbunden. Dies kann analog für alle Knoten in C und den entsprechenden Zusammenhangskomponenten durchgeführt werden außer für c_i , da A_i der gesuchte Minor ist. Allerdings ist c_i aufgrund des k -Zusammenhangs mit allen anderen Zusammenhangskomponenten verbunden und nach den beschriebenen Kontraktionen bildet C eine Clique.
2. Es existieren $k - 1$ Komponenten, aber mindestens zwei bestehen aus mehr als einem Knoten. Analog zum vorherigen Fall können die Pfade zwischen den Knoten von C und den Zusammenhangskomponenten A kontrahiert werden. Es fehlt jedoch ein Pfad, da eine Zusammenhangskomponente weniger vorliegt. Es gibt mindestens eine Zusammenhangskomponente aus $Z \setminus Z_i$, die aus zwei oder mehr Knoten besteht. Da der Graph k -zusammenhängend ist, sind mindestens zwei dieser Knoten mit allen in C verbunden, sodass sie durch Kontraktionen mit zwei unterschiedlichen Knoten aus C genutzt werden können um die gesuchte Clique zu erzeugen. \square

Als nächstes stellen Kezdy und McGuinness fest, dass im Fall eines $(3, 3)$ -Separators der Graph in augmentierte Komponenten zerlegt werden kann:

3.0.2 Theorem. *Sei G ein 3-zusammenhängender Graph mit einem $(3, 3)$ -Separator C . G hat einen K_5 -Minor, falls eine der durch C definierten augmentierten Komponenten einen K_5 -Minor enthält.*

Beweis. Zunächst kann festgestellt werden, dass falls eine der augmentierten Komponenten einen K_5 -Minor enthält, dieser laut Theorem 3.0.1 auch ein Minor von G ist. Es bleibt zu zeigen, dass sich ein K_5 -Minor nicht auf zwei augmentierte Komponenten erstreckt, sondern sich ausschließlich in einer befindet. Angenommen es gilt $K_5 \prec_M G$ und zwei der Branch-Sets, die den K_5 -Minor bilden, befinden sich jeweils vollständig in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten. In diesem Fall wäre C ein 3-Separator in dem gefundenen Minor, was im Widerspruch zu dem 4-Zusammenhang des K_5 steht. \square

Das zentrale Theorem ist darauf zurückzuführen, dass jeder Graph ohne K_5 -Minor durch Cliques-Summen von Teilgraphen, die planar oder isomorph zu W sind, gebildet werden kann. [2]

3.0.3 Theorem. *Sei G ein 3-zusammenhängender Graph mit einem $K_{3,3}$ -Homeomorph S , dessen Knoten gemäß einer 2-Färbung in $R = \{a, b, c\}$ und $B = \{x, y, z\}$ unterteilt sind. Eine der folgenden Bedingungen trifft auf G zu:*

1. G enthält einen K_5 -Minor.
2. G ist isomorph zu W .
3. $\{a, b, c\}$ bilden einen 3-Separator, sodass $\{x, y, z\}$ in separaten Komponenten liegen.
4. $\{x, y, z\}$ bilden einen 3-Separator, sodass $\{a, b, c\}$ in separaten Komponenten liegen.

Durch die Theoreme 3.0.1 und 3.0.2 wurde gezeigt, dass der Graph in den Fällen 3 und 4 in augmentierte Komponenten zerlegt und darauf der Planaritätstest ausgeführt werden kann. Anschließend stellen die Autoren einige Lemmata auf, mit denen untersucht wird, ob S einen K_5 -Minor enthält - also ob Bedingung 1 zutrifft.

3.0.4 Lemma. *Sei G ein 3-zusammenhängender Graph und S ein $K_{3,3}$ -Homeomorph in G . Hat ein Knoten w in $G \cap S$ drei Pfade zu Knoten in S , die nicht alle im selben Branch-Fan liegen, enthält G einen K_5 -Minor.*

Beweis. Seien t, u, v die drei Endpunkte der Pfade in S . Mindestens einer von ihnen ist ein innerer Knoten, da sonst alle im selben Branch-Fan liegen würden. Sei o.B.d.A. t ein solcher innerer Knoten auf dem Pfad $P(a, x)$. Folglich können u und v nicht beide in $F(a)$ oder $F(x)$ liegen, sonst lägen alle drei im gleichen Branch-Fan.

