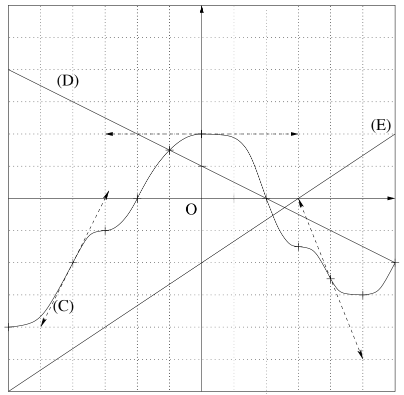
Calcul différentiel

Exercice 1. *Sur la figure ci-dessous sont représentées sur l'intervalle* $[-6; 6]$ *plusieurs courbes notées* (C), (D) *et* (E).

- *La courbe* (C) *correspond à la courbe représentative de la fonction* $y = f(x)$.
- *La courbe* (D) *est une droite d'équation* $y = g(x)$.
- *La courbe* (E) *est une droite d'équation* $y = h(x)$.



1. *Donner l'équation* $y = g(x)$ *de la droite* (D).
2. *Donner l'équation* $y = h(x)$ *de la droite* (E).
3. *Déterminer les solutions de l'équation* $f(x) = 0$.
4. *Déterminer les solutions de l'inéquation* $f(x) \geq 0$.
5. *Déterminer les solutions de l'équation* $f(x) = g(x)$.
6. *Déterminer les solutions de l'inéquation* $f(x) \geq g(x)$.
7. *Établir le tableau de signe de la fonction dérivée* f'.
8. *Établir de tableau de variations de la fonction* f.
9. *Donner la valeur de* $f'(-4)$.
10. *Donner la valeur de* $f'(0)$.
11. *Donner la valeur de* $f'(4)$.

12. *Donner l'équation de la droite tangente à la courbe* (C) *au point d'abscisse* $x = -4$.
13. *Établir le tableau de variations de la fonction dérivée* f'.

Exercice 2. *Soient les points* A, B, C, D, E *et* F *situés sur la courbe représentative d'une fonction* f, *de dérivée* f' :

	x	$y = f(x)$	$f'(x)$
A	-1	-6	11
B	0	0	2
C	1	0	-1
D	$1,5$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$
E	2	0	2
F	3	6	11

1. *Représenter les points* A, B, C, D, E *et* F *tracer les tangentes à la courbe* $\mathcal{C}_f$ *(courbe représentative de* f*) en chacun de ces points.*
2. *Tracer à la main la courbe s'inscrivant dans l'ensemble des tangentes.*

Exercice 3. *Soit la fonction* f *définie par*

$$y = f(x) = x^3 - 33x^2 + 216x.$$

1. *Trouver les valeurs de* x *pour lesquelles* $f(x) = 0$.
2. *Calculer la dérivée* f' *(notée aussi* $\frac{dy}{dx}$*) et étudier le signe de la dérivée.*
3. *Calculer la dérivée seconde* f'' *et étudier la convexité de* $y = f(x)$.
4. *Déterminer le tableau des variations de* f.
5. *Représenter la fonction* $y = f(x)$.

Exercice 4. *Soit la fonction* $y = f(x)$ *définie par*

$$f(x) = 2x^3 + x - \sin x.$$

1. *Calculer la dérivée f' (notée aussi $\frac{dy}{dx}$).*
2. *Étudier le signe de la dérivée.*
3. *Déterminer le tableau de variations de f.*
4. *Calculer la dérivée seconde f'' et étudier la convexité de f.*
5. *Représenter la fonction f.*

Exercice 5. *Calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions :*

$$\begin{array}{lll} x^2e^x & e^x\cos x & x\ln\ x \\ \frac{\sin\ x}{x} & \frac{x}{1+x^2} & \\ \frac{1}{\sin\ x} & \frac{1}{\cos\ x} & \frac{1}{\tan\ x} \\ e^{-x^2} & \ln\ (\cos\ x) & \sin\ (\frac{1}{x}) \\ (1+x)^4 & (1+x^2)^4 & \sin^6(\ x^2) \end{array}$$

Rappel : Une fonction F est une primitive d'une fonction f si :

$$F' = f.$$

Une primitive de la fonction f est notée

$$\int f(x)dx.$$

Exercice 6. *Calculer les primitives :*

$$\begin{array}{lll} \int x^5\ dx & \int \frac{1}{\sin^2\ x}dx & \int e^{2x}\ dx \\ \int \frac{5}{x}\ dx & \int (x+1)^4\ dx & \int x(x^2+3)^7\ dx \end{array}$$

Correction 1. 1. Equation de la droite (D) : $y = g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

2. Equation de la droite (E) : $y = h(x) = \frac{2}{3}x - 2$.
3. Solutions de l'équation $f(x) = 0$:
$$\mathcal{S} = \{-2; 2\}.$$
4. Solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$:
$$\mathcal{S} = [-2; 2].$$
5. Solutions de l'équation $f(x) = g(x)$:
$$\mathcal{S} = \{-1; 2; 6\}.$$
6. Solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$:
$$\mathcal{S} = [-1; 2] \cup \{6\}$$
7. Tableau de signe de f' :

x	-6		0		5		6
Signe f'		$+$	0	$-$	0	$+$	

8. Tableau des variations de f :

x	-6		0		5		6
Variations de f	(-4)	$\nearrow$	2	$\searrow$	(-3)	$\nearrow$	(-2)

9. Par lecture graphique : $f'(-4) = 2$
10. Par lecture graphique : $f'(0) = 0$
11. Par lecture graphique : $f'(4) = -2,5$
12. L'équation de la droite tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $x = -4$ est :
$$\begin{aligned} y &= f'(-4)(x-(-4)) + f(-4) \\ &= 2(x+4) + (-2) \\ &= 2x + 6 \end{aligned}$$
13. Tableau des variations de f' :

x	-6		-4		-3		-2		2		3		4		6
Variations de f'		$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2?$	$\searrow$	$(-3)?$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$(-\frac{5}{2})$	$\nearrow$	

Correction 2. Placer les points A, B, C, D, E et F et tracer en ces points les tangentes à la courbe représentative.

