

# Equations aux dérivées partielles

## Compte rendu du mini projet

Julien Choukroun - Jessica Gourdon

### Introduction

Le but de ce mini-projet est de pouvoir appliquer la méthode des différences finies dans un cas test réaliste : la simulation numérique de la distribution de la température dans une chambre.

Pour se faire, nous avons élaboré deux plans représentant deux exemples de chambre avec les positions de la porte, des fenêtres et des chauffages.

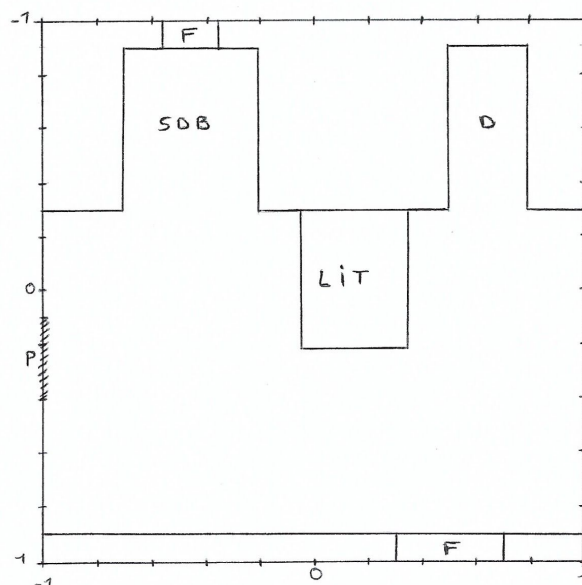
La porte est connectée à un hall d'entrée maintenue à température constante. Les fenêtres ne sont pas isolées. Ces éléments correspondent aux conditions aux limites de Dirichlet.

Les murs, quant à eux, sont parfaitement isolants. Ces éléments correspondent aux conditions aux limites de Neumann homogènes.

Nous avons inventé deux chambres de complexité différente.

La première représente parfaitement l'idée d'une suite parentale. Elle est constituée d'une pièce principale contenant la porte sur le mur ouest ainsi qu'une fenêtre située sur le mur sud. Directement reliés à cette pièce se trouvent la salle de bain, possédant une fenêtre, ainsi que le dressing, tous deux au nord de la chambre. Ces espaces ne sont séparés du reste de la chambre ni par une porte ni par un couloir. Cela permet une meilleure diffusion de la chaleur dans toute la suite parentale. (voir figure 1).

La deuxième chambre est d'une plus grande complexité. Celle-ci possède trois fenêtres au total. Elle est constituée d'une pièce principale avec la porte sur le mur sud. Au nord se trouve une première fenêtre ainsi qu'un espace détente directement relié à la pièce et contenant une deuxième fenêtre. A l'ouest de la chambre se trouve une arche (couloir large) menant à une salle de bain qui contient la dernière fenêtre. Le fait d'isoler avec l'arche un espace va rajouter de la complexité car la chaleur va se diffuser moins facilement dans toute la pièce. (voir figure 2).



P: porte  
 F: fenêtre  
 D: dressing  
 SDB: salle de bain

Figure 1 : Croquis de la première chambre

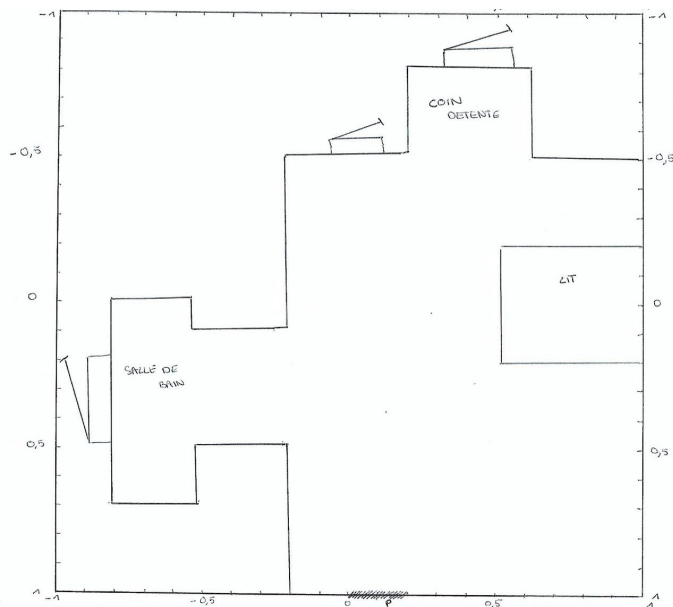


Figure 2 : Croquis de la deuxième chambre

## Partie 1

Cette partie porte sur la simulation statique de la chaleur.

