Rapport de stage

Théorèmes de convergence pour la théorie de la mesure
et de l'intégration

Rigal Julien et Abdillahi Ibn M'hammad

Université de Nîmes, laboratoire MIPA
Encadrant : Mr Anza Hafsa Omar

Janvier 2024

Table des matières

Introduction

Notre objectif lors de ce stage est d'acquérir une compréhension plus profonde de la théorie de l'intégration de Lebesgue à travers quelques uns de ses théorèmes de convergence, qui y jouent un rôle central. Nous débuterons en faisant une synthèse des notions que nous avons vues en cours, pour ensuite élargir sur d'autres cas plus complexes. Notre but ici sera d'essayer de tisser, si possible, des liens entre ces parties.

Les théorèmes de convergence classiques en intégration

(1) Synthèse sur les fonctions mesurables

Nous commencerons par introduire la notion d'espace mesurable, afin de pouvoir par la suite traiter de la mesurabilité d'une fonction.
Nous le notons $(E, \mathscr{A})$ c'est un duo composé d'un ensemble X et d'une tribu $\mathscr{A}$, sur cet ensemble, qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\mathscr{A}$ contient 0
- $\mathscr{A}$ est stable par complémentarité et par réunion dénombrable

Maintenant nous supposons que nous ayons deux espaces mesurables, que nous notons $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$. Une fonction, partant de X à valeurs dans Y, sera donc $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$-mesurable si elle satisfait la propriété suivante :

Pour tout B appartient à $\mathscr{B}$, $f^{(-1)}(B)$ appartient à $\mathscr{A}$

Une fois cette définition établie, nous nous intéresserons à certaines tribus sur lesquelles une fonction peut admettre une mesurabilité.

Voici quelques exemples :

- La tribu sera les sigma-algèbre de Borel, notée $\mathscr{B}(.)$
  On dira qu'une fonction $(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable appartient à un certain ensemble noté $\mathscr{M}(X, (\overline{\mathbb{R}}))$
  Remarque : Si une fonction est $(\mathscr{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}), \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable, nous dirons qu'elle est Borel-mesurable.
- La tribu de Lebesgue, notée $\mathscr{L} * (.)$

Une partie Lebesgue mesurable est une partie qui vérifie la propriété suivante :

Soit X inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors pour tout A inclus dans X nous avons

$$\lambda_n(A \cap X) + \lambda_n(AX) = \lambda_n(X)$$

Remarque : $\lambda*$ est une mesure extérieure, elle vérifie les propriétés suivantes :

- $\lambda_n * (0) = 0$

— Pour toute (A_j) avec $j \geq 1$ on a :

$$\left(\lambda_n \bigcup_{j=1}^{\infty} \leq \sum_{j-1}^{\infty} \lambda_n * A_j\right)$$

On dira qu'une fonction $(\mathscr{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}), \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ mesurable est appelée Lebesgue mesurable. C'est à partir de cette dernière « forme » de mesurabilité, que se construit la théorie de l'intégration de Lebesgue. Dans les principaux théorèmes dont nous allons parler, nous considèrerons donc que les fonctions étudiées sont Lebesgue mesurables.

(2) Théorème de Beppo Levi

Soit (E, A, μ) *un espace mesuré.*

soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(E; \overline{\mathbb{R}}_+)^{\mathbb{N}}$, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x) d\mu(x) = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n(x) d\mu(x)$$

Remarque : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, nous pouvons aussi écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x) d\mu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E f_n(x) d\mu(x) = \int_E \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) d\mu(x)$$

Démonstration.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de $\mathcal{M}(E; \overline{\mathbb{R}}_+)^{\mathbb{N}}$ On pose :

$$\forall x \in E \quad f(x) := \sup_{n\in x} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

$\big($Puisque $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\overline{\mathbb{R}}_+$ pourtout $x \in E\big)$.
On sais que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(E; \overline{\mathbb{R}}_+)^{\mathbb{N}}$ comme supremum de fonctions mesurables. Par la propriété de croissance de l'intégrale.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_E f_n(x) d\mu(x) \leq \int_E f(x) d\mu(x)$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x) d\mu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E f_n(x) d\mu(x) \leq \int_E f(x) d\mu(x) = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n(x) d\mu(x)$$

