

Vorkurs für Informatikstudierende

Julien Klaus

Wintersemester 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre	5
1.1 Einleitung	5
1.2 Eigenschaften von Mengen	5
1.3 Operationen auf Mengen	6
1.3.1 Kurzschreibweisen für Mengen	8
2 Logik	9
2.1 Aussagen und Wahrheitswerte	9
2.2 Operationen auf Aussagen	9
2.3 Prädikatenlogik	11
2.4 Aussagen über Mengen	13
3 Analysis	15
3.1 Elementare Funktionen	15
3.1.1 Polynome und rationale Funktionen	15
3.1.2 Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen	17
3.1.3 Trigonometrische Funktionen	18
3.1.4 Minimum, Maximum und Betrag	19
3.1.5 Eigenschaften von Funktionen	20
3.2 Folgen und Reihen	21
3.2.1 Grenzwert	22
3.2.2 Vergleich von Funktionen	22
3.2.3 Vollständige Induktion	23
3.3 Differenzialrechnung	24
3.4 Integralrechnung	29
4 Lineare Algebra	33
4.1 Vektoren	33
4.2 Lineare Unabhängigkeit	34
4.3 Matrizen	35

1 Mengenlehre

1.1 Einleitung

Eine **Menge** ist eine beliebige Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. - *Georg Cantor (1845 – 1918)*

Mengen begegnen uns in der Mathematik ständig. Selbst in der Schule haben wir uns schon mit Mengen befasst ohne dies zu wissen. Ein Beispiel für eine Menge sind die natürlichen Zahlen \mathbb{N} . So ist 4 beispielsweise ein **Element** der Menge \mathbb{N} . Wir schreiben dafür kurz $4 \in \mathbb{N}$. Allerdings ist die Menge der natürlichen Zahlen nicht allumfassend. Die gebrochenrationalen Zahlen gehören nicht dazu. Wir können also schreiben $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

1.2 Eigenschaften von Mengen

Zwei Mengen sind **gleich**, wenn sie die gleichen Elemente haben. Nehmen wir als Beispiel die zwei Mengen $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{2, 3, 1, 2\}$. Hier sind die Elemente innerhalb der Mengen gleich. Es gilt also $M = N$. Dies bringt uns auch gleich zwei Eigenschaften von Mengen. Sie sind **nicht sortiert** und **doppelte Elemente** zählen nur einfach. Weiter werden Mengen häufig mit großen Buchstaben bezeichnet.

Die Mengen in unseren Beispielen wurden bisher nur durch Angabe ihrer Elemente beschreiben. Mengen können auch durch die Angabe von Eigenschaften angegeben werden. Die natürlichen Zahlen könnten alternativ auch als $\mathbb{N} := \{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl}\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ definiert werden. Wollen wir die null als Element der natürlichen Zahlen haben, schreiben wir $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Um einen weiteren wichtigen Begriff in der Mengenlehre einzuführen, müssen wir uns nun überlegen wieviele Elemente die Menge $M = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } x < 1 \text{ und } x > 1\}$ hat. Diese Menge besitzt keine Elemente und wir bezeichnen solch eine Menge als **leere Menge**. Diese wird als \emptyset gekennzeichnet.

Definition 1 (Teilmenge). *Eine Menge A wird als **Teilmenge** einer Menge B bezeichnet, falls für alle Elemente $a \in A$ gilt: $a \in B$. Man schreibt in diesem Fall $A \subseteq B$. Falls B Elemente enthält, die A nicht enthält schreibt man $A \subset B$.*

1 Mengenlehre

Die Menge aller Teilmengen einer Menge wird als Potenzmenge bezeichnet. Ein Beispiel für Teilmengen sind die natürlichen und die reellen Zahlen. Es gilt also $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Durch die Definition der Teilmenge können wir nun folgenden Satz beweisen.

Satz 1 (Gleichheit von Mengen). *Es seien A und B Mengen. Dann sind die folgenden zwei Aussagen äquivalent*

1. $A = B$,
2. $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

Beweis. Beweis durch die Teilmengendefinition. □

Definition 2 (Kardinalität). *Die Größe n einer Menge A wird als **Kardinalität** bezeichnet und durch die Schreibweise $|A| = n$ angegeben.*

1.3 Operationen auf Mengen

Definition 3 (Komplement). *Das **Komplement** einer Menge $A \subseteq M$ wird als $\bar{A} = \{x \in M \mid x \notin A\}$ definiert.*

Wenn wir also das Komplement einer Menge angeben möchten, brauchen wir eine Übermenge, die unsere Menge enthält. Beispielsweise ist das Komplement der Menge $\{0\} \in \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{N}_0$ gleich der Menge \mathbb{N} .

Definition 4 (Durchschnitt und Vereinigung). *Als der **Durchschnitt** $A \cap B$ zweier Mengen A und B werden alle Elemente bezeichnet, die sowohl in A als auch in B vorkommen.*

*Die **Vereinigung** zweier Mengen A und B schreiben wir als $A \cup B$. Diese enthält alle Elemente, die entweder in A oder in B oder in beiden vorhanden sind.*

Beispiel 1 (Durchschnitt und Vereinigung). *Sei die Menge $A = \{1, 2, 3\}$ und die Menge $B = \{2, 3, 4\}$. Die Vereinigung dieser Mengen $A \cup B$ ist gleich $\{1, 2, 3, 4\}$ und der Durchschnitt $A \cap B$ ist gleich $\{2, 3\}$.*

Definition 5 (Differenz). *In der **Differenz** $A \setminus B$ zweier Mengen A und B sind die Elemente aus A , die nicht in B vorkommen.*

Satz 2 (Komplement von B in A).

$$A \setminus B \text{ ist äquivalent zu } A \cap \bar{B}.$$

Beweis. In der Differenz von $A \setminus B$ sind alle Element von A ohne die von B . Die Menge, die alle Element enthält, die nicht in B sind ist das Komplement \bar{B} . Der Durchschnitt von $A \cap \bar{B}$ enthält nun also alle Elemente von A ohne die aus B . □

Definition 6 (Symmetrische Differenz). *Die **Symmetrische Differenz** zweier Mengen A und B ist definiert als:*

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Satz 3 (Eigenschaften von Mengenoperationen). *Für die zweistelligen Operationen auf Mengen gelten folgende Eigenschaften. Seien hierzu A, B, C Mengen.*

- $A \cap B = B \cap A$ (Kommutativität)
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Assoziativität)
- $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ folgt $A \subseteq C$
- $A \subseteq B$ folgt $A \cup B = B$
- $A \subseteq B$ folgt $A \cap B = A$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Beweis. Der Beweis kann über Mengendiagramme durchgeführt werden. Dies wird in der Übung gezeigt. \square

Wie wir bereits gelernt haben sind Mengen nicht sortiert. Falls wir eine Sortierung brauchen, können wir dies mit dem Konstrukt aus der nächsten Definition lösen.

Definition 7 (n -Tupel). *Seien $x_1, \dots, x_n \in M, n \in \mathbb{N}$ n Elemente einer Grundmenge M . Ein **n -Tupel** ist eine Zusammenfassung dieser Elementen, dargestellt als*

$$(x_1, \dots, x_n),$$

wobei die Reihenfolge dieser Elemente von Bedeutung ist. An der i -ten Stelle steht dabei das Element x_i .

Bemerkung 1 (Geordnete Paar). *Eine Sonderform des n -Tupel ist das **geordnete Paar**. Dies ist ein Tupel, welches nur zwei Elemente enthält*

Definition 8 (Kartesisches Produkt). *Seien A, B beliebige Mengen. Die Menge aller geordneten Paare zwischen A und B wird als **kartesisches Produkt** $A \times B$ bezeichnet. Diese ist definiert als:*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Falls $A = B$ verabschieden wir die Schreibweise A^2 .

