Universidad Nacional de Colombia

Mecánica Newtoniana

Análisis del Movimiento Circular con radio decreciente

Juliana Paola Andrade Rodriguez

jandradero@unal.edu.co

Mateo Andrés Manosalva Amaris

mmanosalva@unal.edu.co

Yessica Vanessa Trujillo Ladino

ytrujillol@unal.edu.co

David Felipe Viuche Malaver

dviuchem@unal.edu.co

Profesor: John W. Sandino

jwsandinod@unal.edu.co

Noviembre-2023

Resumen

En este proyecto se investiga y analiza a fondo el desafío del movimiento circular de un cuerpo unido a una cuerda cuya longitud se reduce de manera constante. Para lograrlo, exploraremos este fenómeno desde la perspectiva lagrangiana. Al abordar este problema desde esto buscamos no solo comprender mejor cómo se comporta un objeto en movimiento circular bajo esta condición particular, sino también obtener una visión más completa de los principios físicos y matemáticos subyacentes.

Palabras clave: Lagrangianos

Abstract

In this project, we investigate and analyze in depth the challenge of the circular motion of a body attached to a rope whose length is constantly decreasing. To achieve this, we will explore this phenomenon from the Lagrangian perspective. By addressing the problem from this angle, we seek not only to better understand how an object behaves in circular motion under this particular condition but also to gain a more comprehensive insight into the underlying physical and mathematical principles.

Keywords: Lagrangians

Índice

Índice de figuras

1. Introducción

La mecánica rotacional es una rama de la física que se ocupa del estudio del movimiento de objetos que giran alrededor de un eje. Mientras que la mecánica clásica se centra en el movimiento lineal de los objetos, la mecánica rotacional se enfoca en la rotación y las variables asociadas con ella, como el ángulo, la velocidad angular y la aceleración angular.

En la mecánica rotacional, se aplican conceptos familiares de la mecánica clásica, como la ley de conservación de la energía y la ley de conservación del momento angular, pero adaptados al movimiento circular. Esta disciplina es esencial para comprender fenómenos como el giro de objetos sólidos, la estabilidad de sistemas rotacionales y la dinámica de cuerpos que experimentan movimientos rotativos.

La mecánica lagrangiana es un formalismo matemático en la teoría clásica de la mecánica que ofrece una descripción alternativa a las ecuaciones del movimiento de un sistema físico.Se basa en la función llamada Lagrangiana, que es la diferencia entre la energía cinética y potencial del sistema. En lugar de las fuerzas, utiliza las coordenadas generalizadas del sistema para expresar las ecuaciones del movimiento. El principio fundamental es el principio de acción estacionaria, que establece que la trayectoria real entre dos puntos en el espacio-tiempo hace que la integral de la Lagrangiana sea estacionaria. Este enfoque resulta especialmente útil para problemas con coordenadas generalizadas y tiene aplicaciones en diversos campos de la física teórica.

En el presente proyecto, nos sumergimos en el desafío del movimiento circular de un cuerpo unido a una cuerda cuya longitud experimenta una reducción constante. A través de un análisis exhaustivo, exploramos este fenómeno desde los lagrangianos, ya que esto facilita los cálculos a diferencia de hacerlo desde el punto de vista de la dinámica rotacional, con conceptos usados y aprendidos en el curso de mecánica newtoniana.

La metodología en este proyecto se centrará en la determinación del momento angular en un sistema dinámico a través del cálculo de la diferencia radial $\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p}$. En el marco lagrangiano, se llevará a cabo un análisis detallado de los grados de libertad, deduciendo ecuaciones de transformación y derivando el lagrangiano para establecer las ecuaciones de movimiento mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange. En el experimento propuesto, el objetivo será determinar la posición temporal de un objeto descendiendo en un tubo bajo la influencia gravitacional, asegurando la rigurosidad científica con componentes físicos precisamente caracterizados, como una cuerda de longitud conocida, un tubo de PVC con propiedades definidas y una masa esférica con atributos controlados. La medición precisa del tiempo se llevará a cabo mediante un cronómetro calibrado. Además, se realizará un modelado computacional para analizar sistemáticamente el comportamiento del objeto en movimiento, proporcionando una plataforma para la comparación y validación de enfoques teóricos. Esta metodología integral tiene como objetivo contribuir al avance del conocimiento en la dinámica de sistemas físicos en condiciones específicas.

