FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LIBRO DE ARÍTMETICA
"¡LA MATEMÁTICA!
OTRO PUNTO DE VISTA PARA EL RAZONAMIENTO LÓGICO"

INGRID LORENA ROMERO
JIWELL ENRIQUE MUNEVAR
Estudiante Licenciatura en Matemáticas
I Semestre
Universidad Pedagógica Nacional

Bogotá, DC

ÍNDICE

1. INTRODUCCION

Este libro es resultado del interés de estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional, que como recién ingresados buscan inicialmente encontrar la habilidad para un pleno desarrollo en actividad matemática, esto comienza esencialmente por impulso y motivación del profesor Luque Arias, (encargado de el espacio de Aritmética) quien nos dio como requisito la entrega de un libro que tendría su respectiva calificación. Por estas razones, se comenzó la realización de este libro el cual contiene principalmente todo lo que se logro en clases; esto con el motivo de que cada estudiante desarrollara su capacidad para encontrar algunas curiosidades matemáticas que aunque no se utilicen mucho, son esenciales para el desarrollo mental y para lograr algunos argumentos que son base en el estudio matemático.
Por otra parte estas 'curiosidades' han permitido encontrar una serie de teorías y conjeturas que primordialmente se basan en el estudio de los números naturales y sus operaciones básicas, las cuales solo se logran con la plena observación y con apoyo de lápiz y papel; claro que estas cosas ya fueron descubiertas, pero el interés es simplemente saber como los genios de la matemática lograron sus descubrimientos, además se dará el salto para encontrar nuevas cosas que generaran otras y asi sucesivamente entonces comencemos.

2. SISTEMAS NÚMERICOS

2.1. SISTEMAS DE NUMERACIÓN ADITIVOS

Para ver cómo es la forma de representación aditiva consideremos el sistema jeroglífico egipcio. Por cada unidad se escribe un trazo vertical, por cada decena un símbolo en forma de arco y por cada centena, millar, decena y centena de millar y millón un jeroglífico específico. Así para escribir 754 usaban 7 jeroglíficos de centenas 5 de decenas y 4 trazos. De alguna forma todas las unidades están físicamente presentes.

Los sistemas aditivos son aquellos que acumulan los símbolos de todas las unidades, decenas... como sean necesarios hasta completar el número. Una de sus características es por tanto que se pueden poner los símbolos en cualquier orden, aunque en general se ha preferido una determinada disposición.

Han sido de este tipo las numeraciones egipcia, sumeria (de base 60), hitita, cretense, azteca (de base 20), romana y las alfabéticas de los griegos, armenios, judíos y árabes.

SISTEMAS DE NUMERACIÓN POSICIONALES

Mucho más efectivos que los sistemas anteriores son los posiciónales. En ellos la posición de una cifra nos dice si son decenas, centenas... o en general la potencia de la base correspondiente.

Sólo tres culturas además de la india lograron desarrollar un sistema de este tipo. Babilonios, chinos y mayas en distintas épocas llegaron al mismo principio. La ausencia del cero impidió a los chinos un desarrollo completo hasta la introducción del mismo. Los sistemas babilónico y maya no eran prácticos para operar porque no disponían de símbolos particulares para los dígitos, usando para representarlos una acumulación del signo de la unidad y la decena. El hecho que sus bases fuese 60 y 20 respectivamente no hubiese representado en principio ningún obstáculo. Los mayas por su parte cometían una irregularidad a partir de las unidades de tercer orden, ya que detrás de las veintenas no usaban 20x20=400 sino 20x18=360 para adecuar los números al calendario, una de sus mayores preocupaciones culturales.

Fueron los indios antes del siglo VII los que idearon el sistema tal y como hoy lo conocemos, sin más que un cambio en la forma en la que escribimos los nueve dígitos y el cero. Aunque con frecuencia nos referimos a nuestro sistema de numeración cómo árabe, las pruebas arqueológicas y documentales demuestran el uso del cero tanto en posiciones intermedias como finales, en la India. Los árabes transmitieron esta forma de representar los números y sobre todo el cálculo asociado a ellas, aunque tardaron siglos en ser usadas y aceptadas. Una vez más se produjo una gran resistencia a algo por el mero hecho de ser nuevo o ajeno, aunque sus ventajas eran evidentes. Sin esta forma eficaz de numerar y efectuar cálculos, difícilmente la ciencia hubiese podido avanzar.

SISTEMAS DE NUMERACIÓN HÍBRIDOS

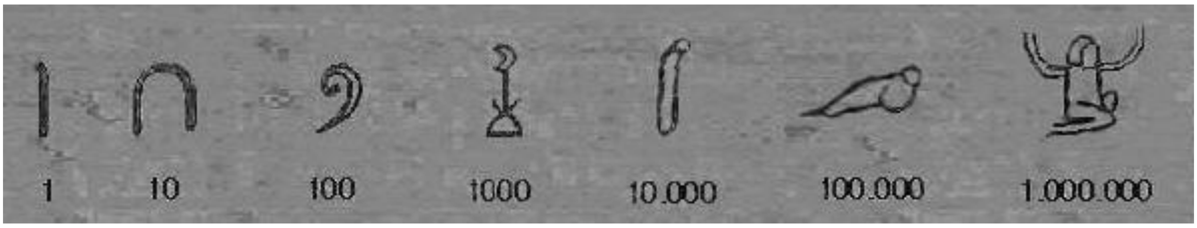
En estos sistemas se combina el principio aditivo con el multiplicativo. Si para representar 500 los sistemas aditivos recurren a cinco representaciones de 100, los híbridos utilizan la combinación del 5 y el 100. Pero siguen acumulando estas combinaciones de signos para los números más complejos. Por lo tanto sigue siendo innecesario un símbolo para el 0. Para representar el 703 se usa la combinación del 7 y el 100 seguida del 3.

El orden en la escritura de las cifras es ahora fundamental para evitar confusiones, se dan así los pasos para llegar al sistema posicional, ya que si los signos del 10, 100 etc. se repiten siempre en los mismos lugares, pronto alguien piensa en suprimirlos, dándolos por supuestos y se escriben sólo las cifras correspondientes a las decenas, centenas etc. .Pero para ello es necesario un cero, algo que indique que algún orden de magnitud está vacío y no se confundan el 307 con 370, 3070...

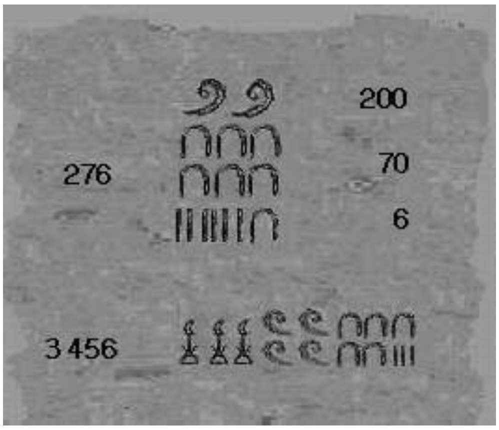
Además del chino clásico han sido sistemas de este tipo el asirio, arameo, etíope y algunos del subcontinente indio cómo el tamil, el malayalam y el cingalés.

2.2. EL SISTEMA DE NUMERACIÓN EGIPCIO

Desde el tercer milenio A.C. los egipcios usaron un sistema de escribir los números en base diez utilizando los jeroglíficos de la figura para representar los distintos órdenes de unidades.



Se usaban tantos de cada uno cómo fuera necesario y se podían escribir indistintamente de izquierda a derecha, al revés o de arriba abajo, cambiando la orientación de las figuras según el caso.



Al ser indiferente el orden se escribían a veces según criterios estéticos, y solían ir acompañados de los jeroglíficos correspondientes al tipo de objeto (animales, prisioneros, vasijas etc.) cuyo número indicaban.

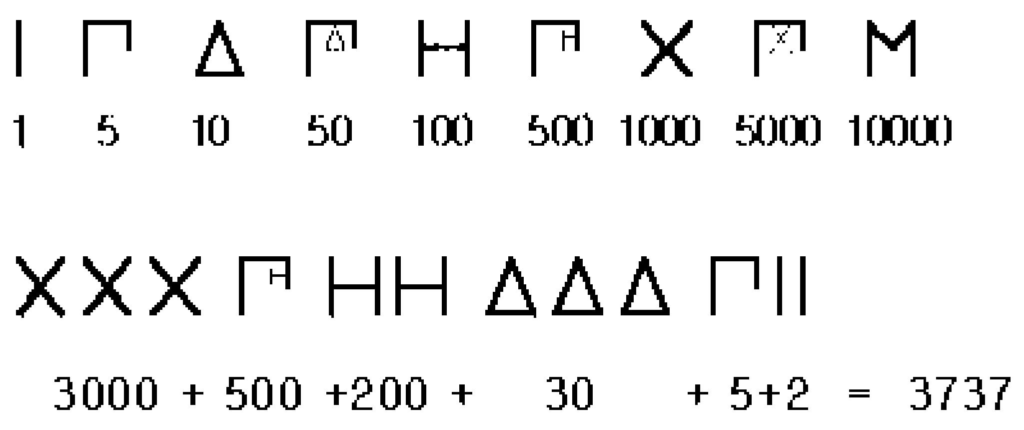
Estos signos fueron utilizados hasta la incorporación de Egipto al imperio romano. Pero su uso quedó reservado a las inscripciones monumentales, en el uso diario fue sustituido por la escritura hierática y demótica, formas más simples que permitían mayor rapidez y comodidad a los escribas

En estos sistemas de escritura los grupos de signos adquirieron una forma propia, y asi se introdujeron símbolos particulares para 20, 30....90....200, 300.....900, 2000, 3000...... con lo que disminuye el número de signos necesarios para escribir una cifra.

2.3. EL SISTEMA DE NUMERACIÓN GRIEGO

El primer sistema de numeración griego se desarrolló hacia el 600 A.C. Era un sistema de base decimal que usaba los símbolos de la figura siguiente para representar esas cantidades. Se utilizaban tantas de ellas como fuera necesario según el principio de las numeraciones aditivas.

Para representar la unidad y los números hasta el 4 se usaban trazos verticales. Para el 5, 10 y 100 las letras correspondientes a la inicial de la palabra cinco (pente), diez (deka) y mil (khiloi). Por este motivo se llama a este sistema acrofónico.



Los símbolos de 50, 500 y 5000 se obtienen añadiendo el signo de 10, 100 y 1000 al de 5, usando un principio multiplicativo. Progresivamente este sistema ático fue reemplazado por el jónico, que empleaba las 24 letras del alfabeto griego junto con algunos otros símbolos según el siguiente gráfico:

1	α	10	ι	100	ρ
2	β	20	κ	200	σ
3	γ	30	λ	300	τ
4	δ	40	μ	400	υ
5	ε	50	ν	500	φ
6	ϛ	60	ξ	600	χ
7	ζ	70	ο	700	ψ
8	η	80	π	800	ω
9	θ	90	ϟ	900	ϡ

De esta forma los números parecen palabras, ya que están compuestos por letras, y a su vez las palabras tienen un valor numérico, basta sumar las cifras que corresponden a las letras que las componen. Esta circunstancia hizo aparecer una nueva suerte de disciplina mágica que estudiaba la relación entre los números y las palabras. En algunas sociedades como la judía y la árabe, que utilizaban un sistema similar, el estudio de esta relación ha tenido una gran importancia y ha constituido una disciplina aparte: la kábala, que persigue fines místicos y adivinatorios.

2.4. EL SISTEMA DE NUMERACIÓN CHINO

La forma clásica de escritura de los números en China se empezó a usar desde el 1500 A.C. aproximadamente. Es un sistema decimal estricto que usa las unidades y los distintas potencias de 10. Utiliza los ideogramas de la figura

1	一	5	五	8	八	100	百
2	二	6	六	9	九	1 000	千
3	三	7	七	10	十	10 000	萬
4	四						

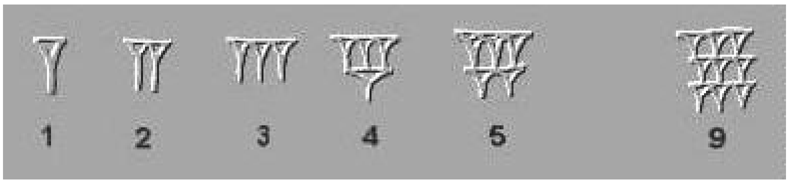
Y usa la combinación de los números hasta el diez con la decena, centena, millar y decena de millar para según el principio multiplicativo representar 50, 700 ó 3000. El orden de escritura se hace fundamental, ya que 5 10 7 igual podría representar 57 que 75.

Tradicionalmente se ha escrito de arriba abajo aunque también se hace de izquierda a derecha como en el ejemplo de la figura. No es necesario un símbolo para el cero siempre y cuando se pongan todos los ideogramas, pero aún así a veces se suprimían los correspondientes a las potencias de 10.

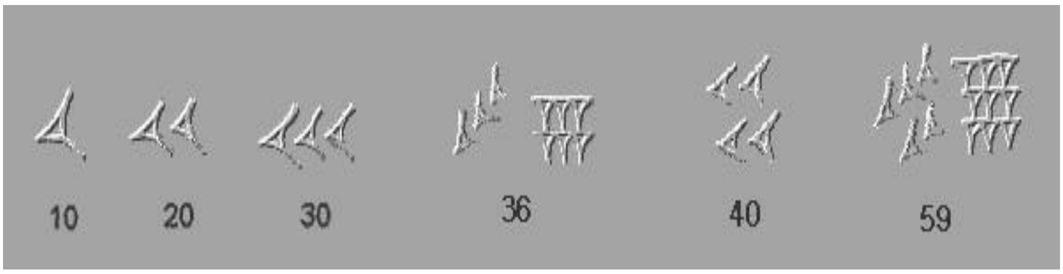
Aparte de esta forma que podríamos llamar adecuada se usaron otras. Para los documentos importantes se usaba una grafía más complicada con objeto de evitar falsificaciones y errores. En los sellos se escribía de forma más estilizada y lineal y aún se usaban hasta dos grafías diferentes en usos domésticos y comerciales, aparte de las variantes regionales. Los eruditos chinos por su parte desarrollaron un sistema posicional muy parecido al actual que desde que incorporó el cero por influencia india en s. VIII en nada se diferencia de este.

2.5. EL SISTEMA DE NUMERACIÓN BABILÓNICO

Entre las muchas civilizaciones que florecieron en la antigua Mesopotamia se desarrollaron distintos sistemas de numeración. Hacia el año 3500 A.C. se inventó un sistema de base 10, aditivo hasta el 60 y posicional para números superiores.

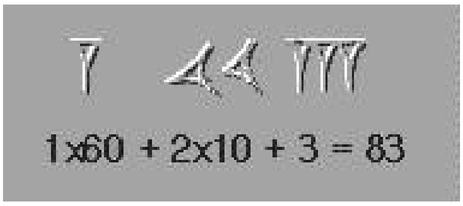


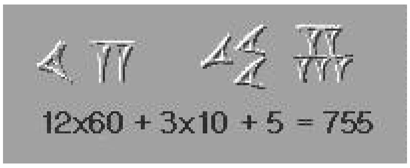
Para la unidad se usaba la marca vertical que se hacía con el punzón en forma de cuña. Se ponían tantos como fuera preciso hasta llegar a 10, que tenía su propio signo

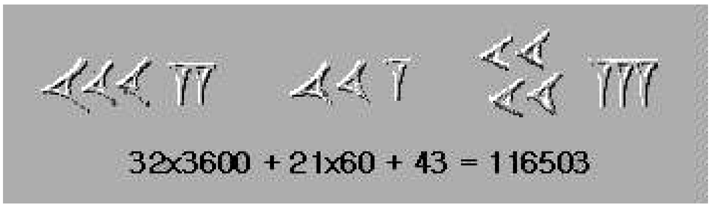


De este se usaban los que fuera necesario completando con las unidades hasta llegar a 60.

A partir de ahí se usaba un sistema posicional en el que los grupos de signos iban representando sucesivamente el número de unidades, 60, 60x60, 60x60x60 y asi sucesivamente como en los ejemplos que se acompañan.

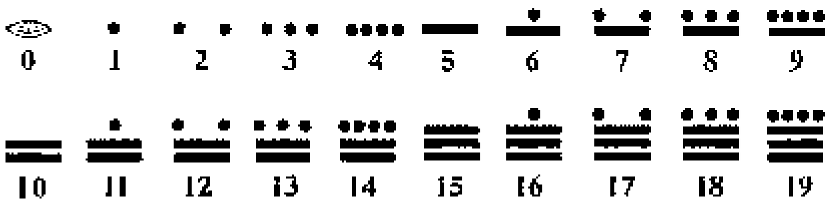






2.6. EL SISTEMA DE NUMERACIÓN MAYA

Los mayas idearon un sistema de base 20 con el 5 cómo base auxiliar. La unidad se representaba por un punto. Dos, tres, y cuatro puntos servían para 2, 3 y 4. El 5 era una raya horizontal, a la que se añadían los puntos necesarios para representar 6, 7, 8 y 9. Para el 10 se usaban dos rayas, y de la misma forma se continúa hasta el 20, con cuatro rayas.



Hasta aquí parece ser un sistema de base 5 aditivo, pero en realidad, considerados cada uno un solo signo, estos símbolos constituyen las cifras de un sistema de base 20, en el que hay que multiplicar el valor de cada cifra por 1, 20, 20x20, 20x20x20 ... según el lugar que ocupe, y sumar el resultado. Es por tanto un sistema posicional que se escribe a arriba abajo, empezando por el orden de magnitud mayor.

Numeración comercial

$21 = 1x20 + 1$

$122 = 6x20 + 2$

$41 = 2x20 + 1$

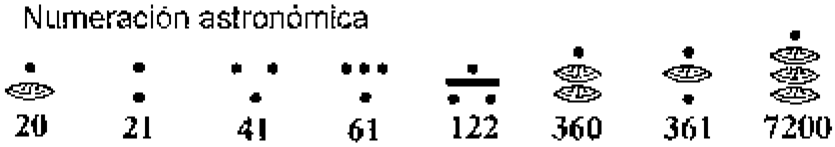
$401 = 1x20^2 + 0x20 + 1$

$61 = 3x20 + 1$

$8000 = 1x20^3 + 0x20^2 + 0x20 + 0$

Al tener cada cifra un valor relativo según el lugar que ocupa, la presencia de un signo para el cero, con el que indicar la ausencia de unidades de algún orden, se hace imprescindible y los mayas lo usaron, aunque no parece haberles interesado el concepto de cantidad nula. Cómo los babilonios lo usaron simplemente para indicar la ausencia de otro número.
Pero los científicos mayas eran a la vez sacerdotes ocupados en la observación astronómica y para expresar los números correspondientes a las fechas usaron unas unidades de tercer orden irregulares para la base 20. Así la cifra que ocupaba el tercer lugar desde abajo se multiplicaba por 20x18=360 para completar una cifra muy próxima a la duración de un año.

Numeración astronómica



$361 = 1x(18x20) + 1 = 1x360 + 1$

$7200 = 1x(18x20^2) + 0x(18x20) + 0x20 + 0$

$7200 = 1x7200 + 0x360 + 0x20 + 0$

El año lo consideraban dividido en 18 uinal que constaba cada uno de 20 días. Se añadían algunos festivos (uayeb) y de esta forma se conseguía que durara justo lo que una de las unidades de tercer orden del sistema numérico. Además de éste calendario solar, usaron otro de carácter religioso en el que el año se divide en 20 ciclos de 13 días.
Al romperse la unidad del sistema éste se hace poco práctico para el cálculo y aunque los conocimientos astronómicos y de otro tipo fueron notables los mayas no desarrollaron una matemática más allá del calendario.

2.7. EL SISTEMA DE NUMERACIÓN ROMANO

Aunque parto de la base de que todos conocemos este sistema de numeración voy a comentar algo sobre él. El sistema de numeración romano es un sistema no posicional que asigna valores a ciertas letras. Las letras usadas y sus valores son los siguientes:

I = 1
V = 5
X = 10
L = 50
C = 100
D = 500
M = 1000

Los romanos no tenían símbolos para representar cantidades mayores a 1000, aunque algunas modificaciones más modernas usan una barra encima de cada una de las letras para representar el producto de su valor por mil. Por ejemplo, V con una barra encima valdría 5000, X con una barra encima valdría 10000, y así sucesivamente.

La representación de cada número en este sistema es bastante curiosa, por decirlo de alguna forma. Si escribimos un símbolo delante de otro mayor estamos restando el menor al mayor. Por ejemplo, IX sería 10 - 1 = 9. Si escribimos un símbolo detrás de otro mayor se lo estamos sumando. Por ejemplo, LX = 50 + 10 = 60. Podemos usar símbolos iguales de forma consecutiva en un máximo de tres apariciones. Por ejemplo, XXX = 10 + 10 + 10 = 30 (la I parece ser una excepción, ya que a veces el número 4 se representaba IV y a veces IIII). Y en general no podemos restarle a un símbolo otro que sea menor que un décimo del valor del primero. Por ejemplo, 49 se escribe como XLIX y no como IL.

En general podemos decir la escritura de un número en este sistema está estructurada alrededor del símbolo más grande usado para escribir el número.

4.5 LA CULTURA INCA

4.5.1 MATEMÁTICA

Quipukamayuq con su quipu y una yupana, los principales instrumentos que usaron los incas en matemáticas.

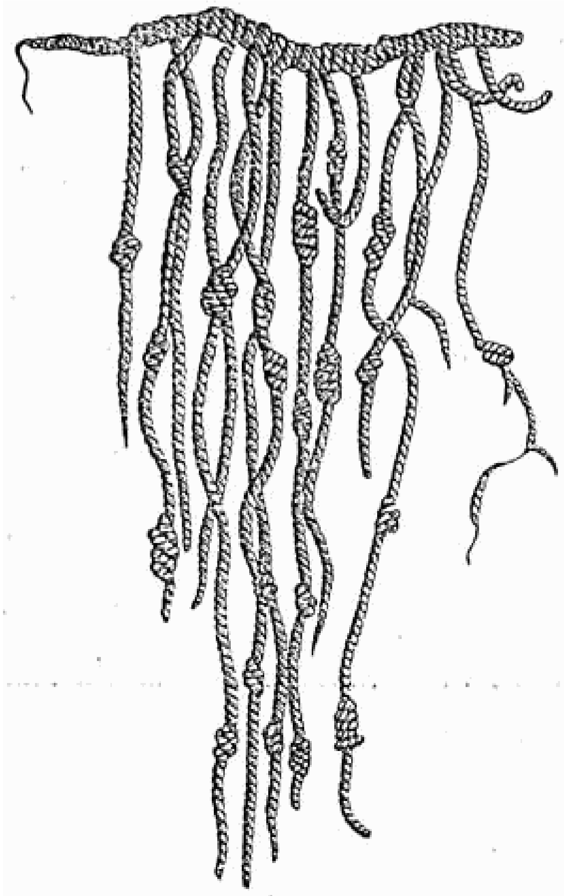
En el campo de la matemática los incas destacaron principalmente por su capacidad de cálculo en el ámbito económico. Los quipus y yupanas fueron señal de la importancia que tuvo la matemática en la administración incaica. Esto dotó a los incas de una aritmética sencilla pero efectiva, para fines contables, basada en el sistema decimal; desconocieron el cero, pero dominaron la suma, la resta, la multiplicación y la división.

Por otra parte, la construcción de caminos, canales y monumentos, así como el trazado de ciudades y fortalezas, exigió el desarrollo de una geometría práctica, que fue indispensable para la medición de longitudes y superficies, además del diseño arquitectónico. A la par desarrollaron importantes sistemas de medición de longitud y capacidad, los cuales tomaban el cuerpo humano como referencia

4.5.2 LOS QUIPUS

El quipu fue un sistema nemotécnico de cuerdas de lana o algodón y nudos de uno o varios colores desarrollado en los Andes. Si bien se sabe que fue usado como un sistema de contabilidad por los funcionarios del Imperio Inca, se estudia su posible uso como una forma de escritura, a partir de la teoría del Ingeniero William Burns Glynn.

