AULA 5 – ATIVIDADE: QUATÉRNIOS

Para as atividades abaixo, recomendamos que use alguma ferramenta como o Excel, Google Sheets, Python Notebook, ou similares.

Quatérnios possuem vários usos, porém aqui vamos nos concentrar nos recursos de realizar rotações no espaço 3D. A construção matemática do quatérnio é em geral expressa da seguinte forma:

$$q = q_r + q_i i + q_j j + q_k k$$

Podemos calcular o comprimento de um quatérnio com a seguinte fórmula:

$$|q| = \sqrt{q\,\bar{q}} = \sqrt{q_i^2 + q_j^2 + q_k^2 + q_r^2}$$

1. Calcule o comprimento dos seguinte quatérnios:

a) 0.024 -0.153i + 0.976j -0.153k

a) -0.559 +0.169i - 0.574j -0.574k

A multiplicação de quatérnios é um recurso que permite fazer as operações de rotação. Uma das formas de fazer essa opção é por um processo distributivo:

$$\mathrm{pq} = (p_r \ + p_i i \ + p_j j \ + \ p_k k)(q_r \ + q_i i \ + q_j j \ + \ q_k k)$$
$$= (p_r q_r - p_i q_i \ - p_j q_j \ - p_k q_k) + (\dots)i + (\dots)j + (\dots)k$$

Outra forma é usando os recursos de multiplicação escalar e vetorial:

$$\mathrm{pq} = p_r q_r - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \ + p_r \mathbf{q} \ - q_r \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}$$

Não se esqueça que a ordem da multiplicação é importante, e o cuidado que você deve ter é na multiplicação dos imaginários. Assim siga sempre a seguinte regra:

$$\mathbf{i^2} = \mathbf{j^2} = \mathbf{k^2} = -1, \ \mathbf{ijk} = -1$$
$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}$$
$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \ \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \ \mathbf{ik} = -\mathbf{j}$$

2. Faça a multiplicação dos quatérnions anteriores, ou seja,
(0.024 -0.153i + 0.976j -0.153k)(-0.559 +0.169i - 0.574j -0.574k):

3. Calcule o comprimento do quatérnio calculado no exercício anterior. O que aconteceu de interessante com os valores?

4. Normalize o seguinte quatérnio para que ele seja unitário:

a) 2 +2i -1j -4k

Rotações podem ser calculadas no espaço 3D pelas matrizes de rotação, que usam coordenadas de Euler diretamente. Como visto em aula, essas matrizes têm suas limitações:

$$\mathbf{R}_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma outra alternativa é através de quatérnions. Para isso se pode criar o quatérnio de rotação com a seguinte fórmula:

$$q = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)u_x i + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)u_y j + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)u_z k$$

Existem duas formas de aplicar a rotação por quatérnios, uma é multiplicando o vetor que se deseja rotacionar pelo quatérnio e depois pelo seu conjugado:

$$rot(v) = q \cdot v \cdot q^{-1}$$

A outra forma é colocar os valores do quatérnio em uma matriz e então multiplicar o vetor. A matriz de rotação usando quatérnios usa a seguinte construção:

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2\left(q_y^2 + q_z^2\right) & 2(q_x q_y - q_z q_r) & 2(q_x q_z + q_y q_r) & 0 \\ 2(q_x q_y + q_z q_r) & 1 - 2\left(q_x^2 + q_z^2\right) & 2(q_y q_z - q_x q_r) & 0 \\ 2(q_x q_z - q_y q_r) & 2(q_y q_z + q_x q_r) & 1 - 2\left(q_x^2 + q_y^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Vamos verificar se os quatérnios funcionam mesmo.

a) Assuma um ponto (0, 1, 0), faça uma rotação por Z de 45° usando a matriz de rotação por coordenadas de Euler e depois por quatérnios, verifique se os resultados coincidem.

b) Continue a rotação do ponto acima, porém agora além da rotação em Z, faça também uma rotação de 45° em X.

c) Continue mais uma vez a rotação do ponto, agora com mais uma rotação em Y de 45°.