Beispiel 2. *Bei der Anwendung des Kreuzproduktes erhalten wieder eine Menge.*

$$(A \times C) \cup (B \times C) = \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } x \in C \text{ oder } x \in B \text{ und } y \in C\} = (A \cup B) \times C$$

Natürlich können wir diese Definition auch beliebig auf n -Tupel erweitern. Für die nächste Schreibweise die wir definieren möchte, benötigen wir in dem einfachen Fall erst einmal nur geordnete Paare.

Definition 9 (Abbildung). *Seien \mathcal{D}, \mathcal{W} Mengen. Eine **Abbildung** (Funktion) $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{W}$ ist dann die Menge aller geordneten Paare*

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}, f(x) \in \mathcal{W}\}.$$

Man bezeichnet \mathcal{D} als den Definitionsbereich und \mathcal{W} als den Wertebereich.

1.3.1 Kurzschreibweisen für Mengen

Einige Mengen werden in der Mathematik häufig benötigt. Wir haben bereits einige gesehen, wie \mathbb{R} oder \mathbb{N} . In diesem kurzen Kapitel wollen wir uns noch Intervall- und Indextmengen definieren.

Definition 10 (Intervallmengen). *Sei $x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$. Dann definieren wir die folgenden Mengen*

$$\begin{aligned}(x, y) &= \{z \mid z > x \text{ und } z < y\}, \\(x, y] &= \{z \mid z > x \text{ und } z \leq y\}, \\[x, y) &= \{z \mid z \geq x \text{ und } z < y\}, \\[x, y] &= \{z \mid z \geq x \text{ und } z \leq y\}.\end{aligned}$$

Definition 11 (Indexmenge). *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir die folgende Menge*

$$[n] = \{i \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

2 Logik

2.1 Aussagen und Wahrheitswerte

Für Informatiker ist die Logik ist eines der wichtigsten Gebiete der Mathematik. Die Logik basiert dabei auf Aussagen denen ein Wahrheitswert zugeordnet wird.

Definition 12 (Aussage). Eine **Aussage** ist eine Zeichenfolge, der genau einer der beiden Wahrheitswerte **wahr** ($1, w$) oder **falsch** ($0, f$) zugeordnet werden kann.

Wenn p eine Aussage ist, dann bezeichnen wir mit $\alpha(p) \in \{w, f\}$ den Wahrheitswert von p .

Aussagen können die verschiedensten Formen annehmen. Beispiele für Aussagen sind unter anderen:

- $4 \in \mathbb{N}$,
- 3 ist eine Primzahl,
- Hello ist das englische Wort für Hallo,
- Montag ist ein Tag des Wochenendes,
- $\frac{1}{2} = 0.87$.

Wir können für diese Beispiele natürlich die Wahrheitswerte angeben. Wie für Mengen existieren auch für Aussagen Operationen.

2.2 Operationen auf Aussagen

Die einfachste Operation auf Aussagen ist die der Negation. Diese werden wir auch als einzige einstellige Operation einführen. Operationen werden durch die Anwendung einer Wahrheitswerttabelle dargestellt. Diese gibt für Belegungen einer Aussage, die Wahrheitswerte die durch die Operation entstehen an.

Definition 13 (Negation). Sei p eine Aussage. Die **Negation** $\neg p$ von p wird durch die folgende Wahrheitswerttabelle definiert.

$\alpha(p)$	$\alpha(\neg p)$
w	f
f	w

2 Logik

Oftmals gibt es für die Negation von Aussagen andere Schreibweisen. Ein Beispiel hierfür könnte die Aussage $4 \in \mathbb{N}$ sein. Deren Negation kann man als $\neg(4 \in \mathbb{N})$ oder kurz als $4 \notin \mathbb{N}$ schreiben.

Folgerung 1 (Zweifache Verneinung). *Es sei p eine Aussage. Dann gilt*

$$\alpha(\neg(\neg(p))) = \alpha(p)$$

Beweis. Beweis in der Übung. □

Definition 14 (Konjugation, Disjunktion, Implikation, Äquivalenz). *Seien p und q Aussagen. Die wichtigsten Operationen der Logik (neben der Negation) sind die*

- **Konjugation** $p \wedge q$ (und),
- **Disjunktion** $p \vee q$ (oder),
- **Implikation** $p \rightarrow q$ (wenn, dann) und
- **Äquivalenz** $p \leftrightarrow q$ (genau dann, wenn).

Diese sind in der folgenden Wahrheitswerttabelle definiert.

$\alpha(p)$	$\alpha(q)$	$\alpha(p \wedge q)$	$\alpha(p \vee q)$	$\alpha(p \rightarrow q)$	$\alpha(p \leftrightarrow q)$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Wie man in der Definition sieht, ist es für die logische Oder-Operation nicht ausschließlich. Umgangssprachlich ist dies oft als 'und/oder' formuliert. Das ausschließende Oder ist eine andere Verknüpfung die als $p \oplus q$ zwischen den Aussagen p und q dargestellt wird. Diese ist wie folgt definiert:

$$p \oplus q \leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q).$$

Wichtig ist hier, dass wir die beiden Aussagen mit einer Äquivalenzoperation verknüpfen (die linke Aussage ist genau dann wahr, wenn die rechte Aussage wahr ist). Diese Aussage ist also immer wahr. Man bezeichnet Aussagen, die immer wahr sind als **Tautologie**. Wichtige Tautologien sind im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 4 (Tautologien). *Seien p, q, r Aussagen. Dann sind die folgenden Aussagen Tau-*

tologien.

$$p \leftrightarrow \neg(\neg p) \quad (2.1)$$

$$(p \wedge p) \leftrightarrow p \quad (2.2)$$

$$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p) \quad (2.3)$$

$$((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r)) \quad (2.4)$$

$$(p \vee p) \leftrightarrow p \quad (2.5)$$

$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p) \quad (2.6)$$

$$((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r)) \quad (2.7)$$

$$((p \wedge q) \vee r) \leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r)) \quad (2.8)$$

$$((p \vee q) \wedge r) \leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r)) \quad (2.9)$$

$$((p \vee q) \wedge q) \leftrightarrow q \quad (2.10)$$

$$((p \wedge q) \vee q) \leftrightarrow q \quad (2.11)$$

$$(\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q)) \quad (2.12)$$

$$(\neg(p \vee q)) \leftrightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q)) \quad (2.13)$$

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q) \quad (2.14)$$

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) \quad (2.15)$$

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \quad (2.16)$$

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p)) \leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow p)) \quad (2.17)$$

Beweis. Alle diese Aussagen können über eine Wahrheitswerttabelle bewiesen werden. Ein alternativer Weg, diese Aussagen zu beweisen ist über geschicktes Umformen.

Wir zeigen dies für Aussage (15), $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$. Hierzu nehmen wir an, dass die Tautologien 1, 6 und 14 bereits bewiesen sind.

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow q) \\ \Leftrightarrow & \neg p \vee q & (2.14) \\ \Leftrightarrow & \neg p \vee \neg(\neg q) & (2.1) \\ \Leftrightarrow & \neg(\neg q) \vee \neg p & (2.6) \\ \Leftrightarrow & \neg q \rightarrow \neg p & (2.14) \end{aligned}$$

In der Übungen werden die weiteren und angenommenen Tautologien bewiesen. \square

Bemerkung 2 (Schreibweise). Das Symbol \rightarrow kann nur zwischen Aussagen stehen. Beispielsweise ist es korrent für $x \in \mathbb{N}$ zu schreiben $(x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$. Allerdings wäre es falsch zu schreiben $(x - 1)^2 \rightarrow x^2 - 2x + 1$. Die richtige Schreibweise ist hier $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$, was eine wahre Aussage ist.