Los utilizaban los quipu kamayoc (khipu kamayuq), que eran los sabios del imperio incaico.
Se han hallado quipus en Caral, la ciudad más antigua de América, como también en los centros de la cultura Wari.



4.5.2.1 Estructura

El quipu consta de una cuerda principal, sin nudos, de la cual penden otras generalmente anudadas y de diversos hermosos colores, formas y tamaños, los colores se identifican como productos y los nudos la cantidad -llamadas cuerdas colgantes-. Puede haber cuerdas sin nudos, como también cuerdas que no se desprenden de la principal sino de la secundaria (cuerdas secundarias). Los especialistas contemporáneos piensan que los colores y quizá la forma de trenzado de las cuerdas indican los objetos, mientras que los nudos harían referencia a las cantidades, incluyendo el número cero.

"Entre los quipus conocidos hay una gran variedad de tamaño y complejidad, pues van desde los muy simples hasta los que tienen más de mil cuerdas" (Franklin Pease García Yrigoyen).

4.5.2.2 Historia

Los quipus más antiguos fueron hallados en la ciudad antigua de Caral y algunas posteriores en centros urbanos Wari. Ello hace evidente que el uso del quipu tiene una gran antigüedad.

Fueron utilizados por el Imperio Inca para registrar la población de cada uno de los grupos étnicos que entregaban su fuerza de trabajo a través de la mit'a y de la producción almacenada en las qullqa para lo cual todo depósito tenía su khipukamayuq residente.

Pedro Cieza de León señala que en cada capital de provincia había un khipukamayuq encargado de todas las cuentas, incluso las relativas a los textiles. De acuerdo con la importancia del depósito algunos de estos contadores pudieron haber pertenecido al linaje del Qhapaq inka.

Durante la conquista, muchos quipus fueron quemados y destruidos por los conquistadores españoles (ver: Conquista del Imperio Inca)como cosas del demonio.

En la actualidad, se sigue investigando el significado de los cerca de 600 quipus sobrevivientes y otros tantos encontrados durante el siglo XX en tumbas de toda naturaleza, lo que sirve para ampliar los conocimientos sobre el antiguo Perú.

4.5.2.3 Sistema de numeración

Representación de un quipu, instrumento de contabilidad y mnemotécnico inca.

Se tiene noción que en el Imperio Inca el sistema de numeración imperante era el decimal. Una de las principales referencias que confirman esto son las crónicas que presentan una jerarquía de autoridades organizadas decimalmente.

Encargado	Cantidad de familias
Puriq	1 familia
Pichqa kamayuq	5 familias
Chunka kamayuq	10 familias
Pichqa chunka kamayuq	50 familias
Pachaka kamayuq	100 familias
Pichqa pachaka kamayuq	500 familias
Waranqa kamayuq	1.000 familias
Pichqa waranqa kamayuq	5.000 familias
Hunu kamayuq	10.000 familias

También se puede confirmar el uso del sistema decimal en el incario, por medio de la interpretación de los quipus, que están organizados de modo que los nudos de acuerdo a su ubicación pueden representar: unidades, decenas, centenas, etc.

Sin embargo, la principal confirmación de este sistema, se expresa en la denominación de los números en quechua, en que los números van desarrollándose de manera decimal, como se puede apreciar en el siguiente cuadro (el quechua usado es el estándar del Cusco):

Números	Quechua	Números	Quechua	Número	Quechua
1	*Huk*	11	*Chunka hukniyuq*	30	*Kimsa chunka*
2	*Iskay*	12	*Chunka iskayniyuq*	40	*Tawa chunka*
3	*Kimsa*	13	*Chunka kimsayuq*	50	*Pisqa chunka*
4	*Tawa*	14	*Chunka tawayuq*	60	*Suqta chunka*
5	*Pisqa*	15	*Chunka pisqayuq*	70	*Qanchis*
6	*Suqta*	16	*Chunka suqtayuq*	80	*Pusaq chunka*
7	*Qanchis*	17	*Chunka qanchisniyuq*	90	*Isqun chunka*
8	*Pusaq*	18	*Chunka pusaqniyuq*	100	*Pachak*
9	*Isqun*	19	*Chunka isqunniyuq*	1.000	*Waranqa*
10	*Chunka*	20	*Iskay chunka*	1.000.00	*Hunu*

4.5.3 LOS YUPANAS

Yupana, conocida también como "ábaco inca". Su potencial de contabilidad es aún muy discutido.

En el caso de la información numérica, las operaciones matemáticas eran realizadas previamente en los ábacos o yupanas. Estos podían ser de piedra tallada o de barro, tenían casilleros o compartimentos que correspondían a las unidades decimales y se contaba o señalaba con la ayuda de piedrecitas o granos de maíz o quinua. Se podían indicar unidades, decenas, centenas, etc. de acuerdo a si estaban implícitas en cada operación.

Investigaciones recientes en relación a los yupanas sugieren que eran capaces de calcular cifras considerables basándose en un sistema probablemente no decimal, sino basados en relación al número 40. De ser cierto, es curioso notar la coincidencia entre la progresión geométrica conseguida en el yupana y los actuales sistemas de procesamiento; por otro lado también resulta contradictorio el hecho de basar su sistema de contabilidad en el número 40, de seguir las investigaciones y confirmarse este hecho, habría que comparar su uso con el sistema decimal, que según la tradición histórica e investigaciones anteriores, era el que usaban los incas.

2.8. EL SITEMA DE NUMERACIÓN ARABIGO

Los números arábigos son los símbolos más utilizados para representar números. Se les llama "arábigos" sólo porque los árabes los introdujeron a Europa, pero en realidad son invención de los indios. El mundo le debe a la India el invento trascendental del sistema de numeración de base 10, llamado de posición, así como el descubrimiento del 0 (llamado "sunya" o "bindu" en lengua sánscrita), aunque los mayas también conocieron el 0, también los mayas preclásicos (o sus predecesores olmecas) desarrollaron independientemente el concepto de cero alrededor del año 36 AC. Este es el primer uso documentado de un cero como lo conocemos hoy en día; vale decir que parecen haber estado usando el concepto de cero siglos antes que en el viejo mundo. Pero los mayas usaban el cero en un sistema "vigesimal", muy distinto al que utilizamos. El sistema numérico llamado "arábigo" es un sistema posicional que se basa en el número 10; consta de 10 glifos diferentes para representar los 10 dígitos. El valor de un dígito varía según la posición que ocupa dentro del número multiplicándose por la base elevado a la posición. Así, el primer dígito comenzando por la derecha tiene el valor que representa su símbolo multiplicado por 10^0(=1). El dígito situado a su izquierda tiene el valor que representa su símbolo multiplicado por 10^1(=10), y así sucesivamente. La fórmula genérica para un número de *n* dígitos es:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot 10^{(i-1)}$$

Donde X_i es el dígito situado en la posición *i* comenzando por la derecha. Por ejemplo:

$$''639'' = (6 \cdot 10^2) + (3 \cdot 10^1) + (9 \cdot 10^0) =$$
$$(6 \cdot 100) + (3 \cdot 10) + (9 \cdot 1) = 600 + 30 + 9 = 639$$

El sistema "arábigo" se ha representado (y se representa) utilizando muchos conjuntos de glifos diferentes. Estos glifos pueden dividirse en dos grandes familias, los numerales arábigos occidentales y los orientales.

2.9. NUESTRO SISTEMA NUMÉRICO

Todos conocemos los números como el 1, 2, 3, 4, etc., pero lo que no sabemos es que por medio de otra simbología también lo podemos hacer.

Para esto hemos inventado un nuevo sistema numérico, en donde podremos aprender diferentes formas de contar.

Podemos empezar con la unidad que lo representaremos con este símbolo✪; cada seis unidades o seis ✪ lo representaremos con un nuevo símbolo✋; por consiguiente:

✪✪✪✪✪✪ = ✋

Para no tener un cantidad muy larga de símbolos hemos creado un nuevo símbolo (☠), el cual representa dieciocho unidades (✪) ó tres símbolos que representativos de seis unidades (✋).

✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪ = ☠

👋👋👋 = ☠

Pero para ser más económicos lo mas conveniente es escribir la manera más corta para representar el número dieciocho, que en este caso sería 👋👋👋 = ☠.

Y OTRO SISTEMA NÚMERICO

En esta parte me dedicare simplemente a presentar mi propio sistema de numeración, dándole mis propias reglas con un poco de imaginación.

Para comenzar daré un valor al primer número que es la unidad lo representare con el siguiente símbolo:

☺= 1

Con base en la unidad designare otros números:

☻= 2

♪ = 7

♫ = 14

♂ = 140

♀= 1400

Me basare en sistemas como el romano para la creación de otros números, solo que en este será basado en suma y multiplicación.

☺= 1, ☻=2, ☻☺=3, ☻☻= 4, ☻☻☺ = 5, ☻☻☻ = 6, ♪ = 7, ♪☺=8,

♪☻ = 9, ♪☻☺= 10, ♪☻☻ = 11, ♪☻☻☺= 12, ☻☻☻♪ = 13, ♫ = 14,

♫☺ = 15… hasta el 27.

Esto quiere decir que los símbolos al lado derecho van a sumar al primer símbolo para dar como resultado la representación de otro número.

También utilizare el slash /[I] ubicada a la izquierda me indicara el duplo del 14, del 140 o del 1400 (solo de estos números) y si hay dos será el triple y si hay tres será el cuádruple y asi sucesivamente hasta el nónuplo. Ejemplos:

29 = / ♫ ☺

280 = /♂

28 = / ♫

85= /////♫☺

36 = /♫♪☺

70 = ////♫

Como solo podemos hasta el nónuplo de 1400 que es 12600 los demás números se obtendrán mediante operaciones como el duplo del nónuplo de 1400 que se escribiría con ayuda de los paréntesis, lo que hará que los símbolos a la izquierda serán el duplo, triplo, etc., y a la derecha del símbolo en paréntesis será la suma:

/ (////////♀)= 25200

/ (////////♀)/////♫☺=25285

Con esta forma obtendríamos muchos números más.

3. OPERACIONES BÁSICAS

3.1 .LA SUMA

Sumar dos números significa considerar juntas o reunir las unidades indicadas por los dos números por separado. El resultado de sumar dos números será otro número que tendrá tantas unidades como tengan los dos números considerados. La operación de sumar se simboliza mediante el signo +.
Así, sumar a un número otro número dado es añadir al primero sucesivamente tantas unidades como indica el segundo:

13 + 9 =14 + 8 =15 + 7 =16 + 6 =17 + 5 =18 + 4 =19 + 3 =20 + 2 =21 + 1 =22 + 0 =22

[I] Vemos como se va haciendo más compleja la escritura, pero eso es algo muy curioso de la matemática que entre más sigamos mas cosas habrán por solucionar, y eso es algo que nos da gusto y ofrece un impulso a los matemáticos para seguir cada vez más y más.

En la práctica, las sumas no se efectúan así, sino mediante resultados parciales.

Para sumar números naturales de una cifra es suficiente añadir al primero las unidades del segundo una a una; a la suma del primero y el segundo, las unidades del tercero, y asi sucesivamente hasta finalizar la suma.

Cada uno de los números que intervienen en la operación se denomina sumando. Al resultado se le llama suma.

Para sumar números naturales con cualquier número de cifras, se suman las correspondientes a cada orden de unidad. Implícitamente, se descompone cada uno de los sumandos en las unidades de los diversos órdenes y se van sumando estos entre sí; para obtener el resultado vuelven a componerse dichos órdenes para formar el número suma:
2.314+ 9.432 + 43 + 920=2.000 + 300 + 10 + 4 + 9.000 + 400 + 30 + 2 + 40 + 3+ 900 + 20=2.000 + 9.000 +300 + 400 + 900 + 10 +30 + 40 + 20 + 4 + 2 + 3=11.000 + 1.600 + 100 + 9 = 10.000 + 1.000 + 1.000 + 600 + 100 + 9 =10.000 + 2.000 + 700 + 9 =12.709

La práctica normal de la suma consiste en disponer una columna los sumandos para conseguir una mayor comodidad al operar:

Ejemplo:

$$\begin{array}{rr} & 2.314 \\ & 9.432 \\ + & 43 \\ & \underline{920} \\ & 12.709 \end{array}$$

PROPIEDADES DE LA SUMA

Conmutativa: la suma de dos números naturales es independiente del orden de los sumandos.

$$a+b=b+a$$

Asociativa: para sumar varios números, estos pueden asociarse en cualquier orden y el resultado permanece invariable.

$$a+b+c+d=$$

$$(a+b)+(c+d)=$$

$$a+(b+c+d)=\cdots$$

Disociativa: es consecuencia inmediata de la anterior propiedad. Expresa que la suma de varios números no se altera al sustituir uno o vario sumandos por otros tales que la suma de los nuevos sumandos sea igual a la antigua.

$$b=m+n \Rightarrow a+b+c=a+(m+n)+c$$

Elemento neutro: existe un número, el cero (0), que sumado a otro número natural no lo altera; es decir, el resultado de sumar un número natural dado y el cero es el mismo número. Por ello al cero se le denomina elemento neutro.

Uniforme: tiene un triple significado:

a. el resultado de la suma es único, independientemente de la magnitud que sumemos.
b. las sumas de dos números respectivamente iguales son iguales.

$$a=b; c=d \Rightarrow a+c=b+d$$

c. sumando miembro a miembro igualdades se obtiene otra igualdad (en realidad esto es una extensión de lo anteriormente dicho).

3.2. LA RESTA

La resta o sustracción es la operación inversa de la suma.
La operación se designa con el signo (-).
Por medio de la resta, a partir de dos números y uno de los sumandos se halla el otro sumando. Así, si s es igual a la suma de a y b y conocemos s y a, tenemos:

$$s-a=(a+b)-a=b+a-a=b$$

Ya que si a un número le añadimos otro número y a continuación se lo sustraemos, es evidente que se tendrá el primero.
La resta puede definirse también como la operación mediante la cual se determina cuantas unidades es mayor un número que otro. A este resultado se le denomina diferencia. Si:

$$a-b=c$$

a se denomina minuendo, b sustraendo, y c es la diferencia.
De aquí podemos deducir que el minuendo es igual a la diferencia más el sustraendo.

Para restar un número de una sola cifra de otro número natural cualesquiera, se restan sucesivamente de ambos todas las unidades del segundo una a una. Es decir, se quitan tantas unidades del minuendo como hay en el sustraendo.

5 – 3 = 4 – 2 = 3 – 1 = 2 – 0= 2

Para hallar la diferencia de dos números naturales cualesquiera de varias cifras, se restan sucesivamente las unidades correspondientes a los diferentes órdenes del sustraendo de las unidades del minuendo.
Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 54.500 \\ -\ 7.891 \\ \hline 46.609 \end{array}$$

3.3. LA MULTIPLICACIÓN

Multiplicar un número dado, denominado multiplicando, por otro cualquiera, llamado multiplicador, es sumar el primero tantas veces como indique el segundo. De esta forma se obtiene un resultado que recibe el nombre de producto.
Se simboliza con un aspa $(\times)$ o con el punto (.)
Ejemplo:

$$7\times 3=7+7+7=21$$

El producto es en realidad una forma abreviada de la suma.

Para calcular el producto de dos números de varias cifras se utiliza el siguiente algoritmo:

$$\begin{array}{r} 416 \\ \times\ 937 \\ \hline 2912 \\ 1248 \\ +\ 3744 \\ \hline 389792 \end{array}$$

Por tanto, para hallar el producto de dos números naturales de una o varias cifras, se multiplica todo el multiplicando por cada una de las cifras significativas del multiplicador, escribiendo los productos unos de bajo de otros de modo que la primera de sus cifras, la que ocupa una posición más a la derecha, se disponga en el mismo lugar que en la cifra correspondiente del multiplicador; la suma de estos productos parciales será el producto total.

El producto de un número por 2, 3, 4, 5, etc., se denomina duplo, triplo, cuádruplo, quíntuplo, etc., del número, respectivamente.

El producto de dos números es un múltiplo cualquiera de los factores, denominándose a estos submúltiplos del producto.

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

Uniforme: el producto de dos números es único o siempre igual, los productos de números respectivamente iguales son iguales y al multiplicar varias igualdades resulta otra igualdad.

Conmutativa: el orden de los factores no altera el producto.

$$a \times b = b \times a$$

Asociativa: el producto de varios números no varía cuando se sustituye dos o más factores por su producto.

Distributiva con respecto a la suma:

$$a \times (b + c) = ab + ac$$

3.4. LA DIVISIÓN

Dados dos números la operación de hallar cuantas veces es uno mayor que otro se llama división. Al primero de los dos números se le llama dividendo y al otro divisor. Al resultado se le denomina cociente.

También se define la división como la operación como la operación de partir el dividendo en partes iguales por tantas unidades como tiene el divisor.

El cociente de 20 y 8 es dos porque 2 x 8<20 pero 20<3 x 8, o también con veinte unidades pueden formarse 2 partes iguales de 8 unidades cada una y sobran cuatro unidades: 20= 2 x 8 + 4. Esta parte que sobra recibe el nombre de residuo.

La división es exacta cuando el residuo es 0 y si es un número diferente de 0 es inexacta.

Para hallar el cociente de la división de un número por otro, se restan del dividendo tantas unidades como tiene el divisor y esto tantas veces como sea posible. El número de veces que se hace esta resta es el cociente.

Ejemplo:

65 – 13 = 52 (1)
52 – 13 = 39 (2)
39 – 13 = 26 (3)
26 – 13 = 13 (4)
13 – 13 = 0 (5)

El cociente es 5 y el residuo es 0.

Para dividir un número terminado en ceros por la unidad seguida de ceros se suprimen de la derecha del número tantos ceros como siguen a la unidad.

Un número dividido por la unidad es igual al mismo número.

La división por 0 es matemáticamente imposible por ello nuca se debe dividir por 0.

Para dividir dos números de varias cifras se utiliza el siguiente algoritmo:

```
  9 5 8 0   25
 -7 5       ----------
  2 0 8       383
 -2 0 0
      8 0
     -7 5
        5
```

9578 / 25 = 383 y residuo 5

4. CUENTAS CON SISTEMAS NÚMERICOS

4.1. OPERACIONES CON NÚMEROS ROMANOS:

4.1.1. Suma de números romanos

Para sumar números romanos debemos seguir los siguientes pasos:

1.- Convertimos las restas en sumas. Por ejemplo, IX debería ser reescrito como VIIII

2. Concatenamos los dos números que queremos sumar.

3. Ordenamos los símbolos en orden decreciente según su valor.

4. Hacemos sumas internas de derecha a izquierda. Por ejemplo, si aparece IIIII lo reemplazamos por V

5. Volvemos a convertir a restas en los lugares donde sea necesario para respetar las reglas de escritura.

Vamos a ver un ejemplo: 145 + 79. En números romanos: CXLV + LXXIX

1. CXLV pasa a CXXXXV. LXXIX pasa a LXXVIIII

2. Concatenamos: CXXXXVLXXVIIII

3. Ordenamos: CLXXXXXXVVIIII

4. Sumas: VV pasa a X. Queda CLXXXXXXXIIII. XXXXXXX pasa a LXX. Queda CLLXXIIII. Y LL pasa a C. Queda CCXXIIII

5. Pasamos a restas en los lugares donde corresponda: IIII pasa a IV. Nos queda el resultado deseado: CCXXIV = 224

4.1.3. Resta de números romanos

La resta de números romanos es algo más sencilla que la suma. Los pasos a seguir para A - B son los siguientes:

1. Convertimos las restas en sumas

2. Eliminamos los símbolos comunes en A y en B

3. Para el símbolo más grande que quede en B expandimos tomamos el primer símbolo de A mayor que él y lo expandimos. Después volvemos a aplicar el paso 2.-. Hacemos esto las veces que sea necesario

4. Volvemos a pasar a restas donde sea necesario

Vamos con un ejemplo: 241 - 85. En números romanos: CCXLI - LXXXV

1. CCXLI pasa a CCXXXXI. LXXXV queda igual

2. Quitamos XXX de cada uno de ellos. Quedan CCXI y LV

3. Como L es el símbolo más grande del segundo número expandimos una C del primero como LXXXXX. Quedan CLXXXXXXI y LV. Quitamos L de los dos y quedan CXXXXXXI y V. Como V es el único símbolo que queda expandimos una X del primero como VIIIII. Quedan CXXXXXVIIIIII y V. Quitamos V de los dos y nos queda CXXXXXIIIIII. Colocando el número siguiendo las reglas de escritura queda CLVI

4. En este caso no hace falta pasar a restas. El resultado es CLVI = 156

4.1.4. Multiplicación de números romanos

La multiplicación de números romanos nos trae las primeras complicaciones realmente serias. No hay formas sencillas de realizarla. En principio podríamos pensar en lo más evidente: hacer sumas sucesivas. Pero eso no es demasiado útil si tenemos números grandes. Vamos a ver una manera de hacer ese tipo de multiplicaciones en la que tendremos que suponer que sabemos multiplicar y dividir por dos un número romano (calcular el doble o la mitad de un número es sencillo sin necesidad de reglas multiplicación y de división):

Para calcular *A·B* formamos dos columnas y colocamos *A* en la de la izquierda y *B* en la de la derecha. Pasos a seguir:

1. Dividimos *A* entre 2 y escribimos el cociente de la división debajo de *A*. Por ejemplo, si *A* es 15 escribiremos debajo 7

2. Multiplicamos *B* por 2 y escribimos el resultado debajo de *B*

3. Repetimos los pasos 1.- y 2.- con los números que vamos obteniendo hasta que la columna de la izquierda aparezca un 1.

4. Tachamos de la tabla resultante todas las filas en las que el número de la izquierda sea par

5. Sumamos los números que nos hayan quedado en la columna de la derecha. El resultado de esta suma es el resultado de *A·B*

Vamos con un ejemplo. Vamos a hacer 45·29. En números romanos XLV·XXIX. Construimos la tabla:

A = XLV (45)	B = XXIX (29)
XXII (22)	LVIII (58)
XI (11)	CXVI (116)
V (5)	CCXXXII (232)
II (2)	CDLXIV (464)
I (1)	CMXXVIII (928)

Tachamos las filas donde el número de la izquierda es par. Nos queda la siguiente tabla:

A = XLV (45)	B = XXIX (29)
XI (11)	CXVI (116)
V (5)	CCXXXII (232)

I (1)	CMXXVIII (928)

Sumamos los números que han quedado en la columna de la derecha utilizando la regla de la suma que hicimos anteriormente:

XXIX + CXVI + CCXXXII + CMXXVIII =
= XXVIIII + CXVI + CCXXXII + DCCCCXXVIII =
= [Concatenamos y ordenamos de mayor a menor valor] =
= DCCCCCCCXXXXXXXXVVVIIIIIIIII =
= DCCCCCCCXXXXXXXXVVVVV =
= DCCCCCCCXXXXXXXXXXV =
= DCCCCCCCCV =
= DDCCCV =
= MCCCV

Y nos queda el resultado deseado: MCCCV = 1305

4.1.4. División de números romanos

Con la división de números romanos es con la operación con la que nos encontramos más problemas. Al parecer no existen reglas generales para poder realizarla. Simplemente nos queda restar el divisor al dividendo hasta que lleguemos a un número menor que el divisor. El número de veces que hayamos restado será el cociente de la división. Por ejemplo, para 23/5 quedaría:

23 - 5 = 18; 18 - 5 = 13; 13 - 5 = 8; 8 - 5 = 3
Resto = 3; Cociente = 4 (hemos restado 5 cuatro veces)

Otra opción que tenemos es buscar algún factor común a los dos números que queremos dividir. Así, antes de comenzar la división podemos simplificar los dos números por ese factor y las operaciones a realizar serán más sencillas al operar con números más pequeños. Pero de todas formas sigue siendo tedioso.

