Mini-projet Processus Stochastiques

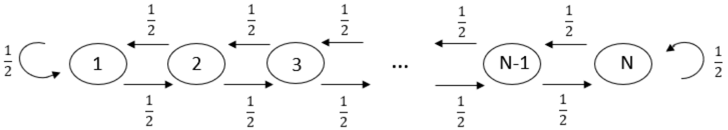
Julien Choukroun & Jessica Gourdon & Luc Sagnes

Polytech Nice Sophia

9 Décembre 2020

Présentation du sujet

On considère la marche aléatoire semi-réfléchie sur 1,2,...,N.
Concrètement, on choisit au hasard une position initiale entre 1 et N.
On se déplace de façon équiprobable de $+1$ ou -1.
Si on est dans les états 1 ou N, on peut soit rester dans cet état soit repartir vers l'état voisin de manière équiprobable.
On note X_n la position où l'on se trouve après n étapes.



Montrer que X_n est une chaîne de Markov

Montrons par récurrence que :
$\forall n \geq 1, P(X_{n+1} = y | X_n = x_n, ..., X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = y | X_n = x_n)$

Initialisation

On vérifie pour n=1 :

$P(X_2 = y | X_1 = x_1, X_0 = x_0)$
$= \frac{P(X_2=y, X_1=x_1, X_0=x_0)}{P(X_1=x_1, X_0=x_0)}$
$= \frac{P(X_2=y, X_1=x_1) \times P(X_0=x_0)}{P(X_1=x_1, X_0=x_0)}$

car les X_i sont indépendants

$= \frac{P(X_2=y, X_1=x_1) \times P(X_0=x_0)}{P(X_1=x_1) \times P(X_0=x_0)}$
$= \frac{P(X_2=y, X_1=x_1)}{P(X_1=x_1)}$
$= P(X_2 = y | X_1 = x_1)$

Montrer que X_n est une chaîne de Markov

Hérédité

$$P(X_{n+2} = z | X_{n+1} = y, X_n = x_n, ..., X_0 = x_0)$$

$$= \frac{P(X_{n+2}=z, X_{n+1}=y, X_n=x_n, ..., X_0=x_0)}{P(X_{n+1}=y, X_n=x_n, ..., X_0=x_0)}$$

car les X_i sont indépendants

$$= \frac{P(X_{n+2}=z)}{P(X_{n+1}=y)} \times \frac{P(X_{n+1}=y, X_n=x_n, ..., X_0=x_0)}{P(X_n=x_n, ..., X_0=x_0)}$$

$$= \frac{P(X_{n+2}=z)}{P(X_{n+1}=y)} \times P(X_{n+1} = y | X_n = x_n, ..., X_0 = x_0)$$

Hypothèse de récurrence :

$$= \frac{P(X_{n+2}=z)}{P(X_{n+1}=y)} \times P(X_{n+1} = y | X_n = x_n)$$

Montrer que X_n est une chaîne de Markov

Fin de l'hérédité

$$= \frac{P(X_{n+2}{=}z)}{P(X_{n+1}{=}y)} \times \frac{P(X_{n+1}{=}y, X_n{=}x_n)}{P(X_n{=}x_n)}$$

$$= \frac{P(X_{n+2}{=}z, X_{n+1}{=}y, X_n{=}x_n)}{P(X_{n+1}{=}y, X_n{=}x_n)}$$

car les X_i sont indépendants

$$= \frac{P(X_{n+2}{=}z, X_{n+1}{=}y) \times P(X_n{=}x_n)}{P(X_{n+1}{=}y, X_n{=}x_n)}$$

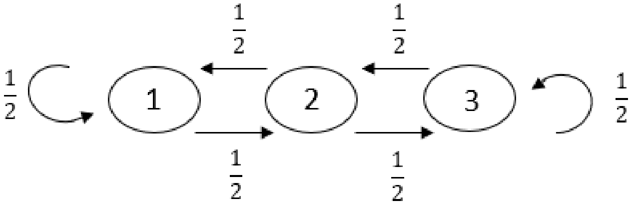
$$= \frac{P(X_{n+2}{=}z, X_{n+1}{=}y)}{P(X_{n+1}{=}y)}$$

$$= P(X_{n+2} = z | X_{n+1} = y)$$

Donner la matrice de transition

Cas simple : N=3

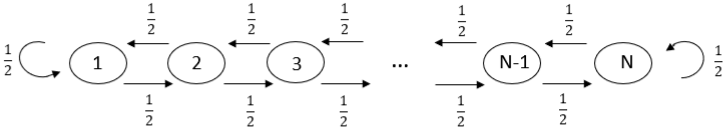
$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$



Donner la matrice de transition

Généralisation pour N :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

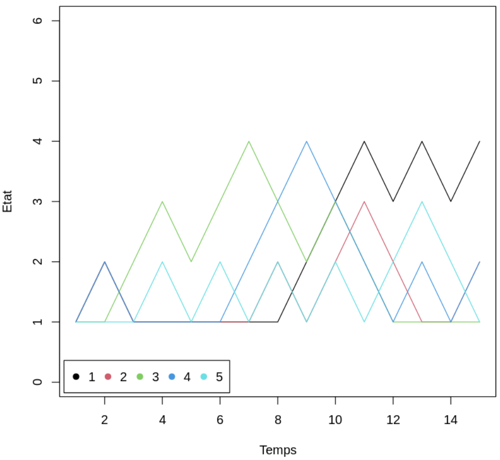


Tracer la trajectoire de *Xn* jusqu'à n=15

Nous avons réalisé 5 tests de marche aléatoire :

A matrix: 15 × 5 of type dbl

1	1	1	1	1
2	2	1	2	1
1	1	2	1	1
1	1	3	1	2
1	1	2	1	1
1	1	3	1	2
1	1	4	2	1
1	2	3	3	2
2	1	2	4	1
3	2	3	3	2
4	3	2	2	1
3	2	1	1	2
4	1	1	2	3
3	1	1	1	2
4	2	1	2	1



Déterminer la loi de X_7

D'après le cours, soit (X_n) une chaine de Markov de loi initiale μ_0 et de matrice de transistion P. Alors :

$\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n = \mu_0 \times P^n$

Ici, on chosit au hasard une position initiale entre 1 et N.