1. u und v sind nicht im gleichen Branch-Fan wie t . Dann müssen u und v ebenfalls innere Knoten sein, im Beispiel auf den Pfaden $P(y, b)$ bzw. $P(z, c)$. Es kann ein M -Minor durch folgende Kontraktionen erzeugt werden: u mit einem der roten und v mit einem der blauen Knoten (analog u mit blau und v mit rot) sowie $P(w, t)$.
2. u oder v liegen auf $P(a, x)$. Sei o.B.d.A. $u \in P(a, x)$. Da t ebenfalls in diesem Pfad liegt, gilt $\{t, u\} \in F(a) \cup F(x)$, sodass v nicht in diesen beiden Branch-Fans liegen kann. Es können t und v getauscht werden, sodass eine Reduktion auf Fall 1 erreicht wird.
3. Entweder u oder v liegen im gleichen Branch-Fan wie t . Sei o.B.d.A. $u \in F(x) \cap P(a, x)$, im Beispiel auf dem Pfad $P(b, x)$. Es gilt $\{t, u\} \in F(x)$, weshalb v in einem anderen Branch Fan sein muss. Da alle roten Knoten in $F(x)$ liegen, gilt konkreter $v \in (F(y) \cup F(z)) \cap \{a, b, c\}$. Es können $P(b, u)$ kontrahiert werden sowie je nach Fall

entweder $P(v, y)$ oder $P(v, z)$. Wird $P(w, t)$ ebenfalls kontrahiert, entsteht erneut ein M -Minor. \square

3.0.5 Lemma. *Sei G ein 3-zusammenhängender Graph und S ein $K_{3,3}$ -Homeomorph in G . Betrachtet wird ein Pfad außerhalb von S , der zwei Knoten in einem roten Branch-Fan verbindet, welche jedoch nicht beide auf dem gleichen Pfad in S liegen. Analog dazu wird ein Pfad außerhalb von S gesucht, der zwei Knoten in einem blauen Branch-Fan verbindet, ohne dass diese beide auf dem gleichen Pfad in S liegen. Existieren diese beiden Pfade in G , dann enthält G einen K_5 -Minor.*

Beweis. Sei P_1 der Pfad, der zwei Knoten in einem roten Branch-Fan verbindet und P_2 der, der zwei in einem blauen Branch-Fan verbindet. O.B.d.A. hat P_1 Endpunkte in $F(a)$ und P_2 in $F(x)$. Da laut Bedingung die Endpunkte nicht in einem einzelnen Pfad von S liegen, kann a kein Endpunkt von P_1 und x kein Endpunkt von P_2 sein. Es ergeben sich zwei Fälle:

1. Die beiden Pfade haben keine gemeinsamen Knoten Da P_1 beide Endpunkte in $F(a)$ hat, liegen diese beiden Endpunkte in zwei unterschiedlichen blauen Branch-Fans. Entsprechend sind die Endpunkte von P_2 in unterschiedlichen roten Branch-Fans. Werden die Endpunkte von P_1 je mit den beiden blauen und die von P_2 mit den beiden roten Knoten von S kontrahiert, entsteht ein K_5 -Minor.
2. Die beiden Pfade haben einen gemeinsamen Knoten w . Liegt dieser gemeinsame Knoten außerhalb von S , kann Lemma 3.0.4 angewendet werden, da die Endpunkte der Pfade nicht alle im gleichen Branch-Fan liegen. Liegt w innerhalb von S , ist er ein Endpunkt von P_1 und P_2 und muss auf dem Pfad $P(a, x)$ liegen, da dieser der einzige gemeinsame Pfad ist. Sei $P_1 = P(w, u)$ und $P_2 = P(w, v)$. Da u nicht in $F(x)$ liegt und v nicht in $F(a)$, gibt es einen Pfad von u zu einem blauen Knoten und von v zu einem roten Knoten, die sich nicht kreuzen und daher kontrahiert werden können. Durch die Kontraktion dieser beiden Pfade entsteht ein M -Minor. \square

3.0.6 Lemma. *Sei G ein 3-zusammenhängender Graph und S ein $K_{3,3}$ -Homeomorph in G . Betrachtet wird ein Pfad außerhalb von S , der zwei innere Knoten paralleler Pfade in S verbindet sowie ein Pfad außerhalb von S , dessen Endpunkte nicht beide im gleichen Pfad von S liegen. Bestehen die Endpunkte der beiden Pfade aus mindestens drei unterschiedlichen Knoten in S , enthält G einen K_5 -Minor.*

3.0.7 Lemma. *Sei G ein 3-zusammenhängender Graph und S ein $K_{3,3}$ -Homeomorph in G mit den roten Knoten $R = \{a, b, c\}$ und den blauen Knoten $B = \{x, y, z\}$. Bilden weder R , noch B einen $(3, 3)$ -Separator, enthält G einen K_5 -Minor.*

Beweis. Falls R und B keinen $(3, 3)$ -Separator bilden, ist sowohl der Graph $G \cap R$ als auch $G \cap B$ zusammenhängend. Sei P_1 ein Pfad, der zwei blaue Branch-Fans in $G \cap R$ und P_2 einer, der zwei rote Branch-Fans in $G \cap B$ verbindet. Beide liegen außerhalb von S . Die Endpunkte von P_1 seien u_1 und v_1 , die von P_2 seien u_2 und v_2 . u_1 und v_1 besitzen jeweils einen Pfad in S zu einem der roten Knoten. Folglich gibt es einen dritten roten Knoten, der keinen solchen Pfad besitzt - u_2 wird so gewählt, dass er in dem Branch-Fan dieses Knotens liegt. Demnach sind u_1 , v_1 und u_2 unterschiedliche Knoten. Anschließend kann je nach vorliegendem Fall die Aussage auf eines der vorherigen Lemmata reduziert werden:

1. P_1 oder P_2 verbindet zwei parallele Pfade in S . In dem Fall kann Lemma 3.0.6 angewendet werden und G enthält einen K_5 -Minor.
2. Die Endpunkte von P_1 liegen in einem einzelnen roten Branch-Fan - analog liegen die von P_2 in einem blauen. Nach Lemma 3.0.5 enthält G einen K_5 -Minor. \square

3.0.8 Lemma. *Sei G ein 3-zusammenhängender Graph mit einem W -Homeomorph. Ist G nicht isomorph zu W , enthält G einen K_5 -Minor.*

Als nächstes folgt der Beweis zu 3.0.3.

Beweis. Gezeigt wird, dass falls S keinen $(3, 3)$ -Separator bildet, G entweder einen K_5 -Minor enthält oder isomorph zu W ist. Falls kein K_5 -Minor enthalten ist, gilt nach Lemma 3.0.7, dass $G \cap R$ oder $G \cap B$ nicht zusammenhängend ist. Demnach ist B ein 3-Separator, der den Graph teilt, aber die Knoten aus R liegen nicht alle in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten. Deshalb muss es außerhalb von S mindestens einen Pfad P_1 geben, der zwei der roten Knoten in $G - B$ verbindet. Analog gibt es einen Pfad P_2 , der zwei blaue Knoten in $G - R$ verbindet. Da P_1 zwei rote Branch-Fans verbindet, liegen seine Endpunkte in zwei verschiedenen Pfaden von S . Gleiches gilt für die Endpunkte von P_2 . Liegen die Endpunkte von P_1 beide in einem einzelnen blauen Branch-Fan und die von P_2 in einem einzelnen roten, dann enthält G laut Lemma 3.0.5 einen K_5 -Minor. Liegen die Endpunkte von P_1 in parallelen Pfaden von S , enthält G laut Lemma 3.0.6 einen K_5 -Minor, da die Endpunkte von P_2 nicht auf einem Pfad von S liegen (analog falls P_2 auf parallelen Pfaden liegt). Übrig bleibt die Möglichkeit, dass die Endpunkte der beiden Pfade paarweise identisch sind. Dann ist G ein Homeomorph zu W und enthält laut Lemma ?? keinen K_5 -Minor bei Isomorphie zu W . \square

Kapitel 4

Wagner Struktur

Kapitel 5

Implementierung

Kapitel 6

Experimentelle Analyse

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Anhang A

Weitere Informationen

Abbildungsverzeichnis

Algorithmenverzeichnis

Symbolverzeichnis

Literaturverzeichnis

- [1] A. KÉZDY, P. MCGUINNESS: *Sequential and Parallel Algorithms to Find a K_5 Minor*. In: *Proceedings of the Third Annual ACM/SIGACT-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 27-29 January 1992, Orlando, Florida, USA.*, Seiten 345–356, Philadelphia, PA, USA, 1992. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [2] WAGNER, K.: *Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe*. Mathematische Annalen, 114:570–590, 1937.

Eidesstattliche Versicherung

Sauer, Julian

197859

Name, Vorname

Matr.-nr.

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Masterarbeit mit dem Titel

Effiziente Berechnung von K_5 -Minoren in Graphen

selbstständig und ohne unzulässige fremde Hilfe erbracht habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie wörtliche und sinngemäße Zitate kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Dortmund, den 30. Juli 2019

Ort, Datum

Unterschrift

Belehrung:

Wer vorsätzlich gegen eine die Täuschung über Prüfungsleistungen betreffende Regelung einer Hochschulprüfungsordnung verstößt, handelt ordnungswidrig. Die Ordnungswidrigkeit kann mit einer Geldbuße von bis zu 50.000,00 € geahndet werden. Zuständige Verwaltungsbehörde für die Verfolgung und Ahndung von Ordnungswidrigkeiten ist der Kanzler/ die Kanzlerin der Technischen Universität Dortmund. Im Falle eines mehrfachen oder sonstigen schwerwiegenden Täuschungsversuches kann der Prüfling zudem exmatrikuliert werden. (§ 63 Abs. 5 Hochschulgesetz - HG -)

Die Abgabe einer falschen Versicherung an Eides statt wird mit Freiheitsstrafe bis zu 3 Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.

Die Technische Universität Dortmund wird gfs. elektronische Vergleichswerkzeuge (wie z.B. die Software „turnitin“) zur Überprüfung von Ordnungswidrigkeiten in Prüfungsverfahren nutzen.

Die oben stehende Belehrung habe ich zur Kenntnis genommen:

Dortmund, den 30. Juli 2019

Ort, Datum

Unterschrift