Los objetivos principales de este proyecto son: primero, caracterizar de manera precisa el movimiento circular de un objeto unido a una cuerda que se acorta constantemente, incluyendo la definición de variables clave como velocidad angular y posición angular en función del tiempo. Segundo, mostrar la formulación lagrangiana para analizar el fenómeno, identificando las ventajas y limitaciones de este enfoque. Tercero, desarrollar modelos matemáticos sólidos desde esta perspectiva, respaldados por ecuaciones precisas que reflejen la dinámica del movimiento circular bajo la influencia de una cuerda en acortamiento constante. Cuarto, realizar simulaciones numéricas y experimentos físicos para visualizar y comprender el cambio en el movimiento circular. Quinto, analizar y comparar los resultados de simulaciones y experimentos para identificar tendencias, similitudes y diferencias, evaluando la validez de los modelos teóricos. Por último, comunicar los hallazgos y conocimientos a través de presentaciones y recursos educativos para facilitar la comprensión de estos conceptos entre los estudiantes.

2. Conceptos previos

Antes de introducir de manera formal el problema del movimiento circular de una cuerda que se acota de manera constante, comenzaremos dando definiciones y enunciando resultados fundamentales para la comprensión de los temas a tratar. Adicional a esto se va a mostrar una breve introducción al formalismo de Lagrange. El material aquí presentado fue tomado de [2,3,4,5].

2.1. Formalismo de Lagrange.

El formalismo de Lagrange es un enfoque alternativo y muy poderoso para la formulación de la mecánica clásica. Fue desarrollado por el matemático y físico italiano Joseph-Louis Lagrange en el siglo XVIII. Este formalismo se basa en el principio de mínima acción y utiliza el concepto de coordenadas generalizadas y el Lagrangiano para describir sistemas físicos de una manera más elegante y general que las ecuaciones de Newton.

En lugar de trabajar con las coordenadas cartesianas (como las coordenadas x, y, z en el espacio tridimensional), el formalismo de Lagrange utiliza un conjunto de coordenadas generalizadas. Estas coordenadas son variables que describen completamente la configuración de un sistema físico. Pueden ser cualquier conjunto de variables que sea suficiente para definir la posición del sistema.

Lagrangiano:

Para poder dar inicio a la definición del Lagrangeano primero se pasa por un principio, el principio D'Alembert, que ayudará a definirlo de una forma más sencilla.

El principio de D'Alembert, también conocido como el principio de las fuerzas virtuales o el principio de los trabajos virtuales, es un principio en mecánica clásica utilizado para analizar el equilibrio y el movimiento de sistemas físicos.

La formulación básica del principio de D'Alembert establece que para un sistema en equilibrio, la suma de las fuerzas externas aplicadas y las fuerzas ficticias en el sistema es igual a cero.

Matemáticamente, el principio de D'Alembert se expresa con la ecuación:

$$\sum F_i + \sum (m_i \cdot a_i) = 0$$

donde:

- $\sum F_i$ es la suma de todas las fuerzas externas aplicadas al sistema,
- m_i es la masa de la i-ésima partícula en el sistema,
- a_i es la aceleración de la i-ésima partícula en el sistema.

Este principio se aplica a sistemas en equilibrio o en movimiento rectilíneo uniforme. Al introducir las fuerzas ficticias (fuerzas inerciales virtuales), D'Alembert permitió que el análisis de sistemas mecánicos se realizara más fácilmente, especialmente cuando se trataba de fuerzas inerciales en sistemas acelerados.

Ahora, se tiene qué un sistema pológeno es aquel sistema cuyas fuerzas no se pueden obtener de un única función escalar, y un sistema monógeno es aquel donde todas sus fuerzas aplicadas se pueden obtener a partir de una única función escalar.

