



UNIVERSITÉ
DE LORRAINE



Département de Mathématiques
Master: Mathématiques et Applications
Parcours: Ingénierie Mathématique pour la science des Données(IMSD)
Année Universitaire 2021 - 2022

October 9, 2024

Projet de recherche

PRINCIPE D'INCERTITUDE

Réalisé par :

- GANTOUNKPO Jean-Noel
- KOWOU Kossi Julien

Professeur :

- Alexandre AFGOUSTIDIS

Contents

0.1	Quelques Notations	4
1	INTRODUCTION	4
2	Notations et Rappels	4
2.1	La transformée de Fourier	4
2.2	Quelques propriétés de la transformée de Fourier	5
2.3	Notions sur les mesures : Moyenne et Variance	6
3	Le Principe d'incertitude classique	7
3.1	Un premier lemme	7
3.2	Enoncé du principe d'incertitude classique	7
3.3	Une implication géométrique de l'inégalité de Heisenberg classique.	10
3.3.1	Conséquences de l'inégalité de Heisenberg classique sur la nature localisée ou étalée d'une fonction vérifiant les hypothèses du principe d'incertitude classique et de sa transformée de Fourier.	10
4	Généralisation du principe d'incertitude avec les opérateurs auto-adjoint dans les espaces de Hilbert	11
4.1	Généralités sur les opérateurs	11
4.2	Le principe d'incertitude dans le cas particulier des opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert	12
4.3	Lien avec le principe d'incertitude classique	13
4.4	Un peu de Théorie spectrale	15
4.4.1	Cas particulier des opérateurs auto-adjoints compacts.	15
4.4.2	Lien avec le principe d'incertitude	16
4.4.3	Indice de localisation d'un vecteur	18
5	CONCLUSION	22
6	Références	22

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier tout d'abord le directeur de ce mémoire Mr Alexandre AFGOUSTIDIS pour la qualité exceptionnelle de son encadrement, et sans qui ce travail ne serait à son état actuel. Ensuite nous remercions très sincèrement tous nos profs pour leur patience, leur savoir-faire et pour la connaissance qu'ils nous transmettent. Pour finir Gloire à " **Vie** " pour sa grâce car **Tout est Vie**.

0.1 Quelques Notations

La mesure de Lebesgue de l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est noté $|E|$.

La fonction caractéristique de E est notée χ_E .

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans l'espace de Hilbert E .

Si A et B sont des opérateurs, on notera AB la composée de B suivie de A c'est-à-dire $A \circ B$.

Si f est une fonction, on désigne par xf la fonction qui à x associe $xf(x)$

1 INTRODUCTION

À l'origine, introduit par le physicien allemand Werner Heisenberg en 1927, le principe d'incertitude est l'une des plus vieilles thématiques de la mécanique quantique. Connu aussi sous le nom d'inégalité de Heisenberg, le principe d'incertitude désigne n'importe quelle inégalité indiquant une limite à la connaissance simultanée de deux propriétés physiques d'un objet à un même instant. Par exemple il est impossible de connaître à la fois la position et la quantité de mouvement d'un objet de manière précise. Dans ce document, on traitera du principe d'incertitude classique puis de sa généralisation aux espaces de Hilbert.

2 Notations et Rappels

2.1 La transformée de Fourier

Définition 2.1 Soit f une fonction de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$. La transformée de Fourier de f est la fonction \hat{f} définie par :

$$\begin{aligned}\widehat{f} : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi &\longmapsto \int e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx\end{aligned}$$

On voit à travers cette définition qu'il ne serait pas possible de définir la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ de la même manière à moins qu'elle soit dans $(\mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^2)(\mathbb{R})$. Cependant, il est aussi possible de définir la transformée de Fourier d'une fonction de carré intégrable. Pour $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ de f est définie par :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi &\longmapsto \lim_{R \rightarrow +\infty} \int e^{-2\pi i x \xi} f_R(x) dx \text{ p.p } \xi \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

où $f_R(x) = 1_{[-R, R]} f(x)$. L'un des avantages de la transformée de Fourier \mathcal{F} en tant qu'application définie sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ est qu'elle est bijective et donc laisse $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ globalement invariant et pour toute fonction $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int e^{-2\pi i x \xi} f_R(-\xi) d\xi$ p.p $x \in \mathbb{R}$

2.2 Quelques propriétés de la transformée de Fourier

Propriété 2.1

soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable, admettant les dérivées partielles d'ordre 1 qui sont elles mêmes intégrables. On a:

$\forall 1 \leq j \leq n$, $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = 2\pi i \xi_j \widehat{f}$ en particulier pour $n=1$; c'est-à-dire en dimension 1 d'espace, $\widehat{f}'(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi)$

Proposition 2.1 (tiré de l'article *The uncertainty Principle: A mathematical survey*, Gerald B. Folland et Alladi Sitaram, page 208)

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}^n$, définissons $f_{a,b}(x) = e^{2\pi i b x} f(x - a)$.