4.2. OPERACIONES CON EL SISTEMA NUMÉRICO BABILONIO

Como en el sistema babilónico los símbolos para el uno y para el diez eran los símbolos básicos, los números del 1 al 59 se construían combinando estos símbolos, de manera que las operaciones de restar y sumar se reducían a añadir o quitar símbolos.
Para representar la suma, los babilonios reunían las dos expresiones en una sola. Las multiplicaciones las efectuaban usando tablas, "los babilonios fueron de los más infatigables compiladores de tablas aritméticas de la historia"[15]; construyeron tablas de multiplicar (similares a la tabla del nueve enseñada atrás), en donde se encontraban los múltiplos de *p* (siendo éste el *número principal*[16] de la tabla de multiplicar) así:

1	p
2	$2p$
3	$3p$

.	.
.	.
.	.
19	19p
20	20p

Tabla 2

que culminan, por lo general, en p^2. Con base en tablas de este estilo es posible encontrar cualquier múltiplo de p; por ejemplo, si se deseara conocer 32p a la manera de los babilonios, se efectuaría la adición entre 30p y 2p, valores dados en la tabla.

4.3. OPERACIONES CON EL SISTEMA NUMÉRICO EGIPCIO

La aritmética egipcia fue esencialmente aditiva; para las sumas y las restas usuales se limitaban a combinar o a cancelar los diferentes símbolos hasta llegar al resultado concreto. La multiplicación y la división también se reducían a procesos aditivos, pero el cálculo era un poco más complejo.

La multiplicación se hacía inicialmente mediante un proceso de *duplicación***,** basado en el hecho de que cualquier número puede expresarse como una suma de potencias de dos. Por ejemplo, como 19 = 1 + 2 + 16, entonces el producto de 19 × 25 se determina duplicando sucesivamente el número 25, así:

$$1 \times 25 = 25$$
$$2 \times 25 = 50$$
$$4 \times 25 = 100$$
$$8 \times 25 = 200$$
$$16 \times 25 = 400$$

Luego se suman los múltiplos de 25 que correspondan a 1, 2, 16:

$$19 \times 25 = (1 + 2 + 16) \times 25$$

$$= 25 + 50 + 400$$

$$= 475$$

Con el tiempo, adoptaron un procedimiento más rápido para multiplicar, conocido como el método de *duplicación y mediación,* que consiste en duplicar uno de los factores y sacar la mitad del otro. Por ejemplo para determinar el producto 19 × 25 se va sacando mitad a 19 sucesivamente, sin tener en cuenta los residuos de cada paso, y al mismo tiempo se va multiplicando el 25, como se expone a continuación:

$$19 \rightarrow 25$$
$$9 \rightarrow 50$$
$$4 \rightarrow 100$$
$$2 \rightarrow 200$$
$$1 \rightarrow 400$$

El proceso se termina cuando se obtiene un 1 en la columna de los números que se han ido dividiendo entre dos. A cada uno de los números de esta columna le corresponde un número en la columna de los números que se han duplicado. El producto de 19 × 25 se obtiene como la suma de los números que se oponen a los números impares de la columna de las mitades:

$$19 \times 25 = 25 + 50 + 400 = 475$$

Para dividir un número por otro. Por ejemplo, para dividir 19 por 8 procedían de la siguiente manera:

1	8
2	16
1/2	4
1/4	2
1/8	1

y obtenían como respuesta:

$$2 + 1/4 + 1/8$$

La idea consiste en tomar el número de ochos y de partes de ochos que sumen 19.
Los egipcios utilizaron la matemática en la administración de los templos y asuntos de estado, en el cálculo de salarios pagados a los trabajadores, en el cálculo de volúmenes de los graneros y áreas de los campos, en el cobro de impuestos estimados según el área de tierra, en el cálculo de número de ladrillos para la construcción de edificios, etc. Los papiros contienen problemas relativos a la cantidad de granos necesarios para producir cantidades de cerveza o la cantidad de granos necesarios para obtener un grano de otra calidad cuya proporción relativa a la de la primera fuera conocida.

4.4. OPERACIONES CON NUESTROS SISTEMAS NUMÉRICOS

Para hacer operaciones en mi sistema numérico, como primero utilizaremos los mismos símbolos que se utilizan en el sistema que utilizamos normalmente que son el +, -, ×, ÷ y el =; al tener gran semejanza con el sistema romano entonces en la suma y la resta se harán los mismos pasos que en ese sistema.

1.2 OPERACIONES MATEMÁTICAS

No solo podemos contar, si no que también podemos hacer operaciones matemáticas.

Las operaciones matemáticas son distintas formas de hacer procesos que consiste en realizar distintas combinaciones de entidades conocidas, para producir una nueva entidad.

Entre las operaciones matemáticas podemos encontrar:

Suma
Multiplicación

1.2.1 SUMA Ó ADICIÓN

La suma o adición es la operación matemática de combinar o añadir dos números ó más para obtener una cantidad final o total.

Para sumar distintas cantidades se puede poner el número como se desee, o sea en diferentes posiciones.

✪✪✪✪+🖐🖐🖐☠ =☠☠✪✪✪✪	✪ ✪ ✪ ✪ + 🖐 = ☠☠✪✪✪✪ 🖐 🖐 ☠	✪ ☠ ✪ 🖐 ✪ 🖐 ✪ 🖐 + =☠☠✪✪✪✪

La idea de la suma es poder agrupar distintas cantidades para así poder obtener una cantidad final.

Una forma más fácil de sumar estos símbolos es desbaratando todos los números grandes, y ponerlos en unidades,; ó para que la cifra no quede tan larga se puede desbaratar el número en la cifra anterior de la ya escrita.

Formas para facilitar la suma

- ✪✪✪✪+🖐🖐🖐☠

✪✪✪✪+✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪

- ✪✪✪✪+🖐🖐🖐☠

✪✪✪✪+✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪🖐🖐🖐

- ✪✪✪✪+🖐🖐🖐☠

✪✪✪✪+🖐🖐🖐🖐🖐🖐

Para el resultado de la suma se cuenta el número de unidades, o de símbolos iguales y se escriben pero sin el signo mas (+), pero para que no quede una cifra muy grande, se puede reemplazar los símbolos de acuerdo con la numeración así:

- ✪✪✪✪+✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪

= ✪✪

- ✪✪✪✪+✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪🖐🖐🖐

= ✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪🖐🖐🖐

- ✪✪✪✪+🖐🖐🖐☠

= ✪✪✪✪🖐🖐🖐🖐🖐🖐

- ✪✪✪✪+🖐🖐🖐☠

= ☠☠✪✪✪✪

Luego de realizar varias formas de sumar, nos podemos dar cuenta de ciertas cosas generales:

- No importa el orden que se encuentren los sumandos, pues su resultado siempre va a ser el mismo.

- No importa que clase de símbolos sean los que se sumen, puesto que sean iguales o sean distintos el resulto no se altera, siempre y cuando el número de los símbolos menores sea igual al símbolo mayor.

1.2.2 SUSTRACIÓN Ó RESTA

*[1] La resta se trata básicamente en la operación inversa a la suma. En el conjunto de los números naturales, N, sólo se pueden restar dos números si el minuendo es mayor que el sustraendo. De lo contrario, la diferencia sería un número negativo, que por definición estaría
excluido del conjunto. Esto es así para otros conjuntos con ciertas restricciones, como los números reales positivos. En la resta el primer número se denomina minuendo y el segundo es el sustraendo. El resultado de la resta se denomina diferencia.

Para restar diferentes cantidades es necesario poner primero el número más grande, para que nos de una respuesta entre los números naturales.

En la figura 1 se puede ver como restar, eliminando la cantidad que se necesita eliminar; en este caso 5-2 = 3

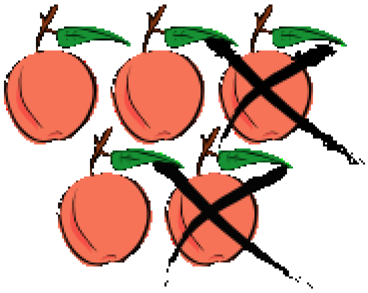


Figura 1

2. Para nuestro sistema numérico se hace exactamente lo mismo que en la figura 1, para una manera más sencilla podemos empezar eliminando los símbolos iguales de los números de la resta.

✋✋✋☠ - ☠✪✪ = ✋✋✪✪✪✪
✋✋✋~~☠~~ - ~~☠~~✪✪ = ✋✋✪✪✪✪
✋✋✋ - ✪✪ = ✋✋✪✪✪✪

3. Después de ya haber eliminado los símbolos iguales, se puede descomponer los símbolo que quedan, hasta que se pueda volver a hacer el mismo procedimiento del paso 2.

✋✋✋ -✪✪ = ✋✋✪✪✪✪
✋✋✪✪✪✪✪✪ - ✪✪ = ✋✋✪✪✪✪
✋✋✪✪✪✪~~✪✪~~ - ~~✪✪~~ = ✋✋✪✪✪✪

*[1]WIKIPEDIA, la enciclopedia libre, definición para sustracción

4. Por último se ponen los símbolos que queden sobrando y si ya no hay más para restar se deja ese número como resultado. Si quedan mas símbolos para restar se hace lo de los pasos anteriores.

✋✋✪✪✪✪ = ✋✋✪✪✪✪

1.2.3 MULTIPLICACIÓN

*[1] La multiplicación es una operación aritmética. Multiplicar dos cantidades consiste en sumar reiteradamente la primera, tantas veces como indica la segunda. La multiplicación se indica con el aspa × o el punto centrado ·. En ausencia de estos caracteres se suele emplear el asterisco *, sobre todo en computación (este uso tiene su origen en FORTRAN), pero está desaconsejado en otros ámbitos y sólo debe utilizarse cuando no hay otra alternativa. A veces se utiliza la letra x, pero esto es desaconsejable porque crea una confusión innecesaria con la letra que normalmente se asigna a una incógnita en una ecuación. Por último, se puede omitir el signo de multiplicación a menos que se

multipliquen números o se pueda generar confusión sobre los nombres de las incógnitas, constantes o funciones (por ejemplo, cuando el nombre de alguna incógnita tiene más de una letra y podría confundirse con el producto de otras dos).
Si los factores no se escriben de forma individual y están definidos dentro de un vector, se puede escribir el producto mediante una elipsis, es decir, escribir explícitamente los primeros términos y los últimos, o, en caso de un producto de infinitos términos (o productos infinitos), sólo los primeros, y sustituir los demás por unos puntos suspensivos. Esto es análogo a lo que se hace con otras operaciones aplicadas a infinitos números (como las sumas). [El producto de infinitos términos se define como el límite del producto de los n primeros términos cuando n crece indefinidamente].

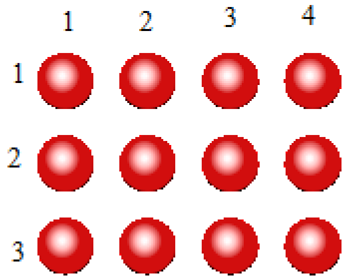


Figura 2

Para multiplicar números debemos tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Para la multiplicación de ✋ y ✪✪ (cualquier número por el que se desee multiplicar), consiste en colocar ✋ veces ✪✪ y sumar, ó ✪✪ veces ✋.

✪✪ + ✪✪ + ✪✪ + ✪✪ + ✪✪ + ✪✪ = ✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪
✋ + ✋ = ✋✋

*[1]WIKIPEDIA, la enciclopedia libre, definición para multiplicación

2. Para que no quede una serie de símbolos, se acorta con el símbolo que represente la cantidad de símbolos ya escritos

✪✪ + ✪✪ + ✪✪ + ✪✪ + ✪✪ + ✪✪ = ✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪ = ✋✋

Para hacer esto un poco más sencillo hemos creado una tabla para multiplicar los símbolos:

•	✪	✋	☠
✪	✪	✋	☠
✋	✋	☠☠	☠☠☠☠☠☠

1.2.4 DIVISÓN

*[1] La división consiste en averiguar cuántas veces un número (el divisor) está contenido en otro número (el dividendo). La división es una operación matemática,

específicamente, de aritmética elemental, inversa de la multiplicación y puede considerarse también como una resta repetida.

Al resultado entero de la división se denomina cociente y si la división no es exacta, es decir, el divisor no está contenido un número exacto de veces en el dividendo, la operación tendrá un resto o residuo, donde:

$$\begin{array}{r|l} \textit{Dividendo} & \textit{Divisor} \\ \cline{2-2} \textit{Resto} & \textit{Cociente} \end{array}$$

Que también puede expresarse:

DIVIDENDO = (COCIENTE X DIVISOR) + RESIDUO

Para que el resultado de la división quede entre el conjunto de los números naturales lo primero que debemos hacer es poner primero el símbolo que represente el número mas grande y dividirlo entre el símbolo que represente el número más pequeño entre los dos números que se vallan a dividir.

____

*¹WIKIPEDIA, la enciclopedia libre, definición para división

Una forma sencilla de dividir estos símbolos es por medio de restas, hasta que lo mínimo que se pueda restar, así:

☠☠✋✪✪	✋✋✪

Para esta división está ✪✪✪ veces y sobran ✋✪✪✪✪✪

Para hacer esta división de una forma más sencilla se puede hacer por medio de restas así:

☠☠✋✪✪ - ✋✋✪ = ☠☠✪
☠✋✋✋✪ - ✋✋✪ = ☠✋
✋✋✋✪✪✪✪✪✪ - ✋✋✪ = ✋✪✪✪✪✪

Para saber cuantas veces está, se cuenta el número de restas que se haya realizado, ese es el número de veces que se puede realizar la división y lo que no se puede restar más es lo que sobra de la división.

1.2.5 POTENCIACIÓN

En bastantes ocasiones tenemos que multiplicar un número por si mismo un número dado de veces.

Por ejemplo:

🖐 x 🖐 x 🖐 x 🖐 x 🖐 x 🖐 x 🖐

Una forma de representar esta operación es $\text{🖐}^{\text{🖐✪}}$ (esto quiere decir que hay que multiplicar por si mismo 🖐✪ veces).

El numero inferior se llama base y el superior exponente

No hay problemas en escribir $\text{🖐}^{\text{🖐✪}}$ ó e🖐 x 🖐 x 🖐 x 🖐 x 🖐 x 🖐 x 🖐, puesto que su resultado va a ser el mismo, solo que si hablamos de potenciación lo más apropiado es escribir $\text{🖐}^{\text{🖐✪}}$, además, es con el fin de acortar símbolos muy largos a que se vean más cortos.

Y CON EL OTRO

4.4.1. SUMA

Para sumar en este sistema numérico, como primero utilizaremos los mismos símbolos que se utilizan en el sistema que se utiliza en la actualidad que es el + y el =; al tener gran semejanza con el sistema romano entonces se harán algunos pasos que en ese sistema se hicieron:

Sumaremos: //♫☻+ ♫♪ (436 + 21)

1. volvemos más sencillos los números

   //♂♫☻+♫♪ = //♂♪♪☺ ☺+♪♪☻ ☻ ☻ ☺

2. Concatenamos los dos números que queremos sumar

//♂♪♪☺ ☺♪♪☻ ☻ ☻

3. ordenamos

//♂♪♪♪♪☻ ☻ ☻ ☺ ☺ ☺

4. Hacemos sumas internas de derecha a izquierda

//♂♫♫♪☻

5. Volvemos a convertir para respetar las reglas de escritura antes descritas y obtenemos el resultado.

//♂/♫♪☻

//♂♫☻+♫♪ =//♂/♫♪☻

436 + 21 = 457

En algunos casos no es necesario casi ningún paso solo concatenamos y listo. Ejemplo:

/♀ + ☺☻♂ =/♀ ☺☻♂

4.2.2. Resta

/♫ - ♫♪ =♫♫♫-♫♪

♫♫-♪ = ♫♪♪-♪ = ♫♪

Como podemos observar, escribimos de otra forma de modo que podamos eliminar factores comunes, cuantas veces sea necesario y al tener el ultimo número lo reescribimos según las reglas y listo tendremos nuestro resultado.

4.4.3. Multiplicación

Para este caso podemos hacer sumas repetidamente o crear nuestra propia tabla de multiplicar:

☺×☺=☺	☻× ☻ = ☻☻
☺×☻=☻	☻×♪ = ♫
☺×♪ = ♪	☻×♫ = /♫
☺×♫ =♫	☻×♂ =/♂
☺×♂ = ♂	☻×♀ =/♀
♪ × ♪ = //♫♪	♫ × ♫ = ♂///♫
♪ × ♫= //////♫	♫ × ♂ = ♀///♂

♪ × ♂= //////♂

♪ × ♀= //////♀

♫ ×♀ = /(//////♀)

♂ × ♂ = /(//////♀)

♂ × ♀ = ////////(////////♀)/////(////////♀)////♀

Ya con estas tablas haremos lo siguiente, colocamos los dos números de la forma más sencilla posible, esto quiero decir que los números representados en forma de multiplicación los pasamos a una forma de solo sumas, luego multiplicamos por cada número del multiplicador y se hacen las respectivas sumas:

//♫♫ ♪ x ♫
Eso es 63 x 14, entonces pasamos el 63 a una representación de símbolos más sencilla:

//♫♫ ♪=♫♫♫♫♪

Y hacemos las respectivas multiplicaciones con ayuda de nuestras tablas:

♫♫♫♫♪ x ♫=

♪ x ♫ = //////♫

♫ × ♫ = ♂///♫

♫ × ♫ = ♂///♫

♫ × ♫ = ♂///♫

♫ × ♫ = ♂///♫

Sumamos estos resultados:

//////♫+♂///♫+♂///♫+♂///♫+♂///♫=

♫♫♫♫♫♫♫+♂♫♫♫♫+♂♫♫♫♫+♂♫♫♫♫+♂♫♫♫♫=

♂♂♂♂♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫=

///♂////////♫////////♫////♫=

///♂♂♂//♬=

/////♂//♬

//♬♬ ♪ x ♬=/////♂//♬

63 x 14 = 882

Aunque de esta forma se lograran algunas multiplicaciones, habrán unas que n; tu como lector puedes intentar encontrar un algoritmo para multiplicación que sea más general.

4.2.4 División

En este sistema también tendremos problemas como con la división de números romanos. Al parecer no existen reglas generales para poder realizarla. Simplemente nos queda hacer lo mismo que establecí para dividir números romanos que es restar el divisor al dividendo hasta que lleguemos a un número menor que el divisor. El número de veces que hayamos restado será el cociente de la división. Por ejemplo, para 23/5 quedaría:

♬♪☻ ÷ ☻☻☺ =

(1)☻☻☻☺☻☻☻☺☻☻☻☻☺-☻☻☺ =
(2)☻☻☻☺☻☻☻☺☻☻-☻☻☺=

(3)☻☻☻☺☻☻☻-☻☻☺=

(4)☻☻☻☺☺-☻☻☺=

☻☺

☻☻☺/♬ ÷ ☻☻☺= ☻☻ y residuo ☻☺

4.3. OTRAS FORMAS DE HACER CUENTAS

4.3.1. LA YUPANAS

La yupana era la calculadora de los incas. Consiste en un pequeño bloque de piedra de unos 20 *x* 30 centímetros, con oquedades dispuestas en cinco franjas horizontales y un número variable de columnas, donde se colocaban piedritas o semillas. Los cálculos se realizaban de derecha a izquierda. En la primera oquedad de la fila inferior se colocaba una semilla que tenia valor 1; en la segunda, dos semillas de valor 2; en la tercera, tres semillas de valor 3; en la siguiente, cinco de valor 5; y en la quinta, ocho de valor 8. Sumadas todas las semillas, su valor era igual a 39. Los incas no empleaban el cero. El sistema esta basado en el sistema de Fibonacci, una escala que comienza por 1 sigue por 2, 3, 5, 8, etc., y donde cada número se hace sumando los dos anteriores. Esta sucesión se encuentra en la naturaleza: en los rombos de las piñas de los pinos, en los pétalos de las margaritas, en el mismo ADN.

Los incas basaban el sistema de cálculo en 40(40, 80, 120, etc.), pero siempre con el mismo criterio exponencial, cuando se trataba de calcular grandes cifras.

Con este método los incas realizaron cálculos complejos, como predecir eclipses. Otra ventaja era la de permitir contar a los ancianos y los no videntes, al tocar las semillas con la mano. También dibujaban la yupana en la tierra.

4.3.2. LOS QUIPUS

El material del quipu es una cuerda colorada. Las manipulaciones básicas de la cuerda son de conectar las cuerdas individuales y hacer nudos en cada cuerda individual. Cada cuerda esta retorcida y doblada por un lado y el otro esta terminado con un pequeño nudo. El cabo de la cuerda que esta vuelto funciona para conectar las cuerdas. El proceso final es doblar la cuerda y pasarla por el lazo. Una cuerda completada con el proceso descrito funciona como cuerda principal. Las otras cuerdas están suspendidas de la cuerda principal. El sistema del quipu se pone muy complicado con las adiciones de las cuerdas, la significación de los colores, y los métodos de interpretar las construcciones de los nudos. Las cuerdas secundarias pueden estar separadas en grupos de tres. Entre cada grupo hay una cuerda de arriba que conecta las tres cuerdas secundarias. Una cuerda especial esta conectada al final de la cuerda principal. En cada cuerda secundaria se pueden añadir otras cuerdas subsidiarias hasta que se tenga un sistema muy desarrollado. El quipu puede ser interpretado por su dirección vertical u horizontal. L a cuerda principal está colocada con la dirección horizontal y el intérprete del quipu lo lee de un lado al otro. Las cuerdas secundarias tienen una dirección vertical. Los quipus consisten de niveles. Las cuerdas principales son el primer nivel, las cuerdas secundarias forman el primer nivel, las cuerdas secundarias forman el
segundo nivel, y las cuerdas subsidiarias a las cuerdas secundarias forman el nivel tercero, y en adelante.

CAPÍTULO II

NO SOLO CON EL SITEMA DECIMAL (BASE 10) SE PUEDE HACER EJERCICIOS MATEMÁTICOS

2.2 DISTINTOS SITEMAS NUMÉRICOS

2.2.1 SISTEMA BINARIO (BASE 2)

*[2] El sistema binario es un sistema de numeración en el que los números se representan utilizando las cifras cero y uno, esto es informática tiene mucha importancia ya que las computadoras trabajan internamente con 2 niveles de voltaje lo que hace que su sistema de numeración natural sea binario, por ejemplo 1 para encendido y 0 para apagado.

Todas aquellas personas que se dedican a la informática es fundamental tener habilidad con este tipo de numeración. En este artículo voy a explicar un poco cómo se utiliza y en que consiste el sistema binario.

En binario, tan sólo existen dos dígitos, el cero y el uno. Hablamos, por tanto, de un sistema en base dos, en el que 2 es el peso relativo de cada cifra respecto de la que se encuentra a la derecha.

---

*[1]MONOGRAFÍAS.COM, acerca de los códigos de barras
*[2] CL CARLOSLEOPOLDO, un simple blog personal, el sistema binario

En la tabla de base 2 (que veremos más adelante), podemos notar que solo existen los números 0 y 1; por lo tanto el dos será 10, el tres 11, el cuatro 100, y así sucesivamente.

2.2.2 SISTEMA DECIMAL (BASE 10)

Éste es el sistema que todos conocemos y usamos con frecuencia.

El sistema decimal es un sistema de numeración en el que las cantidades se representan utilizando como base el número diez, por lo que se compone de las cifras: cero (0); uno (1); dos (2); tres (3); cuatro (4); cinco (5); seis (6); siete (7); ocho (8) y nueve (9). Este conjunto de símbolos se denomina números árabes.

Es el sistema de numeración usado habitualmente en todo el mundo (excepto ciertas culturas) y en todas las áreas que requieren de un sistema de numeración.

2.2.3 SISTEMA ONCE (BASE 11)

Este sistema numérico se compone de las siguientes cifras: cero(0); uno (1); dos (2); tres (3); cuatro (4); cinco (5); seis (6); siete (7); ocho (8) y nueve (9); el diez ya no sería el que todos conocemos, si no lo representamos con una letra, con la A.