En un espacio físico, tenemos que las fuerzas están definidas de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{F}_i^{\text{ap}} = \boldsymbol{F}_i^{\text{mon}} + \boldsymbol{F}_i^{\text{pol}}$$

Tal que:

- $\boldsymbol{F}_i^{\text{ap}}$ Es la suma de las fuerzas monógenas y pológenas
- $\boldsymbol{F}_i^{\text{mon}}$ son las fuerzas monógenas.
- $\boldsymbol{F}_i^{\text{pol}}$ son las fuerzas pológenas.

Se definen las fuerzas monógenas como:

$$\boldsymbol{F}_i^{\text{mon}} = -\nabla_i \text{U} + \frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{\nabla}_{v_i} U\right]$$

De forma que:

- $\nabla_i \text{U}$ es el gradiente de la energía potencial del sistema.
- $[\boldsymbol{\nabla}_{v_i} U]$ es el gradiente de la energía potencial la cual depende de las velocidades del espacio físico.

Si tomamos todas las coordenadas generalizadas de uno o más sistemas, tenemos como resultado un espacio de configuración de la siguiente forma:

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{\text{mon}} + Q_\alpha^{\text{pol}} \tag{1}$$

Se tiene que:

- Q_α una frurza resultante, definida como la suma de las fuerzas monógenas y pológenas generalizadas.
- Q_α^{mon} es la fuerza monógena generalizada.
- Q_α^{pol} es la fuerza pológena generalizada.

Se tiene que Q_α^{mon} esta expresada como

$$Q_\alpha^{\text{mon}} = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) \tag{2}$$

tal que:

- U es la energía potencial del sistema
- q_α son las coordenadas generalizadas del sistema
- $\dot{q}_\alpha$ son las velocidades generalizadas del sistema

Y Q_α^{pol} se expresa como:

$$Q_\alpha^{\text{pol}} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}i^{\text{pol}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}. \tag{3}$$

De forma que:

- $\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}i^{\text{pol}}$ es la suma de las fuerzas pológenas.
- $\boldsymbol{r}_i$ son las coordenadas en un espacio físico.
- q_α son las coordenadas en un espacio de configuración.

Con esta información, se escribe el principio D'Alembert de la siguiente forma:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left[Q_\alpha - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha$$

El Lagrangiano es una función que resume la dinámica de un sistema físico. El Lagrangiano se denota comúnmente por L, en términos de las coordenadas generalizadas (q_i), las velocidades generalizadas $(\dot{q}_i)$, y a menudo el tiempo t.

$$L(q_i, \dot{q}_i; t)$$

Luego, por (1) reemplazamos en Q_α, de la siguiente forma:

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \left[Q_\alpha^{\text{mon}} + Q_\alpha^{\text{pol}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha$$

Ahora, con (2) reemplazamos en Q_α^{mon}, para así obtener la siguiente expresión:

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \left[-\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + Q_\alpha^{\text{pol}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha$$

Ya con esta expresión, aplicamos la propiedad asociativa, por lo que obtenemos una diferencia $(T-U)$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left[Q_\alpha^{\text{pol}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + \frac{\partial (T-U)}{\partial q_\alpha} \right] \delta\ q_\alpha = 0$$

Finalmente, se define como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial del sistema. La expresión general del Lagrangiano L es:

$$L = T - U$$

donde:

- T es la energía cinética del sistema, que depende de las velocidades de las partículas en el sistema.
- U es la energía potencial del sistema, que depende de las posiciones de las partículas en el sistema.

Por lo tanto, tendremos que la ecuación quedará expresada como:

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \left[Q_\alpha^{\text{pol}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha = 0 \tag{4}$$

La mecánica lagrangiana se basa en el principio de la acción estacionaria, también conocido como el principio de Hamilton. Según este principio, la trayectoria real que toma el sistema entre dos puntos en el espacio-tiempo es tal que la acción, definida como la integral del Lagrangiano a lo largo de la trayectoria, es estacionaria. En términos matemáticos, esto se expresa con la ecuación de Euler-Lagrange.

Ecuaciones de Euler-Lagrange:
Las ecuaciones de Euler-Lagrange son un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que se derivan a partir del principio de acción estacionaria, también conocido como el principio de Hamilton. Estas ecuaciones se utilizan para determinar las trayectorias que sigue un sistema físico en función de su Lagrangiano.

