



Programa Académico de Física

SIMULACIÓN DEL FLUJO BIDIMENSIONAL ALREDEDOR DE UNA VIGA MEDIANTE EL MÉTODO DE VORTICIDAD-FUNCIÓN DE CORRIENTE

Aros Julián, Oliveros Laura, Gómez Andrés

Junio 29, 2025

1 Fundamentos Físicos

El objetivo es estudiar el comportamiento de un fluido viscoso e incompresible fluyendo en régimen estacionario alrededor de una viga sumergida. Para ello, se considera un flujo bidimensional en el plano (x, y) , ignorando la dependencia en la dirección z por razones de simetría transversal y debido a la geometría del problema.

1.1 Hipótesis Físicas

- **Incompresibilidad:** El fluido tiene densidad constante ρ , lo que implica que su divergencia es nula:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

- **Régimen estacionario:** El campo de velocidades no depende del tiempo, es decir $\partial/\partial t = 0$.
- **Fluido viscoso:** Se considera la viscosidad cinemática ν , la cual introduce disipación en el flujo.

1.2 Ecuaciones de Navier–Stokes en 2D

Partimos de las ecuaciones fundamentales:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{1}$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{v} \tag{2}$$

Donde $\vec{v} = (v_x, v_y)$ es el campo de velocidades y P la presión.

Al desarrollarlas en coordenadas cartesianas 2D se obtienen:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (5)$$

1.3 Reformulación con Función de Corriente y Vorticidad

Para simplificar y garantizar automáticamente la incompresibilidad, se introduce la **función de corriente** $u(x, y)$ definida como:

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (6)$$

La **vorticidad escalar** $w(x, y)$ se define como el rotacional del campo de velocidades:

$$w = \nabla \times \vec{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (7)$$

Sustituyendo (6) en (7), se obtiene:

$$w = -\nabla^2 u \quad (8)$$

Este resultado permite reinterpretar w como la fuente de la función de corriente, análogo a la relación entre densidad de carga y potencial en la ecuación de Poisson.

A su vez, al tomar el rotacional de la ecuación de Navier–Stokes, se elimina la presión y se obtiene una ecuación para la evolución de la vorticidad:

$$\nu \nabla^2 w = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (9)$$

1.4 Interpretación Física

- La ecuación (8) es una ecuación de Poisson para la función de corriente, con la vorticidad como fuente. Las líneas de nivel de u son las **líneas de corriente**, es decir, trayectorias tangentes al campo de velocidad.
- La ecuación (9) es una forma **no lineal** y acoplada de evolución para la vorticidad, ya que depende de productos cruzados de derivadas espaciales de u y w .
- La **vorticidad** es una medida de rotación local del fluido. Si $w = 0$, el flujo es **irrotacional**.
- Estas ecuaciones se resuelven en conjunto para obtener el patrón de flujo alrededor del obstáculo.

2 Formulaci3n Computacional

2.1 Discretizaci3n en diferencias finitas

Usamos una malla uniforme con paso h en las direcciones x e y :

$$x_i = ih, \quad y_j = jh, \quad i = 0, \dots, N_x, \quad j = 0, \dots, N_y$$

La ecuaci3n de Poisson (8) se aproxima como:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + h^2 w_{i,j}) \quad (10)$$

La ecuaci3n de evoluci3n de la vorticidad (9) se discretiza como:

$$w_{i,j} = \frac{1}{4} (w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) - \frac{R}{16} [(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) - (u_{i+1,j} - u_{i-1,j})(w_{i,j+1} - w_{i,j-1})] \quad (11)$$

donde el n3mero de Reynolds de malla es:

$$R = \frac{V_0 h}{\nu} \quad (12)$$

2.2 Algoritmo de relajaci3n SOR

Para mejorar la convergencia, se aplica el m3todo de sobre-relajaci3n sucesiva (SOR). La actualizaci3n para cada punto es:

$$u_{i,j}^{\text{new}} = u_{i,j} + \omega (\text{RHS}_{u_{i,j}} - u_{i,j}) \quad (13)$$

$$w_{i,j}^{\text{new}} = w_{i,j} + \omega (\text{RHS}_{w_{i,j}} - w_{i,j}) \quad (14)$$

donde RHS es el valor del lado derecho de (10) y (11) respectivamente. El par3metro ω se ajusta t3picamente en el rango $0 < \omega < 2$.

3 Condiciones de Frontera

El flujo de un fluido viscoso alrededor de un obstáculo sólido requiere la imposición de condiciones de frontera que respeten las leyes físicas fundamentales de conservación de masa y momento, así como la condición de no-deslizamiento en interfaces sólido-fluido.