Car $\left(\int_E f_n(x)\, d\mu(x)_{n\in\mathbb{N}} \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^{\mathbb{N}}\right.$ est croissante. Il nous reste à montrer $\big)$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x) d\mu(x) \geq \int_E f(x) d\mu(x)$$

Par le théorème d'appréciation de Lebesgue, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe une suite croissante $(\varphi_{n,m})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(E;\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$

$\square$

(3) Synthèse sur « lim inf » et « lim sup »

Intuitivement, on pourrait définir la limite supérieure (respectivement inférieure) d'une suite u_n comme le plus petit de ses supremum (respectivement le plus grand de ses infimum).
Nous pouvons le formuler de la sorte :

Considérons la suite v_n définie par $v_n = \{\sup u_k \mid k \geq n\}$ ainsi que la suite w_n définie par $w_n = \{\inf u_k \mid k \geq n\}$.
Alors nous pouvons simplement écrire $\limsup_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$ *et* $\liminf_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n$. Nous utiliserons par la suite les notations suivantes :

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \varlimsup_{n\to+\infty} u_n$$

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \varliminf_{n\to+\infty} u_n$$

Remarquons que v_n est une suite décroissante et w_n une suite croissante.
Nous pouvons également proposer la formulation suivante :

$$\varlimsup_{n\to+\infty} u_n = \inf_{\forall n\in\mathbb{N}} v_n \text{ et donc } \varliminf_{n\to+\infty} u_n = \sup_{\forall n\in\mathbb{N}} w_n.$$

Cette notion comprend son lot de propriétés. Tout d'abord nous avons cet encadrement, assez naturel :

$$w_n \leq u_n \leq v_n$$

Duquel nous déduisons que la suite u_n est majorée si et seulement si la limite supérieure de u_n l'est, et minorée si et seulement si la limite inférieure de u_n l'est.

Considérons maintenant deux suites a_n et b_n.
Nous avons l'encadrement suivant :

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varliminf_{n\to+\infty} b_n \leq \varliminf_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \leq \varlimsup_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \leq \varlimsup_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n$$

Nous avons également :

$$\forall a \geq 0 \quad \underline{\lim}_{n \to +\infty} a u_n = a \underline{\lim}_{n \to +\infty} u_n$$

$$\forall a < 0 \quad \underline{\lim}\,(a u_n) = a\,\overline{\lim}\,u_n$$

Remarque : C'est une caractérisation qui peut rappeler celle de la borne supérieure/inférieure.

(4) Lemme de Fatou

Le lemme de Fatou est une illustration du principal objectif de ce stage, c'est-à-dire comprendre les conditions et hypothèses nécessaires aux permutations entre limites et intégrales.
Il est formulé de la sorte :
Soit (E, A, μ) *un espace mesuré.*
Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}(E; \overline{\mathbb{R}}_+)^{\mathbb{N}}$, Alors

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_E f_n(x) d\mu(x) \geq \int_E \liminf_{n \to +\infty} f_n(x) d\mu(x).$$

Nous voyons donc que nous enlevons la condition de croissance de la fonction f_n, et nous obtenons non plus une égalité, mais une majoration.
Nous allons à présent prouver ce résultat :

Démonstration. Afin de démontrer le lemme de Fatou, nous allons nous appuyer sur la définition de la limite inférieure, ainsi que du théorème de convergence monotone énoncé ci-dessus.
Commençons tout d'abord par poser :

$$g_k(x) = \inf_{\forall k > n} f_n(x)$$

Nous obtenons une suite croissante, comme vu précédemment, ce qui nous permet d'appliquer la convergence monotone :

$$\int_E \lim_{k \to +\infty} g_k(x) d\mu(x) = \lim_{k \to +\infty} \int_E g_k(x) d\mu(x)$$

