Análisis del movimiento circular con radio decreciente

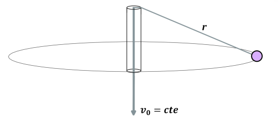
Juliana Andrade, Mateo Manosalva,
Yessica Trujillo, David Viuche.

Universidad Nacional de Colombia

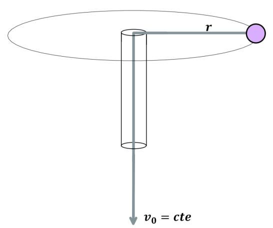
Noviembre 29, 2023

Contenidos

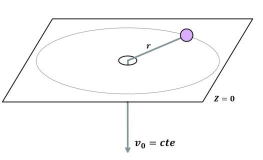
Movimiento circular con radio decreciente



(a) Primer momento. Cuerda extendida afectada por la gravedad.



(b) Segundo momento. Cuerda extendida a una distancia r despreciable de la gravedad.



(c) Segundo momento. Cuerda extendida, tomando como punto de referencia un plano.

Figura: Diagramas del cuerpo

Formalismo Lagrange

Redefine la formulación de la mecánica clásica a través del principio de mínima acción, empleando coordenadas generalizadas y el Lagrangiano en lugar de las ecuaciones tradicionales de Newton.

Principio de D'Alembert

El principio de D'Alembert, es conocido como el principio de las fuerzas virtuales o el principio de los trabajos virtuales. Establece que para un sistema en equilibrio, la suma de fuerzas externas y las fictisias en el sistema son igual cero.

Principio de D'Alembert

Matemáticamente, el principio de D'Alembert se expresa con la ecuación:

$$\sum F_i + \sum (m_i \cdot a_i) = 0$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

Fuerzas en el espacio físico:

$$\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{ap}} = \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{mon}} + \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{pol}}$$

Se definen las fuerzas monógenas:

$$\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{mon}} = -\nabla_i \mathrm{U} + \frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{\nabla}_{v_i} U\right]$$

Fuerzas en un espacio de configuración:

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{\mathrm{mon}} + Q_\alpha^{\mathrm{pol}} \tag{1}$$

Se tiene que Q_α^{mon} esta expresada como

$$Q_\alpha^{\mathrm{mon}} = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) \tag{2}$$

Y Q_α^{pol} se expresa como:

$$Q_\alpha^{\mathrm{pol}} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}i^{\mathrm{pol}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}. \tag{3}$$

Con esta información, escribimos el principio D'Alembert de la siguiente formaOchoa (2021):

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left[Q_\alpha - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right]\delta q_\alpha$$

El Lagrangiano se denota comúnmente por L, en términos de las coordenadas generalizadas (q_i), las vel. generalizadas $(\dot{q}_i)$, y a menudo el tiempo t.

$$L(q_i, \dot{q}_i; t)$$

Luego, por (1) reemplazamos en Q_α:

$$= \sum_{\alpha=1}^{n}\left[Q_\alpha^{\mathrm{mon}} + Q_\alpha^{\mathrm{pol}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right]\delta q_\alpha$$

Ahora, con (2) reemplazamos en Q_α^{mon}:

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \left[-\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + Q_\alpha^{\text{pol}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left[Q_\alpha^{\text{pol}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + \frac{\partial (T-U)}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha = 0$$

La expresión general del Lagrangiano L es:

$$L = T - U$$

Por lo tanto:

$$\boxed{L(q_i, \dot{q}_i; t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \left[Q_\alpha^{\text{pol}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha = 0}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

La mecánica lagrangiana se basa en el principio de la acción estacionaria, también conocido como el principio de Hamilton. Según este principio, la trayectoria real que toma el sistema entre dos puntos en el espacio-tiempo es tal que la acción, definida como la integral del Lagrangiano a lo largo de la trayectoria, es estacionaria. En términos matemáticos, esto se expresa con la ecuación de Euler-Lagrange. Goldstein (1980)

Euler-Lagrange

Partiendo del principio de D'Alembert en función del Lagrangiano

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \left[Q_{\alpha}^{\text{pol}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}\alpha}\right) + \frac{\partial L}{\partial q\alpha} \right] \delta q_{\alpha} = 0$$

y sabiendo que $\delta q_{\alpha} \neq 0$ para que se satisfaga la teoría de D'Alembert se debe cumplir que

$$Q_{\alpha}^{\text{pol}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}\alpha}\right) + \frac{\partial L}{\partial q\alpha} = 0$$