Alors $\widehat{f}_{a,b}(\xi) = e^{-2\pi i a(\xi - b)} \widehat{f}(\xi - b) = e^{-2\pi i a b} (\widehat{f})_{b, -a}(\xi) \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Preuve 1

$\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ et $f_{a,b}(x) = e^{2\pi i b x} f(x - a) \forall x \in \mathbb{R}^n$.

D'une part on a :

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_{b,-a}(\xi) &= \int e^{-2\pi i x \xi} e^{2\pi i b x} f(x-a) dx \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \\
&= \int e^{-2\pi i x(\xi-b)} f(x-a) dx. \\
&= \int e^{-2\pi i (X+a)(\xi-b)} f(X) dX \text{ où } X = x-a. \\
&= e^{-2\pi i(\xi-b)a} \underbrace{\int e^{-2\pi i X(\xi-b)} f(X) dX}_{\widehat{f}(\xi-b)}. \\
\widehat{f}_{a,b}(\xi) &= e^{-2\pi i a(\xi-b)} \widehat{f}(\xi-b)
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
(\widehat{f})_{b,-a}(\xi) &= e^{-2\pi i \xi a} \widehat{f}(\xi-b) \\
\text{donc } e^{2\pi i a b} (\widehat{f})_{b,-a} &= e^{2\pi i a b} e^{-2\pi i a \xi} \widehat{f}(\xi-b) \\
&= e^{-2\pi i a(\xi-b)} \widehat{f}(\xi-b)
\end{aligned}$$

Proposition 2.2 (Plancherel)

Pour toute fonction $f \in (\mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^2)(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. De plus $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$

2.3 Notions sur les mesures : Moyenne et Variance

Définition 2.2 : (D'après l'article *The uncertainty Principle: A mathematical survey*, Gerald B. Folland et Alladi Sitaram, page 208)

Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} . La moyenne de μ est le réel défini par $\int_{\mathbb{R}} x d\mu(x)$ et notée $M(\mu)$. La variance définie par :

$$V(\mu) = \inf_{a \in \mathbb{R}} \int (x-a)^2 d\mu(x)$$

Pour une valeur donnée de a , si cette intégrale est finie alors elle est finie quelque soit a . En effet si a et b sont deux réels tels que $\int (x-a)^2 d\mu(x)$ soit fini pour a . on a ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} (x-b)^2 d\mu(x) = -2(b-a) \int_{\mathbb{R}} x d\mu(x) + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}} d\mu(x)$$

$$= -2(b - a)M(\mu) + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}} d\mu(x) < +\infty$$

Remarque 2.1 La fonction $a \mapsto \int_{\mathbb{R}} (x - a)^2 d\mu(x)$ est une fonction quadratique de la variable a qui admet un minimum. Ce dernier est atteint en la moyenne de μ .

De façon similaire si μ est une mesure sur \mathbb{R}^n , nous dirons que la variance de μ est finie si $\int |x|^2 d\mu(x) < +\infty$. Dans ce cas, on définit par $M(\mu) \in \mathbb{R}^n$, la moyenne de μ et la matrice de variance covariance $V(\mu) = (V_{jk}(\mu))$ par $M(\mu) = \int_{\mathbb{R}} x d\mu(x)$ et $V_{jk}(\mu) = \int y_j y_k d\mu(x)$ où $y = x - M(\mu)$. Si $d\mu(x) = f(x)dx$ avec $f \in \mathbb{L}^1$, f sera appelé la fonction densité de probabilité et on écrit $M(f)$ et $V(f)$ au lieu de $M(\mu)$ et $V(\mu)$.

3 Le Principe d'incertitude classique

3.1 Un premier lemme

lemme 3.1 Si $f \in (\mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^2)(\mathbb{R}^n)$ et $\|f\|_2 = 1$ alors $|f|^2$ et $|\hat{f}|^2$ sont toutes deux des densités de probabilité sur \mathbb{R}^n .

3.2 Enoncé du principe d'incertitude classique

Proposition 3.1 (tiré de l'article *The uncertainty Principle: A mathematical survey*, Gerald B. Folland et Alladi Sitaram, page 209, Théorème 1.1)

Si $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_2 = 1$ alors $V(|f|^2)V(|\hat{f}|^2) \geq \frac{1}{16\pi^2}$.