Partiendo del principio de D'Alembert en función del Lagrangiano expresado anteriormente

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \left[Q_\alpha^{\text{pol}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha = 0 \tag{5}$$

y sabiendo que $\delta q_\alpha \neq 0$ para que se satisfaga la teoría de D'Alembert se debe cumplir que

$$Q_\alpha^{\text{pol}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{6}$$

Por lo cual, de esta forma, para que se cumpla el principio de D'Alembert se debe cumplir que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^{\text{pol}} \tag{7}$$

Esta es la forma mas general para las ecuaciones de Euler Lagrange.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas sin fuerzas pologenas se expresan de la siguiente manera para un sistema con n coordenadas generalizadas q_α:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0.$$

El término

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

es fundamental en el formalismo lagrangiano y se define como el momento canónico o momento conjugado p_i asociado a la coordenada generalizada q_i. Este momento canónico es una cantidad que guarda una relación especial con la velocidad generalizada $\dot{q}_i$, y su importancia radica en que desempeña un papel crucial en la descripción de la dinámica del sistema.

Cuando la coordenada generalizada q_i representa la posición lineal, el momento canónico conjugado p_i correspondiente es el momento lineal o cantidad de movimiento asociado a esa posición. En este caso, la función Lagrangiana L involucra términos relacionados con la energía cinética T, que a su vez está relacionada con el momento lineal. El momento lineal p_i asociado a la posición lineal q_i se define como:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Similarmente, si la coordenada generalizada q_i representa la posición angular, el momento canónico conjugado p_i será el momento angular asociado a esa posición. Nuevamente, la función Lagrangiana contendrá términos relacionados con la energía cinética angular y, por ende, con el momento angular. La relación se mantiene:

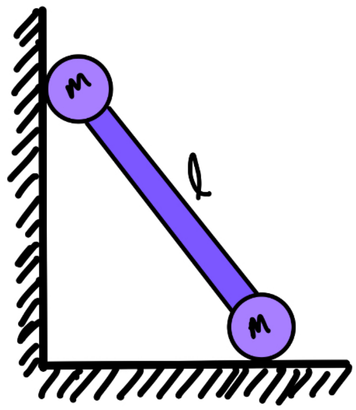
$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Entonces, en términos más generales, el momento canónico p_i es una magnitud asociada a las coordenadas del espacio de configuración del sistema. La derivada parcial $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ nos da información sobre cómo la función Lagrangiana varía con respecto a la velocidad generalizada $\dot{q}_i$ y, por lo tanto, proporciona una medida de la cantidad de movimiento asociada a la coordenada generalizada q_i.

Para finalizar este formalismo, haremos un ejemplo sencillo donde apliquemos lo que hemos definido y logremos entender la esencia de los lagrangianos.

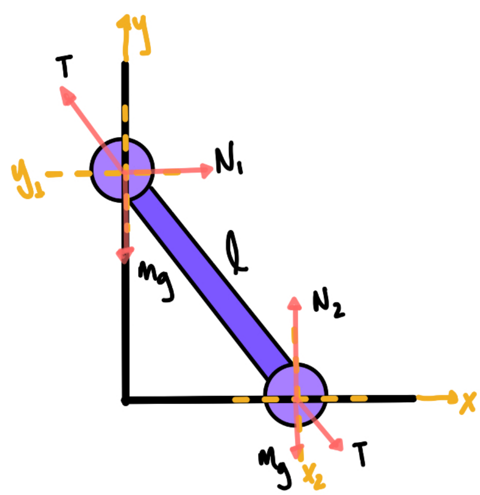
Ejemplo 2.1.1

Un sistema de dos esferas idénticas conectadas por una barra rígida liviana, se apoya entre el suelo y una pared sin fricción, como se muestra en la figura. Si la masa de cada esfera es m y la longitud de la barra es l, obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange.



