III. Argument en logique des propositions

Un **argument** est un ensemble de propositions appelées **prémisses** suivies d'une proposition appelée **conclusion** qui "découle" ou "pas" (plus ou moins bien des prémisses)

Un argument sera dit **valide** si la conjonction des prémisses implique logiquement la conclusion. Autrement l'argument est dit invalide

Proposition

Soient $p_1; p_2; \dots; p_n$ les prémisses d'un argument

Soit q la conclusion de l'argument

L'argument $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$

est valide si et seulement si

$p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$ est une tautologie

Exemple : Si tu insultes Philippe je ne te ~~parlerai~~ parlerai plus.

Tu insultes Philippe

Donc je ne te parle plus

p : tu insultes Philippe

q : je ne te parle plus

Prémisses $\left\{ \begin{array}{l} p \to q \\ p \end{array} \right.$

Conclusion $\{ \; q$

$$(p \to q) \wedge p \to q$$

modélisation de l'argument

$$((p \to q) \wedge p) \to q$$ est-ce une tautologie ?

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$((p \to q) \wedge p) \to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

C'est bien une tautologie, donc l'argument est valide

Exemple - exercice

p_1 : Si tu es mathématicien^{ne} alors tu es intelligent(e)

p_2 : Tu es intelligent et riche

q_A : Donc si tu es riche, c'est que tu es un mathématicien(ne)

Evaluation de l'argument ?

p : tu es mathématicien(ne) $\quad$ q : tu es intelligent(e)

r : tu es riche

$p_1 : p \to q$

$p_2 : q \wedge r$

$q_A : r \to p$

$$(p \to q) \wedge (q \wedge r) \to (r \to p)$$

On veut évaluer l'argument ?

argument non valide, ce n'est pas une tautologie

p	q	r	$p \to q$	$q \wedge r$	$(p \to q) \wedge (q \wedge r)$	$(r \to p)$	$(p \to q) \wedge (q \wedge r) \to (r \to p)$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

This slide left blank for whiteboard

IV Notion de prédicat ; construction de propositions avec prédicat et quantificateur

Prédicat : Un prédicat décrit une propriété qu'un ou plusieurs objets (ou individus) peuvent ou non avoir

Exemple : Prédicat : $R(x)$ = « x est Rouge »
$T(y)$: « y a les dents longues »

objet ou individus
- r : cette rose
- j : Jean-Philippe

$R(r)$ = « cette rose est rouge »
$T(j)$ = « J.P a les dents longues »

Quantificateurs

$\forall x$: Pour tout x

$\exists x$: Il existe x

exemple : $\mathcal{F}$ ensemble des Fleurs

$\forall x \in \mathcal{F}, R(x)$ proposition : « Toute fleur est rouge »

$\exists x \in \mathcal{F}, R(x)$ proposition : « Il existe une fleur qui est rouge »

- Prédicat et quantificateurs ($\forall$ $\exists$) permettent de construire des propositions qui seront pris en compte en logique des propositions.

Proposition : (Negation des propositions avec prédicat et quantificateur)

$$\neg(\forall x \ R(x)) \longleftrightarrow \exists x \ (\neg R(x))$$

$$\neg(\exists x \ R(x)) \longleftrightarrow \forall x \ (\neg R(x))$$

où $R(x)$ est un prédicat appliqué à x

This slide left blank for whiteboard

Exercice à faire de retour de pause

Soient les ensembles suivants

$\mathbb{N}$: entiers naturels

$\mathbb{R}$: nombres réels

$\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 0\} = \mathbb{Z}^-$ les entiers négatifs

$F(x)$: « $x \geq 5$ »

$E(x)$: « x est pair »

$N(x)$: « $x \leq 0$ »

Précisez la valeur de vérité des propositions suivantes dans les différents ensembles

1) $\exists x \ F(x)$

2) $\forall x \ N(x)$

3) $\forall x \ F(x) \wedge E(x)$

4) $\exists x \ (\neg N(x))$

This slide left blank for whiteboard

$x \in$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}^-$
$\exists x \ F(x)$	VRAI 1	VRAI 1	FAUX 0
$\forall x \ N(x)$	FAUX 0	FAUX 0	VRAI 1
$\forall x \ F(x) \wedge E(x)$	FAUX 0	FAUX 0	Faux 0
$\exists x \ (\neg N(x))$	VRAI 1	VRAI 1	FAUX 0

$F(x)$ $x \geq 5$

$E(x)$ x pair

$N(x)$ $x \leq 0$