Par la croissance de l'intégrale, nous avons pour tout $n > k$:

$$\inf_{\forall k > n} f_n(x) \leq f_n(x) \Rightarrow \int_E \inf_{\forall k > n} f_n(x) \leq \int_E f_n(x)$$

Ce qui nous donne :

$$\int_E g_k(x) \leq \inf_{\forall k > n} \int_E f_n(x)$$

Par passage à la limite, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)d\mu(x) = \lim_{k\to+\infty} \int_E g_k(x)d\mu(x) \leq \lim_{k\to+\infty} \inf_{\forall k>n} \int_E f_n(x)d\mu(x) = \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)d\mu(x)$$

$\square$

(5) Théorème de convergence de Lebesque

Nous allons à présent aborder le théorème majeur de ce cours, à savoir la convergence dominée de Lebesgue.
C'est un résultat très utile, car il permet de permuter l'intégrale et la limite dans le cadre d'une convergence simple d'une suite de fonctions mesurables vers une autre fonction également mesurable.
Il y a évidemment une condition d'application importante, qui est le critère de domination.
Le théorème est énnoncé de la façon suivante :

Théorème.

Soit (E, A, μ) un espace mesuré.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables.

Si cette suite converge simplement vers une fonction f sur cet espace.
Et s'il existe une fonction g intégrable telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E,\ |f_n(x)| \leq g(x)$$

Alors nous avons l'intégrabilité de f, et le résultat suivant :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|\ d\mu(x) = 0$$

Afin de montrer ce théorème, nous utiliserons le lemme de Fatou dont nous avons parlé ci-dessus, et nous utiliserons le critère de domination.

Théorème de convergence de Scheffé

Après avoir passé en revue les principaux théorèmes de convergence, nous nous intéressons à présent à un cas particulier.
En effet, le théorème de convergence de Scheffé est assez proche de la convergence dominée de Lebesgue dans sa structure, mais il diffère dans ses conditions d'application.
Tout d'abord, énonçons le théorème :

Théorème. *(Scheffé)*

Soit (E, A, μ) un espace mesuré.

Soient $f : E \to \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable et (f_n) une suite de fonctions intégrables. Si f_n converge simplement vers f dans E et

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\, d\mu(x) \leq \int_E f(x)\, d\mu(x)$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|\, d\mu(x) = 0$$

Nous observons l'existence de deux conditions initiales, la première condition ressemble fortement à celle de Lebesgue, à laquelle nous ajoutons cependant l'hypothèse d'intégrabilité de la fonction f. Nous obtenons donc :

(H_1) : La suite de fonctions intégrables $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ converge simplement vers une fonction f également intégrable.

Pour la deuxième condition, il y a un allégement des hypothèses. En effet, nous pouvons observer qu'il n'y a plus le critère de domination par une autre fonction g Lebesgue-intégrable. Nous avons donc à la place :

(H_2) :

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\, d\mu(x) \leq \int_E f(x)\, d\mu(x)$$

En s'appuyant sur ces deux hypothèses, nous allons démontrer le théorème. Nous utiliserons le lemme de Fatou.

Démonstration.

— Supposons (H_1) et (H_2).

— Posons

$$g_n = |f| + |f_n| - |f - f_n|$$

Remarquons que g_n est un fonction composée de fonctions intégrables, donc intégrable elle aussi.

Nous avons donc d'après le lemme de Fatou :

$$\int_E \underline{\lim}_{n\to+\infty} g_n \, d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_E g_n \, d\mu$$

Or

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_E g_n \, d\mu = \underline{\lim}_{n\to+\infty} \left(\int_E |f| \ d\mu + \int_E |f_n| \ d\mu - \int_E |f_n - f| \ d\mu \right)$$

D'après les propriétés sur les limites supérieures et inférieures, nous pouvons écrire :

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_E g_n \, d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_E |f| \ d\mu + \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_E |f_n| \ d\mu + \underline{\lim}_{n\to+\infty} (- \int_E |f_n - f| \ d\mu)$$