(a) Diagrama ejemplo

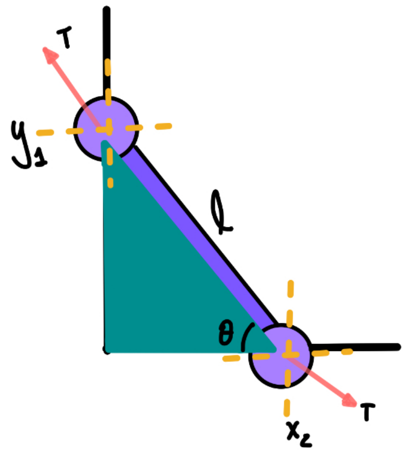
Para este sistema, lo primero que se debe hacer es analizar las fuerzas que actúan sobre cada una de las masas.



(a) Diagrama de fuerzas

Es importante darnos cuenta que las fuerzas normales y la tensión, actúan generando ligaduras. En el caso de las fuerzas normales, estas nos dicen que $x_1 = y_2 = 0$,*mientras que la tensión nos dice que* $x_2^2 + y_1^2 - l^2 = 0$.

Al tener 4 coordenadas en el sistema (x_1, x_2, y_1, y_2) *y 3 ligaduras, tenemos que el sistema solo tiene 1 coordenada generalizada. a libre escogencia por la facilidad del problema, se escogera como coordenada generalizada al ángulo* θ



(a) Coordenada generalizada escogida

y las ecuaciones de transformación serán

$$x = l\cos\theta \qquad \dot{x} = -l\sin\theta\dot{\theta}$$
$$y = l\sin\theta \qquad \dot{y} = l\cos\theta\dot{\theta}$$

La energía potencial del sistema va a ser representada únicamente por la masa 1 (Ya que la 2 está pegada al suelo) $U = mgl\sin\theta$

Mientras que T *será*

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}m((-l\sin\theta\dot{\theta})^2 + (l\cos\theta\dot{\theta})^2) \\ &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

De esta forma el lagrangiano del sistema es

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\sin\theta \end{aligned}$$

y aplicando las ecuaciones de euler lagrange, se obtiene que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \qquad \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) = ml^2\ddot{\theta} \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\cos\theta$$

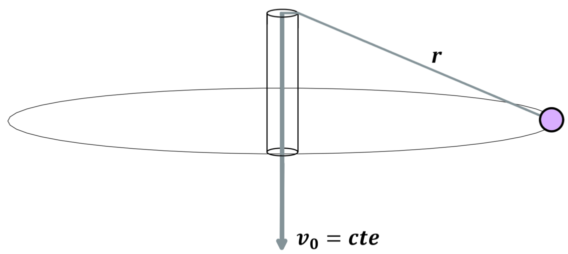
La ecuación que describe el movimiento de este sistema es

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\cos\theta = 0 \tag{8}$$

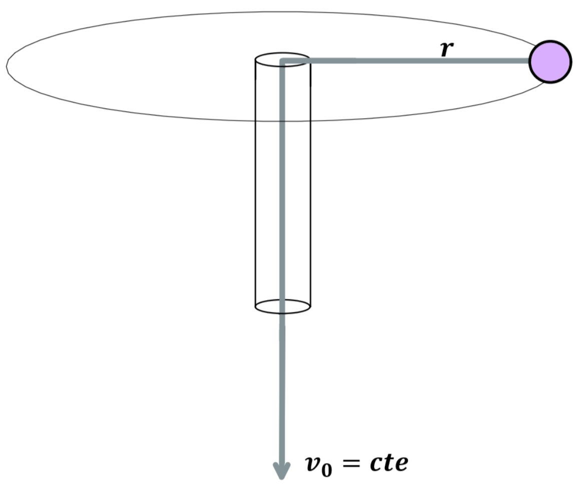
3. Movimiento circular de una cuerda que se acorta constantemente

El problema plantea el movimiento de un cuerpo atado a una cuerda de masa despreciable que se encuentra acortando su longitud a velocidad constante. En un primer instante de tiempo $t = 0$ el cuerpo se coloca a girar con la cuerda a longitud inicial r_0.