Le but est de calculer la température ambiante dans nos chambres en faisant varier la température extérieure, la température de la porte, la température des chauffages et le nombre de points de la grille.

Tout d'abord, on a créé une grille bi-dimensionnelle pour pouvoir reproduire la géométrie de nos chambres et pour positionner les chauffages.

Puis, on a calculé la matrice du Laplacien à l'intérieur du domaine d'étude.

Ensuite, on s'est déplacé sur chacun des murs (ouest, est, sud et nord) pour identifier le positionnement des portes, des fenêtres et des chauffages. Si on se trouve sur une porte ou une fenêtre, on enregistre l'indice dans un tableau pour garder les conditions aux limites de Dirichlet. Sinon, on ajoute les conditions aux limites de Neumann pour les murs isolants.

On a créé un vecteur dans lequel on a ajouté les indices correspondant à la porte, aux fenêtres et aux chauffages.

Enfin, on a résolu le système d'équation  $-\Delta u = f$ . On a mis la solution dans une matrice correspondant à la grille et on a dessiné la solution sur la grille.

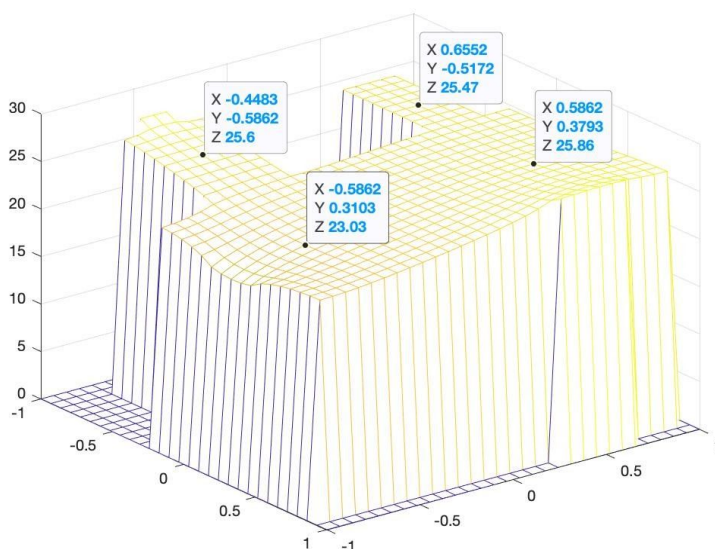
On a effectué deux simulations. Une sans aucun chauffage et une avec des chauffages.

Pour la simulation avec des chauffages, on a cherché la position idéale des chauffages, afin que la température ait une température ambiante agréable et soit la mieux distribuée.

### Simulation sans chauffage

On a simulé dans la première chambre le cas d'une journée en été à 28°C en extérieur avec la porte à 20°C. On observe que la température moyenne dans la chambre est de 24.8°C.