Observons les deux choses suivantes :

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_E |f| \ d\mu = \int_E |f| \ d\mu$$

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_E |f_n| \ d\mu \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_E |f_n| \ d\mu \ et \ \overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_E |f_n| \ d\mu \leq \int_E |f| \ d\mu$$

(La deuxième ligne s'obtient d'après les propriétés sur les limites puis avec (H_2))

On a donc finalement :

$$\int_E \underline{\lim}_{n\to+\infty} g_n \, d\mu \leq 2 \int_E |f| \ d\mu + \underline{\lim}_{n\to+\infty} \left(- \int_E |f_n - f| \ d\mu \right)$$

Avec

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \left(- \int_E |f_n - f| \ d\mu \right) = - \overline{\lim}_{n\to+\infty} \left(\int_E |f_n - f| \ d\mu \right)$$

On remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_E |f_n - f| \ d\mu \geq 0 \Rightarrow \limsup_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f| \ d\mu \geq 0$$

Et donc

$$2 \int_E |f| \ d\mu - \limsup_{n\to+\infty} \left(\int_E |f_n - f| \ d\mu \right) \leq 2 \int_E |f| \ d\mu$$

(Nous avons à present un encadrement à droite).

À gauche, nous avons :

$$
\begin{aligned}
\int_E \underline{\lim}_{n\to+\infty} g_n \, d\mu &= \int_E \underline{\lim}_{n\to+\infty} \left(|f| + |f_n| - |f - f_n|\right) \, d\mu \\
&= \int_E |f| + \underline{\lim}_{n\to+\infty} \left(|f_n| + |f - f_n|\right) \, d\mu \\
&\geq \int_E |f| + \underline{\lim}_{n\to+\infty} |f_n| + \underline{\lim}_{n\to+\infty} |f - f_n| \, d\mu \\
&= 2\int_E |f| \, d\mu
\end{aligned}
$$

On peut donc écrire :

$$
2\int_E |f| \, d\mu \leq 2\int_E |f| \, d\mu - \overline{\lim}_{n\to+\infty} \left(\int_E |f_n - f| \, d\mu \right) \leq 2\int_E |f| \, d\mu
$$

Ce qui est équivalent à :

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq -\overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f| \, d\mu \leq 0 \\
\Leftrightarrow\ & 0 \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_E |f - f_n| \, d\mu \leq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_E |f - f_n| \, d\mu = 0
\end{aligned}
$$

En observant que nous travaillons avec des intégrales positives, et en utilisant le fait que la limite supérieure majore la limite simple, nous concluons la preuve du théorème de Scheffé.

$\square$

Théorème de convergence de Vitali

Après avoir travaillé sur la convergence de Scheffé, nous allons aborder le théorème de convergence de Vitali.
Nous procéderons d'une manière similaire, c'est à dire que nous commencerons par expliquer les hypothèses nécessaires, pour ensuite formuler le résultat et le démontrer.
Nous terminerons en essayant d'expliquer son intérêt et en quoi est-il lié avec le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Théorème. *Soit* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré fini. On suppose qu'il existe une fonction* $f\colon E \to \mathbb{R}$ *tel que* $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)\mu - p.p.$ *dans* E.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***uniformément intégrable (U.I.)*** *et* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E |f_n|\, d\mu < +\infty$ *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu = 0$$

La construction du théorème :

Nous commençons par nous placer dans un espace mesuré fini $(E, \mathcal{A}, \mu)$.
Soit une suite de fonction f_n dans $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$.
La première hypothèse est la suivante :

Il existe une fonction f de E à valeurs dans $\mathbb{R}$ vers laquelle converge la suite f_n $\mu - p.p.$
C'est à dire :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)\ \mu - p.p.$$

(Notons que nous n'imposons pas de condition sur f.)

