Convex Optimization
Homework 1

Exercice 1

$\boxed{1}$ Soit $A = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = 1, \ldots, n \}$

Soit $(u, v) \in A^2$, $\sigma \in [0, 1]$ $w = \sigma u + (1-\sigma) v$

$$\forall i \quad \begin{cases} \sigma \alpha_i \leq \sigma u_i \leq \sigma \beta_i & (x \mapsto \sigma x \text{ est croissante car } \sigma \geq 0) \\ (1-\sigma)\alpha_i \leq (1-\sigma) v_i \leq (1-\sigma)\beta_i & (x \mapsto (1-\sigma)x \text{ est crois car } (1-\sigma) \geq \end{cases}$$

En sommant

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_i \leq \sigma u_i + (1-\sigma) v_i \leq \beta_i$$

$$\alpha_i \leq w_i \leq \beta_i$$

Donc $w \in A$

Donc A est convexe

$\boxed{2}$ Soit $B = \{ x \in \mathbb{R}_+^2 \mid x_1 x_2 \geq 1 \}$

Soit $(u, v) \in B^2$, $\sigma \in [0, 1]$ $w = \sigma u + (1-\sigma) v$

$$w_1 w_2 = [\sigma u_1 + (1-\sigma) v_1] \times [\sigma u_2 + (1-\sigma) v_2]$$
$$= \sigma^2 u_1 u_2 + \sigma(1-\sigma)[u_1 v_2 + v_1 u_2] + (1-\sigma)^2 v_1 v_2$$

$(u_1, u_2, v_1, v_2) \in (\mathbb{R}_+)^4$ donc

$$w_1 w_2 \geq \sigma^2 u_1 u_2 + (1-\sigma)^2 v_1 v_2$$

$$\begin{cases} \sigma^2 u_1 u_2 \geq \sigma^2 \\ (1-\sigma)^2 v_1 v_2 \geq (1-\sigma)^2 \end{cases} \Rightarrow \text{Par somme } \sigma^2 u_1 u_2 + (1-\sigma)^2 v_1 v_2 \geq 1 + 2\sigma \ldots$$

$$\geq 1$$

Donc $w_1 w_2 \geq 1$ Donc $w \in B$

Donc B est convexe

$\boxed{3}$ Soit $C = \{x \mid \|x-x_0\|_2 \le \|x-y\|_2 \ \forall y \in S\}$ $S \subset \mathbb{R}^n$

Soit $x, x_0, y \in C \times C \times S$

$\|x-x_0\|_2 \le \|x-y\|_2$

$\Leftrightarrow (x-x_0)^T(x-x_0) \le (x-y)^T(x-y)$

$\Leftrightarrow \cancel{x^Tx} - 2x_0^T x + x_0^T x_0 \le \cancel{x^Tx} - 2y^T x + y^T y$

$\Leftrightarrow (-2x_0 + 2y)^T x \le y^T y - x_0^T x_0$

$\Leftrightarrow a^T x \le b$ avec $\begin{cases} a = 2(y - x_0) \\ b = y^T y - x_0^T x_0 = \|y\|_2 - \|x_0\|_2 \end{cases}$

C est un demi-espace pour y fixé

Donc

$$C = \bigcap_{y \in S} \{x \mid a^T x \le b \mid a = 2(y-x_0),\ b = \|y\|_2 - \|x_0\|_2\}$$

Or l'intersection d'espaces convexes est convexe

Donc C est convexe

$\boxed{4}$ Soit $D = \{x \mid dist(x,S) \le dist(x,T)\}$ $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$

avec $dist(x,S) = \inf\{\|x-z\|_2 \mid z \in S\}$

Si on prend | T la boule de rayon $R \in \mathbb{R}$
| S le complémentaire de la boule T dans $\mathbb{R}^n$

En dimension 2

On voit que u et v ∈ D mais ω n'appartient pas à D

$S = \{x \mid \|x\|_2 > R\}$

$T = \{x \mid \|x\|_2 \le R$

Soit $u, v, \varepsilon \in S \times S \times \mathbb{R}^+$ $x \in \mathbb{R}^n$

On peut écrire $\begin{cases} v = (R+\varepsilon)x \in S \\ u = -(R+\varepsilon)x \in S \end{cases}$

$dist(v,S) = 0 \Rightarrow dist(v,S) \le dist(v,T)$

$dist(u,S) = 0 \Rightarrow dist(u,S) \le dist(u,T)$

$\Rightarrow (u,v) \in D^2$

On pose $\omega = \sigma u + (1-\sigma) v$ avec $\sigma = \frac{1}{2}$

$\omega = -\sigma (R+\varepsilon) x + (1-\sigma)(R+\varepsilon) x$

$\omega = 0$ pour $\sigma = \frac{1}{2}$

Donc $\left| \begin{array}{l} \text{dist}(\omega, S) = R \\ \text{dist}(\omega, T) = 0 \end{array} \right.$

Donc $\omega \notin D$

Donc D n'est pas convexe

$\boxed{5}$ Soit $E = \{x \mid x + S_2 \subseteq S_1\}$ $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ S_1 convexe

