INDUCCIÓN

INDUCTION

Autor 1: Juliana Restrepo Benavidez
Departamento de ingeniería en sistemas y computación, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia
Correo-e: j.restrepo4@utp.edu.co

***Resumen*— es un razonamiento que permite demostrar proposiciones que dependen de una variable {\displaystyle n\,} n\, que toma una infinidad de valores enteros. En términos simples, la inducción matemática consiste en el siguiente razonamiento:**

Dado un número entero {\displaystyle a\,} a\, que tiene la propiedad {\displaystyle P\,} P\,, y el hecho de que si hasta cualquier número entero {\displaystyle n\,} n\, con la propiedad {\displaystyle P\,} P\, implique que {\displaystyle n+1\,} {\displaystyle n+1\,} también la tiene, entonces, todos los números enteros a partir de {\displaystyle a\,} a\, tienen la propiedad {\displaystyle P\,} P\,.

Palabras clave*— *razonamiento, proposiciones, variable, valores, enteros, propiedad, axioma

***Abstract*— it is a reasoning that allows to demonstrate propositions that depend on a variable {\ displaystyle n \,} n \, that takes an infinite number of integer values. In simple terms, mathematical induction consists of the following reasoning: Given an integer {\ displaystyle a \,} a \, which has the property {\ displaystyle P \,} P \ ,, and the fact that up to any integer {\ displaystyle n \,} n \, with the property {\ displaystyle P \,} P \, implies that {\ displaystyle n + 1 \,} {\ displaystyle n + 1 \,} also has it, then all integers from {\ displaystyle a \ ,} to \, have the property {\ displaystyle P \,} P \,.**

***Key Word* — reasoning, propositions, variable, value, integer, property, axiom**

I. INTRODUCCIÓN

La inducción es considerada como la parte más esencial para entrar en algunos principios científicos y matemáticos; por ende, es indispensable entender cómo funciona, su definición y el procedimiento necesario para llevar acabo los resultados de los diferentes ejercicios que esta propone.

II. CONTENIDO

HISTORIA

En el *Parmenides*, de Platón del 370 a.C, quizá se puede identificar un temprano ejemplo de una explicación implícita de prueba inductiva. La más antigua huella de la inducción matemática se puede encontrar en la demostración de Euclides en el s. iii a. C. sobre la infinitud de los números primos y en la de Bhaskara I usando su «método cíclico».

Una técnica reversa, contando regresivamente en lugar de ascendentemente, se puede encontrar en la paradoja sorites, en donde se argumenta que si 1 000 000 de granos de arena forman un *montón* y removiendo un grano del montón a la vez, este sigue siendo un montón, entonces, hasta un solo grano (incluso ningún grano de arena) formaría un montón.

Una demostración implícita de la inducción matemática para secuencias aritméticas fue introducida por Al-Karaji en su obra Al-Fakhri escrita alrededor de 1000 d. C., usado para probar el teorema del binomio y las propiedades del triángulo de Pascal.

Ninguno de estos antiguos matemáticos explicitó la hipótesis inductiva. Otro caso similar fue el de Francesco Maurlico en su *Arithmeticorom libri duo* (1575), que usó la técnica para probar que la suma de los n primeros enteros impares es igual a n al cuadrado.

La primera formulación explícita sobre el principio de inducción fue establecida por el filósofo y matemático Blaise Pascal en su obra *Traité du triangle arithmétique* (1665).[2]

Otro francés, Fermat, hace amplio uso de un principio relacionado para una demostración indirecta del descenso infinito. La hipótesis inductiva fue también empleada por el suizo Jakob Bernoulli y a partir de entonces fue más conocida.

El tratamiento de carácter riguroso y sistemático llega solo en el siglo xix d. C. con George Boole, Augustus De Morgan, Charles Sanders Peirce, Giuseppe Peano y Richard Dedekind.

DEMOSTRACIONES POR INDUCCIÓN

Llamemos a la proposición, donde es el rango.

- **Base**: Se demuestra que es cierta, esto es el primer valor que cumple la proposición (iniciación de la inducción).

- **Paso inductivo**: Se demuestra que, si es cierta,

  esto es, como **hipótesis inductiva**, entonces lo es también, y esto sin condición sobre el entero

  natural (relación de inducción. Indicado

  como).

Fecha de Recepción: (Letra Times New Roman de 8 puntos)
Fecha de Aceptación: Dejar en blanco

Luego, demostrado esto, concluimos por inducción, que

es cierto para todo natural .

La inducción puede empezar por otro término que no sea , digamos por . Entonces será válido a partir del número , es decir, para todo natural .

Ejemplo

Se probará que la siguiente declaración *P* (*n*), que se supone válida para todos los números naturales *n*.

P (*n*) da una fórmula para la suma de los números naturales menores o igual a *n*. La prueba de que *P* (*n*) es verdadera para todos los números naturales procede como sigue.

Base: Se muestra que es válida para $n = 1$. con *P*(1) se tiene:

En el lado izquierdo de la ecuación, el único término es 1, entonces su valor es 1. mientras que el término derecho, $1\cdot(1 + 1)/2 = 1$. Ambos lados son iguales, $n = 1$. Entonces *P*(1) es verdadera.