Comme deuxième hypothèse, il nous faut l'intégrabilité uniforme de la suite f_n.
On dit que f_n est uniformément intégrable si :

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, A \in \mathcal{A} \quad \left(\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f_n(x)|\ d\mu(x) \leq \epsilon\right)$$

Et enfin la dernière hypothèse sera une forme de caractérisation de l'intégrabilité de f_n, que nous écrirons de la façon suivante :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E |f_n(x)|\, d\mu(x) < +\infty$$

Une fois ces trois hypothèses satisfaites, le théorème de Vitali énonce le résultat suivant :

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n - f|\, d\mu = 0$$

Nous remarquons un résultat similaire à celui donné par la convergence dominée de Lebesgue, ainsi que le théorème de Scheffé.

La différence ici encore, se situe sur les hypothèses. Ainsi nous ne postulons plus sur la majoration de la limite de l'intégrale de fn, et nous nous contentons de sa simple intégrabilité.

Il nous faudra donc utliser l'intégrabilité uniforme afin de tout de même parvenir au résultat final.

Démonstration.

Soit f_n une suite de fonction dans $\mathcal{L}^1(E,\mathcal{A},\mu)$. uniformément intégrable, il vient donc :

$$\forall\,\epsilon_1 > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \quad \forall\,n \in \mathbb{N} \quad \forall\,A \in \mathcal{A} \quad \left(\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f_n(x)|\; d\mu(x) \leq \epsilon_1\right)$$

Voilà donc l'intégrale des $|f_n|$ pour tout n sur un ensemble A majorée. L'objectif étant de parvenir à un résultat sur E, nous poursuivons le raisonnement en observant que $E = A + E \setminus A$.

À partir de là, si nous voulons continuer, il nous faut introduire un nouveau théorème. Le théorème d'Egorov, qui dit la chose suivante :

Théorème. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction de E dans $\mathbb{R}$ convergeant vers f $\mu - p.p.$ (avec (f_n) et f mesurables). Alors*

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists \quad A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) \leq \epsilon \quad \textit{et } f_n \xrightarrow{C.U} f \textit{ sur } E \setminus A.$$

Nous pouvons utiliser ce théorème car nous sommes bien dans un espace mesuré fini avec une convergence simple.

Observons que $\exists\ \forall\ \Rightarrow\ \forall\ \exists$. Nous pouvons donc faire coïncider notre δ et notre A avec ceux choisis pour appliquer l'intégrabilité uniforme.
Nous nous retrouvons alors, d'après le théorème d'Egorov, avec une convergence uniforme sur le complémentaire de A. Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \leq N \quad \forall x \in E \setminus A \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon_2$$
$$\Rightarrow \int_{E\setminus A} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon_2$$

Finalement :

$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n > N_1, \forall x \in E,$

$$\begin{aligned}\int_E |f_n(x) - f(x)|\ d\mu(x) &= \int_A |f_n(x) - f(X)|\ d\mu(x) + \int_{E\setminus A} |f_n(x) - f(x)|\ d\mu(x)\\ &< \int_A |f_n(x) - f(x)|\ d\mu(x) + \epsilon\end{aligned}$$

Nous utilisons ici l'inégalité triangulaire sur les intégrales, et obtenons la majoration suivante :

$$\begin{aligned}\int_A |f_n(x) - f(x)|\ d\mu(x) + \epsilon &\leq \int_A |f_n(x)|\ d\mu(x) + \int_A |f(x)|\ d\mu(x) + \epsilon\\ &< \epsilon_1 + \epsilon_2 + \int_A |f(x)|\ d\mu(x) \quad \text{(D'après l'intégrabilité uniforme)}\end{aligned}$$

Nous nous retrouvons donc avec une seule intégrale à majorer, le principal souci ici, est que nous n'avons pas de majoration, à priori, de l'intégrale de f sur A.

