

V64: Interferometrie

Felix Geyer Rune Dominik
felix.geyer@tu-dortmund.de rune.dominik@tu-dortmund.de

Durchführung: 31. Januar 2018
Abgabe: 02. Februar 2018

1 Zielsetzung

Ziel dieses Versuches ist es mithilfe des Sagnac-Interferometers den Brechungsindex von Luft und von Glas zu bestimmen. Dazu wird zuerst das Sagnac-Interferometer aufgebaut und justiert und dann die Brechungsindizes bestimmt.

2 Theorie

2.1 Sagnac-Interferometer

In Abbildung 1 befindet sich der Aufbau des Sagnac-Interferometers. Zu sehen ist ein

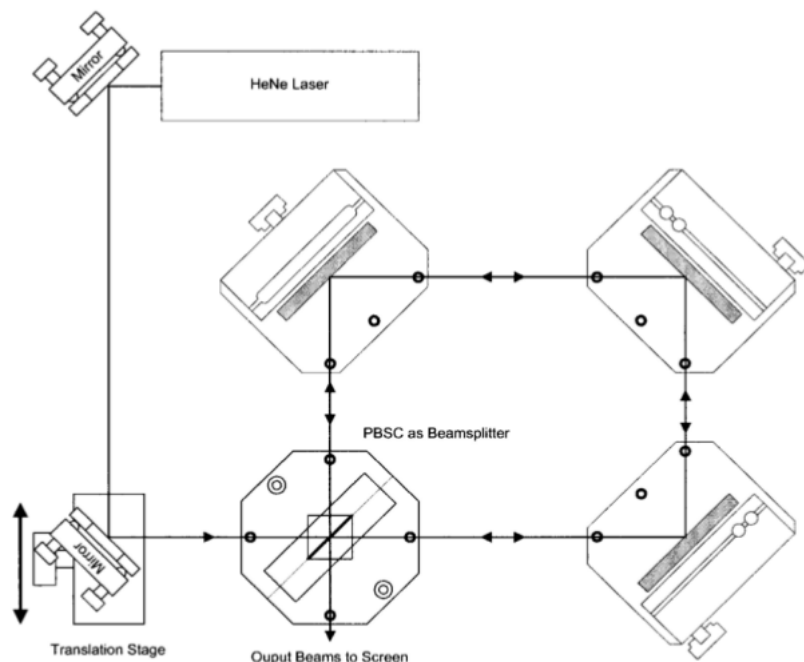


Abbildung 1: Schematischer Aufbau des Sagnac-Interferometers. [1]

Helium-Neon-Laser, dessen Strahl über zwei Steuerspiegel in ein Rechteck aus weiteren Spiegeln geleitet wird. Zwischen Steuerspiegeln und Rechteck befindet sich ein Polarizing Beam-Splitter-Cube (PBSC), welcher aus zwei rechtwinkligen Prismen besteht, welche an der Hypotenuse zusammengeklebt sind. Dieser PBSC hat die Eigenschaft, ohne Intensitätsverlust einen unpolarisierten Strahl in zwei Strahlen mit 90° Winkelunterschied und zueinander senkrechter Polarisation aufzuspalten. Somit legen die zwei Strahlen in unterschiedlicher Richtung den gleichen Weg im Rechteck zurück, treffen sich am PBSC wieder und interferieren dort. Da sie aber keinen Gangunterschied aufweisen, treten keine Interferenzeffekte auf. Indem nun aber einer der beiden Teilstrahlen, z.B. durch den

Durchgang durch eine Gaszelle, variiert wird, entsteht ein Gangunterschied und es kann konstruktive Interferenz stattfinden. Mittels Abzählen der Interferenzmaxima lässt sich beispielsweise der Brechungsindex des Gases bestimmen. Zur Auswertung der beiden Strahlen wird ein zweiter PBSC verwendet, um die Strahlen aufzuteilen und je nach Polarisation einzeln betrachten zu können. Dafür wird ausgenutzt, dass ein PBSC einen einfallenden Strahl in zwei rechtwinklige und senkrecht zueinander polarisierte Teilstrahlen aufspaltet. Die entstehenden Strahlen werden auf Photodioden geleitet.