Autrement dit pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ et pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\int (x - a)^2 |f(x)|^2 dx \int (\xi - b)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{\|f\|_2^4}{16\pi^2} \quad (C'est l'inégalité d'Heisenberg classique).$$

Il y a égalité si et seulement si $f(x) = ce^{2\pi i b x} e^{-\gamma(x-a)^2}$, $\forall c \in \mathbb{C}$ et $\gamma > 0$

lemme 3.2

Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{C})$ dérivable telle que f' et $xf \in \mathbb{L}^2(\mathbb{C})$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = -2 \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} x f(x) \overline{f'(x)} dx \right)$$

Preuve 2

On a: $|f|^2 = f\bar{f}$, donc $(|f|^2)' = 2\operatorname{Re} f\bar{f}'$

Donc si $-\infty < c < d < +\infty$; on a de par une intégration par partie que:

$$\begin{cases} u' = 1 \\ v = |f|^2 \end{cases} \implies \begin{cases} u = x \\ v' = 2\operatorname{Re} f\bar{f}' \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_c^d |f(x)|^2 dx &= [x|f(x)|^2]_c^d - 2 \int_c^d x \operatorname{Re} f(x) \overline{f'(x)} dx \\ &= [x|f(x)|^2]_c^d - 2\operatorname{Re} \int_c^d x f(x) \overline{f'(x)} dx \end{aligned}$$

Alors $2\operatorname{Re} \int_c^d x f(x) \overline{f'(x)} dx = [x|f(x)|^2]_c^d - \int_c^d |f(x)|^2 dx$

Puisque f , xf et f' appartiennent à \mathbb{L}^2 , les intégrales de cette première égalité tendent vers une limite finie quand $c \rightarrow -\infty$ ou $d \rightarrow +\infty$ et par conséquent, on a:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \overline{f'(x)} dx &= d|f(d)|^2 - c|f(c)|^2 - \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \\ \text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx &= -2\operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} x f(x) \overline{f'(x)} dx \right) \end{aligned}$$

Preuve 3 (du principe d'incertitude classique)

Pour simplifier les calculs on prendra $a = b = 0$. Toutefois le cas $(a, b) \neq (0, 0)$ se démontre exactement de la même manière .

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \\ &= |2\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \overline{f'(x)} dx| \\ &\leq \|2xf(x)\|_2 \times \|\overline{f'(x)}\|_2 \text{ par Swartz} \\ &\leq 2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ car } |f'| = |\overline{f'}| \\ \text{donc } \|f\|_2^4 &\leq 4 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx \right) \end{aligned}$$

De par la relation $\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi)$ on a que :

$$|\widehat{f'}(\xi)|^2 = 4\pi^2 \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2$$

$$\text{alors } \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f'}(\xi)|^2 d\xi = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Ainsi par la formule de Plancherel on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \text{ d'où :}$$

$$\begin{aligned} \|f\|_2^4 &\leq 4 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \\ &= 16\pi^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc on a finalement, } \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{\|f\|_2^4}{16\pi^2}$$

L'inégalité précédente devient une égalité si et seulement si $xf(x)$ et $f'(x)$ sont liées; c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) = \lambda xf(x)$.

Posons $f(x) = u(x) + iv(x)$ alors $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$

$$f'(x) = \lambda xf(x) \implies \begin{cases} u'(x) = \lambda x u(x) \\ v'(x) = \lambda x v(x) \end{cases}$$

$$u(x) = k e^{\frac{1}{2}\lambda x^2} \text{ et } v(x) = k' e^{\frac{1}{2}\lambda x^2}, \text{ donc } f(x) = (k + ik') e^{\frac{1}{2}\lambda x^2} \text{ avec } k, k' \text{ des réels.}$$

Du coup $f(x) = C e^{\frac{1}{2}\lambda x^2}$ où C est un nombre complexe.

$$|f|^2 = |C|^2 e^{\lambda x^2}.$$

- Si $\lambda > 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f|^2 = +\infty$ (Absurde) car $|f|^2$ est intégrable.
- Si $\lambda = 0$ alors $|f|^2 = |C|^2$ et qui ne serait pas intégrable dans ce cas car $C \neq 0$.
- Alors $\lambda < 0$ et donc $f(x) = C e^{-\frac{1}{2}\gamma x^2}$ où $\gamma = -\lambda > 0$.

Remarque 3.1

L'inégalité de Heisenberg classique impose que si l'une des deux variances $V(|f|^2)$ et $V(\widehat{f}^2)$ est très faible (tend vers zéro) l'autre doit être grande.

3.3 Une implication géométrique de l'inégalité de Heisenberg classique.

Remarque 3.2

Les variances de $V(|f|^2)$ et $V(|\hat{f}|^2)$ renseignent sur le fait que f et \hat{f} soient concentrées autour de la moyenne $|f|^2$ et de $|\hat{f}|^2$ respectivement. Plus la variance de $|f|^2$ (resp $|\hat{f}|^2$) est faible plus f (resp \hat{f}) est concentrée autour de la moyenne de $|f|^2$ (resp $|\hat{f}|^2$).

Conclusion partielle

En combinant les remarques 3.1 et 3.2, l'inégalité de Heisenberg classique implique que si f est concentrée autour d'un point donné, \hat{f} ne peut pas être au même moment aussi concentrée et vice - versa.

3.3.1 Conséquences de l'inégalité de Heisenberg classique sur la nature localisée ou étalée d'une fonction vérifiant les hypothèses du principe d'incertitude classique et de sa transformée de Fourier.