$E = \{x \mid x + y \in S_1 \ \forall y \in S_2\}$

$= \bigcap_{y \in S_2} \{x \mid x + y \in S_1\}$

On pose $f : x \mapsto x + y$

f est de la forme $Ax + b$ avec $\left\{ \begin{array}{l} A = Id \\ b = y \end{array} \right.$

Donc f est affine

$E = \bigcap_{y \in S_2} \{x \mid f(x) \in S_1\}$

$\left\{ \begin{array}{l} S_1 \subseteq \mathbb{R}^n \text{ est convexe} \\ f \text{ est affine} \end{array} \right. \Rightarrow f^{-1}(S_1) = \{x \mid f(x) \in S_1\}$ est convexe

E est l'intersection d'espaces convexe donc est convexe

Exercice 2 :

Soit $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ sur $\mathbb{R}^2_{++}$

$\boxed{1}$ f est deux fois differenciable

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(\nabla^2 f) = -1$$

Or si $\nabla^2 f \in S^2_{++}$ alors $\det(\nabla^2 f) > 0$ (car produit des valeurs propres > 0) et de même $\det(\nabla^2 - f) < 0$

Donc $\nabla^2 f \notin S^2_{++}$

Donc f n'est ni convexe, ni concave

$\boxed{2}$ Soit $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{x_1 x_2}$ on $\mathbb{R}^2_{++}$

f est deux fois differentiable

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{2}{x_1^3 x_2} & \frac{1}{x_1^2 x_2^2} \\ \frac{1}{x_1^2 x_2^2} & \frac{2}{x_2^3 x_1} \end{pmatrix}$$

Pour montrer $\nabla^2 f \succcurlyeq 0$ on doit montrer

que $\forall x, y \geq 0$ et $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2_{++}$

$$z = (a\,b)^T \nabla^2 f \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \geq 0$$

$$z = (a\,b)\, \nabla^2 f \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2\left(a^2 x_1^{-3} y_1^{-1} + b^2 x_1^{-1} y_3^{-3} + ab\, x_2^{-2} y_2^{-2}\right)$$

En posant $v = a x_1^{-\frac{3}{2}} y_1^{-\frac{1}{2}}$ et $w = b x_1^{-\frac{1}{2}} y_2^{-\frac{3}{2}}$

$z = v^2 + w^2 + vw$

Donc $\left|\begin{array}{l} \text{si } v \geq 0 \text{ et } w \geq 0 \\ \text{si } v \leq 0 \text{ et } w \leq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \Big\} \; z \geq 0$

$\left|\begin{array}{l} \text{si } v \leq 0 \leq w \Rightarrow vw \leq w^2 \\ \text{si } w \leq 0 \leq v \Rightarrow vw \leq v^2 \end{array}\right.$ Donc $z \geq 0$

Donc f est convexe

$\boxed{3}$ Soit $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{x_2}$ sur $\mathbb{R}^2_{++}$

f est deux fois différentiable

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 0 & -1/x_2^2 \\ -\dfrac{1}{x_2^2} & \dfrac{2x_1}{x_2^3} \end{pmatrix}$$

$\det(\nabla^2 f) = -\dfrac{1}{x_2^4} < 0$

Donc $\nabla^2 f \notin S^2_{++}$

De même $\det(\nabla^2 - f) = -\dfrac{1}{x_2^4} < 0$

Donc $\nabla^2 - f \notin S^2_{++}$

Donc f n'est ni convexe, ni concave

$\boxed{4}$ Soit $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ $\alpha \in [0,1]$ sur $\mathbb{R}^2_{++}$

f est deux fois différenciables

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1) x_1^{\alpha-2} x_2^{1-\alpha} & \alpha x_1^{\alpha-1}(1-\alpha) x_2^{-\alpha} \\ \alpha x_1^{\alpha-1}(1-\alpha) x_2^{-\alpha} & (1-\alpha)(-\alpha) x_2^{-\alpha-1} x_1^{\alpha} \end{pmatrix}$$

$\det(\nabla^2 f) = 0$ Donc 0 est valeur propre

$\mathrm{Tr}(\nabla^2 f)$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ $\det(\nabla^2 f - \lambda I_d) = 0$

$\Leftrightarrow -\lambda(\alpha-1)\alpha\,[x_2^{-\alpha-1} x_1^{\alpha} + x_1^{\alpha-2} x_2^{1-\alpha}] + \lambda^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \underbrace{(\alpha-1)\alpha}_{\leq 0}\,\underbrace{[x_2^{-\alpha-1} x_1^{\alpha} + x_1^{\alpha-2} x_2^{1-\alpha}]}_{\geq 0} \leq 0 \end{cases}$

Donc $\nabla^2 f \preceq 0$ Donc f est concave

Exercice 3 :

$\boxed{1}$ Soit $f(X) = tr(X^{-1})$ dom $f = S^m_{++}$

. dom f est convexe

Soit $Z \in S^m$, $X \in S^m_{++}$, $t \in \mathbb{R}$ | $X + tZ \in S^m_{++}$
$\Leftrightarrow t \in I$