A partir del sistema de base 11 se empieza a contar con las letras del alfabeto.

ACTIVIDADES PARA COMPRENDER UN POCO MÁS

Para base 8:

(1x6)+1=7
(12x6)+2= 76
(123x6)+3=765
(1234x6)+4=7654
(12345x6)+5=76543
(123456x6)+6=765432
(1234567x6)+7=7654321

Generalidad:

(1x(n-2))+1= (n-1)
(12x(n-2))+2=(n-1)(n-2)
(123x(n-2))+3=(n-1)(n-2)(n-3)
(1234x(n-2))+4=(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)
(12345x(n-2))+5=(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)
…
(123456...(n-1)x((n-2)+(n-1))=(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)&?

Para los resultados de cada operación, no hay que operar, o sea, no hay que multiplicar, ni sumar, ni hacer ninguna operación matemática.

Una suma diferente:

[1]*Algoritmo para base n

1. Se escribe desde el número 1, hasta el penúltimo número de la base.

1234567...(n-1)

2. Éste número se escribe n/2 veces

1234567...(n-1)
1234567...(n-1)
1234567...(n-1)
… n/2 veces

3. Ahora se escribe desde el antepenúltimo número de la base hasta 1

1234567...(n-1)
1234567...(n-1)
1234567...(n-1)
… n/2 veces
(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)…1

---

[1]*WIKIPEDIA, la enciclopedia libre, definición para algoritmo
es una lista bien definida, ordenada y finita de operaciones que permite hallar la solución a un problema. Dado un estado inicial y una entrada, a través de pasos sucesivos y bien definidos se llega a un estado final, obteniendo una solución. Los algoritmos son objeto de estudio de la algoritmia..

En la vida cotidiana se emplean algoritmos en multitud de ocasiones para resolver diversos problemas. Algunos ejemplos se encuentran en los instructivos (manuales de usuario), los cuales muestran algoritmos para usar el aparato en cuestión o inclusive en las instrucciones que recibe un trabajador por parte de su patrón. También existen ejemplos de índole matemático, como el algoritmo de la división para calcular el cociente de dos números, el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor de dos enteros positivos, o el método de Gauss para resolver un Sistema lineal de ecuaciones.

4. Éste número se escribe n/2 veces

1234567...(n-1)
1234567...(n-1)
1234567...(n-1)
… n/2 veces
(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)…1
(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)…1
(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)…1
… n/2 veces

5. Después se pone n/2 y se realiza la suma

1234567...(n-1)
1234567...(n-1)
1234567...(n-1)
… n/2 veces
(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)…1
(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)…1
(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)…1
… n/2 veces
n/2

6. Al la final de la suma el resultado siempre será n veces n/2

1234567...(n-1)
1234567...(n-1)
1234567...(n-1)
… n/2 veces
(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)…1
(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)…1
(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)…1
… n/2 veces
n/2
n/2…n/2 n/2 n/2 n/2

Por ejemplo:

Base 8

$$\begin{array}{r} 1234567 \\ 1234567 \\ 1234567 \\ 1234567 \\ 7654321 \\ 7654321 \\ 7654321 \\ 7654321 \\ +\underline{\qquad\quad 4} \\ 44444444 \end{array}$$

Hacer la ecuación:

Base 8

$$\frac{356_{(9)} \cdot x + 2130_{(5)}}{2_{(3)}} = 2254_{(8)}$$

Algoritmo

1.Pasar las distintas bases a base 8

$$356_{(9)} \rightarrow \underline{\qquad}_{(8)}$$

$$\begin{array}{lcr} 6 & = & 6 \\ 5 \times 11 & = & 55 \\ 3 \times 11^2 & = & \underline{363} \\ & & 426 \end{array}$$

$$356_{(9)} \rightarrow 426_{(8)}$$

$$2130_{(5)} \rightarrow \underline{\qquad}_{(8)}$$

$$\begin{array}{lcr} 0 & = & 0 \\ 3 \times 5 & = & 17 \\ 1 \times 5^2 & = & 31 \\ 2 \times 5^3 & = & \underline{342} \\ & & 442 \end{array}$$

$$2130_{(5)} \rightarrow 442_{(8)}$$

$2_{(3)} \rightarrow \underline{\quad}_{(8)}$

$2 = 2$

$2_{(3)} \rightarrow 2_{(8)}$

2. Despejar x

$$\frac{456_{(8)} \cdot x + 426_{(8)}}{2_{(8)}} = 2254_{(8)}$$

$456 \cdot x + 426 = 2254 \cdot 2$

$456 \cdot x + 426 = 4530$

$456 \cdot x = 4530 - 426$

$456 \cdot x = 4102$

$$x = \frac{4102}{356}$$

$x = 7$

Orden de los números naturales

$$6532098672245677 < 6532098762245677$$

La base no importa, por que al verse el número más grande, o que uno de sus números varíe y sea mayor, así se sabe que es el mayor.

Por ejemplo:

$$123454 < 123354$$

Al comparar dos números que no tengan el mismo número de cifras, entonces, el número con mayor cantidad de cifras es el número mayor.

Por ejemplo:

$$254564 < 75421$$

2.3 OPERACIONES MATEMÁTICAS SOBRE BASES

2.3.1 SUMA Ó ADICIÓN

Sumar:

256458A44564 + 54782 base 11

1. Debemos empezar adicionando las cifras de derecha a izquierda, formando grupos de 11, cuando nos pasemos de once ponemos la cantidad que nos pasamos encima del número que está antes del que acabamos de operar. El que quede sobrando se pone debajo de los números ya operados, así:

a)

```
                1
2 5 6 4 5 8 A 4 4 5 6 4
+             5 4 7 8 2
-----------------------
                      6
```

b)

```
              1 1
2 5 6 4 5 8 A 4 4 5 6 4
+             5 4 7 8 2
-----------------------
                    3 6
```

c)

```
            1 1 1
2 5 6 4 5 8 A 4 4 5 6 4
+             5 4 7 8 2
-----------------------
                  2 3 6
```

d)

```
            1 1 1
2 5 6 4 5 8 A 4 4 5 6 4
+             5 4 7 8 2
-----------------------
2 5 6 4 5 8 A 9 9 2 3 6
```

2.3.1.1 Propiedades de la suma ó adición

La suma tiene tres propiedades. Las propiedades son conmutativa, asociativa, distributiva.

- *Propiedad conmutativa:* Cuando se suman dos números, el resultado es el mismo independientemente del orden de los sumandos.

Por ejemplo:

$$5+3 = 3+5$$

- *Propiedad asociativa:* Cuando se suman tres o más números, el resultado es el mismo independientemente del orden en que se suman los sumandos.

Por ejemplo:

$$(3+7) + 8 = 3 + (7+8)$$

- *Propiedad distributiva:* La suma de dos números multiplicada por un tercer número es igual a la suma de cada sumando multiplicado por el tercer número.

Por ejemplo:

$$4 * (6+3) = 4*6 + 4*3$$

2.3.2 SUSTRACIÓN Ó RESTA

Como ya sabemos la resta ó sustracción es lo contrario de la suma, entonces para la resta vamos a hacer lo mismo que para la suma, solo que esta vez vamos a quitar una cantidad pequeña de una cantidad más grande.

Restar:
5435013 - 53435 base 6

5 4 3 5 0 1 3
<u>-   5 3 4 3 5</u>
5 3 4 1 1 3 4

Con que base están hechas las restas:

Base 6

3 4 5 3 2 3
<u>- 5 4 2 0 1</u>
2 6 1 1 2 2

Base 9

7 5 3 4 0 3
<u>- 5 4 2 0 1</u>
6 8 8 2 0 2

Base 6, 7, 8, 9, … n

5 4 5 0 2 3
<u>- 3 4 0 0 1</u>
5 1 1 0 2 2

Para algunas restas en distintas bases su resultado es el mismo, pero hay que tener en cuenta que todos los números que conforman el minuendo sean mayores o iguales que el sustraendo.

Por ejemplo:

5>3	4>3	5>4	0=0	3>0	3>1
↓	↓	↓	↓	↓	↓
5	4	5	0	2	3
	- 3	4	0	0	1
5	1	1	0	2	2

2.3.2.1 Propiedades de la sustracción

- *No es conmutativa*: a-b no es igual a b-a

- *No es asociativa* a -(b-c) no es igual a a-b - (c)

- *Elemento neutro* a- 0 es igual a "a"

- *Elemento simétrico* a-(a) es igual a "0"

2.3.3 MULTIPLICACIÓN

Para la multiplicación de bases es bueno hacer por cada base una tabla de multiplicación

- *BASE 2*

•	1
1	1

- BASE 3

•	1	2
1	1	2
2	2	11

• BASE 4

•	1	2	3
1	1	2	3
2	2	10	12
3	3	12	21

• BASE 5

•	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	11	13
3	3	11	14	22

• BASE 6

•	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	10	12	14
3	3	10	13	20	23
4	4	12	20	24	32
5	5	14	23	32	41

• BASE 7

•	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6

2	2	4	6	11	13	15
3	3	6	12	15	21	24
4	4	11	15	22	26	33
5	5	13	21	26	34	42
6	6	15	24	33	42	51

• BASE 8

•	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10	12	14	16
3	3	6	11	14	17	22	25
4	4	10	14	20	24	30	34
5	5	12	17	24	31	36	43
6	6	14	22	30	36	45	52

• BASE 9

•	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	4	6	8	11	13	15	17
3	3	6	10	13	16	20	23	26
4	4	8	13	17	22	26	31	35
5	5	11	16	22	27	33	38	44
6	6	13	20	26	33	40	46	53
7	7	15	23	31	38	46	54	62
8	8	17	26	35	44	53	62	71

• BASE 10

•	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

• BASE 11

•	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
2	2	4	6	8	A	11	13	15	17	19
3	3	6	9	11	14	17	1A	22	25	28
4	4	8	11	15	19	22	26	2A	33	37
5	5	A	14	19	23	28	32	37	41	46
6	6	11	17	22	28	33	39	44	4A	55
7	7	13	1A	26	32	39	45	51	58	64
8	8	15	22	2A	37	44	51	59	66	73
9	9	17	25	33	41	4A	58	66	74	82
A	A	19	28	37	46	55	64	73	82	91

• BASE 12

•	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
2	2	4	6	8	A	10	12	14	16	18	1A
3	3	6	9	10	13	13	19	20	23	26	29
4	4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38
5	5	A	13	18	21	26	2B	34	39	42	47
6	6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56
7	7	12	19	24	2B	36	41	48	53	6A	65
8	8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74
9	9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83
A	A	18	26	34	42	50	6A	68	76	84	92
B	B	1A	29	38	47	56	65	74	83	92	A1

Para las siguientes bases se completan con todo el abecedario

Multiplicar

4565823 * 65425 base 9

```
      4 5 6 5 8 2 3
      *       4 2 5
    ---------------
    2 2 1 6 2 5 2 6
  1 0 2 4 2 7 4 6
+ 2 0 5 8 5 6 0 3
-------------------
  2 1 8 4 2 7 1 3 8 6
```

Se hace como una multiplicación en base 10, solo que agrupando por el número que sea la base.

2.3.3.1 Propiedades de la multiplicación

La multiplicación tiene cuatro propiedades que harán más fácil la resolución de problemas. Estas son las propiedades conmutativa, asociativa, elemento neutro y distributiva.

- *Propiedad conmutativa:* Cuando se multiplican dos números, el producto es el mismo sin importar el orden de los multiplicandos.

Por ejemplo:

$$4 * 2 = 2 * 4$$

- *Propiedad asociativa:* Cuando se multiplican tres o más números, el producto es el mismo sin importar como se agrupan los factores.

Por ejemplo:

$$(2*3) *4 = 2 * (3 * 4)$$

- *Propiedad de elemento neutro:* El producto de cualquier número por uno es el mismo número.

Por ejemplo:

$$5 * 1 = 5$$

- *Propiedad distributiva:* La suma de dos números por un tercero es igual a la suma de cada sumando por el tercer número.

Por ejemplo:

$$4 * (6 + 3) = 4 * 6 + 4 * 3$$

2.2.4 DIVISIÓN

Para realizar la división es lo mismo que en base 10, además se podría hacer una división por medio de multiplicaciones y restas.

El número que da de la multiplicación de el, los primer(os) números del divisor, por las veces que está en el dividendo se pone debajo de los números del divisor que se estén operando, luego de esto, se resta los números del divisor que se están operando, con el resultado que dio de la multiplicación; y así sucesivamente hasta que ya no haya más que operar.

2.2.4.1 Propiedades de la división

- *Propiedad del elemento neutro:* es el 1, ya que cualquier número dividido por 1 da ese número.

- *Propiedad del cero:* es absorbente a la izquierda, ya que dividido por cualquier numero, siempre da cero, no a la derecha, ya que la división por cero, es imposible.

- *No es conmutativa:* ya que no es lo mismo:

$$4/\,2 \text{ que } 2/4$$

- *Propiedad distributiva:* para suma y resta desde la derecha:

$$15 \div (3 + 5)$$
$$(10 + 5) \div 5 = 10 \div 5 + 5 \div 5$$
$$15 \div 5 = 2 + 1$$
$$3 = 3$$

- *No es distributiva:* ya que no ocurre lo mismo si está así:

$$(15 + 3) \div 5$$

2.3 ECUACIONES

*[1] Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, que se denominan miembros de la ecuación. En ella aparecen números y letras (incógnitas) relacionados mediante operaciones matemáticas.

En muchos problemas matemáticos, las condiciones del mismo se expresan en forma de una o más ecuaciones. Se llama solución de la ecuación a cualquier valor de las variables de la ecuación que cumpla la igualdad; es decir, a cualquier elemento del conjunto de números o elementos, sobre el que se plantea la ecuación, que cumpla la condición de satisfacer la ecuación (hacer válida la identidad).

Al igual que en otros problemas matemáticos, es posible que ningún valor de la incógnita haga cierta la igualdad. También puede que todo valor posible de la incógnita valga. Estas últimas expresiones se llaman identidades.

Algunas ecuaciones en bases diferentes:

Base 5
a)

$$21x + 32 = 2040$$
$$21x = 2040 - 32$$
$$21x = 2003$$
$$x = \frac{2003}{21}$$
$$x = 43$$

---

*[1]WIKIPEDIA, la enciclopedia libre, definición para ecuación

b)

$$\frac{2002 - 12}{x} = 12$$
$$\frac{2002}{x} = 12 + 12$$
$$\frac{2002}{x} = 24$$
$$\frac{2002}{24} = x$$
$$33 = x$$

Base 7

a)

$$342 - 13x = 36$$
$$342 - 36 = 13x$$
$$303 = 13x$$
$$\frac{303}{13} = x$$
$$21 = x$$

b)

$$\frac{63 + 30102}{x} = 642$$
$$\frac{30102}{x} = 642 - 63$$
$$\frac{30102}{x} = 546$$
$$x = \frac{30102}{546}$$
$$x = 35$$

Base 9

a)

$$\frac{185 - x}{28} = 113$$
$$\frac{185 - 113}{28} = x$$
$$72 = \frac{x}{28}$$
$$72 * 28 = x$$
$$2277 = x$$

b)

$$35x - 178 = 2455$$
$$35x = 2455 + 178$$
$$35x = 2644$$

$$x = \frac{2644}{35}$$

$$x = 58$$

Si a partir del 37 en base 10, multiplicamos de 3, obtenemos:
37 x 3 = 111
37 x 6 = 222
37 x 9 = 333
37 x 12 = 444
37 x 15 = 555
¿Existe otro par de números que nos den los mismos resultados en distintas bases?

Base 6	Base 5	Base 9
11 x 11 = 11	23 x 2 = 101	36 x 3 = 120
11 x 22 = 22	23 x 4 = 202	36 x 6 = 240
11 x 33 = 33	23 x 11 = 303	36 x 10 = 360
11 x 44 = 44	23 x 13 = 404	36 x 13 = 480
11 x 55 = 55	23 x 20 = 1010	36 x 16 = 500

¿Cuál es el menor número en base 10, que al dividirlo por 2, 3 y 4 tiene residuo 1 y es divisible por 51?.
No hay ningún número que al dividirlo por 2, 3 y que tenga residuo 1 sea divisible por 51

2.4 EL PAPEL LOGARÍTMICO

*[1] El papel logarítmico sirve para gráficas en donde una de las variables crece exponencialmente. Por ejemplo para graficar x en el eje horizontal , contra 10 elevado a la x . Por lo que una de las escalas no es lineal (las separaciones de las divisiones no son iguales).

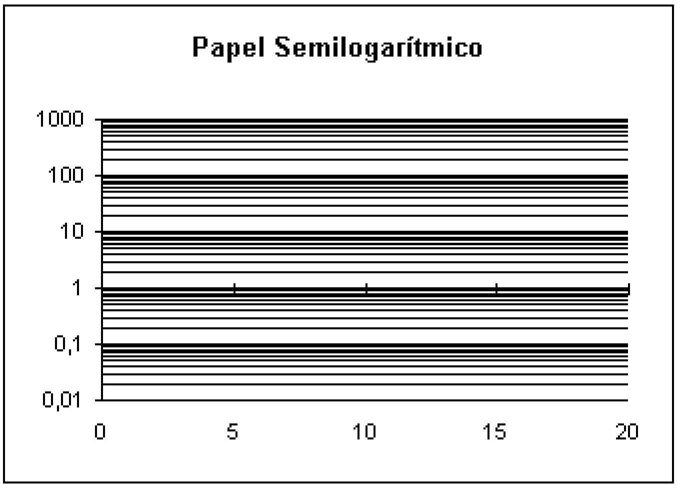
*[1] El papel logarítmico esta escalado logarítmicamente es decir que cada eje es realmente una tabla logarítmica, de tal manera que si graficamos sobre ella una lista de datos logarítmicos obtendremos rectas (aproximadamente) lo que hace mas fácil determinar el comportamiento del proceso tabulado.

2.5 ELPAPEL SEMILOGARÍTMICO

*[2] Una función exponencial a primera vista puede reconocerse cuando hay un rápido crecimiento de una variable a medida que aumenta la otra (exponencial creciente), o porque una variable tiende asintóticamente hacia un cierto valor constante a medida que se incrementa indefinidamente la otra (exponencial decreciente). Sin embargo, esto no es criterio

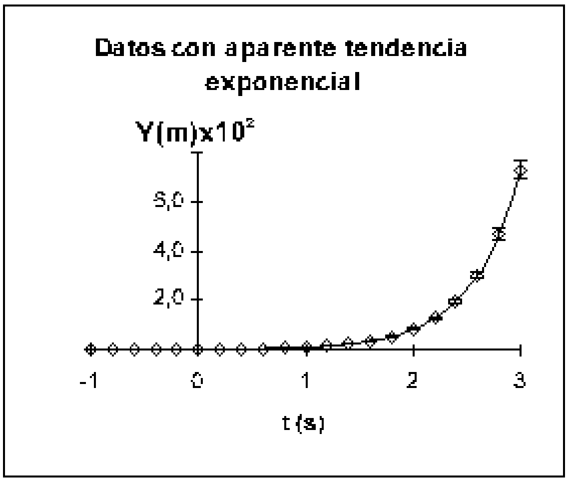
*[1]YAHOO! - respuestas, ¿para qué sirven las hojas de papel logarítmico?
*[2] STAR MEDIA, el rincón del vago, exponencial sobre la ecuación de la recta

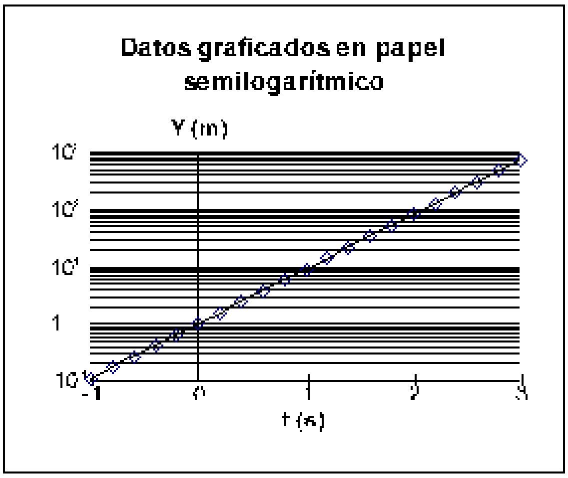
certero, pues dependiendo de los valores de A, C y ð , suele ocurrir que el crecimiento o la tendencia asintótica de la función no sea tan evidente. Para decidir este tipo de comportamiento exponencial de manera rápida suele usarse el papel semilogarítmico.



Este tipo de papel posee la característica de tener escala milimetrada, o normal, en su eje horizontal y escala exponencial en su eje vertical. De esta forma, la unidad principal en su eje vertical está dada por potencias de diez. En la fig.2 puede observarse cómo graficar valores que se extienden verticalmente desde el rango 0.01 hasta 1000 unidades.

Cuando se grafican datos en un papel semilogarítmico, y su tendencia en este tipo de papel es lineal, puede asegurarse que las variables graficadas obedecen a una relación exponencial. El hecho de que al graficarse una función exponencial en papel semilogarítmico se obtenga una línea recta, se debe a un simple cambio de escala en el eje vertical que produce la impresión visual de una tendencia rectilínea.





La diferencia entre el papel logarítmico y el papel semilogarítmico es:

En el semilogarítmico un eje es lineal y el otro logarítmico.

En el logarítmico ambos ejes son logarítmicos.

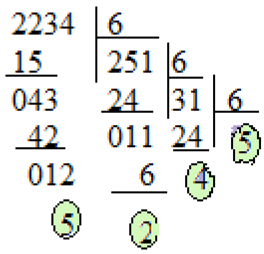
2.6 PASAR DE UNA BASE A OTRA

Para saber la base de la que estamos hablando, ponemos un subíndice con el número de la base de la cual queremos hablar.

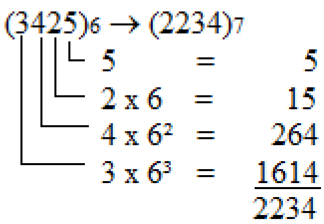
Para pasar un número de una base a otra, lo que debemos hacer es dividir el número que nos dan por el número de la base a la cual queremos pasar el número, pero en la base dada, y dividir hasta que ya no se pueda dividir más; por último, para saber cual es el número que da como resultado de la nueva base, se cogen todos los residuos de las divisiones, escribiendo primero el resultado de la última división, después el residuo de la división que le sigue y así hasta terminar; o sea, se escriben los números de derecha a izquierda.

Por ejemplo:

$(3425)_6 \rightarrow (2234)_7$



Otra forma de pasar un número de una base a otra base distinta es



Para resolver cualquier ecuación se debe tener en cuenta que todos sus términos estén en la misma base, si no están en la misma base hay que cambiar todos sus términos a la base que se pida, o a la base que se desee.

ECUACIONES DIOFÁNTICAS LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Dentro del conjunto de los números naturales.

1. Encuentre los valores para x y y que satisfagan las siguientes las siguientes ecuaciones y justifique sus respuestas.

a) En base siete: $3x + 5y = 126$

3 (12) + 5 (11) = 126

b) En base seis: $2x + 3y = 244$
2 (32) + 3 (32) = 244

c) En base cinco: $4x + 2y = 30$
4 (2) + 2 (4) = 30

d) $x + y = 32$, donde x y y 32 representan números en base siete.
12 + 20 = 32

2. ¿Con base en una solución es posible encontrar todas las soluciones de una ecuación de la forma $ax + by = c$? ¿Cómo? Enuncie un teorema y demuéstrelo.

Teorema:

Si (h, k) es una solución de la ecuación
$ax - by = c$, entonces (h+b, k+a) también es solución

Demostración:

$ax - by = c$ y (h, k) es una solución lo cual significa que $ah - bk = c$

Propiedad modulativa

$ah - bk = c + (ab - ab)$
$ah - bk = c + ab - ab$
$ah - bk - ab + ab = c$
$ah - (bk + ab) + ab = c$
$ah + ab - (bk + ab) = c$
$a(h + b) - b(k + a) = c$

Lo cual significa que (h + b, k + a) es una solución de la ecuación dada.