Ici nous allons visualiser le graphe d'une fonction f et celle de sa transformée de Fourier dans les deux cas suivants :

- si f est la fonction $x \mapsto (\frac{1}{2\pi})^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{4}}$ alors $\hat{f} : \xi \mapsto \sqrt{4\pi} (\frac{1}{2\pi})^{\frac{1}{4}} e^{-4(\pi\xi)^2}$
- si f est la fonction $x \mapsto (\frac{\pi}{32})^{-\frac{1}{4}} e^{-16x^2}$ alors $\hat{f} : \xi \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{16}} (\frac{\pi}{32})^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{(\pi\xi)^2}{16}}$

On vérifie facilement dans chacun de ces cas que $\|f\|_2 = 1$ et donc $|f|^2$ et $|\hat{f}|^2$ sont des densités de probabilité.

Dans le premier cas, nous prenons une fonction f qui n'est pas trop concentrée autour de 0, puis on remarque que sa transformée de Fourier \hat{f} , est elle par contre plus concentrée autour de 0.

Dans le second cas, on fait l'inverse du premier cas, c'est-à-dire qu'on prend f assez concentrée autour de 0, puis on remarque que sa transformée de Fourier \hat{f} , est elle par contre moins concentrée autour de 0.

Ces graphes viennent donc confirmer notre conclusion partielle précédente.

4 Généralisation du principe d'incertitude avec les opérateurs auto-adjoint dans les espaces de Hilbert

4.1 Généralités sur les opérateurs

Définition 4.1 :

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur un corps \mathbb{K} et \mathcal{H} un espace de hilbert muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- *Un opérateur est une application linéaire d'une partie de E à valeurs dans F . Le plus grand sous ensemble de E sur lequel T est défini est appelé le domaine de T . On le note $D(T)$.*
- *L'adjoint d'un opérateur T , est l'unique opérateur T^* défini de \mathcal{H} dans \mathcal{H} vérifiant la relation suivante : $\forall u, v \in H, \langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle$.*
- *On dit que T est auto-adjoint si $T = T^*$.*
- *On dira qu'un opérateur T de E dans F est compact si T est continu, et si T transforme toute partie bornée de E en une partie relativement compacte de F .*
- *Le spectre d'un opérateur T est l'ensemble $\{ \lambda \in \mathbb{K} / T - \lambda Id \text{ ne soit pas bijectif} \}$.*

Toutes les opérations qu'on peut définir avec les applications linéaires restent possibles avec les opérateurs. En prélude au principe d'incertitude sur les espaces de Hilbert, on introduira ici un nouveau opérateur.

Définition 4.2 : *On suppose que A et B sont deux opérateurs densément défini sur H , de domaines $D(A)$ et $D(B)$. Alors le domaine de définition du produit AB est $D(AB) = \{u \in D(B) : Bu \in D(A)\}$ et aussi pour $D(BA) = \{u \in D(A) : Au \in D(B)\}$*

Définition 4.3 : *Soient A et B deux opérateurs. On appelle commutateur de A et B et on note $[A, B]$ l'opérateur défini par : $[A, B] = AB - BA$. Le domaine $D([A, B])$ est fatalement $D(AB) \cap D(BA)$.*

Remarque 4.1 $D([A, B]) \subset D(A) \cap D(B)$.

4.2 Le principe d'incertitude dans le cas particulier des opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert .

L'inégalité de Heisenberg précédente(classique) est un cas particulier d'inégalité plus générale concernant les opérateurs auto-adjoint dans un espace de Hilbert.

Proposition 4.1 (tiré de l'article *The uncertainty Principle: A mathematical survey*, Gerald B. Folland et Alladi Sitaram,page 210, proposition 2.1)

Si A et B sont deux opérateurs auto-adjoints définis sur un espace de hilbert \mathcal{H} complexe; donc muni d'un produit scalaire hermitien et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$|(A - \alpha)u| |(B - \beta)u| \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B]u, u \rangle|, \forall u \in D([A, B]).$$

C'est le principe d'incertitude pour les opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert .

Preuve 4

Du moment où si A et B sont des opérateurs auto-adjoints, $A - \alpha Id$ et $B - \beta Id$ restent auto-adjoints, on peut sans perte de généralité faire le choix $\alpha = \beta = 0$. Cela revient à montrer que :

$$\forall u \in D([A, B]), |Au| |Bu| \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B]u, u \rangle|.$$

Par définition $[A, B] = AB - BA$ sur $D([A, B])$ On a: $[A, B]u = ABu - BAu$
 $\langle [A, B]u, u \rangle = \langle ABu - BAu, u \rangle = \langle ABu, u \rangle - \langle BAu, u \rangle$

$$\begin{aligned} |\langle [A, B]u, u \rangle| &= |\langle ABu, u \rangle - \langle BAu, u \rangle| \\ &= |\langle Bu, A^*u \rangle - \langle Au, B^*u \rangle|, \text{ car } A^* = A \text{ et } B^* = B \\ &= |\langle Bu, Au \rangle - \langle Au, Bu \rangle| \\ &= |\overline{\langle Au, Bu \rangle} - \langle Au, Bu \rangle|, \text{ car } \langle Bu, Au \rangle = \overline{\langle Au, Bu \rangle} \\ &= 2|\text{Im}\langle Au, Bu \rangle| \\ &\leq 2|Au| |Bu| \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } |Au| |Bu| \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B]u, u \rangle|$$

Une question naturelle qu'on peut se poser est que dans le cas où l'un au au moins de α et β est non nul est-ce que le membre de droite reste le même ? Eh oui , on montre par un petit calcul fonctionnel que $[A - \alpha Id, B - \beta Id] = [A, B]$ pour tous complexes α et β .