$Tr([X+tZ]^{-1}) = g(t)$

$X \in S^m_{++}$ Donc on peut écrire $X = X^{1/2} X^{1/2}$

$g(t) = tr([X^{1/2}X^{1/2} + X^{1/2}X^{-\frac{1}{2}} tV X^{-1/2} X^{+\frac{1}{2}}]^{-1})$

$= tr((X^{\frac{1}{2}} [Id + X^{-\frac{1}{2}} tV X^{-1/2}] X^{\frac{1}{2}})^{-1})$

$= tr(X^{-1/2} [Id + tX^{-\frac{1}{2}} V X^{-\frac{1}{2}}]^{-1} X^{-1/2})$

$X^{-1/2}$ et $V \in S^m_{++}$ et S^m respectivement donc

$\exists Q, \Lambda$ | $X^{-1/2} V X^{-1/2} = Q \Lambda Q^T$ avec Q une matrice orthogonale et Λ une matrice diagonale de valeurs propres λ_i.

Par cyclicité de la trace ($tr(ABC) = tr(CAB)$)

On a :

$g(t) = tr(X^{-1} [Id + tQ\Lambda Q^T]^{-1})$

$= tr(X^{-1}(Q[Id + t\Lambda]Q^T)^{-1})$ & $Q^{-1} = Q^T$

$= tr(X^{-1}(Q [Id + t\Lambda]^{-1} Q^T))$

$= tr(Q^T X^{-1} Q \cdot [Id + t\Lambda]^{-1})$ | $Id + t\Lambda$ est diagonale donc

$= \sum_{i=1}^{m} (Q^T X^{-1} Q)_{ii} \dfrac{1}{1 + t\lambda_i}$ où $(Q^T X^{-1} Q)_{ii}$ sont les coef diag de la matrice $Q^T X^{-1} Q$)

$(Q^T X^{-1} Q)_{ii} = q_i^T Z^{-1} q_i$ On $\forall x \neq \vec{0}$, $x_n^T Z^{-1} x > 0$ car $Z^{-1} \in S^m_{++}$

Donc $(Q^T X^{-1} Q)_{ii} > 0$

Donc $1 + t\lambda_i > 0 \Leftrightarrow t > -\frac{1}{\lambda_i}$

Donc $f_i(t) = \frac{1}{1+\lambda_i}$ est convexe $\forall t \in \left]-\frac{1}{\lambda_i}, +\infty\right[$

g est donc une somme positive de fonctions convexes

Donc g est convexe $\forall t \in \bigcap_{i=1}^{m} \left]-\frac{1}{\lambda_i}, +\infty\right[= G$

A priori $I \subseteq G$ Donc f est convexe

[2] Soit $f(X, y) = y^T X^{-1} y$ sur $S_{++}^m \times R^m$

D'après le cours on a

$$\frac{1}{2} y^T X^{-1} y = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \left(y^T x - \frac{1}{2} x^T X x\right)$$

$$\Rightarrow y^T X^{-1} y = \sup_{x} \left(2 y^T x - x^T X x\right)$$

$g_x(X, y) = 2y^T x - x^T X x$ est affine donc convexe en y et X

Le supremum d'une famille de fonction convexe est convexe

Donc f est convexe

[3] Soit $f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(X)$, $\text{dom } f = S_{++}^m$, $\sigma_i(X)$ étant les valeurs singulières de X

On peut écrire X, en le décomposant selon ses valeurs singulières :

$X = U \Sigma V^T$, on pose $Q = UV^T$

$$\mathrm{Tr}(Q^T X) = \mathrm{Tr}(V U^T U \Sigma V^T) = \mathrm{Tr}(V V^T U U^T \Sigma) = \mathrm{Tr}(\Sigma)$$

$$= \sum_i \sigma_i(X) = f(X)$$

Ainsi $\sup_{\sigma_{max}(Q)\leq 1} Tr(Q^T X) \geqslant f(X)$

$$\sup_{\sigma_{max}(Q)\leq 1} Tr(Q^T X) = \sup_{\sigma_{max}(Q)\leq 1} Tr(V^T Q^T U \Sigma)$$

$$= \sup_{\sigma_{max}(Q)\leq 1} \sum \lambda_i (U^T Q V)_{ii}$$

Où λ_i sont les valeurs propres de X

$$\sigma_{max}(Q) \leq 1 \Rightarrow \sup_{\sigma_{max}(Q)\leq 1} Tr(Q^T X) \leq \sup_{\sigma_{max}(Q)\leq 1} \sum \lambda_i \, \sigma_{max}(Q)$$

$$\leq \sup \sum \lambda_i = f(X)$$

On en conclu que

$$f(X) = \sup_{\sigma_{max}(Q)\leq 1} Tr(Q^T X)$$

$Tr(Q^T X)$ est convex en X pour tout Q avec $\sigma_{max}(Q)\leq 1$, une fonction linéaire donc f est convexe