3. Encuentre los valores de x y y que satisfacen las siguientes ecuaciones.

a) $4x - 3y = 21$, en base cinco
4 (13) - 3 (12) = 21

b) $2y - 5x = 245$, en base seis
2 (150) - 5 (5) = 245

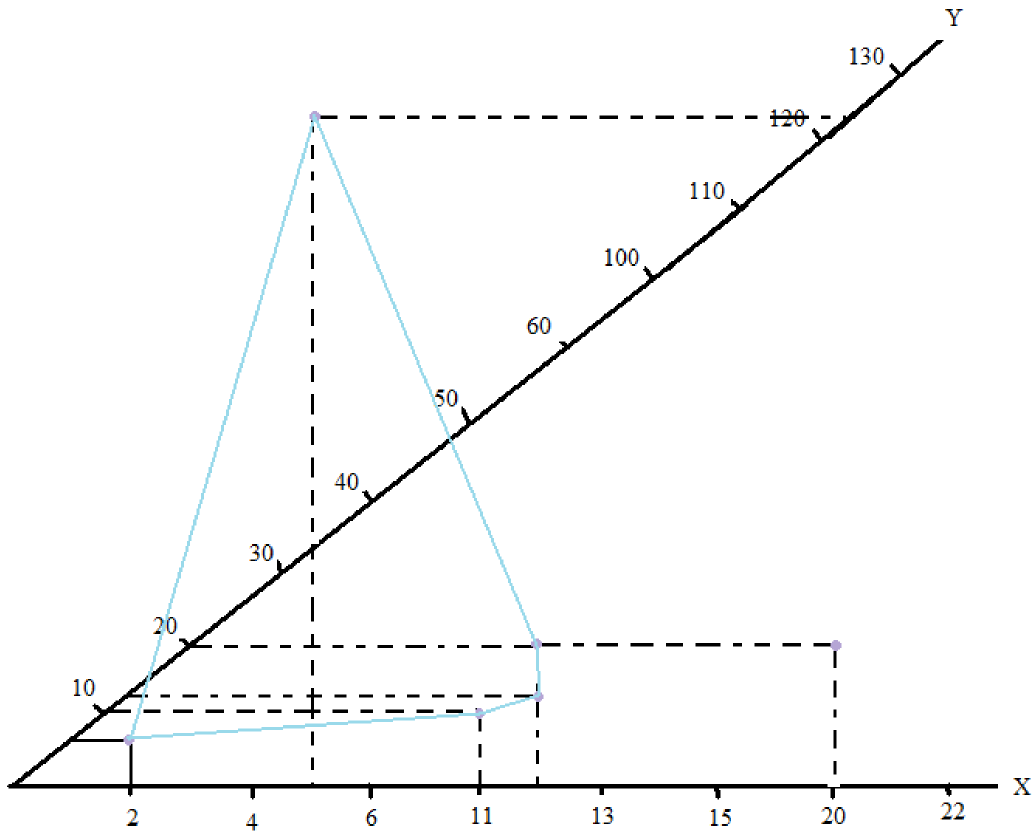
4. Grafique las soluciones de las anteriores ecuaciones en un plano coordenado cuyos ejes formen un ángulo diferente a 90°. ¿Qué forma geométrica determinan dichas soluciones?.

Base 7

x	2	5	11	12	12	20

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

y	4	123	10	11	20	20



CAPÍTULO III

LAS OPERACIONES SUPERIORES DE LA MATEMÁTICA

3.1 POTENCIACIÓN

La potenciación es una multiplicación de varios factores iguales, al igual que la multiplicación es una suma de varios sumandos iguales, (la potenciación se considera una multiplicación abreviada).

En la nomenclatura de la potenciación se diferencian dos partes, la base y el exponente, que se escribe en forma de superíndice. El exponente determina la cantidad de veces que la base se multiplica por sí misma.

3.1.1 Propiedades de la potenciación

- *Potencia de exponente 0:* Toda potencia de exponente 0 y base distinta de 0 es igual a 1.

Por ejemplo:

$$14^{0} = 1$$

- *Potencia de exponente 1:* Toda potencia de exponente 1 es igual a la base

Por ejemplo:

$$5^{1} = 5$$

- *Producto de potencias de igual base:* El producto de dos o más potencias de igual base a es igual a la potencia de base a y exponente igual a la suma de los correspondientes exponentes. Se coloca la misma base y se suman los exponentes.

Por ejemplo:

$$9^3 \cdot 9^2 = 9^{3+2} = 9^5$$

- *División de potencias de igual base:* La división de dos potencias de igual base a es igual a la potencia de base a y exponente igual a la resta de los exponentes respectivos. Se coloca la misma base y se restan los exponentes.

Por ejemplo:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

- *Potencia de un producto:* la potencia de un producto de base (a·b) y de exponente "n" es igual a la potencia "a" a la "n" por "b" a la "n". Cada base se multiplica por el exponente.

Por ejemplo:

$$(8 \cdot 7)^3 = (8)^3 \cdot (7)^3$$

- *Potencia de una división:* En la potencia de una división de base "a/b" y exponente "n" se procede a elevar cada uno de los componentes de la base a "n".

Por ejemplo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

- *Potencia de una potencia:* La potencia de una potencia de base a es igual a la potencia de base a elevada a la multiplicación de ambos exponentes. Se coloca la misma base y se multiplican los exponentes. así se obtiene esta potencia

Por ejemplo:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

- *Producto de potencias de base distinta:* En forma más general, la suma de dos radicaciones de base distinta a, b se puede expresar de la siguiente manera:

$$a^n \cdot b^m = \left(b \cdot \frac{a}{b}\right)^n \cdot b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot b^n \cdot b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot b^{n+m}$$

De tal forma que si a = b se regresa a la expresión para bases iguales.

- *Propiedad distributiva:* La potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación y a la división, pero no lo es con respecto a la suma ni a la resta.

Es distributiva con respecto a la multiplicación y división

Multiplicación

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

División

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

No es distributiva con respecto a la adición y sustracción:

Suma

$$(a + b)^m \neq a^m + b^m$$

Resta

$$(a - b)^m \neq a^m - b^m$$

- *Propiedad conmutativa*: La propiedad conmutativa no se cumple para la potenciación, exceptuando aquellos casos en que base y exponente tienen el mismo valor o son equivalentes.

$$a^b \neq b^a$$

- *Propiedad asociativa :* La propiedad asociativa no se cumple para la potenciación.

$$(a^m)^n \neq (a)^{(m^n)}$$

"La potenciación es una forma de acortar un número que sea muy largo."

La siguiente lista muestra ciertos números escritos en base 7.

3 x 5 = 4^2 - 1
4 x 6 = 5^2 - 1
5 x 10 = 6^2 - 1
12 x 14 = 13^2 - 1
25 x 30 = 26^2 - 1
43 x 45 = 44^2 - 1

Generalidad:

n x (n + 2) = $(n - 1)^2$ - 1

No importa la base en la que esté, porque el resultado siempre coincidirá con la respuesta.
Base 7

$5 \times 1 = 3^2 - 4$
$6 \times 2 = 4^2 - 4$
$10 \times 3 = 5^2 - 4$
$11 \times 4 = 6^2 - 4$
$12 \times 5 = 10^2 - 4$

Base 10

$1 \times 8 + 1 = 9 = 3^2$
$3 \times 8 + 1 = 25 = 5^2$
$6 \times 8 + 1 = 49 = 7^2$
$10 \times 8 + 1 = 81 = 9^2$

3.2 RADICACIÓN

La radicación es la operación inversa de la potenciación. Supongamos que nos dan un número a y nos piden calcular otro, tal que, multiplicado por si mismo un número b de veces nos da el numero a.

Por ejemplo:

Calcular qué número multiplicado por si mismo 2 veces da 196. Ese número es 14.

*[1] El número que esta dentro de la raíz se llama radicando, el grado de la raíz se llama índice del radical, el resultado se llama raíz.

Podemos considerar la radicación como un caso particular de la potenciación. En efecto, la raíz cuadrada de un numero (por ejemplo a) es igual que a1/2, del mismo modo la raíz cúbica de a es a1/3 y en general, la raíz enésima de un numero a es a1/n.

La mejor forma de resolver los ejercicios de operaciones con raíces es convertir las raíces a potencias.

*[1]www.telefonica.net/web2/lasmatematicasdemario/Aritmetica/Operaciones/Radicacion

3.2.1 Como hallar las raíces

3.2.1.1 Raíz cuadrada

1. Para calcular la raíz cuadrada de un número se comienza separando el numero en grupos de dos cifras, empezando por la derecha

Por ejemplo:
5560164 lo separaríamos 5'56'01'64

.
2. A continuación se calcula un numero entero que elevado al cuadrado sea igual (o lo mas próximo al numero del primer grupo, empezando por la izquierda).

Por ejemplo:
El primer numero es 5 y el numero entero que elevado al cuadrado se acerca mas a 5 es 2. 2 es la primera cifra de la raíz.

3. Después se eleva al cuadrado esta cifra y se resta del numero del primer grupo

Por ejemplo
22 = 4 y restándolo del numero del primer grupo que es 5, sale 5 -4 = 1

4. A continuación ponemos al lado del resto anterior el numero del siguiente grupo

Por ejemplo
156

5. Después multiplicamos por 2 el numero que hemos calculado hasta el momento de la raíz.

Por ejemplo
2 * 2 = 4

6. A continuación tenemos que buscar un numero que multiplicado por el numero que resulta de multiplicar por 10 el numero anterior y sumarle el numero que estamos buscando se acerque lo mas posible al numero que tenemos como resto. Ese numero será el siguiente numero de la raíz.

Por ejemplo
3, porque 43 * 3 = 129 que es el numero que se aproxima mas a 156 y la raíz seria 23...

7. Ahora tenemos que volver a calcular el resto restando el numero obtenido del que queríamos obtener realmente.

Por ejemplo:
156 - 129 = 27

8. A continuación repetimos el paso 4, esto es, ponemos al lado del resto anterior el numero del siguiente grupo

Por ejemplo:
2701

9. A continuación repetimos el paso 5

Por ejemplo:
23 * 2 = 46

10. Después repetimos el paso 6

Por ejemplo
5, porque 465 *5 = 2325 que es el numero que se aproxima mas a 2701 y la raíz seria 235...

11. Después repetimos el paso 7

Por ejemplo:
2701 - 2325 = 376

12. A continuación repetimos el paso 8

Por ejemplo:
37664

13. A continuación repetimos el paso 5

Por ejemplo
235 * 2 = 470

14. A continuación repetimos el paso 6

Por ejemplo
8, porque 4708 * 8 = 37664 que es el numero que se aproxima mas a 37664 y la raíz seria 2358

15. A continuación repetimos el paso 7

Por ejemplo:
37664 - 37664 = 0 En este caso la raíz es exacta pues el resto es cero.

3.2.1.2 Raíz cúbica

1. Para calcular la raíz cúbica de un número se comienza separando el numero en grupos de tres cifras, empezando por la derecha

Por ejemplo:
16387064 lo separaríamos 16'387'064

2. A continuación se calcula un numero entero que elevado al cubo se aproxime lo mas posible al numero del primer grupo (empezando por la izquierda).

Por ejemplo
El primer numero es 16 y el numero entero que elevado al cubo se acerca mas a 16 es 2.
2 es la primera cifra de la raíz.

3. Después se eleva al cubo esta cifra y se resta del numero del primer grupo

Por ejemplo
23 = 8 y restándolo del numero del primer grupo que es 16, sale 16 - 8 = 8

4. A continuación ponemos al lado del resto anterior el numero del siguiente grupo.

Por ejemplo
8387

5. Después tenemos que calcular un numero a que haciendo las operaciones siguientes:

3 * (raíz obtenida hasta el momento)2 * a * 100 + 3 * (raíz obtenida hasta el momento) * a2 * 10 + a3

Se aproxime lo mas posible al numero obtenido en el punto 4.
El número a, es el siguiente dígito de la raíz.

Por ejemplo

5, porque 3 * 22 * 5 * 100 + 3 * 2 * 52 *10 + 53 = 7625

6. A continuación restamos este numero al numero obtenido en el paso 4.

Por ejemplo:
8387 - 7625 = 762.

7. Repetimos el paso 4

Por ejemplo:
762064

8. Repetimos el paso 5 y el numero obtenido seria el siguiente numero de la raíz.

Por ejemplo
4, porque 3 * 252 * 4 * 100 + 3 * 25 * 42 * 10 + 43 = 762064

9. Repetimos el paso 6

Por ejemplo
762064 - 762064 = 0

3.2.2 Propiedades de la radicación

- *Raíz de un producto:* La raíz enésima de un producto a · b es igual al producto de la raíz enésima de "a" por la raíz enésima de "b"

$$\sqrt{3^2 \cdot 2^4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12$$

Pero si multiplicamos a · b dentro del radical, el resultado será el mismo:

$$\sqrt{3^2 \cdot 2^4} = \sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12$$

- *Raíz de un cociente:* El cociente de la raíz de una fracción, es igual al cociente de la raíz del nominador entre la raíz del denominador.

Por ejemplo:

$$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

Cuando esta propiedad se realiza con números no hace falta pasar la raíz a potencia de exponente racional, aunque sí cuando se hace con variables.

$$\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^9}} = \frac{x^{3/3}}{y^{9/3}} = \frac{x}{y^3}$$

- *Potencia de una raíz:* Para elevar una raíz a una potencia, se conserva el índice y es elevado sólo la cantidad subradical.

Ejemplo:

$$(\sqrt[4]{a^2})^8 = (\ a^{2/4})^8 = \sqrt[4]{a^{16}}$$

- *Raíz de una raíz:* Para calcular la raíz de una raíz se multiplican los índices de las raíces y se conserva la cantidad subradical.

Ejemplo:

$$\sqrt[7]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[21]{5}$$

3.3 NÚMEROS PRIMOS

El conjunto de los números primos es un subconjunto propio de los números naturales que engloba a todos los elementos de este conjunto mayores que 1 que son divisibles únicamente por sí mismos y por la unidad.

Por ejemplo, el número 7 tiene sólo dos divisores que son el 1 y el mismo 7 por lo que 7 es número primo.

En otros términos, un número natural es primo o lineal si tiene exactamente dos divisores distintos que son el 1 y el mismo número en cuestión.

El número 1, al ser solo divisor sí mismo, se conoce como número unitario.

Un número natural con más de dos divisores distintos se conoce como número compuesto o rectangular.

Por ejemplo, el número 4 tiene más de dos divisores distintos: el 1, el 2 y el 4, por lo que 4 es un número compuesto o rectangular, porque se puede formar un rectángulo con el número de puntos mientras que con el número primo solo se puede formar una hilera de puntos, por lo que es conocido también como número lineal.

3.3.1 Factores primos y divisibilidad

El teorema fundamental de la Aritmética establece que cualquier número natural mayor que 1 siempre puede representarse como un producto de números primos, y esta representación (factorización) es única módulo el orden de los factores.

Para saber descomponer un número en factores primos, podemos comenzar dividiendo el número dado en números primos (2, 3, 4, etc.) hasta conseguir residuo 0; cuando esto ocurra tenemos un factor primo.

Si un número es divisible por dos, es por que es un número par, por consiguiente los números naturales que no son pares, son impares.

No siempre tenemos que hacer divisiones para saber si un número es múltiplo de otro, en los consejos podemos ver como hallar números múltiplos de otros y como hallar los números pares e impares, en cualquier base.

CONSEJOS:

Cuando un número es par o impar en cualquier base:

Para saber si un número con mas de seis cifras es par o impar lo que se debe hacer es contar el número de cifras impares, y si al contar las cifras impares da un número par, es por que el número es par.

Por ejemplo:

3482657A42B79(13) ® Número par

53482657A42B79(13) ® Número impar

Cuando un número es múltiplo de otra cifra

Para saber si un número es múltiplo de otra cifra, la suma de las cifras debe dar un número múltiplo de la cifra que se necesita

Por ejemplo:
Para saber si un número es múltiplo de tres, en cualquier base, la suma de las cifras debe ser múltiplo de tres.

3.4 OTRA FORMA DE RESOLVER ECUACIONES

Podemos resolver ecuaciones de una manera diferente y de una forma en la que usamos la geometría de la forma $ax^2 + bx = c$.

La idea es encontrar un número para x.

$x^2 + 4x = 140$.

a) Si interpretamos x como el lado de un cuadrado, x^2 será su área y $4x$ puede interpretarse como el área de un rectángulo de lados 4 y x respectivamente; es decir, que la cantidad $x^2 + 4x$ es el área de la figura 1.

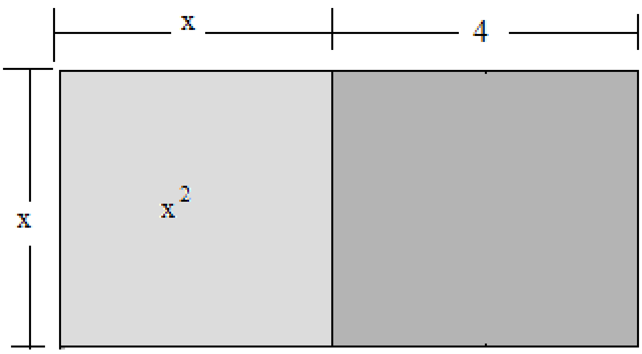
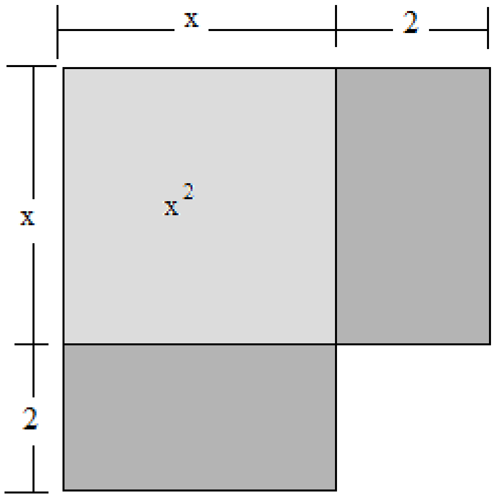
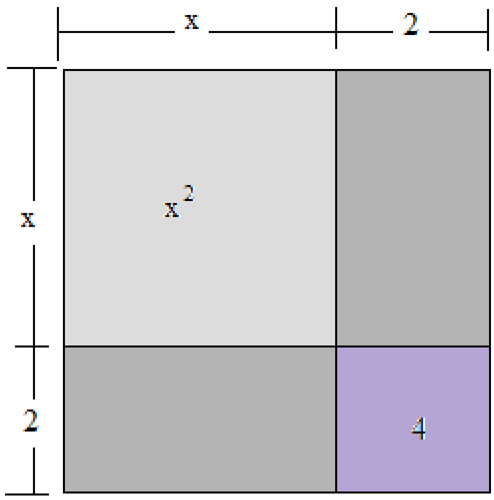


Figura 1

Podemos realizar la gráfica de otra forma de tal manera que podamos partir el 4x, para asi poder formar tres partes de un cuadrado:



Luego, para completar todo el cuadrado hacemos un cuadrado pequeño, para así poder sacar la ecuación.



En donde la ecuación queda:

$x^2 + 2x + 2x = 140$
$x^2 + 2x + 2x + 4 = 144$
$(x + 2)^2 = 144$
$x + 2 = \sqrt{144}$
$x + 2 = 12$
$x = 12 - 2$
$x = 10$

Otra forma de resolver ecuaciones de esta magnitud es de la forma $x^2 + c = bx$

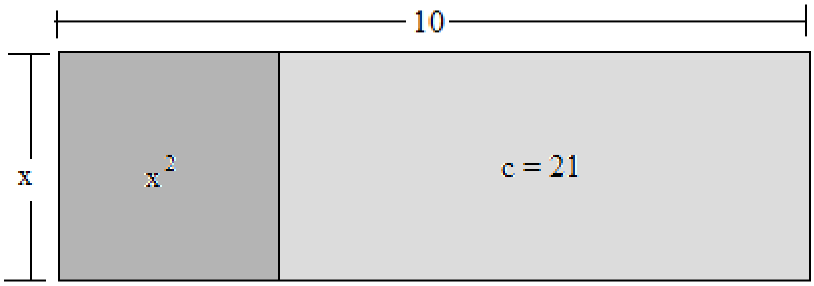
Lo primero que debemos hacer es plantear una ecuación:

$x^2 + 21 = 10x$

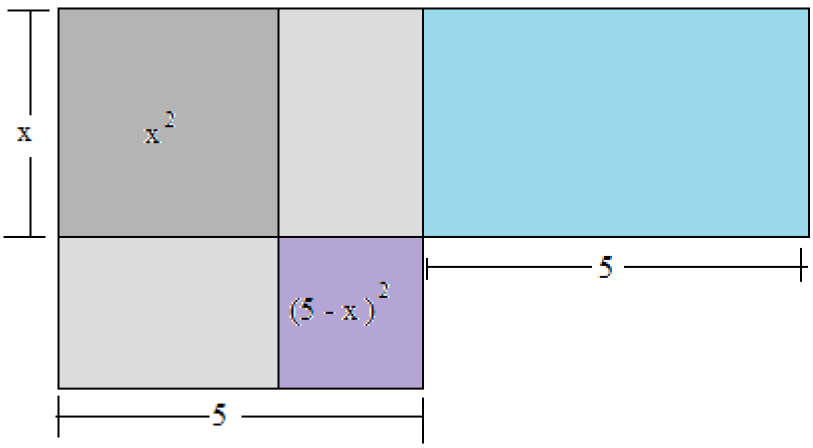
Comencemos dibujando un cuadrado de lado x.

Dibujamos un rectángulo que represente 21 unidades cuadradas, pero repartidas, de manera que uno de los lados sea x.

El rectángulo compuesto por $x^2 + 21$ tiene como área 10x, por lo tanto, uno de los lados del rectángulo tiene como longitud 10 unidades, puesto que el otro mide x.



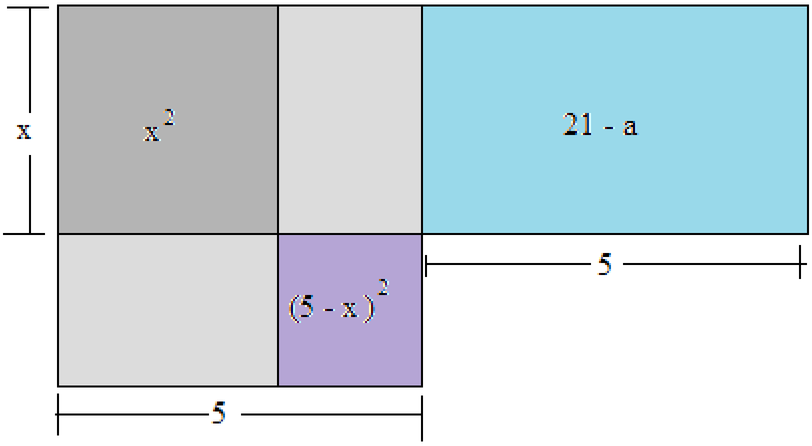
Para encontrar el valor de x, podemos hacer como el ejercicio anterior: primero completamos un cuadrado de lado 5



Si sumamos las áreas de este último con 21 que es el área del rectángulo c, obtenemos el área del cuadrado de lado 5, porque:

Si llamamos a al área del rectángulo que está al lado del cuadrado x, tenemos que:

$$x^2 + a = 21 - a$$



Para la cual la ecuación quedaría así:

$(x^2 + a) + a = (21 - a) + a = 21$

$(5 - x)^2 + 21 = 5^2$

Y otro ejemplo

3.5 LOGARITMACIÓN

En matemática, el logaritmo es una función matemática inversa de la función exponencial.

*1 Dado un número real (argumento), la función logaritmo asigna el exponente (o potencia) a la que un número fijo (base) se ha de elevar para obtener dicho argumento. Es la función inversa de la exponencial x = bn, que permite obtener n. Esta función se escribe como: n = logb x. Así, en la expresión 102 = 100, el logaritmo de 100 en base 10 es 2, y se escribe como log10 100 = 2.