2.3 Prädikatenlogik

Der Begriff Prädikatenlogik soll hier nicht abschreckend wirken. Wir benötigen ihn um umfassendere Aussagen zu beschreiben. In Aussagen müssen alle Variablen durch eine

2 Logik

Belegung gebunden sein. Beispielsweise ist $x^2 = 4$ keine Aussage, da man ihr keinen eindeutigen Wahrheitswert zuweisen kann. Erst durch die Information, dass es mindestens ein x gibt, so dass gilt $x^2 = 4$ oder durch das Setzen von x auf einen festen Wert wird es zu einer Aussage.

Definition 15 (All- und Existenzquantor). *Es sei I eine nicht leere Menge und für alle $i \in I$ sei p_i eine Aussage. Dann kann man diese Aussagen mithilfe des Allquantor \forall oder des Existenzquantor \exists verknüpfen. Dabei steht $\forall i \in I : p_i$ dafür, dass für alle $i \in I$ die Aussage p_i gilt. Die Aussage $\exists i \in I : p_i$, dass es mindestens ein $i \in I$ gibt, für das p_i gilt.*

Die Wahrheitswerte der Verknüpfungen ist intuitiv definiert als:

$$\alpha(\forall i \in I : p_i) = w \leftrightarrow \alpha(p_i) = w \text{ für alle } i \in I$$

und

$$\alpha(\exists i \in I : p_i) = w \leftrightarrow \alpha(p_i) = w \text{ für mindestens ein } i \in I.$$

Satz 5 (Negation von Quantoren). *Die folgenden Aussagen sind Tautologien über der nicht leeren Menge I und den Aussagen $p_i, i \in I$.*

$$\neg(\forall i \in I : p_i) \leftrightarrow \exists i \in I : \neg p_i \quad (2.18)$$

$$\neg(\exists i \in I : p_i) \leftrightarrow \forall i \in I : \neg p_i \quad (2.19)$$

. Von Formel 2.18]

$$\begin{aligned} & \neg(\forall i \in I : p_i) \\ \leftrightarrow & \neg \bigwedge_{i \in I} p_i \\ \leftrightarrow & \neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \\ \leftrightarrow & \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \dots \vee \neg p_n \\ \leftrightarrow & \bigvee_{i \in I} \neg p_i \\ \leftrightarrow & \exists i \in I : \neg p_i \end{aligned}$$

Formel 2.19 verläuft synonym. □

Bemerkung 3 (Verknüpfung von Quantoren). *Quantoren können beliebig verknüpft werden. Ein Beispiel hierfür ist die Definition der Kommutativität der Multiplikation.*

$$\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$$

2.4 Aussagen über Mengen

Nachdem wir Mengenlehre- und Logikkenntnisse erworben haben können wir jetzt komplexere Aussagen über Mengen beweisen. Wir wollen dies hier an einem Beispiel zeigen.

Beispiel 3. Seien $A, B, C \neq \emptyset$ nichtleere Mengen. Wir wollen zeigen, dass gilt:

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$

Beweis. Wir müssen für alle (x, y) aus der Menge $D = (A \cap B) \times C$ zeigen, dass dies auch in $(A \times C) \cap (B \times C)$ liegen:

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in D : (x, y) \in (A \cap B) \times C &\leftrightarrow \forall (x, y) \in D : x \in (A \cap B) \wedge y \in C \\ &\leftrightarrow \forall (x, y) \in D : (x \in A \wedge x \in B) \wedge y \in C \\ &\leftrightarrow \forall (x, y) \in D : x \in A \wedge y \in C \wedge x \in B \wedge y \in C \\ &\leftrightarrow \forall (x, y) \in D : (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C) \\ &\leftrightarrow \forall (x, y) \in D : (x, y) \in (A \times C) \wedge (x, y) \in (B \times C) \\ &\leftrightarrow \forall (x, y) \in D : (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C). \end{aligned}$$

□

3 Analysis

3.1 Elementare Funktionen

In der Analysis dreht sich alles um Funktionen und deren Eigenschaften. Wir wollen uns in diesem Kapitel deshalb erst einmal einige elementare Funktionen anschauen. Beginnen wir mit polynomen und rationalen Funktionen.

3.1.1 Polynome und rationale Funktionen

Bevor wir zu der Definition von Polynomfunktionen kommen, möchten wir hier das Summenzeichen einführen.

Definition 16 (Summenzeichen). Seien $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Die Summe dieser Zahlen kann als

$$\sum_{i=0}^n a_i = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

geschrieben werden. Hierbei wird \sum als **Summenzeichen**, i als **Laufindex**, 0 als **Startwert** und n als **Endwert** bezeichnet. a_i ist die Funktion bezüglich der Laufvariable.

Mit dem Summenzeichen können nun komplizierte Additionen verkürzt dargestellt werden. Jede Summe kann so umgeschrieben werden, dass ihr Startwert bei 0 beginnt.

Bemerkung 4 (Indexverschiebung). Sei $k, n \in \mathbb{R}, k \neq 0, n > k$ und seien $a_k, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\sum_{i=k}^n a_i = \sum_{i=0}^{n-k} a_{i+k}.$$

Bemerkung 5 (Produktzeichen). Synonym zu dem Summenzeichen kann man das **Produktzeichen** einführen. Seien hierzu $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Das Produkt dieser Zahlen dann geschrieben werden als:

$$\prod_{i=0}^n a_i = a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Wir werden die Benutzung des Summenzeichens und des Produktzeichens in der Übung ausführlich trainieren um ein Gefühl dafür zu bekommen. Nachdem wir nun das Summenzeichen eingeführt haben können wir nun einfach Polynome definieren.

Definition 17 (Polynom). Sei f eine Funktion der Form $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + \cdots + a_n \cdot x^n, n \in \mathbb{N}$$

reelles Polynom mit dem Grad $\deg(f) = n$ ($a_n \neq 0$). Die Zahlen $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ werden als Koeffizienten bezeichnet.

Wir können die Polynome aus Definition 17 beliebig addieren und multiplizieren ohne dass die Polynom Eigenschaft verschwindet. Bei der Division allerdings könnte das Nennerpolynom gleich null sein, was uns zur Definition der rationalen Funktionen bringt.

Definition 18 (Rationale Funktion). Seien $p(x)$ und $q(x)$ zwei Polynome. Der Quotient

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

dieser Polynome heißt **rationale Funktion**. Diese ist nur für diejenigen x definiert, für die $q(x) \neq 0$ gilt.

Natürlich kann bei der Verknüpfung von Polynomen das resultierende Polynom vereinfacht werden. Bei rationalen Funktion spricht man hier von der sogenannten Polynomdivision

Bemerkung 6 (Polynomdivision). Seien $p(x), q(x)$ Polynome und der Grad von q kleiner gleich dem Grad von p , dann gibt es Polynome $s(x)$ und $r(x)$, so dass gilt

$$p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x).$$

Falls x_0 eine Nullstelle des Polynoms $p(x)$ ist, dann ist $r(x) = 0$ falls $q(x) = (x_0 - x)$.

Eine Polynomdivision auszuführen ist häufig ungewohnt. Wir wollen deshalb ein einfaches Beispiel angeben und mehr Beispiele in der Übung bearbeiten.