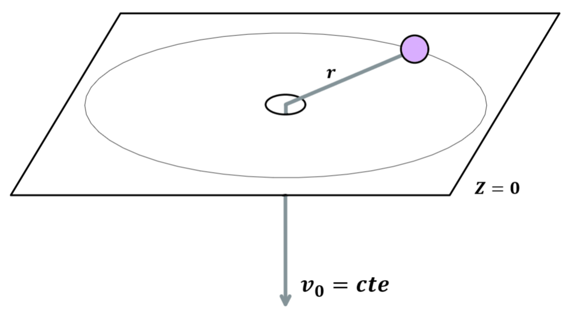
Cuando la cuerda está extendida, la acción genera que la masa baje respecto a su punto de pivote como se muestra en la figura 4a. A medida de que se va acortando, la acción de la gravedad en el problema disminuye (Figura 4b), y justo antes de que la longitud llegue a 0 la gravedad es totalmente despreciable y el problema queda confinado al plano $z = 0$ (Figura 4c).



(a) Primer momento. Cuerda extendida afectada por la gravedad.



(b) Segundo momento. Cuerda extendida a una distancia r despreciable de la gravedad.



(c) Segundo momento. Cuerda extendida, tomando como punto de referencia un plano.

Figura 4: Diagramas del cuerpo

4. Soluciones del problema

En esta sección presentaremos la posición, la velocidad, la aceleración y el momento angular del problema usando lagrangianos.

4.1. Solución del problema usando Lagragianos

Como se mencionó en la teoría, el lagrangiano se define como la diferencia entre energía cinética y potencial del sistema

$$L = T - U$$

En el primer momento, con la cuerda, lo suficiente mente extendida, no se puede despreciar la acción de la gravedad, por lo cual el sistema poseerá energía potencial gravitacional igual a mgh, mientas la energía cinética se define como

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \end{aligned}$$

Por la simetría de problema lo mas conveniente es usar coordenadas cilíndricas para resolver este problema

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta & \dot{x} &= \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta} \\ y &= r\sin\theta & \dot{y} &= \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta} \\ z &= z & \dot{z} &= \dot{z} \end{aligned}$$

por lo cual, la energía cinética expresada en coordenadas cilíndricas es

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2}m((\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta})^2 + (\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2}m((\dot{r}\cos\theta)^2 + (r\sin\theta\dot{\theta})^2 - (2r\dot{r}\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}) + (\dot{r}\sin\theta)^2 + (r\cos\theta\dot{\theta})^2 + (2r\dot{r}\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}) + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2}m((\dot{r}\cos\theta)^2 + (r\sin\theta\dot{\theta})^2 + (\dot{r}\sin\theta)^2 + (r\cos\theta\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \end{aligned}$$

De esta forma, el lagrangiano que describe este sistema es

$$L = T - U$$
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

y aplicando la ligadura, la cual establece que la longitud de la cuerda, se va acortando a velocidad constante

$$r = r_0 - vt \qquad \dot{r} = -v$$

se obtiene

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$
$$L = \frac{1}{2}m(v^2 + (r_0 - vt)^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

Una vez obtenido el lagrangiano del sistema, se pueden usar las ecuaciones de Euler Lagrange, para obtener las ecuaciones de movimiento del sistema

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

La ligadura, nos reduce la cantidad de grados de libertad del problema, por lo cual, las ecuaciones de Euler Lagrange para este problema son 2

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

Calculando cada uno de los términos, por separado

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(r_0 - vt)^2\dot{\theta} \qquad \frac{d}{dt}(m(r_0 - vt)^2\dot{\theta}) = m(r_0 - vt)^2\ddot{\theta} - 2mv(r_0 - vt)\dot{\theta} \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = mdotz \qquad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = m\ddot{z} \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

y reemplazando en las ecuaciones de Euler Lagrange, se obtiene las ecuaciones de movimiento que describen el sistema Para la parte angular, la ecuación de movimiento es

$$\begin{aligned} m(r_0 - vt)^2\ddot{\theta} - 2mv(r_0 - vt)\dot{\theta} = 0 \\ \ddot{\theta} - \frac{2v}{(r_0 - vt)}\dot{\theta} = 0 \end{aligned}$$

y en el caso de z

$$\begin{aligned} m\ddot{z} - mg = 0 \\ \ddot{z} = g \end{aligned}$$

Para el segundo caso se puede despreciar la gravedad, por lo cual el sistema queda confinado a un movimiento en dos dimensiones, con lo cual se tiene una ligadura adicional y es $z = 0$ y además sabemos que $U = 0$. Mientras que la energía cinética es de la forma