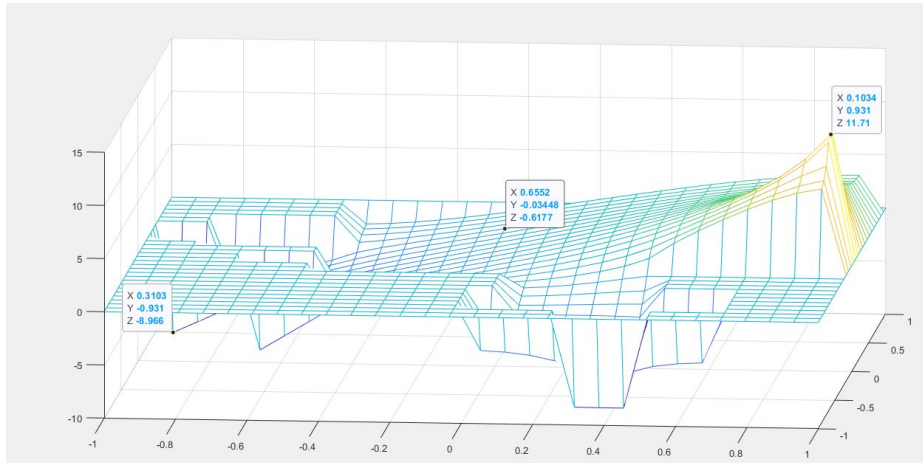
On peut également remarquer que la distribution de la température est assez homogène.



1e chambre en été (Température extérieure = 28°C) sans chauffage

On simule à présent dans la deuxième chambre le cas d'une journée très froide en hiver avec une température extérieure de  $-10^{\circ}\text{C}$ , le hall extérieur permet de chauffer notre porte pour atteindre  $15^{\circ}\text{C}$ . Dans cette configuration, les chauffages sont éteints. On observe bien ici des pics de températures négatives aux trois endroits où se situent les fenêtres. La seule 'source de chaleur' étant la porte, il y a une chute des températures entre le mur nord et le mur sud. La salle de bain a également une température très basse comme on pouvait s'y attendre. Ces éléments nous aident à déterminer l'emplacement idéal pour les chauffages par la suite.

La température ambiante au sein de la pièce dans cette configuration est de  $-0.39^{\circ}\text{C}$ .

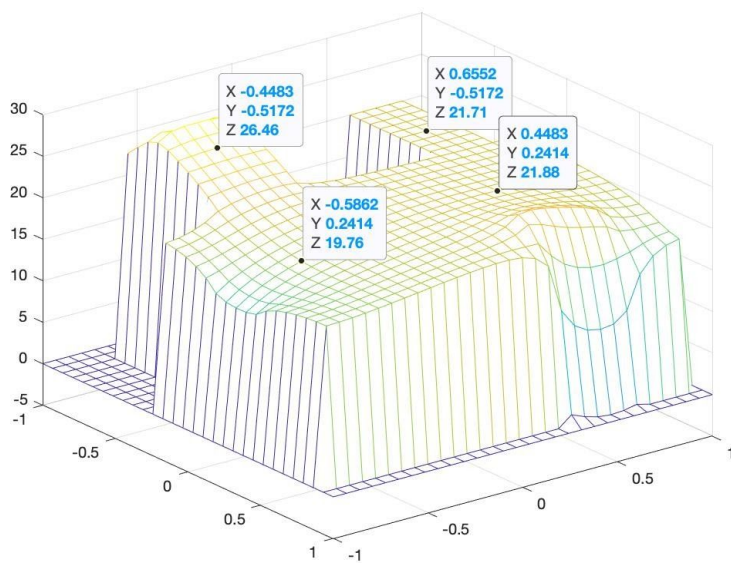


2e chambre en hiver (Température extérieure =  $-10^{\circ}\text{C}$ ) sans chauffage