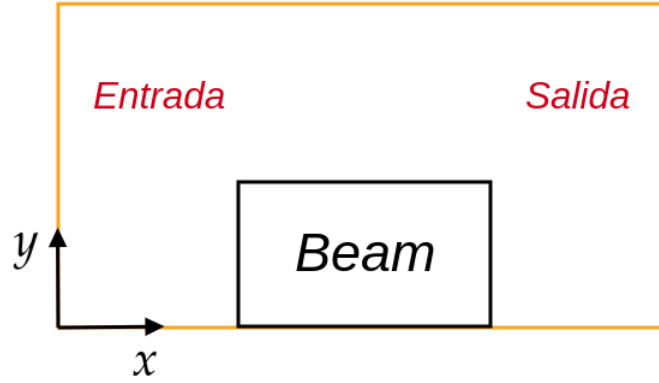


Figure 1: Esquemática para las condiciones de frontera

3.1 Condiciones Dentro de la Viga (Cuerpo Sólido)

Para modelar correctamente la presencia del obstáculo sólido, todos los puntos (i, j) que satisfacen $i_L \leq i \leq i_L + T$ y $0 \leq j \leq H$ deben cumplir:

$$u_{i,j} = 0 \quad (\text{función de corriente}) \quad (15)$$

$$\omega_{i,j} = 0 \quad (\text{vorticidad}) \quad (16)$$

donde:

- $i_L = 10$ (posición de inicio de la viga)
- $T = 8$ (longitud de la viga)
- $H = 8$ (altura de la viga)

La función de corriente constante ($u = 0$) garantiza que no hay flujo de masa a través del sólido, respetando la impermeabilidad del obstáculo. La vorticidad nula en el interior del sólido es consistente con la ausencia de movimiento del fluido en esta región.

3.2 Superficies de la Viga (Condición de No-Deslizamiento)

La condición de no-deslizamiento establece que la velocidad del fluido debe ser igual a la velocidad de la superficie sólida en la interfaz. Para un obstáculo estacionario, esto implica velocidad cero en todas las superficies.

3.2.1 Superficie Frontal (Pared Vertical Izquierda)

Para $j = 1, 2, \dots, H$ y $j < N_y$:

$$\omega_{i_L-1,j} = -\frac{2u_{i_L-2,j}}{h^2} \quad (17)$$

Esta condición surge de la aproximación por diferencias finitas de la condición $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ en la pared vertical. La vorticidad generada en la pared es proporcional al gradiente de la función de corriente, representando la capa límite que se forma debido a la viscosidad del fluido.

3.2.2 Superficie Posterior (Pared Vertical Derecha)

Para $j = 1, 2, \dots, H$ y $j < N_y$:

$$\omega_{i_L+T+1,j} = -\frac{2u_{i_L+T+2,j}}{h^2} \quad (18)$$

En la estela del obstáculo, esta condición captura la separación del flujo y la formación de vórtices. La vorticidad generada aquí es crucial para modelar correctamente los fenómenos de desprendimiento de vórtices (vortex shedding) que ocurren a números de Reynolds moderados y altos.

3.2.3 Superficie Superior (Pared Horizontal)

Para $i = i_L, i_L + 1, \dots, i_L + T$ y $i \leq N_x$:

$$\omega_{i,H+1} = -\frac{2u_{i,H+2}}{h^2} \quad (19)$$

Esta condición modela la interacción del flujo con la superficie superior del obstáculo, donde se pueden formar puntos de estancamiento y regiones de recirculación, especialmente importantes en la transición entre flujo adherido y separado.

3.2.4 Tratamiento Especial de Esquinas

Las esquinas representan singularidades geométricas que requieren tratamiento especial para evitar inestabilidades numéricas.

Esquina Superior Izquierda:

$$\omega_{i_L-1,H+1} = \alpha \cdot \omega_{\text{vertical}} + (1 - \alpha) \cdot \omega_{\text{horizontal}} \quad (20)$$

donde:

$$\omega_{\text{vertical}} = -\frac{2u_{i_L-2,H+1}}{h^2} \quad (21)$$

$$\omega_{\text{horizontal}} = -\frac{2u_{i_L-1,H+2}}{h^2} \quad (22)$$

El factor de ponderación α se define como:

$$\alpha = \begin{cases} 0.7 & \text{si } |\omega_{\text{vertical}}| < |\omega_{\text{horizontal}}| \\ 0.3 & \text{si } |\omega_{\text{vertical}}| \geq |\omega_{\text{horizontal}}| \end{cases} \quad (23)$$