Por ejemplo:

$$3^4 = 81 \longmapsto \log_3 81 = 4$$

El logaritmo es una de tres funciones relacionadas entre sí: en bn = x, puede encontrarse b con radicales, n con logaritmos y x con exponenciación.

---

* [1] WIKIPEDIA, la enciclopedia libre, logaritmo
Se denomina logaritmo neperiano o logaritmo natural (ln) al logaritmo en base e de un número.

3.5.1 Propiedades de la logaritmación

- La función $\ln(x)$ definida anteriormente es estrictamente creciente pues su derivada es estrictamente positiva

- Tiene límites infinitos en 0^+ y en $+\infty$.

- La tangente T_e que pasa por el punto de abscisa e de la curva, pasa también por el origen.

- La tangente T_1 que pasa por el punto de abscisa 1 de la curva, tiene como ecuación: y = x - 1.

- La derivada de segundo orden es $\ln''(x) = -1/x^2$, siempre negativa, por lo tanto la función es cóncava, es decir que todas las tangentes pasan por encima de la curva. Es lo que se constata con T_1 y T_e.

La función $log_b(x)$= a está definida donde quiera que x es un número real positivo y b es un número real positivo diferente a 1. Véase identidades logarítmicas para diversas reglas relacionadas a las funciones logarítmicas. También es posible definir logaritmos para argumentos complejos.

Para enteros b y x, el número$log_b(x)$ es irracional (no puede representarse como el cociente de dos enteros) si b o x tiene un factor primo que el otro no tiene.

5. REGULARIDADES

5.1 REGULARIDADES EN TABLAS

	1	2	3	4	5	$\ldots K$
1	1	1	1	1	1	$\ldots 1$
2	1	2	3	4	5	$\ldots K$
3	1	3	5	7	9	$\ldots 2K-1$
4	1	4	7	10	13	$\ldots 3K-2$
5	1	5	9	13	17	$\ldots 4K-3$
$\vdots$						
n	n	$2n$	$3n$	$4n$	$5n$	$(n-1)k-(n-2)=nk-k-n+2$

- Para obtener razonamientos para las anteriores sucesiones simplemente se parte de la sucesión básica ósea de *K,* entonces explicare como encontré las generalidades:

Se tiene:
1, 3, 5, 7,9…
Partimos de *K*[II], y a *K* le sumamos lo que le falta par obtener los anteriores números:

1 + 0=1
2 + 1=3
3 + 2=5
4 + 3=7
5 + 4=9
$\vdots$
K

Al observar se ve que a *K* se le suma *K* pero teniendo en cuenta el cero esto quiere decir que es *K-1* entonces la generalidad es:
$K+K-1$
Y al simplificar obtendremos

$$\boxed{2K-1.}$$

[II] De lo que logramos se obtiene una breve conclusión y es que si partimos de algo que ya sabemos por simple que sea, podemos encontrar algo que es difícil de encontrar o es muy complejo. Esto es algo que nos permitirá encontrar muchas cosas de aquí en adelante.

- Para la siguiente sucesión procedemos de la misma forma:

1, 4, 7,10…

$$\begin{array}{c} 1 + 0=1 \\ 2 + 2=4 \\ 3 + 4=7 \\ 4 + 6=10 \\ 5 + 8=13 \\ \vdots \\ K \end{array}$$

Obtenemos K + 0, 2, 4…
Procedemos a buscar la generalidad de 0, 2, 4…

$$\begin{array}{ll} 0 & + 0=0 \\ 1 & + 1=2 \\ 2 & + 2=4 \\ \vdots & \\ K-1 & + K-1 \end{array}$$

Para finalizar decimos que:

$$K-1+K-1+K=1,4,7,10...$$

Y simplificamos:

$$\boxed{3K-2}$$

Con esta información ya podemos buscar la generalidad *n*-sima por que:

$$\begin{array}{c} K \\ 2K-1 \\ 3K-2 \end{array}$$

Deducimos que la siguiente es $4K-3$ y observando concluimos:

$$(n-1)K-(n-2)$$

Simplificamos y obtendremos la generalidad:

$$\boxed{nK-K-n+2}$$

5.1.1. OTRA TABLA

	1	2	3	4	5	6	7	$\ldots K$
1	1	2	3	4	5	6	7	$\ldots K$
2	1	3	6	10	15	21	28	$\ldots K(K+1)/2$
3	1	4	9	16	25	36	49	$\ldots K^2$
4	1	5	12	22	35	51	70	$\ldots K(3K-1)/2$
5	1	6	15	28	45	66	91	$\ldots K(2K-1)$
6	1	7	18	34	55	81	112	$\ldots K(5K-3)/2$
7	1	8	21	40	65	96	133	$\ldots K(3K-2)$
$\vdots$								
n	n	$2n$	$3n$	$4n$	$5n$	$6n$	$7n$	

- Con esta tabla será un poco más compleja la situación en este caso razonaremos de diferente forma:

Comenzamos con la sucesión 1, 3, 6, 10,15…

Y como vemos en la tabla esa sucesión es la suma de los naturales

$$[1+2+3+4\ldots(K-1)]+K$$

$$\left[\frac{(K-1)}{2}(K-1+1)\right]+K$$

$$\frac{K(K-1)}{2}+\frac{2K}{2}=\frac{K(K-1+2)}{2}=\frac{K(K+1)}{2}$$

$$\boxed{\frac{K(K+1)}{2}}$$

- Obteniendo esta generalidad podemos tomarla como base y a esta sumarle lo que falte para obtener las siguientes:

Para 1, 4, 9, 16…

$$\begin{array}{ccccc} 1 & + & 0 & = & 1 \\ 3 & + & 1 & = & 4 \\ 6 & + & 3 & = & 9 \\ 10 & + & 6 & = & 16 \\ 15 & + & 10 & = & 25 \\ \vdots & & & & \end{array}$$

$$\frac{K(K+1)}{2}$$

Como podemos observar el otro sumando es la misma sucesión pero teniendo en cuenta el cero, lo que nos permite concluir lo siguiente:

$$\frac{K(K+1)}{2}+\frac{K(K-1)}{2}$$

$$\frac{K^2+K+K^2-K}{2}$$

$$\frac{2K^2}{2}$$

$$\boxed{\frac{K^2}{1}=K^2}$$

Para la siguiente fila tomaremos como base $\dfrac{K(K-1)}{2}$ [III]:

- 1, 5, 12, 22, 35…

$$\begin{array}{l} 0 + 1 = 1 \\ 1 + 4 = 5 \\ 3 + 9 = 12 \\ 6 + 16 = 22 \\ 10 + 25 = 35 \\ \vdots \\ \dfrac{K(K-1)}{2} \end{array}$$

El otro sumando es K^2 y sumamos:

$$\frac{K(K-1)}{2} + K^2$$

$$\frac{K^2 - K + 2K^2}{2}$$

$$\frac{3K^2 - K}{2}$$

Factorizamos:

$$\boxed{\frac{K(3K-1)}{2}}$$

- para la siguiente sucesión procedemos de igual forma:

1, 6, 15, 28, 45…

$$\begin{array}{l} 0 + 1 = 1 \\ 1 + 5 = 6 \\ 3 + 12 = 15 \\ 6 + 22 = 28 \end{array}$$

[III] De esta ultima tabla concluimos que la fila siguiente es la suma de la fila anterior con $\dfrac{K(K-1)}{2}$

$$10 \quad + 35 \quad = 45$$
$$\vdots$$
$$\frac{K(K-1)}{2}$$

El otro sumando es la generalidad de la anterior fila.

$$\frac{K(K-1)}{2}+\frac{K(3K-1)}{2}$$

$$\frac{(K^2-K)}{2}+\frac{(3K^2-K)}{2}$$

$$\frac{K^2-K+3K^2-K}{2}$$

$$\frac{4K^2-2K}{2}$$

$$2K^2-K$$

Factorizamos:

$$\boxed{K(2K-1)}$$

¿Qué mas le vemos a las tablas?

Diagonales

D_1 =1 D_4 =1, 4, 6,4
D_2 =1,2 D_5 =1, 5, 9, 10,5
D_3 =1, 3,3 D_6 =1, 6, 12, 16,25.

Hasta la diagonal 5, se conjetura que estos números son parte del triángulo de pascal sin un 1.

G_1 =1 G_2 =1, 2,1
G_3 =1, 3, 5, 3,1 G_4 =1, 4, 7, 10, 7, 4,1

G_5=1, 5, 9, 13, 17, 13, 9, 5,1.
Al parecer los anteriores números son oscilatorios, esto quiere decir que van aumentando hasta cierto punto y descienden.

Sumar diagonales:

$SD_1 = 1$ $SD_2 = 3$
$SD_3 = 7$ $SD_4 = 15$
$SD_5 = 73$

Las primeras 4 diagonales son de la forma $2^n - 1$ Por que si estas diagonales son parte del triangulo de pascal y la sumatoria de cada fila en ese triangulo es = 2^n , y a estas diagonales les falta 1, que es el que se le resta.

5.2 ALGUNOS EJERCICIOS PARA EJERCITAR

1. En base diez se tiene que:

(1 x 8) + 1 = 9
(12 x 8) + 2 = 98
(123 x 8) + 3 = 987
(1234 x 8) + 4 = 9876
(12345 x 8) + 5= 98765
(123456 x 8) + 6 =987654

Construya una tabla similar en base ocho e intente dar una generalidad.

(1 x 6) + 1 = 7
(12 x 6) + 2 = 76
(123 x 6) + 3 = 765
(1234 x 6) + 4 = 76543
(12345 x 6) + 5 = 765432
(123456 x 6) + 6 = 7654321

La generalidad es:
123…N x K + n… N = N N-1 N-2…1

Donde:
n=números de 1 hasta N
K= base -2
N= mayor número de la base antes de 10.

2. Observe la siguiente secuencia y escriba una regularidad

Base 3	En base 4	En base 5	…	¿En base n?

	13 x 3 = 111	124 x 4 = 1111		0123…+2 x 0N =111…
2 x 2 = 11	13 x 12 = 222	124 x 13 = 2222		1N-1=22…
2 x 11 = 22	13 x 21 = 333	124 x 22 = 3333		2N-2=33…
		124 x 31 = 4444		⋮ ⋮

DONDE:

0123…son los números que se colocan dependiendo la base y al ultimo se le suma el 2 y nos da el ultimo termino que debe ir ahí.

0N, 1N-1,2N-2… números que siempre deben ir hay, donde N es el numero de mayor valor antes de 10.

El resultado depende de N; si es 1, por ejemplo, se coloca el 1 N veces.

3. Enuncie un argumento que explique la siguiente adición

$$\begin{array}{r} 123456789 \\ 123456789 \\ 987654321 \\ 987654321 \\ 2 \\ \hline 2222222222 \end{array}$$

El argumento es:

1 + 9 =10
2 + 8 =10
3 + 7 =10
4 + 6 =10
5 + 5 =10
6 + 4 =10
7 + 3 =10
8 + 2 =10
9 + 1 =10

Y si la colocamos 2 veces esta suma nos da solo 20 y al sumarle el 2 pues solo va a dar 2, 10 veces que es la base.

4. Construya una adición similar al ejercicio anterior cuyo resultado sean sólo cuatros. Repita el ejercicio en base 8, enuncie un resultado general para cualquier base explique.

$$\begin{array}{r} 123456789 \\ 123456789 \\ 123456789 \\ 123456789 \end{array}$$

987654321
987654321
987654321
987654321
4

4444444444

BASE 8

1234567
1234567
7654321
7654321
2

22222222

1234567
1234567
1234567
1234567
7654321
7654321
7654321
7654321
4

44444444

1 + 7= 10
2 + 6= 10
3 + 5= 10
4 + 4= 10
5 + 3= 10
6 + 2= 10
7 + 1= 10

Para cualquier base:
1+ (N-0)=10
2+ (N-1)=10
$\vdots + \quad \vdots \quad =10$

Hasta N.
Al sumarle X número < N (donde N es el numero anterior de 10 dependiendo de la base) y colocando la suma X veces nos dará ese número repetidamente dependiendo del número de la base; por ejemplo si es 3 y la suma es en base 7, (donde 3 < 6) se coloca la suma 3 veces se le suma 3 y el resultado es tres 7 veces.

ORDEN DE LOS NUMEROS NATURALES

1. Para comparar números relativamente grandes, el procedimiento que utilizamos no es el descrito. ¿Cómo saber cual de los siguientes dos números es el mayor, si están en base 12?

6532098672245677 y 6532098762245677

¿Importa la base? ¿Y si comparamos dos números que no tengan el mismo número de cifras? Justifique las afirmaciones que haga.

Para saber cual es mayor de los dos comenzamos mirando de izquierda a derecha comparando los números, el primero con el primero, segundo con segundo…hasta llegar a una desigualdad:

6=6; 5=5; 3=3; 2=2; 0=0; 9=9; 8=8; **6 < 7**

Al ver la desigualdad decimos que el número menor es el que contenga el 6 o mejor el menor número en la desigualdad, en este caso:

6532098672245677 < 6532098762245677

La base si importa tiene que estar en una misma base para poder comparar:
Ej.:

$$54321_{6} \neq 54321_{(10)}$$

Si comparamos todos los números como hicimos anteriormente nos da que todos son iguales y la única opción seria pasarlos a una misma base y comparar:
Entonces pasamos los dos a base 10:

5 x 6 = 30 + 4 = 34
34 x 6 = 204 + 3 = 207>
207 x 6 = 1242 + 2 = 1244
1244 x 6 = 7464 + 1= $7465_{(10)}$

7465< 54321

Estando en bases iguales ya podemos comparar y deducir que:

$$54321_{6} < 54321_{(10)}$$

Ahora al comparar dos números que no tengan el mismo número de cifras:

Primero miramos si están en la misma base, luego ya con solo ello deducimos que el mayor es el que tenga más cifras:

$$545725_{(8)} > 54025_{(8)}.$$

OTRAS FORMAS DE MULTIPLICAR Y DIVIDIR

En el papiro de Rhind, un manual de antiguas matemáticas egipcias, escrito alrededor de 1700 A.C., se describe una formula sumativa de multiplicar, para multiplicar por ejemplo 25 x 27 se hace lo siguiente:

•	1	vez	27	es	27
	2	veces	27	son	54
	4	veces	27	son	108
•	8	veces	27	son	216
•	16	veces	27	son	432

Los números marcados en la primera columna suman 25, por lo tanto 25 veces se obtiene de adicionar los números correspondientes en la última columna. Este algoritmo funciona básicamente por que esta basado en el hecho de que cualquier número puede expresarse como una suma de potencias de dos.

BASE 4

23 x 22

•	1	vez	22	es	22
•	2	veces	22	son	110
	10	veces	22	son	220
•	20	veces	22	son	1100
	100	veces	22	son	2200

Los números marcados suman 23 y los correspondientes en la última fila suman 1232 entonces 23 x 22 = 1232

BASE 11

58 x 57

•	1	vez	57	es	57
•	2	veces	57	son	103
•	4	veces	57	son	206
•	8	veces	57	son	411
•	15	veces	57	son	822
•	2A	veces	57	son	1544

La suma de los números marcados es 58 y la suma de los correspondientes en la última fila es 2A31 entonces 58 x 57 = 2A31.

Algunos pueblos de Rusia multiplican utilizando un procedimiento que no necesita el uso de las tablas de multiplica, veamos algunos ejemplos:

18 x 7 en BASE 10

18	**7**
9	14
4	**28**
2	**56**
1	112
	126

Se va sacando mitad a el multiplicando sucesivamente, sin tener en cuenta los residuos de cada paso, y al mismo tiempo se va multiplicando el multiplicador.
El proceso se termina cuando se obtiene un 1 en la columna de los números que se han ido dividiendo entre dos. A cada uno de los números de esta columna le corresponde un número en la columna de los números que se han duplicado. El producto se obtiene como la suma de los números que se oponen a los números impares de la columna de las mitades.

BASE 16

AD1 x 25

AD1	25
568	**4A**
2B4	**94**
15A	**128**
AD	250
56	**4A0**
2B	940
15	1280
A	**2500**
5	4A00
2	**9400**
1	12800
	19035

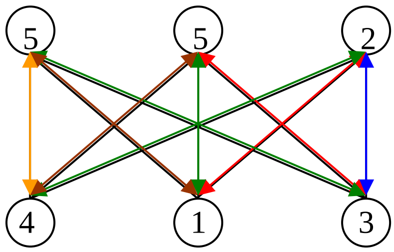
BASE 5

11 x 4

11	**4**
3	13
1	31
	44

A continuación aparecen algunas multiplicaciones (en base 10) efectuadas por medio de algoritmos distintos al usual, para cada uno de ellos, proponga sus propios ejemplos en diferentes bases y busque una justificación a cada procedimiento.

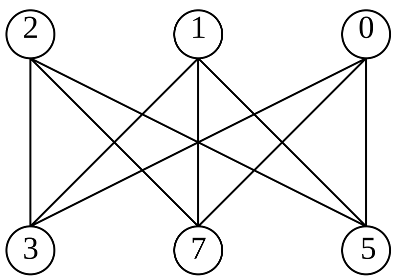
- El método crucecita
  BASE 10



22 7 9 7 6

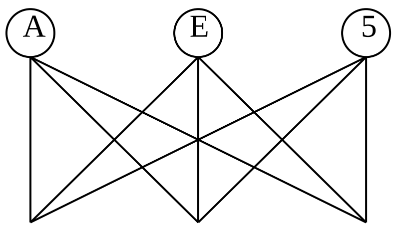
Para este método se hacen las operaciones según las flechas de cada color entonces:
La unidad del resultado es el producto de multiplicar los números que indica la flecha azul.
La decena del resultado es el resultado de multiplicar los números que indican las flechas rojas y como son dos multiplicaciones estos productos se suman y la unidad de este resultado es el que necesitamos el resto pasa a sumar a la siguiente.
La centena del producto es la suma de los productos de las tres multiplicaciones que indica el color verde más lo que pasó del resultado anterior a sumar, se deja la unidad de este número y las decenas pasan a sumar.
La suma de las dos multiplicaciones que indica el color café más lo que pasó del resultado anterior a sumar, la unidad del número es el número en posición de unidades de mil y por ultimo se multiplican los números denotados con el color naranja y se le suma lo que pasó del resultado anterior y listo.

BASE 8



10 3 1 5 0

BASE 16



1 9 C

11 8 8 8 C

- El método pirámide

BASE 10

```
    4 5 2 1
    7 3 7 3
      0 7
      1 2
    1 4 0 3
    2 8 1 5
  1 2 3 5 0 6
  3 5 0 6 0 7
2 8 1 5 1 4 0 3
3 3 3 3 3 3 3 3
```

BASE 6

```
    1 0 2 1
    5 3 5 3
      0 5
      0 3
    1 4 0 3
    0 5 0 0
  0 3 0 0 1 0
  0 0 1 0 0 5
0 5 0 0 1 4 0 3
  5 5 5 4 2 5 3
```

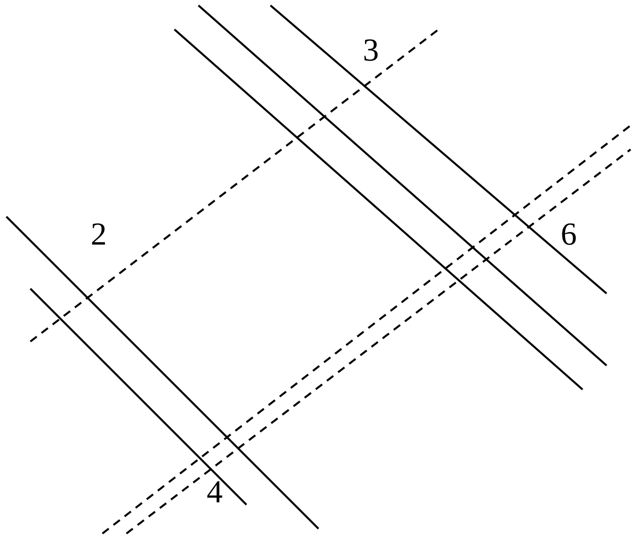
BASE 8

```
    7 6 1 0
    3 1 3 1
      2 5
      0 0
    0 3 0 0
    2 5 0 6
  0 7 2 2 0 1
  2 2 0 1 0 0
2 5 0 6 0 3 0 0
3 0 5 3 1 1 1 0
```

Este método solo sirve si todos los números del multiplicador son impares y si la unidad de este es igual al número que hay en las centenas y si el número de las decenas es igual al de las unidades de mil.

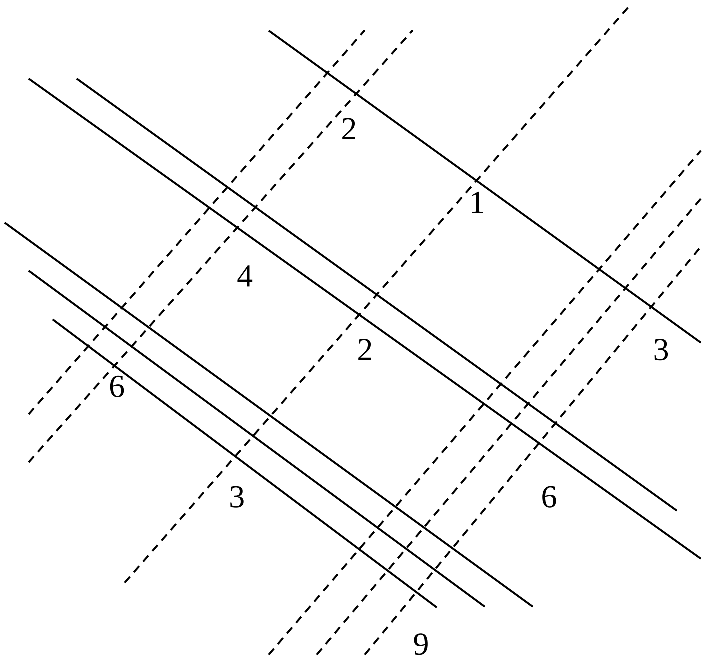
-Un método grafico

BASE 10
12×23



Luego, $12\times 23=276$

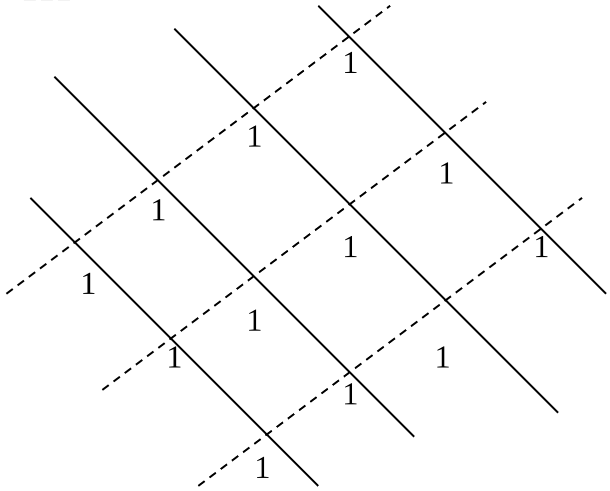
213×321



Luego, $213\times 321=68373$

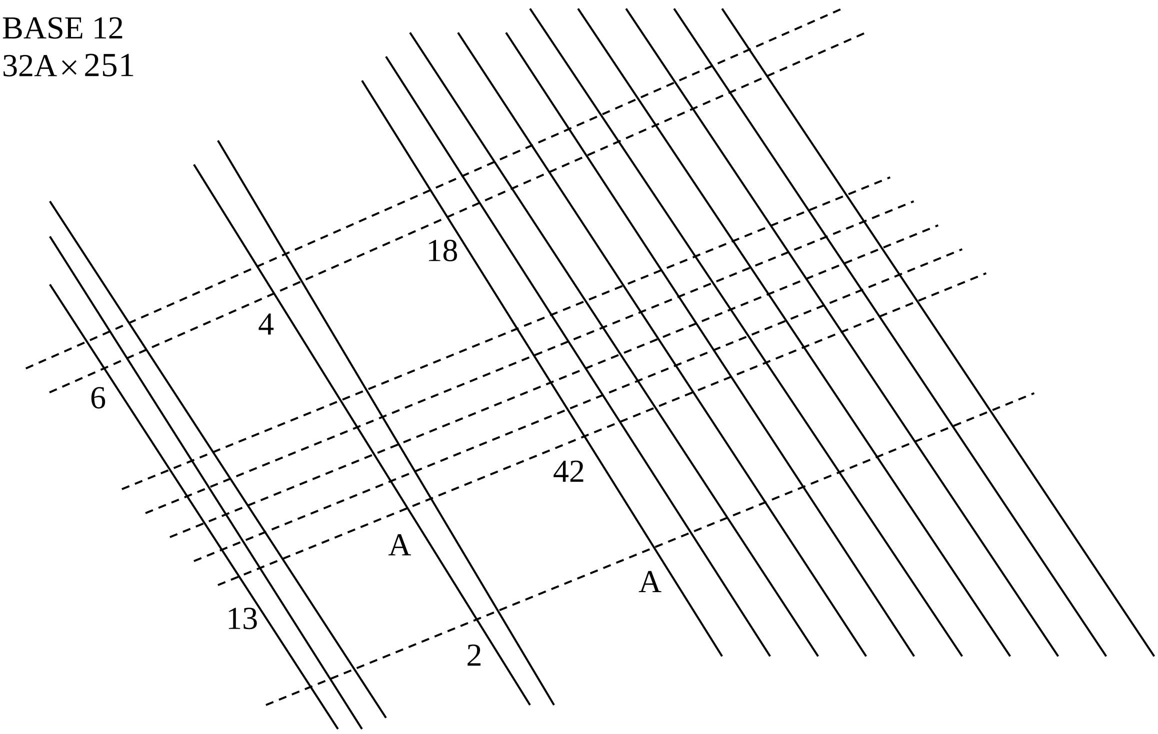
EJ. 3:
BASE 2

1111×111



Luego: $1111 \times 111 = 1101001$

BASE 12
$32A \times 251$



3

$32A \times 251 = 7A14A$

En este método simplemente se colocan rectas, la cantidad la denota cada número del multiplicando y del multiplicador viendo cada número como unidad, las del multiplicador van transversales y las del multiplicador oblicuas, la cantidad de intersecciones formadas se denotan con su respectivo número, luego se suman estos números con los números verticales a el.