4.3 Lien avec le principe d'incertitude classique

Dans cette section, on prend $\mathcal{H} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini comme suit : pour deux fonctions f et g de $\mathcal{H} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \bar{g} dx$.

Considérons les deux opérateurs suivants:

$$A : \begin{array}{ccc} D(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ f & \longmapsto & xf \end{array}$$

$$B : \begin{array}{ccc} D(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ f & \longmapsto & if' \end{array}$$

On rappelle que $D(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact contenu dans \mathbb{R} .

Montrons rapidement que A et B sont auto-adjoints.

Soient f et $g \in D(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle Af, g \rangle &= \langle xf, g \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} x f \bar{g} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f x \bar{g} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f \overline{xg} dx \\ &= \langle f, xg \rangle \\ &= \langle f, Ag \rangle \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\langle Bf, g \rangle &= \langle if', g \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} if' \bar{g} dx \\
&= i \int_{\mathbb{R}} f' \bar{g} dx \\
&= i([f\bar{g}] - \int_{\mathbb{R}} f \bar{g}' dx) \\
&= -i \int_{\mathbb{R}} f \bar{g}' dx \quad \text{car } f \text{ et } g \text{ sont à support compact contenu dans } \mathbb{R} \\
&= \int_{\mathbb{R}} f (-i \bar{g}') dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f \overline{ig'} dx \\
&= \langle f, ig' \rangle \\
&= \langle f, Bg \rangle
\end{aligned}$$

D'où A et B sont bien auto-adjoints.

Quant à leur commutateur on a : $[A, B] = -i \times \text{Id}$

Pour a et b deux réels, $\|(A - a)f\|_2 = \|xf - af\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (x - a)^2 |f(x)|^2 dx}$

$$\begin{aligned}
\text{et } \|(B - (-2\pi b))f\|_2 &= \|if' + 2\pi bf\|_2 \\
&= \|(if' + 2\pi bf)\|_2 \\
&= \|i(2\pi i \xi \widehat{f}) + 2\pi b \widehat{f}\|_2 \\
&= 2\pi \|(\xi - b) \widehat{f}\|_2 \\
&= 2\pi \times \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (\xi - b)^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi}
\end{aligned}$$

Aussi $\frac{1}{2} |\langle [A, B]f, f \rangle| = \frac{1}{2} \|f\|_2^2$. Ainsi d'après la proposition 4.1, on a :

$$\sqrt{\int_{\mathbb{R}} (x - a)^2 |f(x)|^2 dx} \times (2\pi \times \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (\xi - b)^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi}) \geq \frac{1}{2} \|f\|_2^2.$$

En élevant au carré chaque membre de cette inégalité, on trouve :

$$\int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 |f(x)|^2 dx \times \int_{\mathbb{R}} (\xi-b)^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{1}{16\pi^2} \|f\|_2^4$$

qui est l'inégalité de Heisenberg classique .

4.4 Un peu de Théorie spectrale

Ici \mathcal{H} désigne un espace de Hilbert quelconque.

Proposition 4.2 (Admise)[tiré du livre: *Introduction à la théorie spectrale de Pierre Lévy-Brulh, chapitre 5*]

Soit A opérateur auto-adjoint de \mathcal{H} dans \mathcal{H} . Pour $u \in \mathcal{H}$, il existe une mesure $\mu_{A,u}$ sur les boréliens du spectre $\sigma(A)$ de A telle que :

$$\langle Au, u \rangle = \int_{\sigma(A)} \lambda d\mu_{A,u}(\lambda). \text{ On note } A = \int_{\sigma(A)} \lambda d\mu_{A,u}(\lambda).$$

4.4.1 Cas particulier des opérateurs auto-adjoints compacts.

On s'intéresse à présent ce que devient la proposition précédente quand A est auto-adjoint compact.