Esquina Superior Derecha:

$$\omega_{i_L+T+1,H+1} = \alpha \cdot \omega_{\text{vertical}} + (1 - \alpha) \cdot \omega_{\text{horizontal}} \quad (24)$$

donde:

$$\omega_{\text{vertical}} = -\frac{2u_{i_L+T+2,H+1}}{h^2} \quad (25)$$

$$\omega_{\text{horizontal}} = -\frac{2u_{i_L+T+1,H+2}}{h^2} \quad (26)$$

Las esquinas son puntos donde convergen dos superficies sólidas, creando singularidades en el campo de velocidades. El tratamiento ponderado evita la generación de valores extremos de vorticidad que podrían causar inestabilidades numéricas. Físicamente, esto representa una aproximación suavizada de los gradientes de velocidad extremos que ocurren en esquinas agudas, donde la teoría de fluidos viscosos predice singularidades logarítmicas.

3.3 Condiciones de Frontera del Dominio Computacional

3.3.1 Entrada (Inlet) $i = 0$

Flujo horizontal uniforme no perturbado:

$$u_{1,j} = u_{0,j} \quad \text{para puntos fuera de la viga} \quad (27)$$

$$\omega_{0,j} = 0 \quad (28)$$

Esta condición modela un flujo uniforme sin perturbaciones aguas arriba del obstáculo, representando condiciones de *flujo libre* donde los efectos viscosos son negligibles y el flujo no ha sido aún afectado por la presencia del obstáculo.

3.3.2 Salida (Outlet) $i = N_x$

Condiciones de gradiente cero (tipo Neumann):

$$\omega_{N_x,j} = \omega_{N_x-1,j} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N_y - 1 \quad (29)$$

$$u_{N_x,j} = u_{N_x-1,j} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N_y - 1 \quad (30)$$

Estas condiciones asumen que el flujo ha alcanzado un estado *completamente desarrollado* en la salida, donde los gradientes en la dirección del flujo son despreciables. Esto es físicamente razonable si la frontera de salida se coloca suficientemente lejos aguas abajo del obstáculo.

3.3.3 Superficie Libre $j = N_y$

Para puntos fuera de la viga:

$$u_{i,N_y} = u_{i,N_y-1} + V_0 h \quad (31)$$

$$\omega_{i,N_y-1} = 0 \quad \text{si } N_y > 1 \quad (32)$$

La superficie libre representa la interfaz fluido-aire donde no hay esfuerzos cortantes significativos. La condición de vorticidad cero refleja la ausencia de gradientes de velocidad tangencial en esta interfaz, mientras que la condición para la función de corriente mantiene la continuidad del flujo.

3.3.4 Línea Central (Simetría) - $j = 0$

Para puntos fuera de la viga:

$$u_{i,0} = 0 \quad (33)$$

$$\omega_{i,0} = 0 \quad (34)$$

Esta condición modela una línea de simetría o una pared sólida. La función de corriente cero representa una línea de flujo que no puede ser cruzada por el fluido, mientras que la vorticidad cero indica la ausencia de rotación del fluido en esta línea.

3.4 Inicialización del Campo de Flujo

3.4.1 Función de Corriente Inicial

Para puntos fuera de la viga:

$$u_{i,j} = j \cdot V_0 \quad (\text{flujo uniforme horizontal}) \quad (35)$$

Para puntos dentro de la viga:

$$u_{i,j} = 0 \quad (36)$$

3.4.2 Vorticidad Inicial

$$\omega_{i,j} = 0 \quad \text{para todos los puntos} \quad (37)$$

La inicialización con flujo uniforme y vorticidad cero representa un estado de flujo potencial (irrotacional) que sirve como punto de partida para la evolución hacia el estado viscoso final. Esta aproximación es físicamente razonable ya que representa las condiciones que existirían en ausencia de efectos viscosos.