2.2 Kontrastbestimmung

Der Kontrast eines Interferometers ist definiert als

$$K = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \in [0, 1], \quad (1)$$

wobei 1 der bestmögliche und 0 der schlechtmögliche Wert ist. Zur Bestimmung der funktionalen Abhängigkeit geht man von

$$I \propto |E_1 \cos(\phi) \cos(\omega t) + E_2 \sin(\phi) \cos(\omega t + \delta)|^2 >,$$

mit ϕ als Polarisationswinkel und E_1 und E_2 als Amplituden der Wellen, aus. Mit

$$\begin{aligned} \langle \cos^2(\omega t + \delta) \rangle &= \frac{1}{2} \\ \delta_{\text{konstruktiv}} &= 2\pi n, n \in \mathbb{N}_0 \\ \delta_{\text{desktruktiv}} &= (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

folgt

$$I \propto I_{\text{Laser}} [1 \pm 2 \cos(\phi) \sin(\phi)]$$

mit $I_{\text{Laser}} \propto (E_1 + E_2)^2$ als Ausgangsintensität des Lasers. Daraus ergibt sich mit (1) für den Kontrast

$$K \propto |\sin(2\phi)|, \quad (2)$$

was die Grundlage für den Fit in der Auswertung ist.

2.3 Brechungsindex

Wie bereits erwähnt, lässt sich der Brechungsindex aus der Anzahl der Maxima bestimmen, die sich bei der Interferenz zweier Strahlen ergeben. Für Interferenz ist ein Phasenversatz δ zwischen zwei Strahlen notwendig. Somit ergibt sich allgemein für die Anzahl M der Maxima

$$M = \frac{\delta}{2\pi}.$$

Für den Brechungsindex n von Luft folgt nach

$$M = \frac{n-1}{\lambda} L$$

mit L als Länge der Gaszelle und λ als Wellenlänge des Lasers

$$n = \frac{M\lambda}{L+1}. \quad (3)$$

Für die Bestimmung des Brechungsindex eines Festkörpers werden zwei Glasplättchen genutzt. Für die Phasenänderung $\Delta\phi$ gilt allgemein

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot L$$

mit L als Distanz, die das Licht zurücklegt.

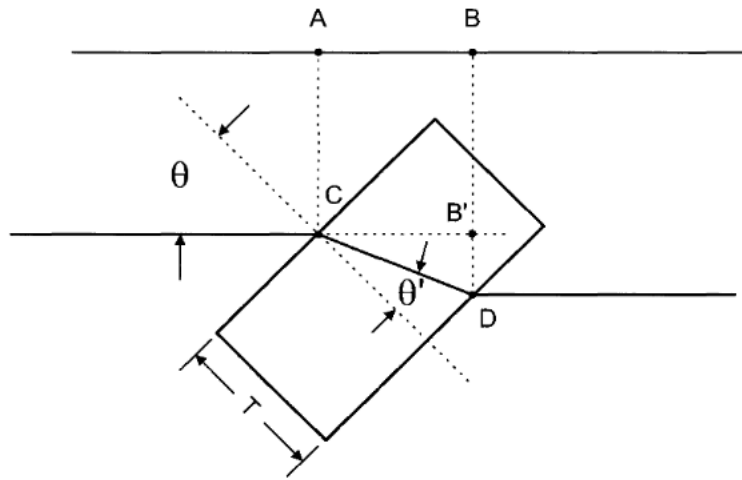


Abbildung 2: Geometrie der Lichtbrechung an einer Glasplatte. [1]

Mittels geometrischer Überlegungen aufgrund von Abbildung 2 lässt sich die Phasenverschiebung schreiben als

$$\phi(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda} T \left(\frac{n - \cos(\theta - \theta')}{\cos(\theta')} - \frac{n-1}{1} \right).$$

Unter Ausnutzung von Snellius Brechungsgesetz und einer Entwicklung in führender Ordnung von θ ergibt sich

$$\phi(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda} T \left(\frac{n-1}{2n} \theta^2 + O(\theta^4) \right)$$

und aus $M = 2(\Delta\phi/2\pi)$ ergibt sich für M ungefähr

$$M = \frac{T}{\lambda} \cdot \frac{n-1}{2n} \cdot \theta^2. \quad (4)$$

3 Durchführung

3.1 Versuchsaufbau

Das meiste des Aufbaus wurde bereits in Kapitel 2.1 beschrieben, es sei noch gesagt, dass zur Variation des Brechungsindex eine Gaszelle oder wahlweise zwei Glasplättchen in den Strahlengang installiert wurden, um für Interferenzeffekte zu sorgen. Außerdem bewegt sich der Laserstrahl vor dem Eintritt in den PBSC durch einen Polarisationsfilter. Weiterhin gibt es neben dem Oszilloskop noch eine digitale Zählvorrichtung, die im wesentlichen aus einem Tiefpass und einem Differenzverstärker besteht.