2. Un algoritmo para dividir

EJ. 1:

93		70	1
186		70	2
372	70		4
744	442		8
1488	1186		16
2976		2674	32
5952		2674	64
11904	2674		128
14578			156

Por tanto, el cociente de dividir 14578 entre 93 es 156 y sobra 70.

En este algoritmo se observa que la primera casilla contiene al divisor y hacia abajo van los múltiplos pares de el, donde el máximo múltiplo es menor que el número del dividendo el cual va en la ultima casilla.
Por consiguiente se le resta al dividendo el máximo múltiplo del divisor y se coloca frente a la casilla de ese múltiplo, a ese número se le resta el otro múltiplo y asi sucesivamente hasta llegar al divisor, si la resta no se pude hacer se coloca el mismo número pero en la tercera fila de casillas frente al múltiplo que le corresponde y se sigue restando.
El resultado de la última resta es el residuo. En la última fila se colocan los números los cuales son los que multiplican al divisor para obtener sus múltiplos y el cociente es la suma de los números de esta fila los cuales están en frente de las restas que si se pudieron hacer.

En la adición 7+77+777 +…+777777… encuentre el digito que ocupa el lugar 100 de la suma. Resuelva el mismo problema en base 14.

7+77 = 84
84+777=861
861+7777=8638
8638+77777=86415
86415+777777=864192
864192+77777777=8641969
8641969+77777777=86419746
86419746+777777777=864197523
864197523+7777777777=8641975300
8641975300+77777777777=86419753077
86419753077+777777777777=864197530854
864197530854+7777777777777=8641975308631

Se puede ver que desde la suma 11 se comienza a repetir los números 864197530; para saber cual será el digito de lugar 100 simplemente nombramos esos números que se repiten con su posición:

8= primera posición
6= segunda posición
4=tercera posición
1=cuarta posición
9=quinta posición
7=sexta posición
5=séptima posición
3=octava posición
0=posición cero.

Y así sucesivamente hasta el último digito que es el cero, luego tomamos la posición que queremos saber, en este caso la posición cien y como tenemos nueve posiciones dividimos el cien por el nueve:

100	9
10	11
1	

Ya realizada la división decimos que el residuo nos dará la posición en la cual esta representada por un número, en ese caso nos da el 1 ósea primera posición la cual es representada por el número 8, esto quiere decir que el número que estará en la posición cien de la suma será el ocho.

En base 14:

7+77=80
80+777=817
817+7777=8190
8190+77777=81927
81927+777777=8192A0
8192A0+7777777=8192A37
8192A37+77777777=8192A3B0
8192A3B0+777777777=8192A3B47
8192A3B47+7777777777=8192A3B4C0
8192A3B4C0+77777777777=8192A3B4C57
8192A3B4C57+777777777777=8192A3B4C5D0
8192A3B4C5D0+7777777777777=8192A3B4C5D67
8192A3B4C5D67+77777777777777=8192A3B4C5D700
8192A3B4C5D700+777777777777777=8192A3B4C5D7077
8192A3B4C5D7077+7777777777777777=8192A3B4C5D70810
8192A3B4C5D70810+77777777777777777=8192A3B4C5D708187

En esta base pasa igual que en base 10 solo que la sucesión se repite desde la suma 14, esto quiere decir que la base nos da el número de veces que se debe realizar la suma para que comience a repetirse la regularidad. Y para saber cualquier posición realizamos lo mismo que en base 10 nombramos posiciones en la regularidad:

8=1
1=2
9=3
2=4
A=5
3=6
B=7
4=8
C=9
5=A
D=B
7=C
0=0

Luego dividimos a 100 por D.

100	D
10	11

1

Obtenemos nuevamente que la posición 100, le va a corresponder al número que este en la posición 1 que es el 8.

¿Cuál es la cifra de las unidades en 3^{2528} si el número esta escrito en base 10? Resuelva el mismo problema en base 7, 9 y 11.

$$3^0=1$$
$$3^1=3$$
$$3^2=9$$
$$3^3=27$$
$$3^4=81$$
$$3^5=243$$

Con esto nos damos cuenta que al elevar el 3 se cumple que cada 4 potencias la última cifra de las unidades del resultado va a ser la misma. Entonces procedimos así:

Tomo la potencia y la dividimos por 4 que podemos decir que es una constante, observamos el residuo que siempre será 0,1 ,2 ó 3 y al colocarle al 3 cualquiera de estos números como potencia nos dará la cifra de las unidades de la potencia que queramos.

$$2528 \div 4 = 632 \text{ y el residuo es } 0$$

Como el residuo es 0 afirmamos que la cifra de las unidades de 3^{2528} es 1 porque 3^0=1.

En base 7:

Tenemos que pasar la potencia a base 7

$$2528 = \quad 11 = \qquad\qquad 11$$
$$2 \times 13 = \quad 26$$
$$5 \times 13^2 = \quad 1313$$
$$2 \times 13^3 = \quad \underline{5555}$$
$$10241$$

$$3^{10241}_{(7)}$$
$$3^0=1$$
$$3^1=3$$
$$3^2=12$$
$$3^3=36$$
$$3^4=144$$

3^5=465
$3^6 = 2061$
$3^{10} = 6243$

En este la cifra de las unidades se repite cada 6 potencias entonces cogemos la potencia y la dividimos por 6

$10241 \div 6 = 1141$ Y tiene residuo 2

Entonces la potencia es 3^2=12, podemos concluir que la cifra de las unidades de $3^{10241}_{(7)}$ Es 2.

Base 9
3^{2528}

3^0=1
3^1=3
3^2=10
3^3=30
3^4=100
3^5=300
$3^6 = 1000$
$3^7 = 3000$

En esta base no se puede hacer divisiones porque no hay regularidad, si no simplemente se ve que desde la potencia 2 la cifra de las unidades es 0 y siempre al multiplicar por este 0 a 3 nos da 0 en la otra unidad y así sucesivamente; por lo cual la cifra de las unidades de 3^{2528} es un cero.

Base 11

3^{2528}

3^0=1
3^1=3
3^2=9
3^3=25
3^4=74
3^5=201
3^6 =603

En esta base vemos el cambio cada 5 potencias entonces dividimos por 5.

2528÷5=54A y el residuo es 2

Por lo cual 3^2=9 esto quiere decir que la cifra de las unidades en esta base de 3^{2528} es 9.

1. Halle x_8 tal que:

$$\frac{365_{(9)}\quad x+\quad 2103_{(5)}}{2_{(3)}} = 2254_{(8)}$$

Explique el procedimiento que sigue para encontrar x. Justifique cada uno de los pasos que realiza.

Paso 1

Realizamos la conversión a base de todos los números:

$$\begin{array}{llr} 365_{(9)} = & 5 = & 5 \\ & 6 \times 11 = & 66 \\ & 3 \times (11)^2 = & \underline{363} \\ & & 456_{(8)} \end{array}$$

$$\begin{array}{llr} 2103_{(5)} = & 3 = & 3 \\ & 0 \times 5 = & 0 \\ & 1 \times (5)^2 = & 31 \\ & 2 \times (5)^3 = & \underline{372} \\ & & 426_{(8)} \end{array}$$

Paso 2

- Remplazamos y despejamos x

$$\frac{456x + 426}{2} = 2254$$

- Multiplicamos por dos a cada lado

$$\frac{456x + 426}{2} \times \frac{2}{1} = 2254 \times 2$$
$$456x + 426 = 4530$$

- Restamos 426 a cada lado

$$456x + 426 - 426 = 4530 - 426$$
$$456x = 4102$$

- Dividimos por 456

$$\frac{456x}{456} = \frac{4102}{456}$$
$$x = 7$$

Estos pasos se justifican con las reglas que dimos en clases.

2. Enuncie un criterio para determinar para cuales valores de z se cumple que: $z - 42 > 63$ y $54 - z < 16$ tenga en cuenta que los números están escritos en base 9.

   Nuestro criterio seria cambiar la desigualdad por una igualdad y operamos como una ecuación, al terminar de resolver cambiamos el igual por el operador que tenía, debe cumplir que z es un número natural:

$$z - 42 > 63$$
$$z - 42 = 63$$
$$z - 42 + 42 = 63 + 42$$
$$z = 115$$
$$z > 115$$

   Se cumple para todos los números naturales mayores a 115.

$$54 - z < 16$$
$$54 - z = 16$$
$$54 - z + z = 16 + z$$
$$54 = 16 + z$$
$$54 - 16 = 16 + z - 16$$
$$37 = z$$
$$37 < z$$

   Se cumple para todos los números naturales menores de 37.

3. Con las seis cifras del numero 123456 se pueden formar 720 números, si los números se escriben en orden ascendente desde:

$$12345 \quad 123465 \ldots 654321$$

¿Cuál es el número que ocupa el lugar 256?
Lo primero que hicimos fue determinar en qué numero cambiaba de 12 a 13 este cambio surge en el numero 24 y los siguientes términos cumplían la característica de quedar en forma ascendente así que con esto seguí formando los números múltiplos de 24.
#1= 123456
#24=136542
#48=146532
#72=156432
#96=165432
#120=216543

Al llegar al 120 pasa 16 a 21 esto significa que cada número tiene 120 posiciones con esta característica paso a los múltiplos del 120.
#120=216543

#240=316542

Si seguimos nos pasamos del número 256 que es el que necesitamos, entonces comienzo a buscar otro cambio más pequeño que el de 24.
123456
123465
123546
123564
123645
123654
124356

Vemos que la cifra de las unidades de mil cambia cada 6 números al número siguiente, entonces cogemos al 240 y seguimos construyendo con estos números.
#240=316542
#246=321456
#252=324156
El siguiente número es el 258 y se pasa del que necesitamos pero si observamos las centenas cambian cada 2 números al siguiente número y con esto llegamos ya al 256.
#252=324156
#254=324516
#256=324615.

4. Si a partir del 37 en base 10, multiplicamos por múltiplos de 3 obtenemos

$$37 \times 3 = 111$$
$$37 \times 6 = 222$$
$$37 \times 9 = 333$$
$$37 \times 12 = 444$$
$$37 \times 15 = 555$$

¿Existe otro par de números que nos den los mismos resultados? resuelva el mismo problema en otras cuatro bases.
No se puede sacar otro par de números porque ese resultado solo es para números múltiplos de tres.

- Base 4

13 x 3=111
13 x 12=222
13 x 21=333

- Base 7

25x3=111
25x6=222
25x12=333
25x15=444
25x21=555

- Base 13

49x3=111
49x6=222
49x9=333
49xC=444
49x12=555
49x15=666
49x18=777

- Base 16

5Bx3=111
5Bx6=222
5Bx9=333
5BxC=444
5BxF=555
5BxI=666
5BxL=777

CONCLUSIÓN: En las bases: si sumamos de tres en tres empezando desde 4 tendremos las bases en las cuales se presenta este caso. Para hallar cualquier base en donde se presente este caso tenemos la siguiente ecuación:

	Bases
a_1=4	=4
a_2=4+3	=7
a_3=4+3+3	=10
a_4=4+3+3+3	=13
a_5=4+3+3+3+3	=17
a_6=4+3+3+3+3+3	=19

En resumidas cuentas:

a_1=4+ (3×0)	=4
a_2=4+ (3×1)	=7
a_3=4+ (3×2)	=10
a_4=4+ (3×3)	=13
a_5=4+ (3×4)	=16
a_6=4+ (3×5)	=19

$\vdots$

$\boldsymbol{a_n = 4 + (3 \,.\, (n-1))}$

- Comprobación:

$a_{5=}$4+$(3 \times 4) = 16$ $a_{9=}$4+$(3 \times 8) = 28$

- ¿Cómo hallamos el número *n* por el cual debemos multiplicar al múltiplo *m*; tres en este caso, con resultado *p*?, si *p* depende de *m*, es decir, si el primer múltiplo es 3 *p* será 111, si 6 es el segundo múltiplo *p* será 222 y así sucesivamente.

$$(n \times m) = p$$

*Despejamos *(n)*

- Ejemplo

  En base 7

$$(n \times 3) = 111$$
$$n = 111/3$$
$$n = 25$$

  En base 16

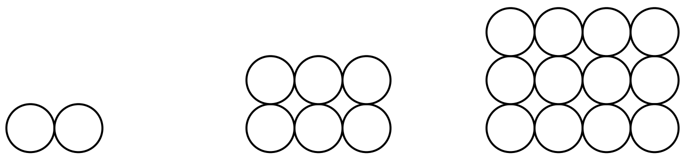
$$(n \times 9) = 333$$
$$n = 333/9$$
$$n = 5B$$

5. ¿Cuál es el menor número en base 10, que al dividirlo por 2, 3 y 4 tiene residuo 1 y es divisible por 51?

   No hay ningún número en esta base que cumpla esas condiciones por que 51 es múltiplo de 3 y todos los divisibles por 51, son múltiplos a la vez de 3 lo cual crea una división exacta o mejor de residuo 0 lo cual no verifica que al dividirlo por 3 tiene residuo 1.

MÉTODOS GEOMÉTRICOS

Los números rectangulares son los que tienen una cantidad tal de objetos que permiten formar un rectángulo cuya base es una unidad mayor que la altura.

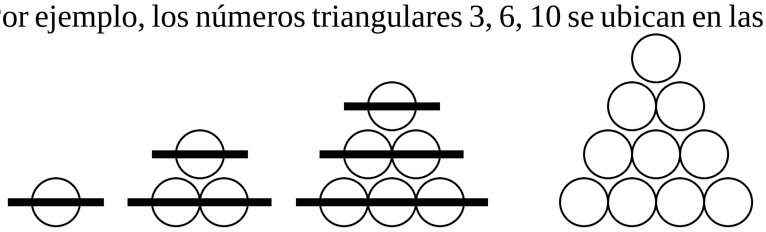


Como bien vemos estos rectángulos están formados por un lado de medida *n* y su base de lado *n+1* y como queremos saber la cantidad de elementos de cada rectángulo entonces concluimos que es el área que estaría dado por la generalidad:

$$n(n+1)$$

LOS NÚMEROS POLIGONALES

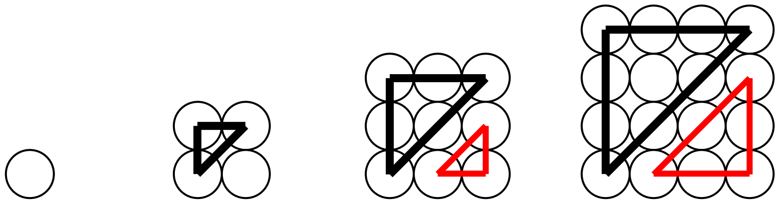
Una de las clasificaciones menos conocida de los números naturales, heredada de los Pitagóricos, es la asociada a diversas configuraciones geométricas. Cada número natural está representado por una colección de objetos que pueden ser dispuestos en un polígono determinado. Comenzando, en general, todas las sucesiones con un único elemento.
Por ejemplo, los números triangulares 3, 6, 10 se ubican en las siguientes configuraciones:



Así, es sencillo afirmar que el *n*-ésimo número triangular se obtiene como la suma de los primeros *n* números naturales. Y utilizando expresiones algebraicas podríamos indicarlo como el área de un triángulo donde *n* es el número de la base, *n+1* es la altura:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

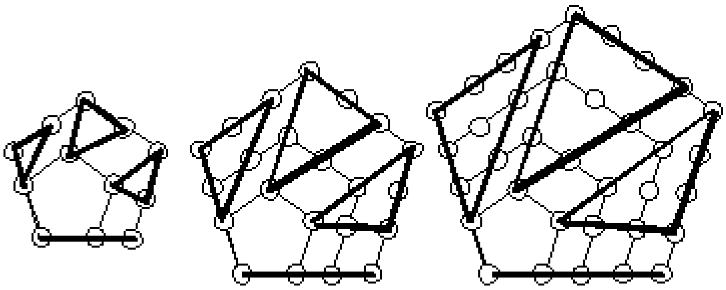
Los cuadrados:



Al ver los gráficos se puede observar que loa números cuadrados es la suma de los triangulares con los triangulares de un orden menor, esto quiere decir que teniendo el cero en cuenta:

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

Los pentagonales:



El esquema anterior sugiere que un número pentagonal se expresa como la suma de tres números triangulares de un orden menor y de los puntos de su lado $P_n = 3 \cdot P_{n-1} + n$, de donde

$$3\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{3n(n-1)}{2} + \frac{2n}{2} = \frac{3n(n-1)+2n}{2} = \frac{3n^2 - 3n + 2n}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Ya con los anteriores razonamientos daremos una formula para el *n*-ésimo número poligonal:

Números triangulares $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Números cuadrados $C_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + (4-3)\dfrac{n(n-1)}{2} =$

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n+n^2-n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

Números pentagonales

$$P_n = \frac{n(n+1)}{2} + (5-3)\frac{n(n-1)}{2}$$

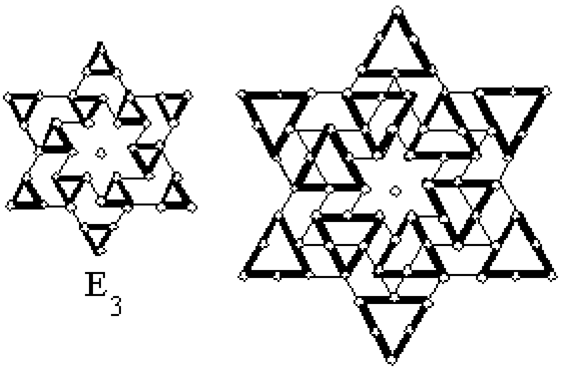
Números hexagonales

$$H_n = \frac{n(n+1)}{2} + (6-3)\frac{n(n-1)}{2}$$

De esto podemos concluir que para un polígono de *K* lados, el *n*-ésimo número poligonal será:

$$K_n = \frac{n(n+1)}{2} + (K-3)\frac{n(n-1)}{2}$$

LOS NÚMEROS ESTRELLADOS



E_3 E_4

Al observar este dibujo se observa que cada triangulo esta formado por los ya conocidos números triangulares de un orden menor, si contamos son 12 veces los números triangulares + 1 que es el punto del centro lo que se concluye es:

$$12\frac{k(k-1)}{2}+1$$

Y al simplificar:

$$\frac{12k^2-12k}{2}+1$$

$$6k^2-6k+1$$

Y esta seria la formula para el k-nesimo número estrellado:

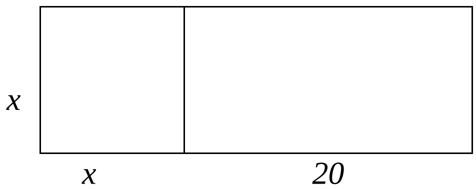
$$\boxed{6k(k-1)+1}$$

SOLUCION DE ECUACIONES POR MEDIOS GEOMETRICOS

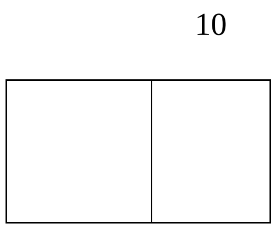
Ecuaciones de la forma $x^2+bx=c$

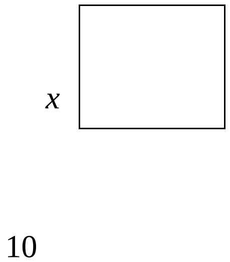
$x^2+20x=69$

Primero construimos un cuadrado de lado *x* y le anexamos un rectángulo de lado 20 y el otro *x:*

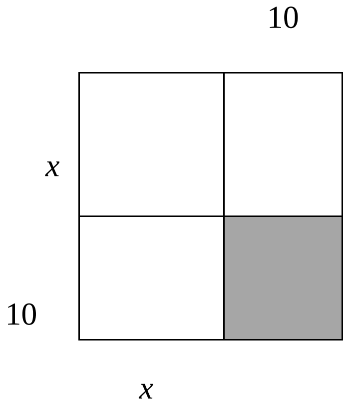


Dividimos el rectángulo en dos partes de área 10*x*





Completamos el cuadrado:



El área de ese cuadrado que se construyo es 100.