3.5 Parámetros del Problema

Los parámetros físicos y numéricos del problema son:

- $V_0 = 1.0$ (velocidad de entrada característica)
- $h = 1.0$ (espaciado de malla)
- $N_x = 160, N_y = 30$ (dimensiones de la malla computacional)
- ν (viscosidad cinemática, calculada según el Re objetivo)
- $Re = \frac{V_0 L}{\nu}$ (número de Reynolds basado en longitud característica)
- $R = \frac{V_0 h}{\nu}$ (número de Reynolds de malla)

Significado Físico del Número de Reynolds:

El número de Reynolds $Re = \frac{V_0 L}{\nu}$ representa la razón entre fuerzas inerciales y fuerzas viscosas:

- $Re \ll 1$: Flujo dominado por viscosidad (régimen de Stokes)
- $Re \sim 1$: Transición entre regímenes viscoso e inercial
- $Re \gg 1$: Flujo dominado por inercia, formación de capas límite

Para flujo alrededor de obstáculos:

- $Re < 5$: Flujo adherido, sin separación
- $5 < Re < 40$: Inicio de separación, formación de vórtices estacionarios
- $Re > 40$: Desprendimiento de vórtices periódico (calle de von Kármán)

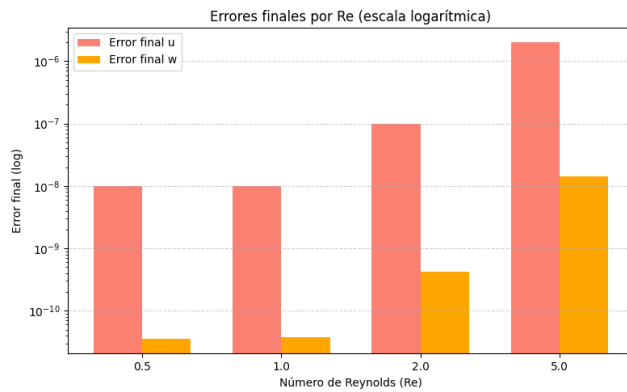
El número de Reynolds de malla $R = \frac{V_0 h}{\nu}$ controla la estabilidad numérica del esquema de diferencias finitas y debe mantenerse dentro de límites apropiados para evitar oscilaciones espurias.

4 Resultados

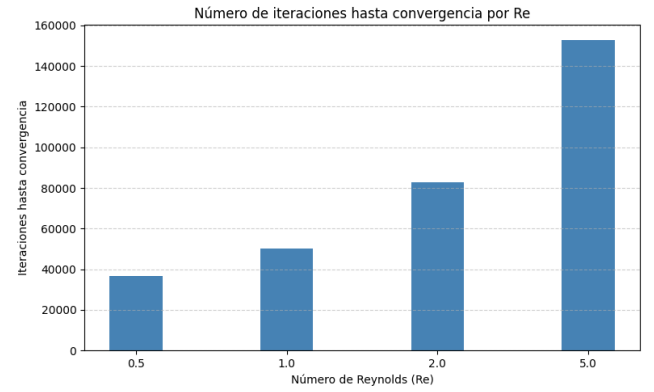
4.1 Parte Serial

Re	Iteraciones	Error u final	Error ω final
0.50	36,533	9.999640×10^{-9}	3.567400×10^{-11}
1.00	49,990	9.998630×10^{-9}	3.787940×10^{-11}
2.00	82,967	9.999050×10^{-8}	4.169170×10^{-10}
5.00	152,746	2.000000×10^{-6}	1.418880×10^{-8}

Table 1: Resumen de iteraciones y errores finales para cada número de Reynolds.

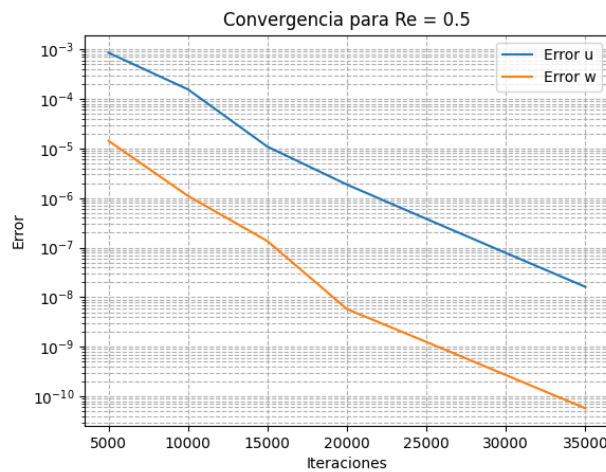


(a) Errores finales para cada Re.

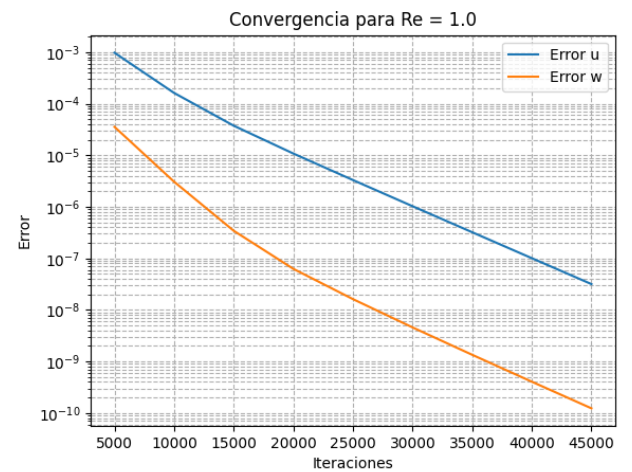


(b) Números de iteraciones hasta convergencia para cada Re.