## Simulation avec chauffage

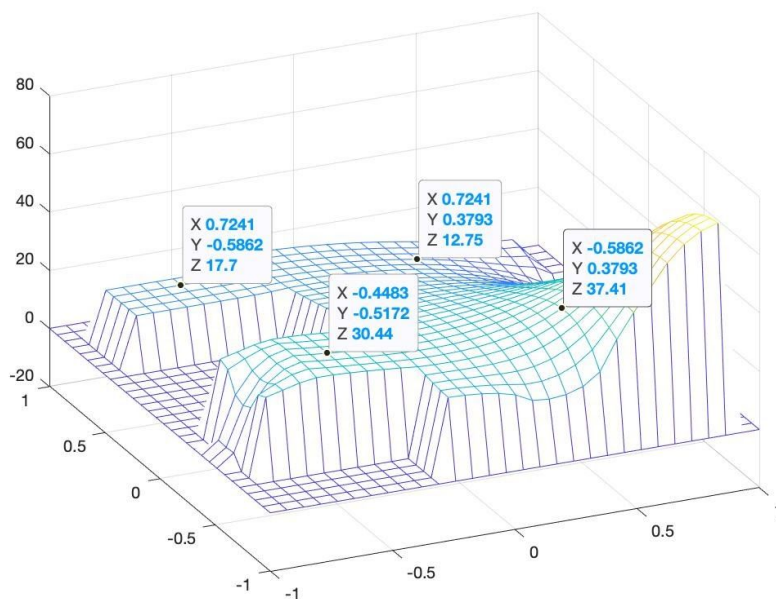
A présent, nous cherchons à trouver la position idéale des chauffages afin que la pièce ait une température ambiante agréable. Il est également très important de garder, dans la mesure du possible, une certaine stabilité de la température dans la pièce. Notre objectif est d'avoir une température ambiante à environ  $21^{\circ}\text{C}$ . Il est évident qu'à l'emplacement des chauffages la température sera plus élevée qu'ailleurs. Mais il est important de veiller à ce qu'il n'y ait pas de zone froide dans la chambre.

On a simulé dans la première chambre le cas d'une journée en hiver à  $-10^{\circ}\text{C}$  en extérieur avec la porte à  $15^{\circ}\text{C}$ . On a comparé deux positionnements de chauffage. Tout d'abord un bon positionnement avec des chauffages en dessous de chaque fenêtre. On observe que la température moyenne dans la chambre est de  $21.02^{\circ}\text{C}$ . On remarque aussi que la distribution de la température est correcte.



1e chambre avec chauffage optimal en hiver (Température extérieure =  $-10^{\circ}\text{C}$ )

Puis, on a modifié l'emplacement d'un chauffage. Le chauffage de la pièce principale ne se situe plus en dessous de la fenêtre mais plus du côté de la porte. On observe que la température moyenne dans la chambre est de  $24.83^{\circ}\text{C}$ . A en voir cette température moyenne, on pourrait croire que ce positionnement est meilleur. Mais on remarque que la distribution de la température n'est pas homogène. On en déduit que c'est un mauvais positionnement.

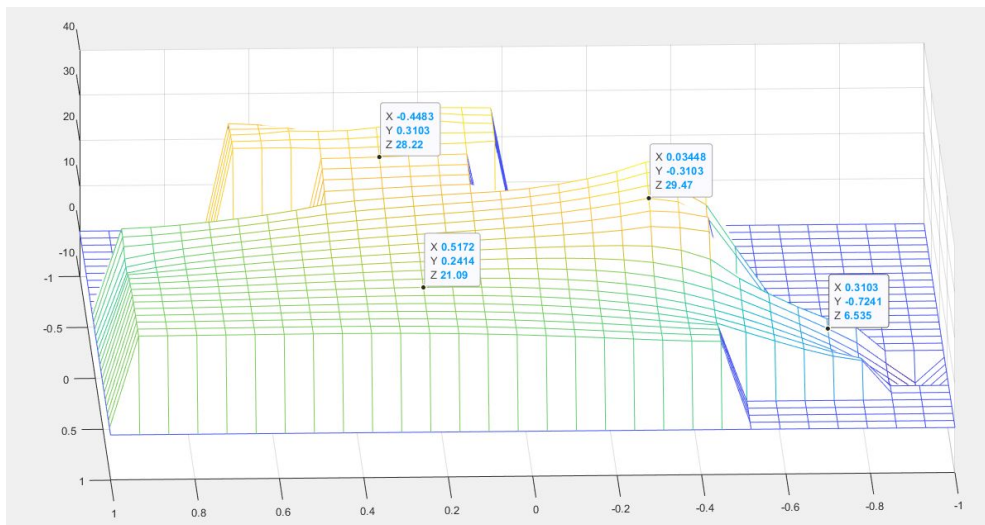


1e chambre avec une autre configuration de chauffage en hiver (Température extérieure =  $-10^{\circ}\text{C}$ )

La configuration de la deuxième chambre rend le placement des chauffages délicat. En effet, la porte, seul apport de chaleur à l'origine, se situe à l'opposé de l'espace détente qui sera donc très froid. De plus, la salle de bain est en quelque sorte isolée de la pièce par l'arche. Étant donné le nombre de fenêtres ainsi que l'agencement de la pièce, il est clair qu'un seul chauffage ne serait pas suffisant. Nous avons donc choisi d'en manipuler deux. Nous avons essayé différentes dispositions, nous avons fait varier la puissance de ceux-ci, ainsi que leur grandeur. Il a donc fallu trouver un équilibre.