Beispiel 4 (Polynomdivision). Sei $p(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$ und $q(x) = (x^2 + 1)$. Zu Beginn schreiben wir die Polynome wie bei der schriftlichen Division.

$$\begin{array}{rcccccl}
 (x^3 & -8x^2 & +19x & -12) & : & (x^2 + 1) & = & x - 8 \\
 -(x^3 & & & & & & & \\
 \hline
 & -8x^2 & +18x & -12 & & & & \\
 & -(-8x^2 & & & & & & 8) \\
 \hline
 & & +18x & -20 & & & &
 \end{array}$$

Im ersten Schritt überlegen wir uns was wir zu x^2 multiplizieren müssen um x^3 zu erhalten. Die Antwort lautet natürlich x und wir schreiben dies als erstes hinter das Gleichheitszeichen. Nun rechnen wir $x^2 * x$ und $1 * x$ und schreiben dieses unter die Ausdrücke

des mit dem gleichen Grad. Danach ziehen wir diese beiden Zeilen voneinander ab. Das resultierende Polynom $-8x^2 + 18x - 12$ wird nun Synonym behandelt. Wir überlegen uns wieder was wir mit x^2 multiplizieren müssen um $-8x^2$ zu erhalten und schreiben das Ergebnis -8 hinter das Gleichheitszeichen. Danach rechnen wir wieder das Restpolynom aus. Diese kann nun nicht mehr durch x^2 geteilt werden und wir beenden die Polynomdivision. Das Ergebnis der Polynomdivision lautet also

$$\frac{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}{x^2 + 1} = (x - 8) + \frac{18x - 20}{(x^2 + 1)},$$

wobei $s(x) = (x - 8)$ und $r(x) = 18x - 20$ ist.

3.1.2 Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen

Bevor wir die verschiedenen Funktionen definieren. Möchten wir hier noch einmal Potenzregeln und Logarithmenregeln wiederholen.

Bemerkung 7 (Potenzregeln). Seien $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gelten folgende Regeln:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad (3.1)$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \quad (3.2)$$

$$(a^x)^y = a^{(x \cdot y)} \quad (3.3)$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad (3.4)$$

$$a^0 = 1 \quad (3.5)$$

$$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x} \quad (3.6)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : a^x > 0 \quad (3.7)$$

$$(3.8)$$

Bemerkung 8 (Logarithmenregeln). Seien $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Logarithmusregeln:

$$\log_x(a \cdot b) = \log_x(a) + \log_x(b) \quad (3.9)$$

$$\log_x\left(\frac{a}{b}\right) = \log_x(a) - \log_x(b) \quad (3.10)$$

$$\log_x(a^b) = b \cdot \log_x(a) \quad (3.11)$$

$$\log_x(a) = \frac{\log_y(a)}{\log_y(x)} \quad (3.12)$$

$$\log_x(1) = 0 \quad (3.13)$$

$$\log_b(b^x) = x \quad (3.14)$$

$$b^{\log_b(x)} = x \quad (3.15)$$

3 Analysis

Diese Regeln aus Bemerkung 7 und 8 sind sehr wichtig und sollten möglichst viel geübt werden. Wir werden uns dem in der Übung widmen. Nachdem wir uns nun mit den Potenz- und Logarithmengesetzen auseinandergesetzt haben, können wir nun Potenz- und Exponentialfunktionen definieren.

Definition 19 (Potenz- und Exponential- und Logarithmusfunktion). *Sei $a, x \in \mathbb{R}, x > 0$. Dann heißt die Funktion*

$$f(x) = x^a$$

Potenzfunktion. *Sei nun $b, y \in \mathbb{R}, b > 0$. Dann heißt die Funktion*

$$g(y) = b^y$$

Exponentialfunktion. *Sei zuletzt $c, z \in \mathbb{R}, c > 0, c \neq 1, z > 0$. Dann heißt die Funktion*

$$h(z) = \log_c(z)$$

Logarithmusfunktion zur Basis c .

Bemerkung 9 (Umkehrfunktion). *Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Seien $f(x) = a^x$ und $f^{-1}(x) = \log_a(x)$, wobei $a, x \in \mathbb{R}$ und $x > 0$. Hierbei wird f^{-1} als die **Umkehrfunktion** der Funktion f bezeichnet und es gilt:*

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

3.1.3 Trigonometrische Funktionen

Definition 20 (Sinus und Kosinus). *Sei die Menge $E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ die Menge aller Punkte auf dem Einheitskreis. Sei nun θ ein beliebiger Winkel und $e = (s, c) \in E$ der dazugehörige Punkt auf dem Einheitskreis. Dann sind **Sinus** und **Kosinus** wie folgt definiert:*

$$\sin(\theta) = s \text{ und } \cos(\theta) = c.$$

Bemerkung 10 (Einheitskreis). *Die Definition des Sinus und Kosinus ist mit einer kleinen Skizze besser zu verstehen.*

Bemerkung 11 (Zusammenhang zwischen Sinus und Kosinus). *Seien $\alpha, \beta \in \{x \mid x \in [0, 2\pi]\}$ Winkel im Bogenmaß ($2\pi \text{ rad} = 360^\circ$). Dann gilt:*

$$\sin(\alpha) = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

und

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

Weiterhin gelten folgende Regeln:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta) \end{aligned}$$

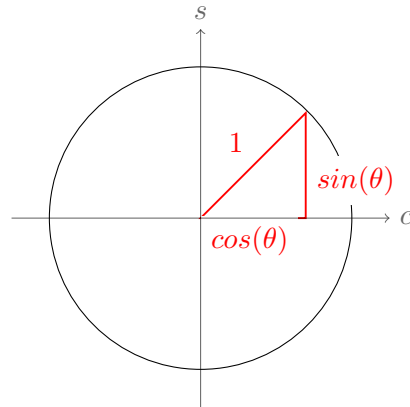


Abbildung 3.1: Definition des Sinus und Kosinus am Einheitskreis.

Definition 21 (Tangens und Kotangens). *Als letzten beiden trigonometrischen Funktionen wollen wir den **Tangens** \tan und **Kotangens** \cot definieren. Sei hierzu α ein Winkel im Bogenmaß und für den Tangens $\cos(\alpha) \neq 0$, sowie für den Kotangens $\sin(\alpha) \neq 0$. Dann sind diese Funktionen wie folgt definiert*

$$\begin{aligned}\tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \\ \cot(\alpha) &= \frac{1}{\tan(\alpha)}.\end{aligned}$$

Natürlich gibt es noch weitere trigonometrischen Funktionen. Wir wollen die Auswahl allerdings hier auf die gegebenen begrenzen.

3.1.4 Minimum, Maximum und Betrag

Definition 22 (Minimum und Maximum). *Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir folgende Funktionen:*

$$\min(x, y) = \begin{cases} x & , x \leq y \\ y & , x > y \end{cases}$$

und

$$\max(x, y) = \begin{cases} x & , x \geq y \\ y & , x < y. \end{cases}$$

Definition 23 (Betrag). *Sei $x \in \mathbb{R}$. Der Betrag $|\cdot|$ ist dann wie folgt definiert:*

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0. \end{cases}$$

Beispiel 5. *Mit der Hilfe des Betrages können wir nun Ungleichungen der Form*

$$|x + 1| \leq 3$$

3 Analysis

lösen. Dazu müssen unterschieden werden, wann der Betrag positiv und negativ wird. In diesem Fall gilt:

$$|x + 1| \geq 0 \leftrightarrow x \geq -1.$$

Wir müssen nun zwei Fälle betrachten.