Proposition 4.3 Si A est un opérateur auto-adjoint compact sur \mathcal{H} et si $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sa suite de valeurs propres, alors il existe une base hilbertienne de H constituée de vecteurs propres $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A telle que

$$A = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle \cdot, \psi_n \rangle \psi_n$$

Ainsi pour tout u dans \mathcal{H} , $\langle Au, u \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n |\langle u, \psi_n \rangle|^2$ et on montre que l'application

$\mu_{A,u}$ qui à tout singleton $\{\lambda\} \in \mathcal{P}(\sigma(A))$ associe le réel $\sum_{\substack{\lambda_n = \lambda \\ n \in \mathbb{N}}} |\langle u, \psi_n \rangle|^2$ est une

mesure positive sur $\mathcal{B}(\sigma(A))$ dont la masse totale est $\|u\|^2$. Ainsi si u est unitaire, alors $\mu_{A,u}$ est une mesure de probabilité. De plus elle(cette mesure) vérifie $\langle Au, u \rangle = \int_{\sigma(A)} \lambda d\mu_{A,u}$.

4.4.2 Lien avec le principe d'incertitude

Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints compacts définis sur \mathcal{H} et u un vecteur unitaire de $D([A, B])$. Comme précédemment, on définit les mesures $\mu_{A,u}$ et $\mu_{B,u}$.

$$\begin{aligned} M(\mu_{A,u}) &= \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda \mu_{A,u}(\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda \left(\sum_{\substack{\lambda_n = \lambda \\ n \in \mathbb{N}}} |< u, \psi_n >|^2 \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n |< u, \psi_n >|^2 \\ M(\mu_{A,u}) &= < Au, u > \end{aligned}$$

Quant à la variance de $\mu_{A,u}$ on a:

$$\begin{aligned}
V(\mu_{A,u}) &= \sum_{\lambda \in \sigma(A)} (\lambda - M(\mu_{A,u}))^2 \mu_{A,u}(\lambda) \\
&= \sum_{\lambda \in \sigma(A)} (\lambda - M(\mu_{A,u}))^2 \left(\sum_{\substack{\lambda_n = \lambda \\ n \in \mathbb{N}}} |\langle u, \psi_n \rangle|^2 \right) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n - M(\mu_{A,u}))^2 |\langle u, \psi_n \rangle|^2 \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n - M(\mu_{A,u}))^2 \langle u, \psi_n \rangle \langle \psi_n, u \rangle \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n - M(\mu_{A,u})) \langle u, \psi_n \rangle (\lambda_n - M(\mu_{A,u})) \langle \psi_n, u \rangle \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle u, \lambda_n \psi_n - M(\mu_{A,u}) \psi_n \rangle \langle \lambda_n \psi_n - M(\mu_{A,u}) \psi_n, u \rangle \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle u, A \psi_n - M(\mu_{A,u}) \psi_n \rangle \langle A \psi_n - M(\mu_{A,u}) \psi_n, u \rangle \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle u, (A - M(\mu_{A,u})) \psi_n \rangle \langle (A - M(\mu_{A,u})) \psi_n, u \rangle \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle u, (A - M(\mu_{A,u})) \psi_n \rangle|^2 \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle (A - M(\mu_{A,u})) u, \psi_n \rangle|^2 \text{ car } A - M(\mu_{A,u}) \text{ est auto-adjoint} \\
&= \|(A - M(\mu_{A,u})) u\|^2
\end{aligned}$$

On a un résultat analogue pour la moyenne et la variance de la mesure $\mu_{B,u}$. Ainsi la proposition 4.1 implique (sinon équivaut à)

$V(\mu_{A,u})V(\mu_{B,u}) \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B]u, u \rangle|^2$, ce qui a des similarités avec l'inégalité de Heisenberg classique même si le second membre n'est pas pareil à celui du cas classique. Comme dans le cas de l'inégalité de Heisenberg classique, on aimerait interpreter géométriquement l'inégalité précédente. Pour ce faire, nous introduisons un nouveau concept dénommé "Indice de localisation d'un vecteur dans un espace de l'Hilbert".

4.4.3 Indice de localisation d'un vecteur

Motivations: Exactement tout comme pour la résolution des systèmes linéaires on aurait préféré un système linéaire dont la matrice est creuse à un système linéaire dont la matrice est pleine, l'idée ici est qu'on trouve qu'il est plus facile de manipuler un vecteur u de \mathcal{H} (dont $\{e_i\}_{i \in I}$ est une base hilbertienne) n'ayant qu'un nombre fini de coefficients de Fourier non nuls. Plus le nombre de coefficients de Fourier est petit, plus le vecteur est "intéressant" c'est-à-dire bien localisé dans \mathcal{H} car pouvant être désormais vu dans un sous-espace de dimension finie de \mathcal{H} qui n'était pas nécessairement de dimension finie. Ainsi nous introduisons un outil pouvant servir à mesurer combien un vecteur est "bien localisé": l'indice de localisation d'un vecteur dans un espace de Hilbert.

Définition 4.4

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $B = \{e_i\}_{i \in I}$ une base de Hilbert de \mathcal{H} . On définit l'indice de localisation d'un vecteur $u = \sum_{i \in I} \langle u, e_i \rangle e_i$ de \mathcal{H} relativement à la base B et on note I_u^B l'élément de $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ défini par:

$$I_u^B = \begin{cases} \text{nombre de coefficients de Fourier non nuls de } u & \text{si } u \text{ en possède un nombre fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple: Soit T un opérateur auto-adjoint compact sur \mathcal{H} . Ainsi on sait qu'il existe une base hilbertienne $\mathcal{B} = \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{H} constituée uniquement de vecteurs propres de T .