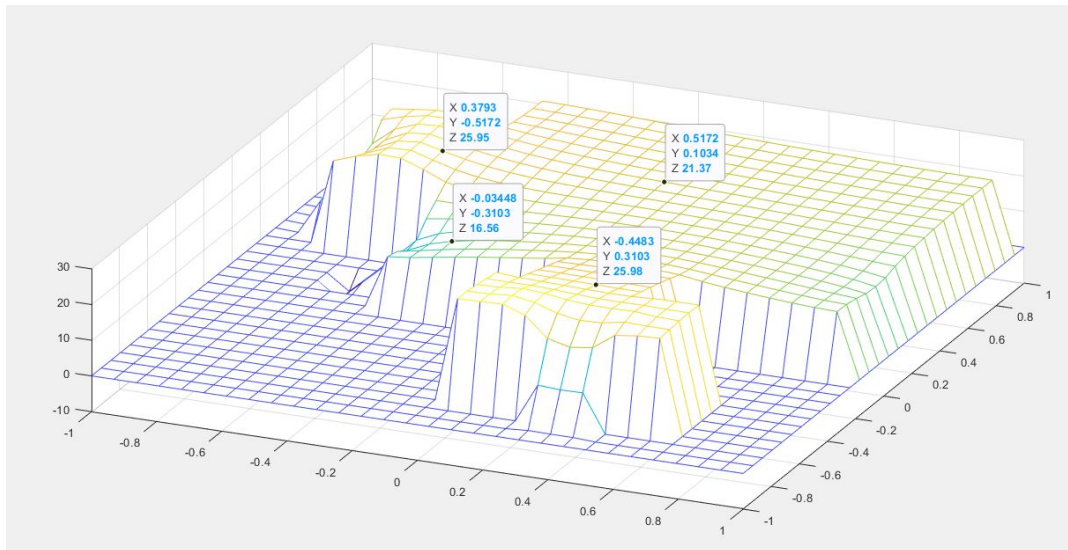
Pour une taille identique des différents chauffages, une puissance à 430, nous avons sélectionné deux exemples. Le premier révèle un problème, nous avons une température trop élevée dans les zones autour des chauffages et au contraire un espace détente avec une température bien trop basse ( $6^{\circ}\text{C}$ ).

Cette configuration montre qu'il est nécessaire d'avoir un chauffage dans ce coin détente. Nous n'aurions pas pu augmenter encore la température sinon celle-ci aurait été beaucoup trop élevée dans la salle de bain par exemple. Baisser celle-ci est également impossible car cela ferait baisser la température ambiante de la pièce. Elle est actuellement à  $20.97^{\circ}\text{C}$ .



2e chambre avec une configuration de chauffage en hiver (Température extérieure =  $-10^{\circ}\text{C}$ )

La deuxième configuration est idéale. Elle permet d'avoir une température ambiante de 21.11°C. Dans celle-ci, la température est relativement stable. En effet, il n'y a pas de zone froide.



1e chambre avec chauffage optimal en hiver (Température extérieure = -10°C)

## Partie 2

Cette partie porte sur la simulation instationnaire de la chaleur.

On veut observer l'évolution de la température au sein de la pièce au cours du temps.

Ici, on se sert toujours du Laplacien à l'intérieur du domaine. Mais au lieu de résoudre l'équation de Poisson  $-\Delta u = f$  (partie 1), on résout l'équation de la chaleur par la méthode d'Euler explicite et par la méthode d'Euler implicite.

On a également utilisé une boucle en temps pour simuler l'évolution de la température dans deux cas test différents.