1. $x \geq -1$, der Betrag ist in diesem Fall positiv und kann aufgelöst werden

$$|x + 1| \geq 3 \leftrightarrow x + 1 \geq 3 \leftrightarrow x \geq 2$$

2. $x < -1$

$$|x + 1| \geq 3 \leftrightarrow -(x + 1) \geq 3 \leftrightarrow -x - 1 \geq 3 \leftrightarrow x \leq -4$$

Aus den beiden Lösungen liefern uns die Lösungsmenge $\{x | x \geq 2 \wedge x \leq -4\}$.

3.1.5 Eigenschaften von Funktionen

In diesem Kapitel wollen wir uns einige charakteristische Eigenschaften von Funktionen anschauen.

Definition 24 (Nullstelle). Sei f eine Funktion. Die Stelle x_0 , an der $f(x_0) = 0$ gilt, wird als **Nullstelle** der Funktion f bezeichnet.

Definition 25 (Polstelle). Sei f eine Funktion. Eine **Polstelle** der Funktion f ist ein Punkt x_0 , in dem f nicht definiert ist und die Punkte in der Umgebung von x_0 beliebig groß oder klein werden.

Definition 26 (Gerade und ungerade Funktion). Sei f eine Funktion. Wir bezeichnen f als **gerade**, falls gilt

$$f(-x) = f(x)$$

und **ungerade**, falls gilt

$$f(-x) = -f(x).$$

Definition 27 (Periodische Funktion). Eine Funktion f heißt **periodisch**, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$f(x + \delta) = f(x).$$

Beispiel 6. Nachdem wir nun die Definitionen angegeben haben, möchten wir diese auch mit einem Beispiel hinterlegen. Sei hierzu $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \frac{x^2}{x-1}$ und $h(x) = \sin(x)$. Die Funktion f besitzt bei $x_0 = 2$ und bei $x_0 = -2$ eine Nullstelle und ist gerade. Die Funktion g besitzt eine Nullstelle bei $x_0 = 0$ und eine Polstelle bei $x_1 = 1$. Die Funktion h besitzt unendlich viele Nullstellen aus der Menge $\{i \cdot \pi \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Weiterhin ist diese Funktion periodisch und ungerade.

3.2 Folgen und Reihen

In diesem Kapitel wollen wir kurz wiederholen, was Folgen und Reihen sind und den Grenzwert einführen. Weiter möchten wir euch eine Intuition geben für das Verhalten von Funktionen nahe des Grenzwertes.

Definition 28 (Folgen). Sei M eine Menge. Eine **Folge** (a_n) ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen auf eine reelle Zahl, die jeder natürlichen Zahl eine reelle Zahl eindeutig zuordnet.

Eine Folge bei der für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{i+1} - a_i = d$$

wird als **arithmetische Folge** bezeichnet. Falls für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = q$$

sprechen wir von einer **geometrischen Folge**.

Beispiel 7 (Folge). Eine Folge wäre beispielsweise

$$(a_n) = (n^2)_{n \in \mathbb{N}} = 1, 4, 9, \dots$$

die Folge der Quadratzahlen.

Definition 29 (Eigenschaften von Folgen). Sei (a_n) eine Folge. Wir sagen (a_n) ist **monoton zunehmend**, falls gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n,$$

ist **monoton abnehmend**, falls gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n,$$

und **konstant**, falls gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n.$$

Seien nun $a, b \in \mathbb{R}$. Wir sagen (a_n) ist **beschränkt**, falls gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : a \leq a_n \leq b.$$

Wir bezeichnen a als die untere Schranke und b als die obere Schranke.

Definition 30. Sei (a_n) eine Folge. Wir definieren die n -te Partialsumme einer Folge als

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Die Folge (s_n) der n -ten Partialsummen wird als **Reihe** bezeichnet.

3.2.1 Grenzwert

Sei (a_n) eine Folge und (s_n) eine Reihe. Wie wir bereits gelernt haben läuft das n bis unendlich. Wir können uns in diesem Fall fragen, was der Wert der Folge oder Reihe in der Nähe von unendlich ist. Man nennt dies den Grenzwert.

Definition 31 (Grenzwert). Sei (a_n) eine Folge und $\epsilon > 0$ eine kleine Zahl. Man sagt, die Folge hat einen **Grenzwert** a , falls es eine Stelle n_0 gibt, so dass für alle $i \geq n_0$ gilt:

$$|a - a_i| < \epsilon.$$

Wir schreiben den Grenzwert einer Folge gegen den Punkt i_0 als

$$\lim_{i \rightarrow i_0} (a_n) = a.$$

Bemerkung 12 (Wichtige Grenzwerte). Grenzwerte treten ständig auf und es ist wichtig einige der häufigsten zu kennen.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} &= 0, & a \in \mathbb{R} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a^n &= 0, & |a| < 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1, & a \in \mathbb{R}^+ \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \frac{1}{e} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n &= e^k \end{aligned}$$

Satz 6 (Rechenregeln für Grenzwerte). Seien f, g Funktionen mit den Grenzwerten $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) &= a, & c \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm g(x) &= a \pm b \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) &= a \cdot b \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{a}{b}, & b \neq 0 \end{aligned}$$

3.2.2 Vergleich von Funktionen

Oft ist es interessant zu wissen, ob eine Funktion schneller steigt als eine andere. Man bezeichnet dies als asymptotische Analyse. Diese klassifiziert das Grenzverhalten einer

Funktion, indem man diese auf ihren wesentlichen Eigenschaften reduziert. Dies wird häufig verwendet, um die Laufzeit von Algorithmen anzugeben. Wir definieren hierfür, wann zwei Funktionen in etwa gleich schnell sind.

Definition 32 (Gleiches asymptotisches Verhalten). *Zwei Funktionen f, g haben ein gleiches asymptotisches Verhalten, wenn gilt*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{f(i)}{g(i)} \right| < \infty.$$

Beispiel 8 (Asymptotisches Verhalten). *Sei $f(x) = 3x^2$ und $g(x) = x^2 + 2$. Um zu zeigen, dass diese beiden Funktionen asymptotisch gleich laufen, müssen wir nur zeigen, dass der Grenzwertbetrag ihres Quotienten kleiner als unendlich ist.*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{3x^2}{x^2 + 2} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2(3)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{3}{1 + \frac{2}{x^2}} \right| \\ &= \left| \frac{3}{1 + 0} \right| = 3 < \infty \end{aligned}$$

Wir können also für eine beliebige Funktion eine Menge von Funktionen definieren, die gleich schnell sind.

3.2.3 Vollständige Induktion

Die Darstellung von Reihen ist meist einfacher möglich, als mit dem Summenzeichen. Angenommen wir haben eine Vermutung, wie die n -te Partialsumme einer Reihe berechnet wird. Wie beweisen wir diese Vermutung? Für diese Art von Beweisen verwendet man das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

Sei $A(n)$ eine beliebige Aussage über $n \in \mathbb{N}$. Die vollständige Induktion beginnt bei dem Beweis mit dem sogenannten **Induktionsanfang** (IA). Dieser testet ob die Aussage für $A(1)$ gilt.

Danach folgt der **Induktionsbeweis**. Dieser beginnt mit einer **Induktionsvoraussetzung** (IV), welche die Richtigkeit von $A(n)$ für ein **beliebiges, festes** $n \in \mathbb{N}$ annimmt und damit die Richtigkeit der **Induktionsbehauptung** (IB) $A(n+1)$ folgert.

Wenn diese Folgerung gelingt, ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ korrekt.

Beispiel 9. *Damit dieses wichtige Prinzip etwas besser verständlich wird, wollen wir es hier einmal an einem sehr prominentem Beispiel durchspielen.*

3 Analysis

Sei hierzu folgende Aussage gegeben

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Man bezeichnet dies als Gaußsche Summenformel.