Para que se cumpla el principio de D'Alembert se debe cumplir que(Goldstein (1980))

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^{\mathsf{pol}}$$

En un sistema con n coordenadas generalizadas sin fuerzas pologenas q_α

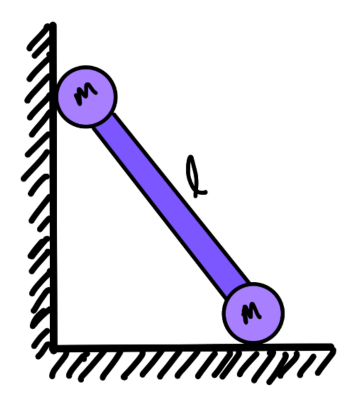
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

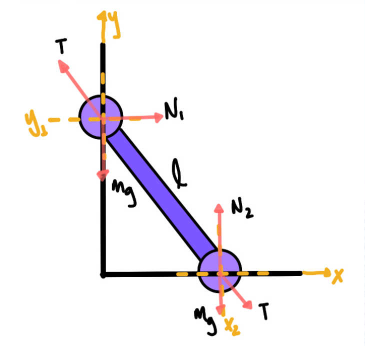
Ejercicio ejemplo

Un sistema de dos esferas idénticas conectadas por una barra rígida liviana, se apoya entre el suelo y una pared sin fricción, como se muestra en la figura. Si la masa de cada esfera es m y la longitud de la barra es l, obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Diagramas del problema



(a) Diagrama



(b) Diagrama de fuerzas

Es importante darnos cuenta que las fuerzas normales y la tensión, actúan generando ligaduras. En el caso de las fuerzas normales, estas nos dicen que $x_1 = y_2 = 0$,mientras que la tensión nos dice que $x_2^2 + y_1^2 - l^2 = 0$.

Se escogera como coordenada generalizada al ángulo θ

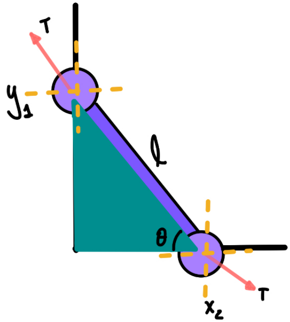


Figura: Diagrama con la escogencia del ángulo y las ecuaciones de transformación serán

$$x = l\cos\theta \qquad \dot{x} = -l\sin\theta\dot{\theta}$$
$$y = l\sin\theta \qquad \dot{y} = l\cos\theta\dot{\theta}$$

Tenemos que $U = mgl\sin\theta$ y T:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}m((-l\sin\theta\dot{\theta})^2+(l\cos\theta\dot{\theta})^2) \\ &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

De esta forma el lagrangiano del sistema es

$$
\begin{aligned}
L &= T - U \\
&= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\sin\theta
\end{aligned}
$$

y aplicando las ecuaciones de euler lagrange, se obtiene que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \qquad \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) = ml^2\ddot{\theta} \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\cos\theta$$

La ecuación que describe el movimiento de este sistema es

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\cos\theta = 0}$$

Solución problema planteado

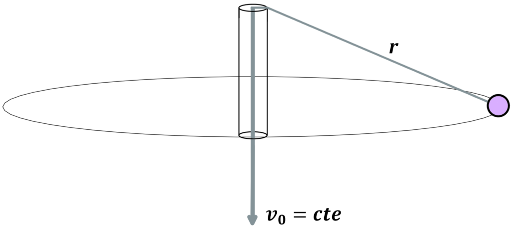
Como mencionamos anteriormete en la teoría:

$$L = T - U$$

Primer momento

Para el primer momento, tenemos la cuerda lo suficientemente extendida, por lo que no podemos despreciar la gravedad, entonces:
$U = mgh$, mientras que

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \end{aligned}$$



(a) Primer momento. Cuerda extendida afectada por la gravedad.