Ese dato lo sumamos a cada lado de la ecuación y desarrollamos:

$$x^2 + 20x + 100 = 69 + 100$$

$$(x+10)^2 = 169$$

$$x + 10 = \sqrt{169}$$

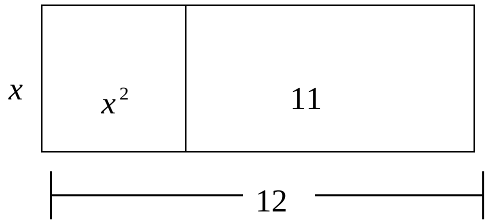
$$x = 13 - 10$$

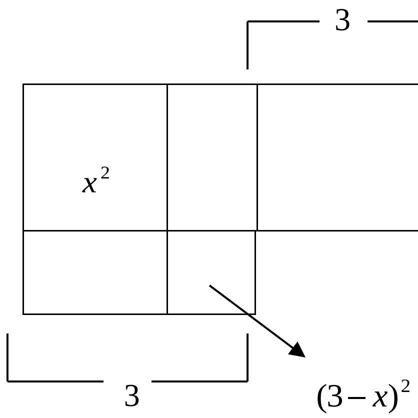
$$x = 3$$

Ecuaciones de la forma $x^2 + c = bx$

$x^2 + 11 = 12x$

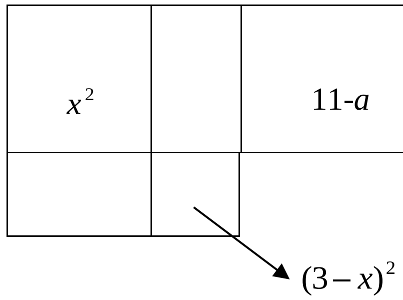
Construimos un cuadrado de lado *x* y le anexamos un rectángulo de área 11





Este cuadrado está compuesto por dos rectángulos de igual área y por dos cuadrados, Uno de área x^2 y el otro de área $(3-x)^2$.
Si sumamos las áreas de este último con 11 que es el área del rectángulo *c*, obtenemos el área del cuadrado de lado 3 porque:
Si llamamos *a* al área del rectángulo que está contiguo al cuadrado de lado *x*, tenemos que:

$$x^2 + a = 11 - a$$



Esto significa que la suma de las áreas de los dos rectángulos contiguos al cuadrado de área x^2 (los cuadrados denotados con *a*) con el área del cuadrado de lado *x* es 11, lo que en símbolos escribimos como:

$$(x+a)^2 + a = (11-a) + a = 11$$

Por lo tanto, el área del cuadrado de lado (5 − x) mas 21 nos da el área del cuadrado de lado 5, como lo habíamos afirmado; en símbolos escribimos:

$$(3-x)^2 + 11 = 3^2$$

Concluimos que:

$$(3-x) = 2$$

Y solucionamos:

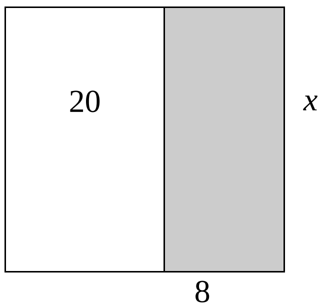
$$\begin{aligned} &(3-x)^2 = 21-11 \\ &3-x = \sqrt{10} \\ &3 = 2+x \\ &3-2 = x \\ &x = 1 \end{aligned}$$

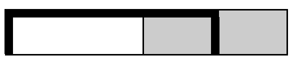
Ya por ultimo nos falta solucionar ecuaciones de la forma $x^2 = bx + c$

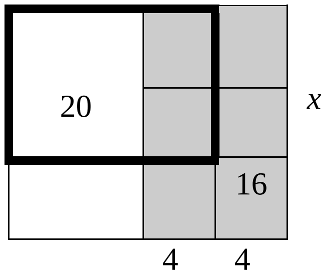
Para explicarlo solucionaremos la siguiente ecuación:

$x^2 = 20 + 8x$

Como siempre construimos primero el cuadrado:







Curiosidades con números cuadrados:

$16 = 4^2$

$1156 = 34^2$

$111556 = 334^2$

$1115556 = 3334^2$

$11115556 = 33334^2$

$1111155556 = 333334^2$

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

$1111^2 = 1234321$

$11111^2 = 123454321$

$9^2 = 81$

$99^2 = 9801$

$999^2 = 998001$

$9999^2 = 99980001$

$99999^2 = 9999800001$

DIVISIBILIDAD DE UN NÚMERO

	1	2	3	4	5	6	7	8	n
1	1	2	3	4	5	6	7	8	n
2	2	4	6	8	10	12	14	16	2n
3	3	6	9	12	15	18	21	24	3n
4	4	8	12	16	20	24	28	32	4n
5	5	10	15	20	25	30	35	40	5n

Cuantos números se encuentran solo

$$1\, vez \quad 1 \quad = 1$$
$$2\, veces \;\; p \quad = 2 \;\; 3 \;\; 5 \;\; 7 \;\; 9 = 1\, p$$
$$3\, veces \;\; p^2 = \;\; 4 \;\; 9 \;\; 25 = 1\, p \;\; p^2$$
$$4 \;\; veces \;\; p^3 \;\; = \;\; 8 \;\; 27 \;\; 125 = 1 \;\; pq$$

$$6\, veces\, p^5 = 32 \;\; 729 \;\; 15625 = p^2q$$

Divisores que tiene un número

$$p^2q = 1, p, q, pq,\; p^2q,\; p^2$$
$$p^3q = 1, p, q,\; p^2,\; p^3, pq,\; p^2q,\; p^3q$$
$$p^2\; q^2 = 1, p, q,\; p^2,\; q^2\; pq,\; p^2q,\; p^2\; q^2$$

Si p es primo el número de divisores de p^k es $k+1, k \in \mathbb{N}$

$$d(\, p^k) = k+1$$
$$d(pq) = 4$$
$$d(\, p^2q) = 6$$
$$d(\, p^3q) = 8$$

Formula general

$$d(\, p^kq) = 2(k+1)$$

$$d(\, p^2q^2) = 9$$
$$d(\, p^2q^3) = 12$$

Formula general

$$d(\, p^kq^n) = (k+1)(n+1)$$

$$d(p) = 1, p$$
$$d(q) = 1, q$$
$$n = \; {p_1}^{\alpha_1}\, {p_2}^{\alpha_2}\, {p_3}^{\alpha_3} \dots {p_n}^{\alpha_n}$$
$$d(n) = \prod_{m=1}^{n} (\alpha m + 1)$$

Suma

$$\sigma(p) = (1+p)$$
$$\sigma(p^2) = (1+p+p^2)$$
$$\sigma(q) = (1+q)$$
$$\sigma(pq) = (1+p+q+pq)$$
$$\sigma(p^k) = (1+p+p^2+p^3+p^k) = \frac{p^{k+1}-1}{p-\;1}$$
$$s = 1+p+p^2+p^3+\cdots+p^k$$
$$ps = p+p^2+p^3+\cdots+p^k$$
$$ps = p+p^2+p^3+p^k+p^{k+1}$$
$$ps - s = p^{k+1}-1$$
$$s(p-1) = p^{k+1}-1$$
$$s = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}$$
$$\sigma = 1+p+q+pq$$
$$= (1+p)+q(1+p)$$
$$= (1+p)(1+q)$$
$$\sigma(p)\,\sigma(q)$$
$$\sigma(p^2q) = 1+p+q+p^2+pq+p^2q$$
$$= (1+p+p^2)+q(1+p+p^2)$$
$$= (1+p+p^2)+(1+q)$$
$$= \sigma(p^2)\,\sigma(q)$$
$$\sigma(24) = \sigma(4)\sigma(6)$$

$$\sigma(24) \neq (1+2+2^2)(1+2+3+6)$$
$$60 \neq (7)(12)$$
$$60 \neq 84$$
$$\sigma 24 = \sigma(2^3)\sigma(3)$$
$$\sigma 24 = (15)(4)$$
$$\sigma 24 = 60$$
$$\sigma \; de \; Euler$$
$$\sigma(n) = \sigma\,({p_1}^{\alpha_1})\sigma\,({p_2}^{\alpha_2})\sigma({p_3}^{\alpha_3}) \ldots \sigma({p_n}^{\alpha_n})$$
$$\sigma(n) = \sigma\left(\frac{({p_1}^{\alpha_1+1}-1)}{p_1-1}\right)\ldots\sigma\left(\frac{{p_n}^{\alpha_n+1}-1}{pn-1}\right)$$
$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{{p_i}^{\alpha_i+1}-1}{pi-1}\right)$$

TRIÁNGULO DE PASCAL

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Triángulo de Pascal o de Tartaglia

El triángulo de Pascal es un triángulo de números enteros, infinito y simétrico cuyas diez primeras líneas están representadas en la tabla adjunta.

En países no occidentales como China o India, este triángulo se conocía y fue estudiado por matemáticos cinco siglos antes de que Pascal expusiera sus aplicaciones. En China es conocido como Triángulo de Yanghui.

PROPIEDADES DEL TRIANGULO DE PASCAL

Si nos ponemos a hablar de curiosidades matemáticas, una de las creaciones más interesantes es este triangulo pues tiene tantas cosas que vale la pena mencionar:

-Lo primero es que si observamos al tomar los números por filas como un solo números nos damos cuenta que estos números son de la forma 11^{n-1}, claro que esto se cumple para las 5 primeras filas de ahí en adelante solo se cumplen 4 o los 3 últimos números, lo que no nos permite decir que se cumple para todo el triángulo.

$1=11^0$

$11=11^1$

$121=11^2$

$1331=11^3$

$14641=11^4$

$1510\mathbf{1051}\neq 11^5$ porque $11^5=16\mathbf{1051}$ solo se cumpliría para los últimos 4 números.

-Otra propiedad de este triangulo es que la suma de las diagonales es igual a 2^{n-1}:

$1=2^0$
$11=1+1=2=2^1$
$121=1+2+1=4=2^2$
$1331=1+3+3+1=8=2^3$

$14641=1+4+6+4+1=16=\ 2^4$
$\vdots$
2^{n-1}

-La siguiente propiedad es algo que podría darnos muchas generalidades pues si observamos el triangulo obtendremos que cada diagonal es la suma de la anterior diagonal:

D1=11111111…

D2=1, 2 ,3 ,4 ,5 ,6… y eso es igual a la sumatoria de la D1por que:

1=1; 2=1+1; 3=1+1+1; 4=1+1+1+1…

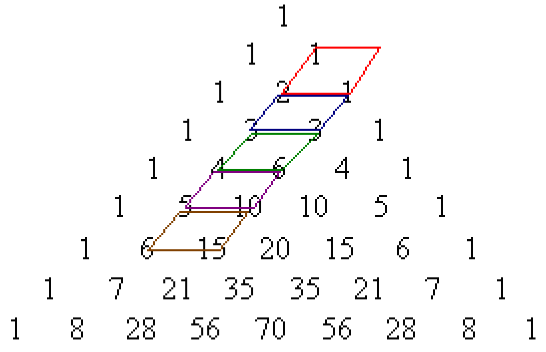
D3=1, 3, 6, 10… y eso es igual a la sumatoria de la D2 por que:

1=1; 3=2+1; 6=3+2+1; 10=4+3+2+1… así sucesivamente hasta D*N*.

En otras palabras

La tercera columna es la sucesión de los números triangulares; la cuarta, la de los números tetraédricos; la quinta, la de los números pentaédricos, y así sucesivamente.

- la siguiente propiedad la observaremos primero con gráficos:



Al sumar los vértices de cada cuadrilátero que dibujamos encontramos que esa suma es igual a n^2. Ejemplos:

Cuadrilátero rojo:

1+2+1+0= 4 = 2^2

En el azul:

2+3+3+1=9= 3^2

En el verde:

3+3+4+6=16= 4^2

En el morado:

4+5+10+6=25= 5^2 y asi sucesivamente hasta n^2.

- Además si observamos el triangulo tomando como pico el 6 se cree, que ninguno de los números de este subtriángulo llegara a ser primo.

6

10 10

15 20 15

21 35 35 21

28 56 70 56 28

36 84 126 126 84 36

-También si trazamos un eje de simetría los números que toque menos el 1, van a ser pares:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

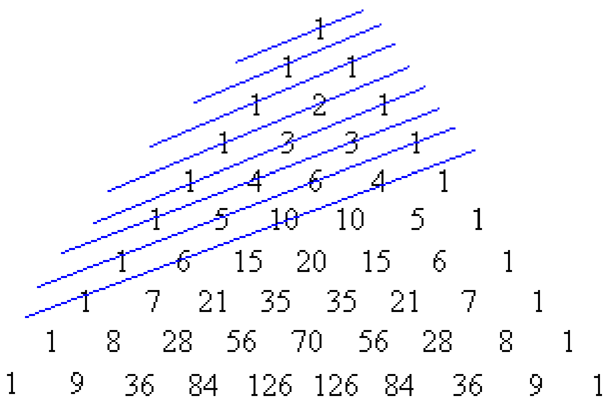
1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

- O una propiedad más compleja es como este triangulo se obtiene mediante sumas entonces obtendremos la serie de fibonacci que también es una sucesión de sumas:



Si tomamos cada número que toca cada recta y los sumamos obtenemos:

1=**1**

1=**1**

1+1=**2**

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

115

2+1=**3**

1+3+1=**5**

1+4+3=**8**

1+5+6+1=**13**

1+6+10+4=**21**

Estos números resaltados son la conocida serie de fibonacci la cual se obtiene sumando el número con su antecesor dando como primer número el 1:

1

1+0=1

1+1=2

2+1=3

3+2=5

5+3=8 y así sucesivamente.

INTERPRETACIÓN EN COMBINATORIA DE LOS COEFICIENTES BINOMIALES

Los coeficientes binomiales son la base misma de la combinatoria. Veamos por qué: Tomemos un binomio, por ejemplo $(a + b)^3$, y desarrollémoslo, pero de una manera distinta:

$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

Luego quitemos los paréntesis, pero sin cambiar el orden en los productos, es decir sin aplicar la conmutatividad:

$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = (aa+ab+ba+bb)\cdot(a+b) =$$
$$aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bbb$$

Y agrupemos los términos que contienen el mismo número de a, (y de b):

$$= aaa + (aab + aba + baa) + (abb + bab + bba) + bbb$$

El primer paréntesis contiene todas las palabras constituidas de un *b* y dos *a*. En este caso, es fácil ver que hay exactamente tres. En el caso general, para contar las palabras, hay que aplicar la conmutatividad, pues las palabras que contienen el mismo número de a y b darán el mismo término:

$$= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

El primer factor 3, que es
$\binom{3}{1}$
Cuenta las tres palabras mencionadas (aab, aba y baa).
El segundo factor 3, que es
$\binom{3}{2}$
Cuenta las palabras hechas de dos *b* y un *a* (abb, bab y bba).

Obviamente, sólo hay una palabra de tres letras constituidas de *a* solamente, y esto corresponde al monomio $1 \cdot a^3$, con $1 = \binom{3}{0}$ («0 » por ninguna b).

ANEXOS

Definición de Código de Barras

El Código de Barras es una disposición en paralelo de barras y espacios que contienen información codificada en las barras y espacios del símbolo.

El código de barras almacena información, almacena datos que pueden ser reunidos en él de manera rápida y con una gran precisión. Los códigos de barras representan un método simple y fácil para codificación de información de texto que puede ser leída por dispositivos ópticos, los cuales envían dicha información a una computadora como si la información hubiese sido tecleada.

Los códigos de barras se pueden imaginar como si fueran la versión impresa del código Morse, con barras angostas (y espacios) representando puntos, y barras anchas que representan rayas.

Para codificar datos dentro de un símbolo** impreso, se usa una barra predefinida y patrones de espacios o simbología***

3 4 5 6 5 6 7 8

***Un símbolo** de código de barras es la **visualización** física, es la impresión de un código de barras.
****Una simbología** *es* **la forma** en que se codifica la información en las barras y espacios del símbolo de código de barras.

El código de barras representa la clave para acceder a un registro de alguna base de datos en donde realmente reside la información, o sea, los símbolos no contienen información del producto o articulo, no contienen el precio del producto, sino contiene una clave que identifica al producto.

CODIGO DE BARRAS DE PRIMERA DIMENSION

Universal Product Code (U.P.C.)

UPC es la simbología más utilizada en el comercio minorista de EEUU, pudiendo codificar solo números.

El estándar UPC (denominado UPC-A) es un número de 12 dígitos. El primero es llamado "número del sistema". La mayoría de los productos tienen un "1" o un "7" en esta posición. Esto indica que el producto tiene un tamaño y peso determinado, y no un peso variable. Los dígitos del segundo al sexto representan el número del fabricante. Esta clave de 5 dígitos (adicionalmente al "número del sistema") es única para cada fabricante, y la asigna un organismo rector evitando código duplicado. Los caracteres del séptimo al onceavo son un código que el fabricante asigna a cada uno de sus productos, denominado "número del producto". El doceavo carácter es el "dígito verificador", resultando de un algoritmo que involucra a los 11 números previos.

Este se creo en 1973 y desde allí se convirtió en el estándar de identificación de productos, se usan desde entonces en la venta al detalle y la industria alimenticia.

Para productos pequeños se utiliza el Codigo UPC-E

La industria editorial ha agregado suplementos de dos a cinco dígitos al final del símbolo UPC-A, utilizados por lo general para la fecha de publicación o el precio:

European Article Numbering (E.A.N.)

El EAN es la versión propia del UPC europea, se creo en 1976.

El sistema de codificación EAN es usado tanto en supermercados como en comercios. Es un estándar internacional, creado en Europa y de aceptación mundial. Identifica a los productos comerciales por intermedio del código de barras, indicando país- empresa-producto con una clave única internacional. Hoy en día es casi un requisito indispensable tanto para el mercado interno como internacional.
Más de 12.000 empresas en la Argentina ya han codificado de más de 350.000 productos.

El EAN-13 es la versión más difundida del sistema EAN y consta de un código de 13 cifras (uno mas que el UPC) en la que sus tres primeros dígitos identifican al país, los seis siguientes a la empresa productora, los tres números posteriores al artículo y finalmente un dígito verificador, que le da seguridad al sistema. Este dígito extra se combina con una o dos de los otros dígitos para representar un código de para, indicando el origen de la mercancía.

Para artículos de tamaño reducido se emplea el código EAN-8.

CÓDIGO 39

Se desarrolló en el año 1974, porque algunas industrias necesitaban codificar el alfabeto así como también números en un código de barras. Es un estándar no utilizado para la industria alimenticia. Generalmente se utiliza para identificar inventarios y para propósitos de seguimiento en las industrias, es decir esta simbología es actualmente la más usada para aplicaciones industriales y comerciales para uso interno ya que permite la codificación de caracteres numéricos, letras mayúsculas y algunos símbolos como -, ., $, /, +, % y "espacio". Se utilizan sólo dos grosores tanto para barras como para espacios.

Sin embargo el código 39 produce una barra relativamente larga y puede no ser adecuada si la longitud es un factor de consideración.

CÓDIGO 128

Este código de barras fue creado en 1981 y se utiliza cuando es necesaria una amplia selección de caracteres más de lo que puede proporcionar el Código39. El Código 128 utiliza 4 diferentes grosores para las barras y los espacios y tiene una densidad muy alta, ocupando en promedio sólo el 60% del espacio requerido para codificar información similar en Código 39. Puede codificar los 128 caracteres ASCII.

Cuando la dimensión de la etiqueta es importante, el código 128 es una buena alternativa porque es muy compacta lo que resulta en un símbolo denso. Esta simbología se usa a menudo en la industria de envíos donde el tamaño de la etiqueta es importante.

ENTRELAZADO 2 de 5

Otra simbología muy popular en la industria de envíos, el entrelazado 2 de 5 es ampliamente usada por la industria del almacenaje también. Es una simbología compacta la hemos visto en cajas de cartón corrugado que se utilizan para ser enviadas a las tiendas.

Se basa en la técnica de intercalar caracteres permitiendo un código numérico que utiliza dos grosores. El primer carácter se representa en barras, y el segundo por los espacios que se intercalan en las barras del primero. Es un código muy denso, aunque siempre debe haber una cantidad par de dígitos. La posibilidad de una lectura parcial es alta especialmente si se utiliza un lector láser. Por lo tanto, generalmente se toman ciertas medidas de seguridad, como codificar un carácter de verificación al final del símbolo

12345678

CODABAR

El Codabar aparece en 1971 y encuentra su mayor aplicación en los bancos de sangre, donde un medio de identificación y verificación automática eran indispensables

Es una simbología de longitud variable que codifica solo números. Utiliza dos tipos de grosores para barras y espacios y su densidad es similar a la del Código 39.

D5021

POSNET

Es sólo para el Servicio Postal de Estados Unidos, esta simbología codifica los códigos postales para un procesamiento más rápido de entrega del correo. Este aparece en el año 1980

CODIGOS DE BARRAS DE SEGUNDA DIMENSIÓN

.Los datos están codificados en la altura y longitud del símbolo, y en éstos códigos la información no se reduce sólo al código del artículo, sino que puede almacenar gran cantidad datos.

La principal ventaja de utilizar códigos de 2 dimensiones es que el código contiene una gran cantidad de información que puede ser leída de manera rápida y confiable, sin necesidad de acceder a una base de datos en donde se almacene dicha información (el caso de los códigos de 1 dimensión)

La seguridad es que son capaces de incorporar estos códigos los hace casi invulnerables a un sabotaje. Para estropear la legibilidad de un código unidimensional, basta con agregar otra barra al inicio o final del símbolo o trazar una línea paralela a las barras en cualquier lugar dentro del código. Los códigos de 2D se pueden construir con muchos grados de redundancia, duplicando así la información en su totalidad o sólo los datos vitales. La redundancia aumenta las dimensiones del símbolo pero la seguridad del contenido se incrementa notablemente.

Se han hecho pruebas de resistencia a códigos bidimensionales perforándolos, marcándolos con tinta y maltratándolos. El símbolo es legible aún después de todos estos abusos.

Los códigos de 2D deben ser considerados como un complemento a la tecnología tradicional de códigos de 1D, no como su reemplazo; y las ventajas deben ser comparadas contra el incremento en costo.

PDF 417

Conocido como un código de dos dimensiones, es una simbología de alta densidad no lineal que recuerda un rompecabezas. Pero la diferencia entre éste y los otros tipos de código de barras, es que el PDF417 es en realidad un Portable Data File (Archivo de Información Portátil, PDF) es decir, no se requiere consultar a un archivo, este contiene toda la información, ya que tiene una capacidad de hasta 1800 caracteres numéricos, alfanuméricos y especiales. Un documento como éste es interesante por varias razones: ya que es un espacio suficiente para incluir información como: nombre, foto y historial del comportamiento y alguna otra información pertinente.

Algo importante de señalar es que el tamaño del ancho de las barras y espacios repercute en un mayor espacio de impresión del código en cuestión y viceversa.

Este tipo de códigos de barras tiene diversas aplicaciones:

- Industria en general.
- Sistemas de paquetería: cartas porte.
- Compañías de seguros: validación de pólizas.
- Instituciones gubernamentales: aduanas.
- Bancos: reemplazo de tarjetas y certificación de documentos.
- Transportación de mercadería: manifiestos de embarque.
- Identificación personal y foto credencial.
- Registros públicos de la propiedad.
- Testimonios notariales.
- Tarjetas de circulación.
- Licencias de manejo.
- Industria electrónica etc.

MEXICODE

Es una simbología de alta densidad creada por UPS (United Parcel Service). En la actualidad esta simbología es de dominio público y está especificada bajo las normas ANSI (MH10.8.3M-1996)

Es utilizado para procesamiento de información a alta velocidad.

La estructura del Mexicode consiste de un arreglo de 866 hexágonos utilizados para el almacenamiento de datos en forma binaria. Estos datos son almacenados en forma seudo-aleatoria. Posee un blanco o "bull" utilizado para localizar a la etiqueta en cualquier orientación.
Es posible codificar hasta 100 caracteres en un espacio de una pulgada cuadrada. Este símbolo puede ser decodificado sin importar su orientación con respecto al lector óptico. La simbología utiliza el algoritmo de Reed-solomon para corrección de error. Esto permite la recuperación de la información contenida en la etiqueta cuando hasta un 25 por ciento de la etiqueta este dañado.

DATAMATRIX

Desarrollado en 1989 por International Data Matrix Inc. La versión de dominio publico es la ECC 200, desarrollada también por International Data Matrix en 1995.

Tiene una capacidad alfanumérica de 2334 caracteres.

Algunas de las aplicaciones que tiene son:

- Codificación de dirección postal en un símbolo bidimensional (usos en el servicio postal para automatizar ordenado del correo).
- Marcado de componentes para control de calidad.
- Los componentes individuales son marcados identificando al fabricante, fecha de fabricación y numero de lote, etc.
- Etiquetado de deshechos peligrosos (radioactivos, tóxicos, etc.) para control y almacenamiento a largo plazo.
- Industria farmacéutica, almacenamiento de información sobre composición, prescripción, etc.
- Boletos de lotería, información específica sobre el cliente puede codificarse para evitar la posibilidad de fraude. Instituciones financieras, transacciones seguras codificando la información en cheques

DataMatrix

Las simbologías más utilizadas en la Argentina son el EAN 13, Interlineado 2 de 5, el Código 39 y el Código 128.

El código de barras más conocido es el UPC (Universal Product Code) usado en la mayoría de los productos que se venden al consumidor en EEUU.