Solución del taller 2

Julián Soto

06 de Marzo del 2024

---

1. Si dos eventos ,A y B, son tales que $P(A) = 0.5,\ P(B) = 0.3$ y $P(A \cap B) = 0.1$, encuentre lo siguiente:

   (a) $P(A|B)$

   Solución:

   Recordar que:

   $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1}$$

   Como las probabilidades requeridas en la ecuación (1) son conocidas basta con remplazar los valores:

   $$P(A|B) = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3} \approx 0.\bar{3}$$

   (b) $P(B|A)$

   Solución:

   Recordar que:

   $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{2}$$

   Como las probabilidades requeridas en la ecuación (2) son conocidas basta con remplazar los valores:

   $$P(B|A) = \frac{0.1}{0.5} = 0.2$$

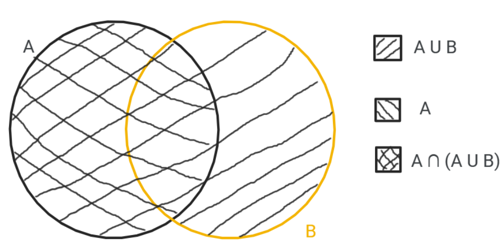
   (c) $P(A|A \cup B)$

   Solución:

   Recordar que:

   $$P(B|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} \tag{3}$$

   Note lo siguiente:



Entonces se puede reescribir a (3) como:

$$P(B|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} \tag{4}$$

Antes de seguir desarrollando la ecuación (4) recuerde que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{5}$$

Entonces usando la igualdad de la ecuación (5) en la ecuación (4):

$$P(B|A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \tag{6}$$

Como las probabilidades requeridas en la ecuación (6) son conocidas basta con remplazar los valores:

$$P(B|A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} = \frac{0.5}{0.5 + 0.3 - 0.1} = \frac{0.5}{0.7} = \frac{5}{7} \approx 0.7143$$

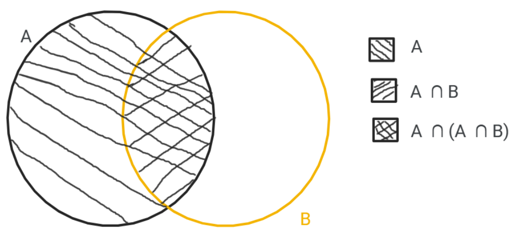
(d) $P(A|A \cap B)$

Solución:

Recordar que:

$$P(A|A \cap B) = \frac{P(A \cap (A \cap B))}{P(A \cap B)} \tag{7}$$

Note lo siguiente:



Entonces se puede reescribir a (7) como:

$$P(A|A \cap B) = \frac{P(A \cap (A \cap B))}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = 1 \tag{8}$$

2. En un estudio sobre el hábito de fumar se entrevistaron 250 trabajadores de una compañía azucarera. Del total de los trabajadores 130 fuma. El número de hombres en la compañía es de 150 de los cuales 85 son fumadores. Los datos se presentan en la siguiente tabla 2x2: Si se selecciona un trabajador en forma aleatoria

	fuma	**No fuma**	**Total**
Hombres	85	65	150
Mujeres	45	55	100
Total	130	120	250

calcule la probabilidad de que:

- Sea hombre

  Solución:

$$P(H) = \frac{150}{250} = 0.6$$

- Fumador

  Solución:

$$P(F) = \frac{130}{250} = 0.52$$

- No fumador

  Solución:

$$P(F') = 1 - P(F) = 0.48$$

- Hombre o mujer

  Solución:

$$P(H \cup M) = \frac{250}{250} = 1$$

- Hombre o persona que fume

  Solución:

$$P(H \cup F) = P(H) + P(F) - P(H \cap F) = 0.6 + 0.52 - \frac{85}{250} = 1.12 - 0.34 = 0.78$$

- Mujer o persona que no fume

  Solución:

$$P(M \cup F') = P(M) + (1 - P(F)) - P(M \cap F') = 0.4 + (1 - 0.52) - \frac{55}{250} = 0.4 + 0.48 - 0.22 = 0.66$$

- Mujer o persona que fume

  Solución:

$$P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F) = 0.4 + 0.52 - \frac{45}{250} = 0.92 - 0.18 = 0.74$$

3. De los viajeros que llegan a un pequeño aeropuerto, 60% vuelan en líneas aéreas importantes, 30% en aviones de propiedad privada y el resto en aviones comerciales que no pertenecen a una línea aérea importante. De quienes viajan en líneas aéreas importantes, 50% viajan por negocios en tanto que 60% de quienes llegan en aviones privados y 90% de quienes llegan en otros aviones comerciales viajan por negocios. Suponga que seleccionamos al azar una persona que llega a este aeropuerto. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona:

   (a) viaje por negocios?

