Projection orthogonale et Estimateur des MCO

Julien Parfait Bidias Assala

2024-08-23

Background

La projection orthogonale joue un rôle fondamental dans la compréhension de l'estimateur des moindres carrés ordinaires (MCO) en régression linéaire. Avant de plonger dans la démonstration mathématique, rappelons d'abord ce qu'est une projection orthogonale et comment elle se connecte à l'estimation des coefficients en régression.

1. Rappel : Projection orthogonale

Considérons un espace vectoriel euclidien de dimension finie $\mathbb{R}^n$ et un sous-espace S de $\mathbb{R}^n$. Pour un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$, la projection orthogonale de y sur S est le vecteur $\hat{y} \in S$ tel que la distance entre y et $\hat{y}$ est minimale. Autrement dit, $\hat{y}$ est le vecteur le plus proche de y dans S.

Mathématiquement, la projection orthogonale $\hat{y}$ satisfait :

$$\|y - \hat{y}\| = \min_{z \in S} \|y - z\|,$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne (ou la distance euclidienne).

Projection orthogonale

De plus, la condition de projection orthogonale impose que le vecteur de résidus $y - \hat{y}$ soit orthogonal à tout vecteur du sous-espace S :

$$(y - \hat{y}) \perp S.$$

2. Lien avec l'estimateur des Moindres Carrés Ordinaires (MCO)

En régression linéaire, on cherche à ajuster un modèle de la forme :

$$y = X\beta + \epsilon,$$

où :

- y est le vecteur des observations (de taille $n \times 1$),
- X est la matrice des variables explicatives (de taille $n \times p$),
- β est le vecteur des coefficients à estimer (de taille $p \times 1$),
- ϵ est le vecteur des résidus (de taille $n \times 1$).

Lien avec l'estimateur des Moindres Carrés Ordinaires (MCO)

L'objectif des moindres carrés ordinaires est de minimiser la somme des carrés des résidus ϵ, c'est-à-dire de minimiser :

$$\|y - X\beta\|^2.$$

L'idée principale est de reconnaître que $\hat{y} = X\hat{\beta}$ est la projection orthogonale de y sur l'espace engendré par les colonnes de X (noté $\mathrm{Im}(X)$).

3. Démonstration mathématique : Projection et Estimateur des MCO

- Étape 1 : Condition d'orthogonalité des résidus

Par définition de la projection orthogonale, les résidus $y - X\hat{\beta}$ doivent être orthogonaux à l'espace $\mathrm{Im}(X)$. Cela signifie que :

$$X^\top(y - X\hat{\beta}) = 0.$$

- Étape 2 : Résolution de l'équation normale

Développons cette équation :

$$X^\top y - X^\top X\hat{\beta} = 0.$$

Résolution de l'équation normale

En réarrangeant, on obtient :

$$X^\top X\hat{\beta} = X^\top y.$$

Si la matrice $X^\top X$ est inversible, l'estimateur des MCO est donné par :

$$\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1}X^\top y.$$

Interprétation

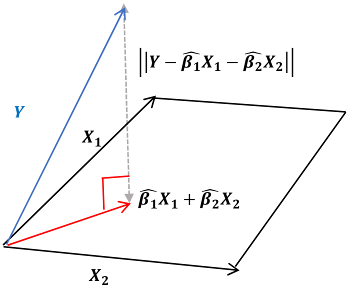
- Étape 3 : Interprétation géométrique

L'estimateur $\hat{\beta}$ minimise la distance entre y et $X\beta$, c'est-à-dire que $X\hat{\beta}$ est la projection orthogonale de y sur $\mathrm{Im}(X)$. Le vecteur de résidus $y - X\hat{\beta}$ est donc orthogonal à tous les vecteurs de $\mathrm{Im}(X)$, ce qui traduit l'idée que la projection minimise l'erreur dans une perspective de moindres carrés.

Représentation graphique

Pour $X = (X_1 X_2)$ et $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$

Figure 1: Représentation graphique de la projection



Mise en oeuvre avec le logiciel R

Le programme suivant permet de calculer l'estimateur $\hat{\beta}$ de β.

```
beta.MCO <- function(X, Y){
  if(det(t(X)%*%X)!=0){
    beta <- solve(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%Y
  } else{
    Print("Matrice singulière")
  }
  return(beta)
}
```

solve permet de calculer l'inverse de la matrice $X'X$ i.e $(X'X)^{-1}$. t(X) : calcule la transposée de X. t(X)% * % X : effectue le produit matriciel $X'X$. La condition det(t(X) %* %X)!=0 pour préciser que le calcul de l'estimateur ne peut se faire que si $\det(X'X) \neq 0$.

Jeu de données

Considérons le jeu de données ci-dessous :

Table 1: Données

Price	surface	reparation	coffre	poids	longueur	deplacement	origine
4099	22	3	11	2930	186	121	0
4749	17	3	11	3350	173	258	0
3799	22	3	12	2640	168	121	0
4816	20	3	16	3250	196	196	0
7827	15	4	20	4080	222	350	1
5788	18	3	21	3670	218	231	1
4453	26	3	10	2230	170	304	1
5189	20	3	16	3280	200	196	1

Application du calcul de l'estimateur

```
X <- base[, 2:ncol(base)]
Y <- base[, 1]
beta.MCO(X, Y)
```

Table 2: Estimateur MCO

	$\hat{\beta}$
surface	-152.443
reparation	1254.620
coffre	1.426
poids	-0.635
longueur	27.492
deplacement	3.653
origine	276.072

Mise en oeuvre sur Pyhton

```python
import numpy as np

def beta_ols(X, Y):
    if np.linalg.det(X.T @ X) != 0:
        beta = np.linalg.inv(X.T @ X) @ X.T @ Y
    else:
        print("Matrice singulière")
        beta = None
    return beta
```

4. Conclusion

En résumé, l'estimation des coefficients par les moindres carrés ordinaires repose sur une projection orthogonale du vecteur des observations y sur l'espace engendré par les colonnes de X.