3.2 Versuchsdurchführung

Als erstes wurden mittels Beam-Paddles die Spiegel im Rechteck so angepasst, dass die beiden Laserstrahlen ein Rechteck durchlaufen und sich in einem Punkt am PBSC treffen. Anschließend wurden die Strahlen über den zweiten Steuerspiegel parallel verschoben, um einen Strahl unabhängig vom anderen modulieren zu können. Dann wurden für verschiedene Polarisationswinkel die minimale und maximale Intensität aufgenommen, um in Abhängigkeit des Polarisationswinkels den Kontrast zu fitten und so den Polarisationswinkel mit dem höchsten Kontrast zu finden. Dieser wurde für alle folgenden Versuchsteile eingestellt. Als nächstes wurde eine Halterung mit zwei Glasplättchen im Winkel von 10° in den Strahlengang gebracht und rotiert. Dabei werden in Abhängigkeit vom Winkel die Maxima gemessen. Zum Schluss wird die Gaszelle in den Strahlengang eines Strahls gebracht und evakuiert. Dann lässt man die Luft wieder einströmen und misst die dabei auftretenden Intensitätsmaxima.

4 Auswertung

4.1 Fehlerrechnung und verwendete Programme

Für die Fehlerrechnung sowie den mathematischen Teil der Auswertung wird auf PYTHON [2] zurückgegriffen:

Als Punktschätzer wird der arithmetische Mittelwert

$$\bar{T}_{\text{arith.}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i, \quad (5)$$

implementiert durch die Funktion MEAN aus dem Paket NUMPY [3] verwendet. Es gibt weiter

$$\sigma_{\bar{T}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{T} - T_i)^2} \quad (6)$$

den Fehler des Mittelwertes an, dieser wird durch die SCIPY.STATS [4] Funktion SEM berechnet.

Fehlerfortpflanzung wird durch die Bibliothek UNCERTAINTIES [5] automatisiert. Regressionen sowie deren Fehler wurden durch die NUMPY Funktion CURVE-FIT berechnet. Grafiken wurden mit MATPLOTLIB [6] erstellt.

4.2 Kontrastmessung

Zur Bestimmung des bestmöglichen Kontrastes werden an einer Photodiode abfallende Minimal- und Maximalspannung für verschiedene Polarisatorstellungen θ_P gemessen. Die gemessenen Werte sowie die daraus bestimmten Kontrastwerte nach (1) sind in Tabelle 1 festgehalten. Die (θ_P, K) -Paare werden nach (2) mit einer Funktion

$$K(\theta_P) = |\alpha \sin(\beta\theta_P + \gamma)| + \delta \quad (7)$$

gefittet. Es ergeben sich die Parameter:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,89 \pm 0,04 \\ \beta &= 2,008 \pm 0,014 \\ \gamma &= (-0,09 \pm 0,03)^\circ \\ \delta &= 0,031 \pm 0,027 \end{aligned} \quad (8)$$

Der Fit ist in Abbildung 3 dargestellt. Um die Messung bei optimalem Kontrast durchzuführen, wird weiter das Maximum der Kontrastfunktion (7) gesucht. Die Funktion wird daher abgeleitet. Als notwendige Bedingung folgt:

$$\frac{dK(\theta_P)}{d\theta_P} = \alpha\beta \cos(\beta\theta_P + \gamma) \stackrel{!}{=} 0.$$

Dies ist in der ersten Periode für 2 Werte erfüllt, es wird sich jedoch auf den Punkt

$$\beta\theta_{P,\max} + \gamma = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow \theta_{P,\max} = \frac{\frac{\pi}{2} - \gamma}{\beta}$$

beschränkt, woraus mit den Fitparametern (8) ein Wert

$$\theta_{P,\max} = (47,3 \pm 0,9)^\circ$$

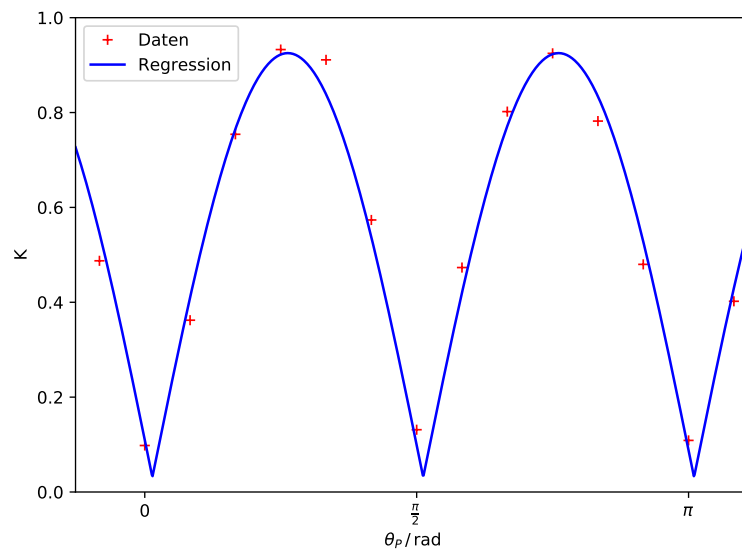
folgt. Die folgenden Messungen wurden bei dieser Polarisatorstellung durchgeführt.

