Convex Optimization
Homework 2

DELAVANDE
Julien

Exercice 1:

1 Considérons $\min_x c^T x$

$Ax = b$

$x \geqslant 0$

Soit L, le lagrangien, $\lambda, v \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$

$$L(x, \lambda, v) = c^T x - \lambda^T x + v^T(b - Ax)$$
$$= (c - A^T v - \lambda)^T x + v^T b$$

$$g(\lambda, v) = \min_x L(x, \lambda, v) = \begin{cases} v^T b & \text{si } c - A^T v - \lambda = 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi le problème dual est

$$\max_v b^T v \quad c - A^T v - \lambda = 0 \quad \lambda \geqslant 0 \iff \boxed{\max_v b^T v \quad c \geqslant A^T v}$$

2 Considérons $\max_y b^T y$ $A^T y \leqslant c$ $\iff$ $\min_y -b^T y$ $A^T y \leqslant c$

$$L(y, \lambda) = -b^T y + \lambda^T A^T y - \lambda^T c = (-b + A\lambda)^T y - \lambda^T c$$

$$g(\lambda) = \min_y L(y, \lambda) = \begin{cases} -\lambda^T c & \text{si } -b + A\lambda = 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi le problème dual est

$$\max_{\lambda} \; -\lambda^T c \quad -b + A\lambda = 0 \quad \lambda \geq 0 \iff \boxed{\begin{array}{l} \min_{\lambda} \; c^T \lambda \\ A\lambda = b \\ \lambda \geq 0 \end{array}}$$

3. Considérons

$$\min_{x,y} \; c^T x - b^T y$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$
$$A^T y \leq c$$

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \upsilon) = c^T x - b^T y - \lambda_1^T x + \lambda_2^T (A^T y - c) + \upsilon^T (b - Ax)$$
$$= (c - \lambda_1 - A^T \upsilon)^T x + (-b + A\lambda_2)^T y - \lambda_2^T c + \upsilon^T b$$

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \upsilon) = \min_{x,y} L(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \upsilon) = \begin{cases} -\lambda_2^T c + \upsilon^T b & \text{si } \left| \begin{array}{l} c - \lambda_1 - A^T \upsilon = 0 \\ \text{et} \\ -b + A\lambda_2 = 0 \end{array} \right. \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi le problème dual est

$$\max_{\lambda_2, \upsilon} \; -\lambda_2^T c + \upsilon^T b \quad \begin{array}{l} c - \lambda_1 - A^T \upsilon = 0 \\ -b + A\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \end{array} \iff \max_{\lambda_2, \upsilon} \; b^T \upsilon - c^T \lambda_2 \quad \begin{array}{l} A\lambda_2 = b \\ \lambda_2 \geq 0 \\ A^T \upsilon \leq c \end{array}$$

$$\iff \boxed{\begin{array}{l} \min_{x,y} \; c^T x - b^T y \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ A^T y \leq c \end{array}}$$

Donc le problème est auto-dual

4. le problème self-dual cherche à minimiser le gap de dualité entre le problème primal et dual

On a dualité forte (Linear programs)

Donc $c^T x^* - b^T y^* = 0$ avec $\left| \begin{array}{l} x^* \text{ solution de } (P) \\ y^* \text{ solution de } (D) \end{array} \right.$

Donc le minimum du self dual est atteint en 0 pour x^* et y^*.

Exercice 2 :

$\boxed{1}$ Le conjugué d'une fonction f noté f^* est défini comme

$$f^*(y) = \sup_x \left(y^T x - f(x)\right)$$

Ainsi $\|x\|_1^*(y) = \sup_x \left(y^T x - \|x\|_1\right)$

$$= \sup_x \left(\sum_{i=1}^{d} y_i x_i - \sum_{i=1}^{d} |x_i|\right)$$

$$= \sup_x \left(\sum_{i=1}^{d} y_i x_i - |x_i|\right)$$

- Si il existe $y_i > 1$ alors on peut prendre x_i arbitrairement grand et donc $f^*(y) = +\infty$
- Si il existe $y_i < 1$ on peut prendre x_i arbitrairement petit et donc $f^*(y) = +\infty$
- $\forall i \; |y_i| \leq 1$
  - si $x_i = 0 \Rightarrow$ l'expression vaut 0
  - si $x_i > 0 \Rightarrow y_i x_i - x_i = x_i(y_i - 1) \leq 0$

    Donc le max sur x_i est atteint en 0
  - si $x_i < 0 \Rightarrow y_i x_i + x_i = x_i(y_i + 1) \leq 0$