$\forall n \in \mathbb{N}, I_{\phi_n}^{\mathcal{B}} = 1$ car $\forall m \neq n, \langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0$ et $\langle \phi_n, \phi_n \rangle \neq 0$ car $|\langle \phi_n, \phi_n \rangle|^2 = \|\phi_n\|^2 = 1$.

Remarque 4.2

- L'indice de localisation d'un vecteur dépend de la base hilbertienne considérée.
- Si $I_u^{\mathcal{B}} = 1$ dans une base hilbertienne de vecteurs propres d'un opérateur T , alors u est aussi un vecteur propre de T .
- Si $I_u^{\mathcal{B}}$ n'est pas très loin de 1 (≤ 10 par exemple), On dira que u est bien localisé dans la base \mathcal{B} .

A présent nous revenons à l'interprétation de $V(\mu_{A,u})V(\mu_{B,u}) \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B]u, u \rangle|^2$. Nous voyons toute suite que si A et B commutent, si l'opérateur $[A, B]$ n'est pas

injectif ou si le vecteur u est tel que $[A, B]u$ et u sont orthogonaux, une interprétation de cette inégalité n'aurait aucun intérêt. Ainsi, on suppose qu'on se trouve dans aucune de ces situations. Nous sommes alors convaincus du fait que le terme de droite $\frac{1}{4} |< [A, B]u, u >|^2$ est non nul. Ainsi cette inégalité comme dans le cas classique implique que si l'une des variances tend vers zéro, l'autre est contraint à être grande (en tout cas largement plus grande que la première). Voyons à présent dans quelle(s) circonstances(s) la variance $V(\mu_{A,u})$ est très petite. On s'intéressera ici en particulier au cas où l'indice de localisation de u dans la base hilbertienne $\mathcal{B} = \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs propres de A est petit.

Pour ceci, calculons $V(\mu_{A,u})$ quand $I_u^{\mathcal{B}} = 1$.

D'après la remarque 4.2 si $I_u^{\mathcal{B}} = 1$ dans une base hilbertienne de vecteurs propres d'un opérateur A , alors u est aussi un vecteur propre de A .

$I_u^{\mathcal{B}} = 1 \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} / u = < u, \psi_{n_0} > \psi_{n_0}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \neq n_0$ alors $< u, \psi_n > = 0$.

Donc $Au = \lambda_{n_0} u$.

$$\begin{aligned} M(\mu_{A,u}) &= < Au, u > \\ &= < \lambda_{n_0} u, u > \\ M(\mu_{A,u}) &= \lambda_{n_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\mu_{A,u}) &= \sum_{\lambda \in \sigma(A)} (\lambda - M(\mu_{A,u}))^2 \mu_{A,u}(\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \sigma(A)} (\lambda - M(\mu_{A,u}))^2 \left(\sum_{\substack{\lambda_n = \lambda \\ n \in \mathbb{N}}} |< u, \psi_n >|^2 \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n - M(\mu_{A,u}))^2 |< u, \psi_n >|^2 \\ &= (\lambda_{n_0} - \lambda_{n_0})^2 |< u, \psi_{n_0} >|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

On vient de montrer que si $I_u^{\mathcal{B}} = 1$ alors u est un vecteur propre de A et que $V(\mu_{A,u}) = 0$. Pour aller un peu plus loin on montrera juste après la conclusion partielle suivante, que si toutes les valeurs propres de A sont de multiplicité égale 1, alors les assertions : $I_u^{\mathcal{B}} = 1$, $V(\mu_{A,u}) = 0$, et u est un vecteur propre de A s'équivalent.

conclusion partielle:

Si $I_u^{\mathcal{B}} = 1$ alors $I_u^{\mathcal{B}'} \neq 1$ car sinon $V(\mu_{B,u}) = 0$ (ce qui est impossible d'après l'inégalité qu'on cherche à interpréter) où \mathcal{B}' est une base de vecteurs propres d'un opérateur auto-adjoints compact B .

Un cas plus restrictif, mais beaucoup plus parlant !

Proposition 4.4

Si toutes les valeurs propres de A sont simples c'est-à-dire de multiplicité égale à 1, on a équivalence entre les assertions suivantes:

1. $I_u^{\mathcal{B}} = 1$
2. $V(\mu_{A,u}) = 0$
3. u est un vecteur propre de l'opérateur auto-adjoint compact A .

Preuve 5 On montrera que (1) \iff (2) et (2) \iff (3).

(1) \implies (2) : (déjà démontré précédemment).

(2) \implies (1): Raisonnons par contraposée en supposant que $I_u^{\mathcal{B}} > 1$ (≥ 2) puis montrons que $V(\mu_{A,u}) > 0$.