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}m((\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta})^2 + (\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta})^2) \\ &= \frac{1}{2}m((\dot{r}\cos\theta)^2 + (r\sin\theta\dot{\theta})^2 - (2r\dot{r}\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}) + (\dot{r}\sin\theta)^2 + (r\cos\theta\dot{\theta})^2 + (2r\dot{r}\cos\theta\sin\theta\dot{\theta})) \\ &= \frac{1}{2}m((\dot{r}\cos\theta)^2 + (r\sin\theta\dot{\theta})^2 + (\dot{r}\sin\theta)^2 + (r\cos\theta\dot{\theta})^2) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

y con la ligadura aplicada el lagrangiano nos queda

$$L = \frac{1}{2}m(v^2 + (r_0 - vt)^2\dot{\theta}^2) \tag{9}$$

Reemplazando en las ecuaciones de Euler Lagrange, obtenemos que la ecuación que describe este movimiento, solo es una

$$\ddot{\theta} - \frac{2v}{(r_0 - vt)}\dot{\theta} = 0$$

Además, utilizando el lagrangiano, se puede calcular el momento canónico angular, de la forma

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(r_0 - vt)^2\dot{\theta}$$

Que en el caso de este problema especifico, corresponde al momento angular del cuerpo. Para obtener la expresión exacta se puede resolver la ecuaciuon de movimiento para $\dot{\theta}$

5. Conclusiones

En esta sección hablemos un poco de como fue nuestro proceso en la investigación de estos temas.

En resumen, descubrimos que el formalismo de Lagrange ofrece una manera elegante y unificada de analizar sistemas físicos. Al utilizar las ecuaciones de Euler-Lagrange, derivadas del principio de mínima acción, logramos describir cómo evoluciona un sistema mediante coordenadas generalizadas y el Lagrangiano. Los ejemplos que exploramos, desde el movimiento de dos esferas conectadas hasta un cuerpo en una cuerda que se acorta, destacan lo versátil que es este método. En definitiva, el formalismo de Lagrange se revela como una herramienta poderosa para abordar problemas complejos de mecánica clásica, simplificando la descripción matemática y facilitando el análisis de diversos fenómenos físicos.

En particular, al examinar el movimiento de un cuerpo atado a una cuerda que se acorta, consideramos la gravedad solo en un momento inicial y la despreciamos después. Aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange en coordenadas cilíndricas, derivando así las ecuaciones de movimiento que describen la evolución angular del sistema.

El siguiente cronograma resume las actividades elaboradas hasta hoy, el completo que tiene en cuenta las actividades posteriores que están pendientes a realizar se encuentra en el excel adjunto.

Fechas / Actividades	Septiembre			Octubre				
	F1(20)	F2(24)	F3(28)	F4(1)	F5(11)	F6(12)	F7(13)	F8(20)
Planteamiento del problema								
Teoria								
Objetivos								
Metodología								
Conclusiones								
Presentación del problema								
Solucion del problema								
Corrección de errores								
Preparación de la presentación								
Complementos del proyecto								
Entrega del proyecto final								

Noviembre							
F9(3)	F10(8)	F11(13)	F12(18)	F13(24)	F14(25)	F15(26)	F16(27)

Referencias

[1] D. Kleppner and R. Kolenkow. *An Introduction to Mechanics.* Cambridge University Press, 2014.

[2] Herbert Goldstein. *Classical Mechanics.* Addison-Wesley, 1980.

[3] M. Alonso and E.J. Finn. *Fundamental University Physics.* Number v. 1 in Addison-Wesley series in physics. Addison-Wesley, 1980.

[4] JA Lewis. Berkeley physics course: Mechanics: Berkeley physics course. vol. 1. charles kittel, walter d. knight, and malvin a. ruderman. mcgraw-hill, new york, 1965. xxii+ 480 pp. illus. 5.50. *Science*, 148(3671):813–814, 1965.

[5] F. Ochoa. *Curso de Mecanica analitica I.* Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, 2021.