4.3 Brechungsindex von Glas

Um einen brauchbaren Zusammenhang zur Bestimmung des Brechungsindex der Glasplättchen zu erhalten, sind einige Vorüberlegungen notwendig. Die Glasplättchen sind in einem relativen Winkel $\Theta = 2\theta_0 = 2 \cdot 10^\circ$ zueinander angeordnet. Gleichung (4) muss

Tabelle 1: Mess- und Kontrastwerte K .

$\theta_P / ^\circ$	U_{\max} / V	U_{\min} / V	K
-15	4.44	1.53	0.49
0	3.92	3.22	0.10
15	5.19	2.43	0.36
30	6.85	0.96	0.75
45	7.19	0.25	0.93
60	5.59	0.26	0.91
75	3.21	0.87	0.57
90	1.68	1.29	0.13
105	1.65	0.59	0.47
120	1.82	0.20	0.80
135	2.56	0.10	0.92
150	3.27	0.40	0.78
165	3.87	1.36	0.48
180	3.72	2.99	0.11
195	5.37	2.29	0.40

**Abbildung 3:** Kontrast K des Interferometers in Abhängigkeit von der Polarisatorstellung θ_P mit Regression.

daher um den Winkel $\pm\theta_0$ Taylorentwickelt werden. Terme ab θ^2 werden dabei vernach-

lässigt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{(1)}M(\theta, \theta_0) &= \frac{T}{\lambda} \cdot \frac{n-1}{2n} (\theta_0^2 + 2\theta_0(\theta - \theta_0)), \\ \mathcal{T}_{(1)}M(\theta, -\theta_0) &= \frac{T}{\lambda} \cdot \frac{n-1}{2n} (\theta_0^2 - 2\theta_0(\theta + \theta_0)).\end{aligned}$$

Um einen Zusammenhang für den Brechungsindex des Scheibenmaterials zu erhalten, muss die Differenz der beiden Entwicklungen gebildet werden. Umgestellt nach n folgt:

$$n = \left(1 - \frac{\lambda M}{2T\theta_0\theta}\right)^{-1}. \quad (9)$$

Die mit (9) und einer Plättchendicke von $T = 1$ mm sowie einer Laserwellenlänge von 633 nm aus den Messdaten erhaltenen Werte finden sich in Tabelle 2, wobei $\theta_0 = 10^\circ$ gilt und immer in 2° -Schritten gemessen wurden. Es wurden 5 Messreihen aufgenommen. Mittelung über die Messwerte aller Messreihen liefert einen Wert von:

$$n_{\text{Glas}} = 1,48 \pm 0,03.$$

Tabelle 2: Messwerte mit Brechungsindizes der 5 Messreihen sowie dem Mittelwert der Brechungsindizes \bar{n} für jede Messreihe. Die angegebenen Winkel θ sind dabei relative Winkeländerungen. Es wurde ein Intervall von 10° abgefahren. Das Zählwerk wurde jeweils nach einer relativen Winkeländerung von 2° zurückgestellt.

$\theta / ^\circ$	M_1	n_1	M_2	n_2	M_3	n_3	M_4	n_4	M_5	n_5
2	5	1.35	7	1.57	7	1.57	6	1.45	7	1.57
2	6	1.45	7	1.57	6	1.45	7	1.57	6	1.45
2	6	1.45	5	1.35	7	1.57	5	1.35	6	1.45
2	7	1.57	7	1.57	7	1.57	5	1.35	6	1.45
2	8	1.71	5	1.35	5	1.35	7	1.57	5	1.35
\bar{n}	$1,51 \pm 0,07$		$1,48 \pm 0,06$		$1,50 \pm 0,05$		$1,46 \pm 0,05$		$1,45 \pm 0,04$	

4.4 Brechungsindex von Luft

Messwerte und nach (3) bestimmte Brechungsindizes sind in Tabelle 3 dargestellt. Alle Interferenzstreifenmessungen wurden mit einem Fehler von ± 2 versehen, da es bei der Rückkehr auf Umgebungsdruck in der Gaszelle zu Fehlzählungen kommt. Die Länge der Zelle beläuft sich auf $L = 10$ cm. Wieder beträgt die Laserwellenlänge 633 nm. Es ergibt sich also ein Wert von

$$n_{\text{Luft}} = 1,000\,264 \pm 0,000\,007.$$

Tabelle 3: Gezählte Interferenzstreifen M mit berechneten Brechungsindizes für Luft und Mittelwert \bar{n} .