Paso inductivo: Mostrar que si *P*(*k*) es verdadera, entonces *P*(*k* + 1) es verdadera. Como sigue:

Se *asume* que *P*(*k*) es verdadera (para un valor no específico de *k*). Se debe entonces mostrar que *P*(*k* + 1) es verdadera:

usando la hipótesis de inducción *P*(*k*) es verdadera, el término izquierdo se puede reescribir:

Desarrollando:

mostrando de hecho que *P*(*k* + 1) es verdadera.

Puesto que se han realizado los dos pasos de la inducción matemática tanto la base como el paso inductivo, la declaración *P* (*n*) se cumple para todo número natural

Q.E.D.

VARIANTES

En la práctica, las demostraciones por inducción se estructuran a menudo de manera diferente, dependiendo de la naturaleza exacta de la propiedad a demostrar.

Caso base distinto de 0 o

Si se desea demostrar una afirmación no para todos los números naturales sino sólo para todos los números *n* mayores o iguales a un cierto número *b*, entonces la prueba por inducción consiste en:

1. Mostrando que la afirmación es válida cuando $n = b$
2. Mostrando que si la afirmación es válida para algunos $n \geq b$ entonces la misma declaración también es válida para $n + 1$.

Esto puede usarse, por ejemplo, para mostrar que $2^n \geq n + 5$ para $n \geq 3$.

De esta manera, se puede probar que alguna declaración *P*(*n*) es válida para todos $n \geq 1$, o incluso $n \geq -5$. Esta forma de inducción matemática es en realidad un caso especial de la forma anterior, porque si la declaración a probar es *P*(*n*) entonces probarla con estas dos reglas es equivalente a probar *P'*(n + b) *para todos los números naturales* n **con un caso base de inducción 0.**[3]**.**

Inducción en más de un contador

A veces se requiere demostrar una afirmación que involucra dos números naturales, *n* y *m*, mediante la repetición del proceso de inducción. Esto es, uno prueba un caso base y un paso inductivo para *n*, y en cada uno de ellos prueba un caso base y un paso inductivo para *m*. También son posibles argumentos más complicados que involucren tres o más contadores.

Descenso infinito

El método del descenso infinito es una variación de la inducción matemática que fue utilizada por Pierre de Fermat. Se utiliza para mostrar que alguna afirmación *Q*(*n*) es falsa para todos los números naturales *n*. Su forma tradicional consiste en mostrar que si *Q*(*n*) es cierto para algún número natural *n*, también lo es para algún número natural *m'* estrictamente más pequeño. Debido a que no hay secuencias infinitas de números naturales que disminuyan, esta situación sería imposible, mostrando por contradicción que la *Q*(*n*) no puede ser cierta para ninguna *n*.

La validez de este método puede ser verificada desde el principio habitual de la inducción matemática. Usando inducción matemática en la declaración *P*(*n*) definida como "*Q*(*m*) es falsa para todos los números naturales *m* menos que o igual a *n*", se deduce que *P*(*n*) es válida para todos *n*, lo que significa que *Q*(*n*) es falsa para todos los números naturales *n*.

Inducción fuerte

Otra variante, llamada "inducción fuerte" (en contraste con la forma básica de inducción que a veces se conoce como "inducción débil") hace que el paso inductivo sea más fácil de demostrar utilizando una hipótesis más fuerte: uno prueba la afirmación *P*(*m* + 1) bajo la suposición de que *P*(*n*) se cumple para *cualquier* número natural *n* menor que $m + 1$; por el contrario, la forma básica sólo asume *P*(*m*). El nombre "inducción fuerte" no significa que este método pueda probar más que "inducción débil", sino que simplemente se refiere a la hipótesis más fuerte utilizada en la etapa inductiva; de hecho, los dos métodos son equivalentes, como se explica más adelante. En esta forma de inducción completa todavía hay que probar el caso base, *P*(0), e incluso puede ser necesario probar casos base adicionales como *P*(1) antes de que se aplique el argumento general, como en el caso de los números de Fibonacci F_n'.

La inducción fuerte es equivalente a la inducción matemática ordinaria descrita anteriormente, en el sentido de que una demostración por un método puede transformarse en una demostración por el otro. Supongamos que hay una prueba de $P(n)$ por inducción completa. Que $Q(n)$ signifique "$P(m)$ se cumple para todos m tal que $0 \leq m \leq n$". Entonces $Q(n)$ se cumple para cualquier n si y sólo si $P(n)$ se mantiene para cualquier n, y nuestra demostración de $P(n)$ se transforma fácilmente en una demostración de $Q(n')$ por inducción (ordinaria). Si, por otro lado, $P(n)$ hubiera sido demostrado por inducción ordinaria, la prueba ya sería efectivamente una por inducción completa: $P(0)$ se prueba en el caso base, sin usar suposiciones, y $P(n + 1)$ se prueba en la etapa inductiva, en la que se pueden asumir todos los casos anteriores, pero sólo se necesita usar el caso $P(n)$.

III CONCLUSIONES

La inducción es una parte importante en el ámbito científico y matemático para la elaboración y comprensión de diversos teoremas

RECOMENDACIONES

Adquirir conocimientos sobre la inducción es muy esencial para el estudio de algunas teorías matemáticas o para la elaboración de prácticas o experimentos científicos.

REFERENCIAS

1. **https://es.wikipedia.org/wiki/Inducci%C3%B3n_matem%C3%A1tica**

---

1. Las notas de pie de página deberán estar en la página donde se citan. Letra Times New Roman de 8 puntos