Le premier test est un test en hiver où les chambres sont initialement froides et on va les chauffer progressivement.

Le deuxième test est un test en été où la température extérieure est très élevée et on va mettre le chauffage en mode climatisation pour les refroidir progressivement.



## Simulation en hiver

Pour nos deux chambres, on a réalisé plusieurs tests avec la méthode d'Euler explicite et implicite et avec différentes valeurs du cfl. Ces tests correspondent à une situation en plein hiver avec une température extérieure de -10°C. On souhaiterait obtenir une température ambiante supérieure à 21°C. On obtient les résultats ci-dessous.

### Chambre 1 :

Test	Méthode d'Euler	cfl	Temps (secondes)	Température moyenne (°C)
Hiver	Explicite	0.1	246.85	21.00
Hiver	Explicite	0.24	111.17	21.00
Hiver	Explicite	0.25	Diverge	Diverge
Hiver	Implicite	0.1	297.58	21.00
Hiver	Implicite	1	32.31	21.0001
Hiver	Implicite	2	15.07	21.0001
Hiver	Implicite	4	8.45	21.0003

### Chambre 2 :

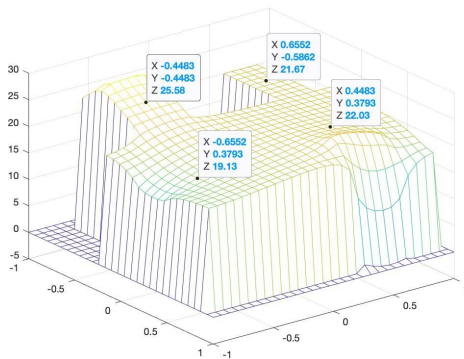
Méthode	CFL	Température stationnaire	Température après seuil	Valeur du compteur après seuil
Explicite	0.1	21.1112	21	9441
Explicite	0.24	21.1112	21	3932
Explicite	0.25	21.1112	DIVERGENT	DIVERGENT
Implicite	0.24	21.1112	21.0001	3938
Implicite	0.5	21.1112	21.0002	1892
Implicite	1.2	21.1112	21.0004	790



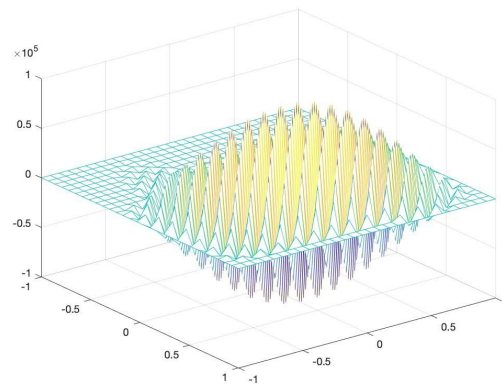
Au vu de tous ses tests, on observe que plus on augmente le cfl plus la valeur du compteur diminue (résultats en vert). Cela signifie que moins d'itérations sont nécessaires afin d'obtenir la température souhaitée. L'algorithme est donc plus rapide. Cela semble logique puisque le pas est proportionnel au cfl donc plus on augmente le cfl, plus le pas augmente. On arrive donc plus rapidement au seuil défini.

Cependant, il y a une autre conséquence à l'augmentation de ce cfl. En l'augmentant, on obtient des résultats moins précis. Ici, notre seuil est à 21°C. Lorsque le cfl est faible, la température lorsque l'algorithme s'arrête (quand on dépasse le seuil) prend exactement la valeur de 21°C. On a donc une grande précision. Plus on augmente le cfl, plus la température lorsque l'algorithme s'arrête s'écarte de la valeur seuil (observation en rouge). On observe ensuite que, pour le même cfl (à 0.24), le schéma explicite permet une plus grande précision en un nombre plus faible d'itération (les lignes en bleu). Le schéma explicite est donc plus rapide et plus précis que l'implicite. Cependant, le cfl en 2D utilisé ici doit demeurer inférieur strictement à 0.25. En effet, à partir de 0.25, le schéma diverge (voir photo en dessous). Cela semble logique puisque le schéma d'Euler explicite est conditionnellement stable sous la condition  $cfl < 0.5$ . En 2 dimensions, il faudra donc que la somme du cfl en x et du cfl en y soit strictement inférieure à 0.5. Or, ici il s'agit des mêmes cfl donc on doit avoir  $2 * cfl < 0.5$ .