M	n
42 ± 2	$1,000\,266 \pm 0,000\,013$
41 ± 2	$1,000\,260 \pm 0,000\,013$
42 ± 2	$1,000\,266 \pm 0,000\,013$
\bar{n}	$1,000\,264 \pm 0,000\,013$

5 Diskussion

Tabelle 4: Übersicht über die Messergebnisse mit Literaturwerten.

	Messung	Literatur
n_{Glas}	$1,48 \pm 0,03$	$1,5$ [1, S. 11-5]
$n_{\text{Luft}, 633\text{ nm}}$	$1,000\,264 \pm 0,000\,013$	$1,000\,277$ [7]

Mess- und Literaturwerte finden sich in Tabelle 4. Es zeigt sich, dass die Literaturwerte für beide Messungen in der Messungenauigkeit liegen. Da die Glassorte nicht bekannt ist, kann der angegebene Literaturwert für die Glasmessung nur als Richtwert genommen werden. Jedoch liegen auch Literaturwerte für häufig anzutreffende Glasarten bei einer Wellenlänge von 633 nm im Bereich der Messungenauigkeit (beispielsweise $n = 1,52$ ($1,4\sigma$) für Kalk-Natron-Glas / Normalglas [8] oder $n = 1,46$ für Quarzglas [9])

Bei der Messung des Brechungsindex von Luft konnte das Fehlerintervall nur getroffen werden, da die Interferenzstreifenanzählung nicht als fehlerfrei angesehen werden konnte und ein pauschaler Fehler von ± 2 angenommen wurde. Bei Wiederbefüllen der Gaszelle stieg während den letzten ca. 100 mbar vor Umgebungsdruck die Füllrate der Zelle rasant an. Es konnte jedoch beobachtet werden, dass die dadurch entstehenden Interferenzstreifen von der Ausleseelektronik nicht aufgenommen werden konnten. Hier ist daher mit systematischen Fehlern zu rechnen. Für aussagekräftigere Werte wäre eine erneute Messung notwendig.

Eine weitere Verbesserungsmöglichkeit besteht in der Justage des Interferometers. Zwar zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen den gefitteten Parametern der Phasenabhängigkeit der Kontrastfunktion und den zu erwarteten Werten (der Parameter β trifft den erwarteten Wert von 2 im Rahmen der Fehlertoleranz, interne Phasen können durch die Polarisatorstellung ausgeglichen werden), der Kontrast konnte in der Amplitude α jedoch nicht an 100 % angenähert werden. Problematisch war hier, dass der vom ersten PBSC abgelenkte Laserstrahl nach Umlenkung durch den ersten Spiegel nicht ohne Intensitätsverlust auf den zweiten gelenkt werden konnte. Eine bessere Justage könnte den Kontrastwert und damit das Auflösungsvermögen des Interferometers erhöhen.

Literatur

1. Physikalisches Praktikum der Fakultät Physik, T. D. *V64: Interferometrie* (14. Jan. 2018). <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/FP/SKRIPT/Interferometrie.pdf>.
2. Foundation, P. S. Python. Version 3.6.3. <http://python.org/> (2017).
3. Oliphant, T. E. NumPy: Python for Scientific Computing. Version 1.9.2. *Computing in Science & Engineering* **9**, 10–20 (2007).
4. Jones, E., Oliphant, T. E., Peterson, P. u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python* Version 0.16.0. <http://www.scipy.org/>.
5. Lebigot, E. O. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties* Version 2.4.6.1. <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
6. Hunter, J. D. Matplotlib: A 2D Graphics Environment. Version 1.4.3. *Computing in Science & Engineering* **9**, 90–95 (2007).
7. Polyanskiy, M. *Optical constants of Air* (1996). <https://refractiveindex.info/?shelf=other&book=air&page=Ciddor>.
8. Polyanskiy, M. *Optical constants of Soda lime glass* (1985). <https://refractiveindex.info/?shelf=glass&book=soda-lime&page=Rubin-clear>.
9. Polyanskiy, M. *Optical constants of Fused silica (fused quartz)* (1965). https://refractiveindex.info/?shelf=glass&book=fused_silicia&page=Malitson.