Comme toute valeur propre est de multiplicité égale à 1, on a :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \sigma(A), \mu_{A,u}(\lambda) &= \sum_{\substack{\lambda_n = \lambda \\ n \in \mathbb{N}}} | \langle u, \psi_n \rangle |^2 \\ &= | \langle u, \psi_{n_0} \rangle |^2 \text{ avec } \lambda_{n_0} = \lambda \end{aligned}$$

$I_u^{\mathcal{B}} \geq 2 \implies \exists n_1 \text{ et } n_2 \text{ dans } \mathbb{N} \text{ tels que } | \langle u, \psi_{n_1} \rangle | \text{ et } | \langle u, \psi_{n_2} \rangle | \text{ soient non nuls.}$

Donc $\mu_{A,u}(\lambda_{n_1})$ et $\mu_{A,u}(\lambda_{n_2})$ sont tous non nuls.

Comme $\lambda_{n_1} \neq \lambda_{n_2}$ alors $\lambda_{n_1} - M(\mu_{A,u})$ et $\lambda_{n_2} - M(\mu_{A,u})$ ne peuvent pas être simultanément nuls.

$$\begin{aligned} V(\mu_{A,u}) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n - M(\mu_{A,u}))^2 \mu_{A,u}(\lambda_n) \\ &= (\lambda_{n_1} - M(\mu_{A,u}))^2 \mu_{A,u}(\lambda_{n_1}) + (\lambda_{n_2} - M(\mu_{A,u}))^2 \mu_{A,u}(\lambda_{n_2}) + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{n_1, n_2\}} (\lambda_n - M(\mu_{A,u}))^2 \mu_{A,u}(\lambda_n) \end{aligned}$$

Comme soit $(\lambda_{n_1} - M(\mu_{A,u}))^2 \mu_{A,u}(\lambda_{n_1}) > 0$ soit $(\lambda_{n_2} - M(\mu_{A,u}))^2 \mu_{A,u}(\lambda_{n_2}) > 0$, il suit que $V(\mu_{A,u}) > 0$. On a donc montré $(2) \implies (1)$ ainsi $(1) \iff (2)$

$$(2) \implies (3)$$

$$\begin{aligned} V(\mu_{A,u}) = 0 &\implies \|(A - M(\mu_{A,u}))u\|^2 = 0 \\ &\implies Au = M(\mu_{A,u})u \\ &\implies u \text{ est un vecteur propre associé à la valeur propre } M(\mu_{A,u}) \end{aligned}$$

donc $(2) \implies (3)$

$$(3) \implies (2)$$

u vecteur propre de $A \implies \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $Au = \lambda_{n_0}u$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } M(\mu_{A,u}) &= \langle Au, u \rangle \\ &= \lambda_{n_0} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V(\mu_{A,u}) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n - M(\mu_{A,u}))^2 \mu_{A,u}(\lambda_n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n - \lambda_{n_0})^2 |\langle u, \psi_n \rangle|^2 \\ &= (\lambda_{n_0} - \lambda_{n_0})^2 |\langle u, \psi_{n_0} \rangle|^2 \\ &= 0 \text{ car } \forall n \neq n_0, \langle u, \psi_n \rangle = 0 \text{ (vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes)} \end{aligned}$$

Ainsi $(3) \implies (2)$ et donc $(2) \iff (3)$.

conclusion partielle:

Dans le cas où les opérateurs A et B sont auto-adjoints compacts et ont des valeurs propres toutes de multiplicité égale à 1, en calquant la conclusion partielle précédente, il suit que u ne peut être un vecteur propre à la fois pour A et pour B .

Remarque 4.3

Il est important de noter que même si le vecteur u considéré n'est pas unitaire, en le normalisant on se retrouve dans notre cadre de départ. Ce qui permet de tirer des conclusions similaires sur u .

5 CONCLUSION

Le principe d'incertitude vu dans son aspect général c'est -à-dire-dire plus forcément dans sa formulation initiale introduite en mécanique quantique, sous certaines hypothèses, peut permettre de détecter certaines des propriétés qu'un objet mathématique(fonction , vecteur etc ...) ne peut posséder simultanément .

La découverte faite suite à l'étude menée dans le présent document est le fait qu'un vecteur u d'un espace de Hilbert \mathcal{H} ne peut être à la fois vecteur propre de deux opérateurs auto-adjoints compacts A et B définis sur un espace de Hilbert \mathcal{H} si toutes les valeurs propres de A et de B sont simples.

6 Références

1. "The uncertainty Principle: A Mathematical Survey", Gerald B. Folland et Alladi Sitaram pages 208 - 210
2. "Introduction à la théorie spectrale", Pierre Lévy- Bruhl, chapitres 3,4, et 5.
3. Wikipédia(section sur les opérateurs auto-adjoints et opérateurs compacts)
4. Cours d'analyse du Master 1 Mathématiques et applications, semestre1 2021-2022 du Prof Frédéric Robert, Université de Lorraine, Faculté des Sciences et Technologies de Nancy.

FIN