Beginnen wir mit dem Induktionsanfang. Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

Die Aussage stimmt und wir können unsere Induktionsvoraussetzung formulieren. Falls für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}, n > 1$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

gilt, dann gilt auch

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Der nun folgende Beweis wird auch Induktionsschritt genannt. Wir beginnen mit der linken Seite der Induktionsbehauptung und versuchen aus dieser mithilfe der Induktionsvoraussetzung die rechte Seite der Induktionsbehauptung zu erhalten.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^n i + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Wie wir in dem Induktionsschritt sehen, erhalten wir nach einigem Umformen die Induktionsbehauptung. Unsere Aussage stimmt also für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir werden auch hierzu noch weitere Beispiele in den Übungsaufgaben sehen.

3.3 Differenzialrechnung

Nachdem wir uns nun schon mit Grenzwerten beschäftigt haben brauchen wir für die Differenzialrechnung nun nur noch den Begriff der Stetigkeit.

Definition 33 (Stetigkeit). Die Funktion f ist an der Stelle x_0 **stetig**, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in \mathcal{D}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt,

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Bemerkung 13 (Stetigkeit). Die Stetigkeit kann auch über den Grenzwert definieren. Sei hierzu f eine Funktion. Man sagt, f ist an der Stelle x_0 stetig, wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert und gleich $f(x_0)$ ist.

Eine Funktion f heißt stetig, wenn sie auf jeder Stelle ihres Definitionsbereiches \mathcal{D} stetig ist.

Satz 7 (Zwischenwertsatz). Falls die Funktion f im Intervall $[a, b]$ stetig ist, dann nimmt sie jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis. Intuitiv können wir uns dies mit einer Skizze klar machen. □

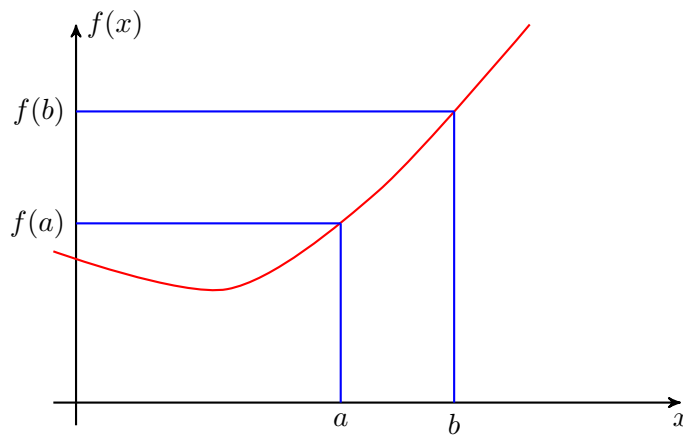


Abbildung 3.2: Wie wir in der Skizze sehen, wird in dem Intervall $[a, b]$ jeder Wert in dem Intervall $[f(a), f(b)]$ angenommen.

Definition 34 (Differenzierbar). Die Funktion f ist an der Stelle $x_0 \in \mathcal{D}$ **differenzierbar**, falls der Anstieg der Tangente an der Funktion an der Stelle x_0 als

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Wir nennen die Steigung dieser Tangente am Punkt x_0 die Ableitung oder das Differenzial.

Definition 35 (Ableitung). Wenn die Funktion f in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist, dann sagen wir die Funktion f ist differenzierbar. Wir definieren dann eine Funktion f' als die **Ableitung** von f , die jedem Punkt x die Ableitung von $f(x)$ zuordnet. Wir schreiben dies auch als

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

3 Analysis

Satz 8 (Mittelwertsatz). *Sei die Funktion f auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es einen Punkt $x_0 \in (a, b)$ für den gilt*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Beweisintuition durch Skizze in Abbildung 3.2. Wir sehen, dass die Funktion in (a, b) so gut wie linear ist. Wie berechnet man die Steigung dieser linearen Funktion und was bedeutet die Ableitung an einer Stelle dieser Funktion? Diese Fragen verdeutlichen die Beweisidee. \square

Wir haben nun viel über Stetigkeit und Differenzierbarkeit gehört und einige Wichtige Begriffe und Schreibweisen geklärt. Nun wollen wir aber einmal Ableitungen berechnen, wozu wir folgende Regeln brauchen.

Satz 9 (Ableitungsregeln). *Seien f, g Funktionen und an der Stelle x differenzierbar. Dann können wir folgende Ableitungen berechnen.*

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= f'(x) + g'(x), \\ (c \cdot f)'(x) &= c \cdot f'(x) \quad , c \in \mathbb{R} \\ (f \cdot g)'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad , \textbf{Produktregel} \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \quad , g(x) \neq 0, \textbf{Quotientenregel} \\ (f \circ g)'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad , \textbf{Kettenregel} \end{aligned}$$

Weiter können wir folgende Ableitungen von elementaren Funktionen angeben.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} c &= 0, c \in \mathbb{R} \\
 \frac{d}{dx} x^n &= n \cdot x^{n-1}, n \in \mathbb{Z} \\
 \frac{d}{dx} x^a &= a \cdot x^{a-1}, x > 0, a \in \mathbb{R} \\
 \frac{d}{dx} a^x &= a^x \ln(a), a > 0 \\
 \frac{d}{dx} \log_a(x) &= \frac{1}{x \ln(a)}, a \neq 1, a > 1 \\
 \frac{d}{dx} \ln(x) &= \frac{1}{x} \\
 \frac{d}{dx} e^x &= e^x \\
 \frac{d}{dx} \sin(x) &= \cos(x) \\
 \frac{d}{dx} \cos(x) &= -\sin(x) \\
 \frac{d}{dx} \tan(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)} \\
 \frac{d}{dx} \cot(x) &= \frac{-1}{\sin^2(x)}
 \end{aligned}$$

Diese Liste ist natürlich nicht komplett, aber sie umfasst einige der am häufigsten genutzten Ableitungen.

Nachdem wir nun den Grenzwert und die Differenzierbarkeit von Funktionen kennen können wir einen wichtigen Satz verstehen, der die Berechnung von Grenzwerten vereinfacht.

Satz 10 (Regel von l'Hospital). *Seien f und g Funktionen, die differenzierbar sind. Wenn der Grenzwert der Funktionen gegen eine Stelle x_0 gleich 0 oder der Grenzwert des Betrages der Funktionen gegen ∞ gleich ∞ ist, so gilt:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ mit } g'(x) \neq 0.$$

Bevor wir mit dem Kapitel über Differenzialrechnung enden möchten wir noch einen kurzen Einblick in die Bedeutung und Eigenschaften der Differenzierbarkeit.

Satz 11 (Eigenschaften von differenzierbaren Funktionen). *Sei f eine Funktion und auf*

3 Analysis

einem Intervall I zweimal differenzierbar. Dann gelten folgende Aussagen

$$\begin{aligned}\forall x \in I : f'(x) &\geq 0 \leftrightarrow & f \text{ ist } \mathbf{monoton\ wachsend} \text{ auf } I, \\ \forall x \in I : f'(x) &\leq 0 \leftrightarrow & f \text{ ist } \mathbf{monoton\ fallend} \text{ auf } I, \\ \forall x \in I : f''(x) &\geq 0 \leftrightarrow & f \text{ ist } \mathbf{konvex} \text{ auf } I, \\ \forall x \in I : f''(x) &\leq 0 \leftrightarrow & f \text{ ist } \mathbf{konkav} \text{ auf } I,\end{aligned}$$

Definition 36 (Minimum, Maximum und Wendepunkt). Sei $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$ eine Funktion und sei weiterhin $U_\epsilon(x_0) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ eine Umgebung um die Stelle $x_0 \in \mathcal{D}$.