    Donc le max sur x_i est atteint en 0

Donc $$\boxed{\|x\|_1^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|y\|_\infty \leq 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}}$$

2 Considérons

$$\min_x \|Ax-b\|_2^2 + \|x\|_1$$

$$\Leftrightarrow \min_{z,x} \|z\|_2^2 + \|x\|_1$$
$$z = Ax - b$$

$$L(z,x,\vartheta) = \|z\|_2^2 + \|x\|_1 + \vartheta^T(Ax-b-z)$$
$$= \|z\|_2^2 - \vartheta^T z + \|x\|_1 + \vartheta^T A x - \vartheta^T b$$

$$g(\vartheta) = \inf_{z,x} \left(L(z,x,\vartheta) \right)$$ car l'infimum sur z est pour $z = \vartheta/2$

$$= \inf_x \left(\|x\|_1 + \vartheta^T A x - \vartheta^T b - \frac{1}{4}\|\vartheta\|_2^2 \right)$$

$$= \inf_x \left((A^T\vartheta)^T x + \|x\|_1 \right) - \vartheta^T b - \frac{1}{4}\|\vartheta\|_2^2$$

$$= \sup_x \left((-A^T\vartheta)^T x - \|x\|_1 \right) - \vartheta^T b - \frac{1}{4}\|\vartheta\|_2^2$$

$$\Rightarrow \max_\vartheta g(\vartheta) \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \max_\vartheta \; -\vartheta^T b - \frac{1}{4}\|\vartheta\|_2^2 \\ \|A^T\vartheta\|_\infty \leq 1 \end{array}}$$

Exercice 3 :

$\boxed{1}$ Considérons $\min_{\omega} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \mathcal{L}(\omega, x_i, y_i) + \frac{\tau}{2} \|\omega\|_2^2$ (Sep 2)

On a

$$\min_{a,b} (\max(a,b)) \Leftrightarrow \min_{x} x \mid \begin{matrix} x \geq a \\ x \geq b \end{matrix}$$

Ainsi (Sep 2) $\Leftrightarrow \min_{\omega, z} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} z_i + \frac{\tau}{2} \|\omega\|_2^2$

$$z_i \geq 1 - y_i(\omega^T x_i)$$

$$z_i \geq 0$$

En divisant par τ

ω, z restent les mêmes meilleurs

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \min_{\omega, z} \frac{1}{m\tau} 1^T z + \frac{1}{2}\|\omega\|_2^2 \\ \forall i \quad z_i \geq 1 - y_i(\omega^T x_i) \\ z \geq 0 \end{matrix}}$$

$\boxed{2}$ $L(\omega, z, \lambda_1, \dots \lambda_m, \pi) =$

$$\frac{1}{m\tau} 1^T z + \frac{1}{2}\|\omega\|_2^2 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (1 - y_i(\omega^T x_i) - z_i) - \pi z$$

$$= \frac{1}{2}\|\omega\|_2^2 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i (\omega^T x_i) + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{m\tau} - \lambda_i - \pi_i\right) z$$

$\Rightarrow$ On minimise selon z

$$\min_{z} L = \frac{1}{2}\|\omega\|_2^2 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i (\omega^T x_i)$$

pour $\pi_i = \frac{1}{m\tau} - \lambda_i$ sinon le minimum est $-\infty$

On minimise selon ω

$$\frac{\partial L}{\partial \omega} = \omega - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i x_i = 0 \Leftrightarrow \omega = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i x_i$$

Donc le minimum est atteint pour ce ω (convexe donc minimum pour $\frac{\partial L}{\partial \omega} = 0$)

Ainsi $g(\lambda, \pi) = \min_{\omega, z} \underbrace{L(\omega, z, \lambda, \pi)}_{\omega}$

$$= \min_{\omega} \frac{1}{2} \|\omega\|_2^2 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i - \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i x_i\right)^T \omega$$

$$= \min_{\omega} \frac{1}{2} \|\omega\|_2^2 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i - \|\omega\|_2^2$$

$$= \min_{\omega} -\frac{1}{2} \|\omega\|_2^2 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

$$g(\lambda, \pi) = -\frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i x_i \right\|_2^2 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

Donc le problème dual est

$$\max_{\lambda} -\frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i x_i \right\|_2^2 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

$$\pi_i = \frac{1}{mz} - \lambda_i$$

$$\forall i \quad \pi_i \geq 0 \quad \lambda_i \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \max_{\lambda} -\frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i x_i \right\|_2^2 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \\ \forall i \quad \frac{1}{mz} \geq \lambda_i \\ \qquad \lambda_i \geq 0 \end{array}}$$