Alors, μ_0 suit une loi uniforme discrète sur 1,...,N.

Donc, $\mu_0 = (\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$

Déterminer la loi de X_7

Donc :

$X_7 = \mu_7 = \mu_0 \times P^7$

avec :

$\mu_0 = \left(\frac{1}{N}\,\frac{1}{N} \cdots \frac{1}{N}\right)$

et :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Déterminer la loi de X_7

Cas N=3

$X_7 = \mu_7 = \mu_0 \times P^7$

$$= \left(\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\right) \times \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^7$$

Pour calculer P^7, on veut diagonaliser P.

Calcul des valeurs propres de P :

det(P-$\lambda \times I_3$)= $-\lambda^3 + \lambda^2 + \frac{1}{4} \times \lambda - \frac{1}{4}$

On sait que 1 est valeur propre de P, donc grâce à une division euclidienne on a :

det(P-$\lambda \times I_3$)= $(\lambda - 1) \times (-\lambda^2 + \frac{1}{4})$

= -$(\lambda - 1) \times (\lambda - \frac{1}{2}) \times (\lambda + \frac{1}{2})$

Donc, Sp(P)=$\{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$

Déterminer la loi de X_7

Cas N=3

On sait que le vecteur propre associé à la valeur propre 1 est $(1, 1, 1)$
On trouve un vecteur propre associé à $-\frac{1}{2}$ égal à $(1, -2, 1)$
On trouve un vecteur propre associé à $\frac{1}{2}$ égal à $(-1, 0, 1)$
On a donc : $P = QDQ^{-1}$
avec :

$$D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Déterminer la loi de X_7

Cas N=3

$P^7 = QD^7Q^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 43/128 & 43/128 & 21/64 \\ 43/128 & 21/64 & 43/128 \\ 21/64 & 43/128 & 43/128 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$X_7 = \left(\tfrac{1}{3}\,\tfrac{1}{3}\,\tfrac{1}{3}\right) \times \begin{pmatrix} 43/128 & 43/128 & 21/64 \\ 43/128 & 21/64 & 43/128 \\ 21/64 & 43/128 & 43/128 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\tfrac{1}{3}\,\tfrac{1}{3}\,\tfrac{1}{3}\right)$$

Déterminer la loi de X_7

Cas N=6

$X_7 = \mu_7$

$=\mu_0 \times P^7$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^7$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Déterminer la loi de X_7

Par identification, on peut dire que :
$\forall N \geq 2, X_7 = \left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N}\right)$

La chaîne est-elle irréductible, récurrente, périodique ?

Soit E l'espace des états,

• E est un ensemble clos et irréductible. Donc, E est une classe de récurrence.

• E n'est constituée que d'une seule classe de récurrence, donc la chaîne de Markov est irréductible.

• La chaîne est récurrente, et tous les états ont même période, égale à 1.

• La chaîne de Markov est donc apériodique.

La chaine possède-t-elle une loi invariante ?

Il faut trouver Π tel que $\Pi * P = \Pi$

- Toute matrice de transition possède au moins une loi invariante.
- Lorsque la chaine de Markov est irréductible, on a unicité de la loi invariante.
- Il existe donc une unique loi invariante pour notre chaine.

Y-a t'il convergence en loi de la chaîne ?

Puisque la chaîne de Markov est irréductible et apériodique de la loi invariante Π, alors : $\forall i, j \in E, P_{i,j}^{(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \Pi_j$
En particulier, on a que : pour toute loi initiale $\mu_0, X_n \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \Pi$
$\mu_0 P^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \Pi$

Y-a t'il convergence en loi de la chaîne ?

Cas N=3

On a $P = QDQ^{-1}$

et $P^n = QD\underbrace{Q^{-1}Q}_{=Id}DQ^{-1}...DQ^{-1}$

D'après la question 3 (loi de X_7), on a : $P^n = QD^nQ^{-1}$ avec

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1/2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$P^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Avec $\mu_0 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

$\mu_0 P^n = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \mu_0 = \Pi$

Y-a t'il convergence en loi de la chaîne ?

On en conclut donc qu'il y a convergence en loi de la chaine vers

$\Pi = (\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N})$

```
Π pour N =  2  :
       1   2
[1,] 0.5 0.5
Π pour N =  3  :
             1         2         3
[1,] 0.3333333 0.3333333 0.3333333
Π pour N =  4  :
        1    2    3    4
[1,] 0.25 0.25 0.25 0.25
Π pour N =  5  :
       1   2   3   4   5
[1,] 0.2 0.2 0.2 0.2 0.2
Π pour N =  6  :
             1         2         3         4         5         6
[1,] 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667
Π pour N =  7  :
             1         2         3         4         5         6         7
[1,] 0.1428571 0.1428571 0.1428571 0.1428571 0.1428571 0.1428571 0.1428571
```