Por simetría del problema, usamos coordenadas cilíndricas, así:

$$x = r\cos\theta \qquad \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta}$$

$$y = r\sin\theta \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta}$$

$$z = z \qquad \dot{z} = \dot{z}$$

entonces tenemos que T en coordenadas cilindricas es:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\
&= \frac{1}{2}m((\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta})^2 + (\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2) \\
&= \frac{1}{2}m((\dot{r}\cos\theta)^2 + (r\sin\theta\dot{\theta})^2 - (2r\dot{r}\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}) + (\dot{r}\sin\theta)^2 + (r\cos\theta\dot{\theta})^2 \\
&= \frac{1}{2}m((\dot{r}\cos\theta)^2 + (r\sin\theta\dot{\theta})^2 + (\dot{r}\sin\theta)^2 + (r\cos\theta\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)}$$

El lagragiano que describe el sistema es:

$$r = r_0 - vt \qquad \dot{r} = -v$$

Así se obtiene

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$
$$L = \frac{1}{2}m(v^2 + (r_0 - vt)^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

Ya que obtuvimos el lagangeano del sistema, usamos Euler-lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

La ligadura nos reduce la cantidad de grados de libertad.
Tendremos dos ecuaciones por Euler-lagrange.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

Calculando cada uno por separado se tiene:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(r_0 - vt)^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}(m(r_0 - vt)^2\dot{\theta}) = m(r_0 - vt)^2\ddot{\theta} - 2mv(r_0 - vt)\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = mdotz \qquad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = m\ddot{z} \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

reemplazando en las ecuaciones de Euler Lagrange, se obtiene

$$m(r_0 - vt)^2\ddot{\theta} - 2mv(r_0 - vt)\dot{\theta} = 0$$

Para la parte angular, la ecuación de movimiento es:

$$\boxed{\ddot{\theta} - \frac{2v}{(r_0 - vt)}\dot{\theta} = 0}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

En el caso de z

$$m\ddot{z} - mg = 0$$

La ecuación que describe el movimiento en z es:

$$\boxed{\ddot{z} = g}$$

Segundo momento

Despreciamos la gravedad, por lo que el sistema queda confiado a un mov. en dos dimensiones.
Aquí se tiene una ligadura adicional

$$z = 0$$
$$U = 0$$

Mientras que T esta es:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}m((\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta})^2 + (\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta})^2) \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

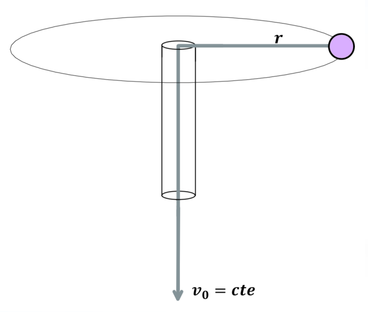
$$= \frac{1}{2}m((\dot{r}\cos\theta)^2 + (r\sin\theta\dot{\theta})^2 - (2r\dot{r}\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}) + (\dot{r}\sin\theta)^2 + (r\cos\theta\dot{\theta})^2 + (2r\dot{r}\cos\theta\sin\theta\dot{\theta})) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2}m((\dot{r}\cos\theta)^2 + (r\sin\theta\dot{\theta})^2 + (\dot{r}\sin\theta)^2 + (r\cos\theta\dot{\theta})^2)$$

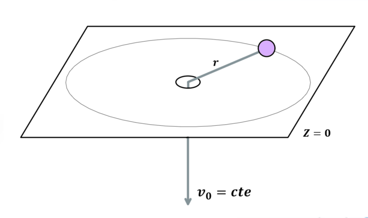
Que factorizando, quedaría que:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ



(a) Segundo momento. Cuerda extendida a una distancia r despreciable
de la gravedad.



(b) Segundo momento. Cuerda extendida, tomando como punto de referencia un plano.

Figura: Diagramas del cuerpo

con la ligadura aplicada el lagrangiano nos queda

$$L = \frac{1}{2}m(v^2 + (r_0 - vt)^2\dot{\theta}^2) \tag{5}$$

Reemplazando en las ecuaciones de Euler Lagrange, obtenemos

$$\ddot{\theta} - \frac{2v}{(r_0 - vt)}\dot{\theta} = 0$$

Utilizando el lagrangiano, se calcula el momento canónico angular, de la forma

$$\boxed{p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(r_0 - vt)^2\dot{\theta}}$$

Referencias

Goldstein, H. (1980). *Classical mechanics*. Addison-Wesley.

Ochoa, F. (2021). *Curso de mecanica analitica i*. Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia.

Qr informe

(a) Qr informe y presentación proyecto

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