Figure 2: Comparación gráfica del resumen de iteraciones y errores finales para cada número de Reynolds.

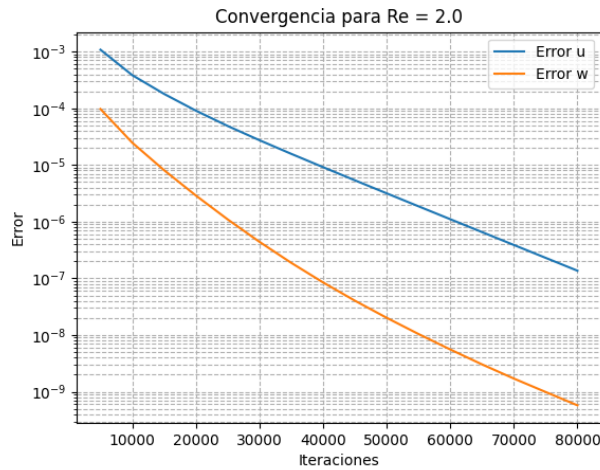


(a) Evolución de la convergencia para Re=0.5

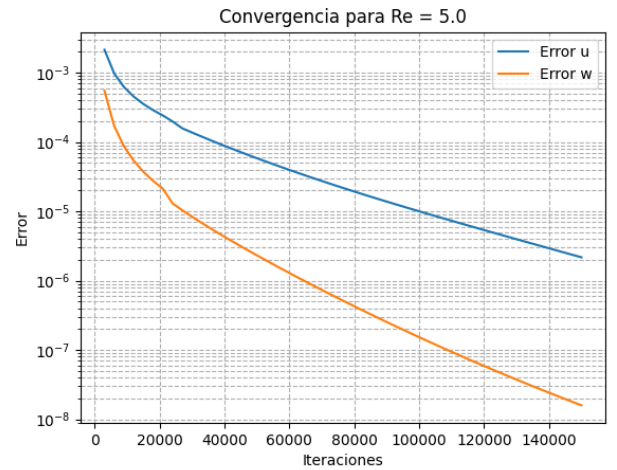


(b) Evolución de la convergencia para Re=1.0

Figure 3: Comparación gráfica del comportamiento de la convergencia para Re igual a 0.5 y 1.0



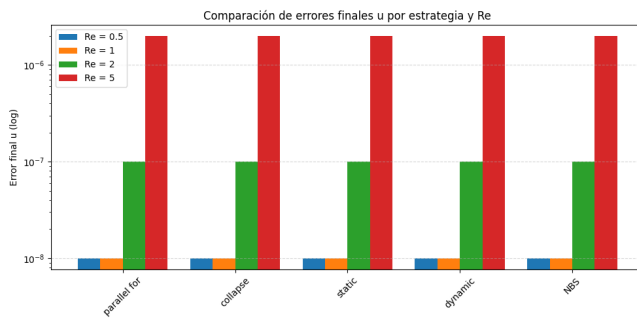
(a) Evolución de la convergencia para $Re=2.0$



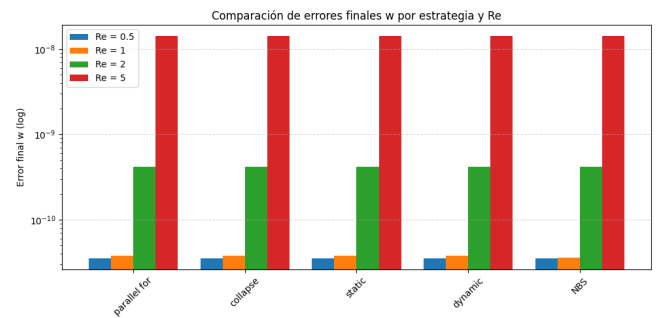
(b) Evolución de la convergencia para $Re=5.0$

Figure 4: Comparación gráfica del comportamiento de la convergencia para Re igual a 2.0 y 5.0

4.2 Parte Paralela



(a) Error en la última iteración para la función u



(b) Error en la última iteración para la función w

Figure 5: Comparación gráfica del comportamiento de los errores finales en la última iteración para la función de corriente y vorticidad