Nous allons donc décomposer la fonction f en deux parties distinctes.

$$f^+(x) := \{f(x) \mid f(x) > f_n(x)\}$$
$$f^-(x) := \{f(x) \mid f(x) \leq f_n(x)\}$$

Ce qui nous donne

$$\int_A |f(x)|\ d\mu(x) = \int_A \left|f^+(x)\right|\ d\mu(x) + \int_A \left|f^-(x)\right|\ d\mu(x)$$

La majoration de f^- est triviale, il ne manque donc plus que celle de f^+ :

$$\forall \epsilon_3 > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n > N_2, \forall x \in A, f_n(x) - \epsilon_3 \leq f(x) \leq f_n(x) + \epsilon_3 \leq \epsilon_1 + \epsilon_3$$

Nous pouvons finalement conclure :

$$\forall n > \max\{N_1, N_2\}, \forall x \in E, \int_E |f_n(x) - f(x)|\ d\mu(x) < 3\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

Il nous suffit de poser : $\epsilon = 3\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ pour retrouver le résultat recherché.

$\square$

Conclusion

Afin de conclure ce travail de stage, nous dirions que nous avons bien mieux compris la grande difficulté qui se cachait derrière chaque résultat. Il faut en fait maintenir en permanence une attention vive sur les subtilités qu'apportent les conditions initiales, les espaces de raisonnement. Il est plus clair maintenant, que ce que nous cherchons à faire est de trouver les manipulations qu'autorisent les hypothèses de départ.
Le but est d'exploiter au mieux les outils tels que la convergence simple, les majorations permisent par les limites supérieures et inférieures, la finitude de la mesure etc Afin d'aboutir à des permutations permettant de faciliter l'obtention de résultats.

Annexe

Démonstration du théorème d'Egorov

Nous démontrerons ici ce résultat que nous avons utilisé lors de la partie 3 qui traitait du théorème de Vitali.

Le théorème d'Egorov stipule que, si nous avons une convergence simple dans un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$ qui est fini, nous pouvons trouver un sous-ensemble de E tel qu'il y ait convergence uniforme sur son complémentaire.

Théorème. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E convergeant vers f μ-p.p. (avec (f_n) et f mesurables). Alors*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ A \in \mathcal{A},\ \mu(A) \leq \epsilon \textit{ et } f_n \xrightarrow{C.U} f \textit{ sur } E \setminus A.$$

La démonstration portera sur la construction d'un tel espace.

Démonstration. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini.
Soit $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite de E convergeant vers f μ-p.p. (avec (f_n) et f mesurables).
Commençons par définir $N = \{x \in E \,|\, f_n \nrightarrow f\}$ (avec donc $\mu(N) = 0$).

$$\forall k, n \in \mathbb{N} \quad A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} \left\{ |f - f_n| \geq \frac{1}{k} \right\} \quad \text{et} \quad N_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(k)$$

Fixons k.
Supposons $x \in N_k$, alors $x \in A_n(k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc, pour chaque n, il existe $m > n$ tel que $|f(x) - f_m(x)| > \frac{1}{k}$, c'est-à-dire que $f_n(x)$ ne converge pas vers $f(x)$, donc $x \in N$.
Par conséquent :

$$N_k \subseteq N \Rightarrow \mu(N_k) = 0 \quad \text{(monotonicité)}$$

Pour k fixé, $A_n(k)$ est décroissante. Leurs intersections étant N_k, nous avons :

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n(k)) = \mu(N_k) = 0$$

Fixons à présent $\epsilon > 0$.
Nous pouvons utiliser l'hypothèse de la mesure finie pour écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists n_k \in \mathbb{N} \quad \mu(A_{n_k}(k)) < \frac{\epsilon}{2^k}$$

(On utilise la continuité à droite pour déduire l'existence d'une telle majoration).

On définit maintenant $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k}(k)$.
La sous-additivité implique :

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k}(k)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{n_k}(k)) < \frac{\epsilon}{2^k}$$

De plus, nous avons également l'implication suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x \notin A \Rightarrow x \notin A_{n_k}(k)$$

Donc

$$\forall m > n_k, \quad |f(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}$$

Ainsi

$$m > n_k \Rightarrow \sup_{x \notin A} |f(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}$$

Ce qui achève la preuve de la convergence uniforme de f_n vers f sur le complémentaire de A.

$\square$

Sources :

- *Analyse réelle et complexe, Walter Rudin.*