Wir bezeichnen ein x_0 als **lokales Minimum**, falls gilt

$$\forall x \in U_\epsilon(x_0) \cap \mathcal{D} : f(x) \geq f(x_0).$$

Die Stelle x_0 ist ein **globales Minimum**, falls die Aussage für alle $x \in \mathcal{D}$ gilt.

Ein x_0 für welches gilt:

$$\forall x \in U_\epsilon(x_0) \cap \mathcal{D} : f(x) \leq f(x_0).$$

bezeichnen wir als **lokales Maximum**. Auch hier reden wir von einem **globalen Maximum**, falls die Aussage für alle $x \in \mathcal{D}$ gilt.

Die Stelle x_0 wird als **Wendepunkt** bezeichnet, falls die Krümmung der Funktion am Punkt $(x_0, f(x_0))$ von konkav zu konvex oder umgekehrt übergeht.

Satz 12 (Kriterium für Minimum, Maximum und Wendepunkt). Sei f eine dreimal differenzierbare Funktion auf einem Intervall (a, b) . Für einen Punkt $x_0 \in (a, b)$ gilt dann:

- $(x_0, f(x_0))$ ist ein lokales Minimum von f , wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$,
- $(x_0, f(x_0))$ ist ein lokales Maximum von f , wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ und
- $(x_0, f(x_0))$ ist ein Wendepunkt von f , wenn $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$. Man bezeichnet diesen Punkt als **Sattelpunkt**, wenn zusätzlich $f'(x_0) = 0$ ist.

Wir können dies zusammenfassen und verallgemeinern. Sei dazu f auf dem Intervall (a, b) n -mal differenzierbar. Sei weiter $x_0 \in (a, b)$ und $f'(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Dann können wir folgende Fallunterscheidung machen:

n ist gerade $(x_0, f(x_0))$ ist ein Minimum oder Maximum von f ,

n ist ungerade $(x_0, f(x_0))$ ist ein Sattelpunkt.

Im nächsten Kapitel wollen wir uns nun abschließend der Analysis mit der Umkehrung der Differenzialrechnung beschäftigen.

3.4 Integralrechnung

Definition 37 (Stammfunktion). Sei $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion auf dem Intervall $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$. Die Stammfunktion $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ von f ist eine Funktion, für die gilt

$$\forall x \in \mathcal{D} : F'(x) = f(x).$$

Oftmals kann man die Stammfunktion einer Funktion erraten. So wissen wir sofort, dass eine Stammfunktion von $6x^2$ gleich $2x^3$ ist. Wir schreiben hier eine, da es beliebig viele Stammfunktionen von $6x^2$ gibt. Eine alternative Stammfunktion könnte $2x^3 + 9$ sein.

Definition 38 (Unbestimmte Integral). Wir bezeichnen die Menge aller Stammfunktionen von f als **unbestimmtes Integral** von f und vereinbaren folgende Schreibweise.

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ die **Integrationskonstante**, x die **Integrationsvariable** und f den **Integranden** bezeichnet.

Satz 13 (Integrationsregeln). Wie auch für die Differenziation gibt es für die Integration einige Regeln, die uns helfen das unbestimmte Integral auszurechnen. Seien hierzu die Funktionen $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gelten folgende Regeln:

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x))dx &= \int f(x)dx + \int g(x)dx \\ \int (c \cdot f(x))dx &= c \cdot \int f(x)dx, \quad c \in \mathbb{R} \\ \int f(x)g'(x)dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx, \quad \textbf{Partielle Integration} \\ \int f(g(x))g'(x)dx &= \int f(u)du, \quad \textbf{Integration durch Substitution,} \end{aligned}$$

wobei bei der Integration durch Substitution $g(x)$ durch u substituiert wurde.

Auch für die Integration gibt es einige elementare Funktionen die wir hier mit ihren

3 Analysis

Stammfunktion angeben möchte. Hierbei sei $k \in \mathbb{R}$ die Integrationskonstante.

$$\begin{aligned}\int c dx &= c \cdot x + k & , c \in \mathbb{R} \\ \int x^a dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + k & , a \in \mathbb{R}, a \neq -1 \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln(a)} + k & , a \in \mathbb{R}, a > 0 \\ \int x^{-1} dx &= \ln|x| + k \\ \int e^x dx &= e^x + k \\ \int \sin(x) dx &= -\cos(x) + k \\ \int \cos(x) dx &= \sin(x) + k\end{aligned}$$

Integration wird oftmals als schwieriger Empfundener, als die Differenziation. Aus diesem Grund wollen wir hier einige Beispiele dazu angeben. Mehr Beispiele werden in der Übung angesprochen.

Beispiel 10 (Unbestimmte Integrale). Sei $f(x) = 3x^2 + \sin(x) + \frac{2}{x}$. Wir berechnen ein unbestimmtes Integral als

$$\begin{aligned}\int (3x^2 + \sin(x) + \frac{2}{x}) dx &= \int 3x^2 dx + \int \sin(x) dx + \int \frac{2}{x} dx \\ &= 3 \cdot \int x^2 dx + \int \sin(x) dx + 2 \cdot \int \frac{1}{x} dx \\ &= 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 - \cos(x) + 2 \cdot \ln|x| + c.\end{aligned}$$

Die Integrationskonstante sei hierbei $c \in \mathbb{R}$.

Sei nun $h(x) = x^2 \cdot \sin(x)$. Wir benutzen nun die partielle Integration mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = -\cos(x)$.

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \sin(x) dx &= x^2 \cdot (-\cos(x)) - \int -\cos(x) x dx \\ &= -x^2 \cdot \cos(x) + 2x \cdot \sin(x) - \int 2 \cdot \sin(x) dx \\ &= -x^2 \cdot \cos(x) + 2x \cdot \sin(x) + 2 \cos(x) + c.\end{aligned}$$

Auch hier ist Integrationskonstante $c \in \mathbb{R}$. Wir müssen hier zweimal partiell integrieren.

Als letztes wollen wir ein Beispiel für eine Integration durch Substitution durchrechnen. Schauen wir uns hierzu die Funktion $i(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$ an. Wir setzen $u = x^2$ und

erhalten dadurch $\frac{du}{dx} = 2x \leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$. Durch die Substitution können wir das Integral wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \int \cos(x^2) \cdot 2x dx & \stackrel{x^2=u, dx=\frac{du}{2x}}{=} \int \cos(u) du \\ & \stackrel{=}{=} \sin(u) + c \\ & \stackrel{u=x^2}{=} \sin(x^2) + c. \end{aligned}$$

Mit der Integrationskonstanten $c \in \mathbb{R}$.

Satz 14 (Bestimmtes Integral und Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Das Integral kann dazu benutzt werden die Fläche unter einer Funktion $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ im Intervall $I = [a, b]$ zu berechnen. Wir bezeichnen a und b dabei als **untere- und obere Intervallgrenze** und schreiben das ganze als:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Dieses bezeichnen wir als **bestimmtes Integral**. Wenn f auf $[a, b]$ stetig ist können wir dieses als

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

berechnen. Dabei ist F eine beliebige Stammfunktion von f .

4 Lineare Algebra

Im Gegensatz zur Analysis wird die Lineare Algebra in der Schule kaum unterrichtet. Wir werden hier nur grob auf die Grundlagen eingehen und einige Begriffe wiederholen.