Si l'on veut donc atteindre nos résultats rapidement, le schéma implicite sera le plus adapté car on peut augmenter son cfl (car le schéma est inconditionnellement stable). Cependant, on devra connaître une légère perte de précision.



Méthode Euler explicite, cfl=0.24



Méthode Euler explicite, cfl=0.25, diverge

## Simulation en été

Pour nos 2 chambres, nous avons à présent réalisé les simulations en plein été avec une température extérieure de 35°C, dans un but de refroidir la pièce pour qu'elle atteigne une température strictement inférieure à 22°C.

### Chambre 1 :

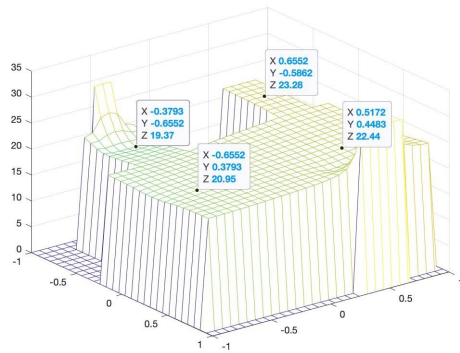
Test	Méthode d'Euler	cfl	Temps (secondes)	Température moyenne (°C)
Été	Explicite	0.1	69.778008	21.9998
Été	Explicite	0.24	30.391581	21.9996
Été	Explicite	0.25	Diverge	Diverge
Été	Implicite	0.1	93.42	21.9998
Été	Implicite	0.5	16.07	21.9983
Été	Implicite	1	8.17	21.9983

### Chambre 2 :

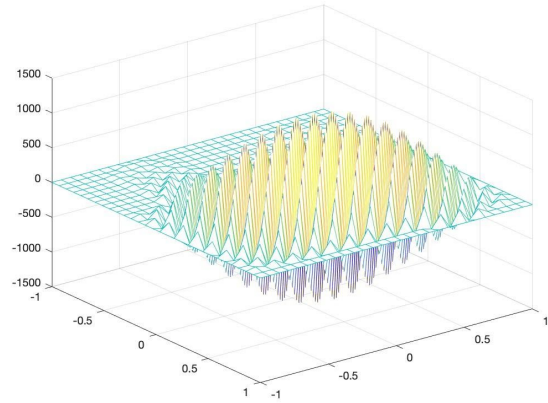
Méthode	CFL	Température stationnaire	Température après seuil	Valeur du compteur après seuil
Explicite	0.1	21.7332	22	5935
Explicite	0.24	21.7332	21.9999	2474
Explicite	0.25	21.7332	DIVERGENT	DIVERGENT
Implicite	0.24	21.7332	21.9999	2474
Implicite	0.5	21.7332	21.9995	1189
Implicite	1.2	21.7332	21.9984	497

Ces simulations (en été) confirment bien nos résultats concernant les simulations en hiver.

On remarque tout de même que la vitesse d'exécution est généralement plus rapide pour les simulations en été que pour celles en hiver. Cela est dû à une moins grosse différence de température entre le moment où le chauffage commence à fonctionner et le moment où l'on veut atteindre la température idéale. (passer de 0 à 21°C contre passer de 30 à 21°C en température ambiante).



Méthode Euler explicite,  $cfl=0.24$



Méthode Euler explicite,  $cfl=0.25$ , diverge

## Conclusion

Au cours de ce projet, nous avons pu appliquer toutes les notions théoriques abordées en cours. Nous avons pu observer concrètement les différences entre schéma implicite et explicite au niveau de leur stabilité ainsi que de leur vitesse. Il a également été intéressant de pouvoir comparer deux chambres dont les différents agencements nous ont permis d'adapter nos méthodes aux caractéristiques de ces pièces.