   Solución:

   Antes de empezar a desarrollar el ejercicio, primero se establecen las siguientes cosas:

- $P(I) = 0.6$, probabilidad de que los viajeros volaron en líneas aéreas importantes.
- $P(V) = 0.3$, probabilidad de que los viajeros volaron en aviones de propiedad privada.
- $P(C) = 1 - P(I) - P(V) = 0.1$, probabilidad de que los viajeros volaron en aviones comerciales.
- $P(N|I) = 0.5$, probabilidad de que viaje por negocio en líneas aéreas importantes.
- $P(N|V) = 0.6$, probabilidad de que viaje por negocio en aviones de propiedad privada.
- $P(N|C) = 0.9$, probabilidad de que viaje por negocio en aviones comerciales.

Ahora, note que se está preguntando por $P(N)$, para lo cual tenga en cuenta lo siguiente:

$$P(N) = \sum_{i=1}^{k} P(N|B_i)P(B_i) \tag{9}$$

En este caso B_i hace referencia a la forma de volar al aeropuerto, por lo tanto tomemos a: $B_1 = I,\ B_2 = V,\ B_3 = C$, entonces al desarrollar () quedaría de la siguiente forma:

$$P(N) = \sum_{i=1}^{k} P(N|B_i)P(B_i) = P(N|I)P(I) + P(N|V)P(V) + P(N|C)P(C) \tag{10}$$

Esto se puedo aplicar porque si sumamos las probabilidades de B_i nos da como 1, mostrando que ocupa totalmente el espacio muestral. Ahora solo queda remplazar en la ecuación () por los valores que ya conocemos:

$$P(N) = P(N|I)P(I) + P(N|V)P(V) + P(N|C)P(C) = 0.5 \times 0.6 + 0.6 \times 0.3 + 0.9 \times 0.1 = 0.57$$

(b) llegue en un avión privado, dado que la persona viaja por negocios?

Solución:

En este caso se pide calcular $P(V|N)$, para lo cual necesitamos:

$$P(V|N) = \frac{P(V \cap N)}{P(N)} = \frac{P(N|V)P(V)}{P(N)} \tag{11}$$

Solo queda remplazar en () por los valores conocidos:

$$P(V|N) = \frac{P(N|V)P(V)}{P(N)} = \frac{0.6 \times 0.3}{0.57} = \frac{0.18}{0.57} \approx 0.3158$$

(c) viaja por negocio, dado que vuela en un avión comercia?

Solución:

Note que pide hallar una probabilidad ya conocida, que es $P(N|C)$.

4. En los últimos años hay dos tendencias muy difundidas en cuestiones de salud. Una referente a la dieta y otra referente al ejercicio. Si las dos “creencias” son independientes, es decir quienes siguen una dieta sana no hacen ni más ni menos ejercicio que los que no llevan una dieta sana. El 40% de las personas hacen ejercicio y el 10% son adictos a dietas integrales, baja en grasas.

(a) ¿Qué proporción de ellos hacen trote y sigue una dieta sana?

Solución:

Definamos los siguiente:

- $P(A) = 0.4$, como la probabilidad de que las personas hagan ejercicio.
- $P(B) = 0.1$, como la probabilidad de que las personas sean adictas a dietas integrales, baja en grasa.

Note que se pide calcular $P(A \cap B)$, dado que A y B son eventos independientes, se puede desarrollar lo siguiente:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{12}$$

Por lo tanto seria solo remplazar en la ecuación () con los datos que tenemos:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.4 \times 0.1 = 0.04$$

(b) ¿Qué proporción hace gimnasia, pero no sigue una dieta?

Solución:

En este caso pide hallar la probabilidad de que haga ejercicio y no siga una dieta. Denotemos $P(B')$ como la probabilidad de las personas que no siguen una dieta, entonces su probabilidad seria la siguiente:

$$P(B') = 1 - P(B) \tag{13}$$

Dada la pregunta, se pide calcular $P(A \cap B')$, que con ayuda de la ecuación () y la ecuación () nos queda la siguiente expresión:

$$P(A \cap B') = P(A)P(B') = P(A)[1 - P(B)] \tag{14}$$

Ahora solo queda remplazar en la ecuación () por los datos que conocemos:

$$P(A \cap B') = P(A)[1 - P(B)] = 0.4 \times (1 - 0.1) = 0.4 \times 0.9 = 0.36$$

(c) ¿Qué porcentaje come sano, pero no hace ejercicio?

Solución:

Se resuelve igual que el caso anterior, pues pide calcular $P(A' \cap B)$, lo cual por la ecuación (9) sabemos que es:

$$P(A' \cap B) = P(A')P(B) = [1 - P(A)]P(B) \tag{15}$$

Ahora solo queda remplazar en la ecuación () por los datos que conocemos:

$$P(A' \cap B) = [1 - P(A)]P(B) = (1 - 0.4) \times 0.1 = 0.6 \times 0.1 = 0.06$$