4.1 Vektoren

Definition 39 (Vektor). *Ein Element aus dem $\mathbb{R}^n = (a_1, \dots, a_n)$ bezeichnen wir als **Vektor** und die Elemente $a_i, i \in [n]$ des Vektors als **Komponenten**. Die Menge \mathbb{R} bezeichnen wir als **Vektorraum**. Wenn der Vektorraum gleich \mathbb{R} ist, bezeichnen wir seine Elemente als **Skalare**.*

Nachdem wir nun wissen was ein Vektor ist, können wir einige Rechenoperationen auf Vektoren definieren.

Definition 40 (Rechenoperationen auf Vektoren). *Seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ zwei Vektoren. Wir definieren die Summe als*

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

und die Multiplikation mit einem Skalar $c \in \mathbb{R}$ als

$$c \cdot a = \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \\ \dots \\ c \cdot a_n \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen

$$\|a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

*als den **Betrag** oder die **Länge** des Vektors a und*

$$\|b - a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2},$$

*als den **Abstand** zweier Vektoren.*

Definition 41 (Skalarprodukt). Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren. Das **Skalarprodukt** dieser ist definiert als:

$$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i.$$

4.2 Lineare Unabhängigkeit

Definition 42 (Linearkombination). Seien $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ Vektoren und $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{R}$ Skalare. Man bezeichnet den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^m k_i \cdot a_i = k_1 \cdot a_1 + k_2 \cdot a_2 + \dots + k_m \cdot a_m$$

als **Linearkombination** der Vektoren $a_i, i \in [m]$.

Bemerkung 14 (Anwendung der Linearkombination). Mit Hilfe der Definition der Linearkombination können wir nun berechnen, ob sich ein Vektor als Linearkombination anderer Vektoren darstellen lässt. Sei hierzu $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir wollen nun herausfinden ob sich c als Linearkombination von a und b darstellen lässt und müssen dazu folgende Gleichung lösen:

$$k_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung liefert uns im Grunde zwei Gleichungen

$$-k_1 + 2k_2 = 3 \quad \text{und} \quad (4.1)$$

$$k_1 + k_2 = 0, \quad (4.2)$$

von denen wir einfach die Lösungen $k_1 = -1$ und $k_2 = 1$ erhalten.

Dadurch, dass k_1 und k_2 ungleich 0 sind, können wir sehen, dass sich c als Linearkombination von a und b darstellen lässt. Eine weitere Interessante Überlegung wäre es nun noch zu überprüfen, ob sich b als Linearkombination von a darstellen lässt. Dabei erhalten wir die folgende Gleichung

$$k_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wofür wir kein k_1 finden können. Was dies bedeutet, erfahren wir in der nächsten Definition.

Definition 43 (Lineare Unabhängigkeit). Seien $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ Vektoren und $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{R}$ Skalare. Die Vektoren a_1, a_2, \dots, a_m werden als **linear unabhängig** bezeichnet, wenn die einzige Lösung der Gleichung

$$\sum_{i=1}^m k_i \cdot a_i = k_1 \cdot a_1 + k_2 \cdot a_2 + \dots + k_m \cdot a_m = 0$$

gleich $k_i = 0, i \in [m]$ ist.

Bemerkung 15 (Basis). Wenn die Vektoren $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind, dann bezeichnet man diese Vektoren als **Basis** des Vektorraumes \mathbb{R}^n . Jeder andere Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ lässt sich dann als Linearkombination der n Vektoren darstellen.

4.3 Matrizen

Wie wir bereits gesehen haben können wir entstehen bei der Berechnung der Linearkombination mehrere Gleichungen. Diese Gleichungen wollen wir uns nun noch einmal etwas genauer betrachten. Nehmen wir hierzu noch einmal das Beispiel aus Bemerkung 14.

$$k_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auch nebeneinander in einer Art Tabelle schreiben und die Skalare k_1, k_2 als Vektor zusammenfassen, wodurch wir die folgenden beiden Konstrukte erhalten:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}.$$

Definition 44 (Matrix). Eine Anordnung von Skalaren $a_{ij} \in \mathbb{R}$ in m Zeilen und n Spalten als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

bezeichnen wir als $m \times n$ -**Matrix**. Diese Matrix kommt also aus der Menge $\mathbb{R}^{m \times n}$. Man bezeichnet (m, n) als die Dimension der Matrix.

Wir beobachten in unserem Beispiel, dass die Länge des Vektors gleich der Spaltenanzahl der Matrix entspricht. Wir können nun die Multiplikation dieser beiden Konstrukte wie folgt definieren.

Definition 45 (Matrix-Vektor-Produkt). Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Das **Produkt** $A \cdot b$ sein dabei die neue Matrix $C \in \mathbb{R}^m$, welche wie folgt definiert ist:

$$C_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \cdot b_j$$

für alle $i \in [m]$.

Wenn wir dies für unser Beispiel anwenden, sehen wir, dass

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

das Gleiche beschreibt, wie die linke Seite unsere beiden Gleichungen 4.1 und 4.2. Wir können unsere gesamte Gleichung schreiben als

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 16 (Matrix-Vektor-Produkt). *In der Informatik möchte man Formeln häufig lieber in dieser Form haben, da diese sehr schnell mit heutigen Prozessoren berechnet werden können.*

Bemerkung 17 (Matrixoperationen). *Weitere Matrixoperationen wie die Addition oder Multiplikation von zwei Matrizen der gleichen Dimension, verhalten sich synonym zu Skalaren Operationen. Die Elemente der Matrizen werden dabei punktweise verarbeitet.*

Im Gegensatz zum Matrix-Vektor-Produkt gibt es auch das Matrix-Matrix-Produkt, welches wir uns hier nicht genauer anschauen wollen.

Beispiel 11. *Lineares Gleichungssystem* Wir können die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

nutzen, um systematisch Lösungen für k_1 und k_2 zu erhalten. Hierzu müssen wir die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ in eine **Dreiecksform** bringen. Dies heißt einfach, dass wir Nullen erzeugen, sodass unterhalb der Diagonalen keine Werte ungleich Null stehen. Für eine beliebige Matrix $A = \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Werten $a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j \in [n]$ wollen wir also eine neue Matrix A' in folgender Form erzeugen:

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & 0 & a'_{33} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe dieser Dreiecksmatrix können wir einfach die Lösungen für unsere Gleichung ermitteln.

Wie bekommen wir nun aus unserer Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ eine Dreiecksform? Dazu multiplizieren wir die obere Zeile mit 1 und addieren diese zu der zweiten Zeile. Dadurch erhalten wir $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Dies machen wir auch mit der rechten Seite und erhalten $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Die gesamte Gleichung sieht also wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Hier sehen wir sofort, dass $k_2 = 1$ ist und daraus können wir einfach den Wert von k_1 als -1 ausrechnen.

Bemerkung 18 (Gauß-Algorithmus). *Diese Berechnung kann auch mit größeren Matrizen durchgeführt werden. Wir werden dies in der Übung zeigen.*

Nachdem eine Matrix in ihre Dreiecksform gebracht wurde, kann es vorkommen, dass wir einige Zeilen erhalten, welche nur mit Nullen besetzt sind. Dies zeigt uns, dass einige der Zeilenvektoren der Matrix linear abhängig sind. Die Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren werden als Rang einer Matrix bezeichnet.

Definition 46 (Rang einer Matrix). *Wir definieren den Rang $\text{rank}(A)$ einer Matrix A als die Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren dieser Matrix.*

Beispiel 12. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ eine 3×3 Matrix.

Da der Zeilenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ auch als $2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ geschrieben werden kann, sind diese nicht unabhängig. Weiter ist der erste Zeilenvektor kein Vielfaches des zweiten Zeilenvektors, weshalb folgt $\text{rank}(A) = 2$.