Correction 3. Soit la fonction $y = f(x) = x^3 - 33x^2 + 216x$.

1. Nous souhaitons résoudre l'équation :

$$f(x) = x^3 - 33x^2 + 216x = 0$$

$$\begin{aligned} x^3 - 33x^2 + 216x = 0 &\iff x(x^2 - 33x + 216) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 33x + 216 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 9 \quad \text{ou} \quad x = 24 \end{aligned}$$

Remarque Les solutions de l'équation du second degré

$$x^2 - 33x + 216 = 0$$

, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-33)^2 - 4 \times 216 = 225$ sont :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{33 \pm \sqrt{1089 - 864}}{2} = \frac{33 \pm 15}{2}$$

soient

$$x = 9 \quad ou \quad x = 24$$

Finalement,

$$y = f(x) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 9 \quad \text{ou} \quad x = 24$$

2. La dérivée de $y = f(x)$ par rapport à x est :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 3x^2 - 66x + 216 = 3(x^2 - 22x + 72)$$

Pour factoriser la quantité $(x^2 - 22x + 72)$, il suffit de chercher les solutions de l'équation du second degré $x^2 - 22x + 72 = 0$. Nous en déduisons l'égalité

$$3(x^2 - 22x + 216) = 3(x - 4)(x - 18)$$

Finalement

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0 \iff x = 4 \quad \text{ou} \quad x = 18$$

La fonction dérivée f' est positive pour $x \in]-\infty; 4[\cup]18; +\infty[$.

3. La dérivée seconde est :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 6x - 66$$

L'étude du signe de la dérivée seconde :

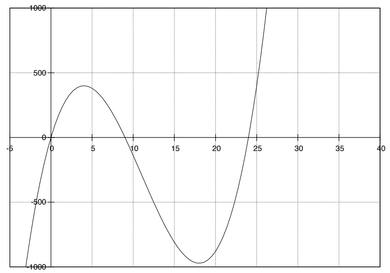
$$\begin{aligned} f''(x) \geq 0 &\Leftrightarrow 6x - 66 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq 11 \end{aligned}$$

La fonction est concave sur $]-\infty; 11]$ et convexe sur $[11; +\infty[$.

4. Tableau de signe de f', variations de f, convexité-concavité

x	$-\infty$		0		4		9		11		18		24		$+\infty$
f"		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
f'		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Var. f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	400	$\searrow$	0	$\searrow$	P.I.(-286)	$\searrow$	-972	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5. Représentation graphique de f par un schéma



Correction 4. Soit

$$y = f(x) = 2x^3 + x - \sin x$$

1. Pour la dérivée f', nous obtenons :

$$f'(x) = 6x^2 + 1 - \cos x$$

2. Remarquons :

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos(x) \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq -\cos(x) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 1 - \cos(x) \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 6x^2 \leq 1 - \cos(x) + 6x^2 \leq 2 + 6x^2 \end{aligned}$$

Nous déduisons
$$f'(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$
et la seule solution de l'équation $f'(x) = 0$ est $x = 0$.

Le tableau de variations de f est

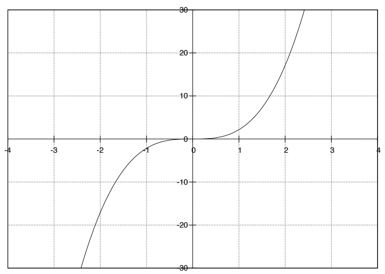
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. La dérivée seconde de f est f'' définie par :
$$f''(x) = 12x + \sin(x)$$
Pour étudier le signe de f'', nous étudions les variations de f''.
$$f^{(3)}(x) = 12 + \cos(x)$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f^{(3)}$			$+$		
$Var\ f''$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$Signe\ f''(x)$		$-$	0	$+$	

Nous déduisons f concave sur $]-\infty; 0]$ et f convexe sur $[0; +\infty[$.

4. Représentation de la fonction f



Correction 5. Pour simplifier, pour toute fonction u, on confondra la notation de u en tant que fonction avec $u(x)$ en tant qu'expression de la fonction u de la variable x.

1. Soit $y = x^2e^x$ du type uv. Dérivée d'un produit :
$$y' = \frac{dy}{dx} = u'v + uv' = 2x\ e^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x$$
2. Soit $y = e^x\cos x$ du type uv. Dérivée d'un produit :
$$y' = \frac{dy}{dx} = u'v + uv' = -\sin x\ e^x + \cos x\ e^x = (\cos x - \sin x)e^x$$
3. Soit $y = x \ln x$ du type uv. Dérivée d'un produit :
$$y' = \frac{dy}{dx} = \ln x + x\ \frac{1}{x} = \ln \mathrm{x} + 1$$
4. Soit $y = \frac{\sin x}{x}$ du type $\frac{u}{v}$. Dérivée d'un quotient :
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$
5. Soit $y = \frac{x}{1+x^2}$ du type $\frac{u}{v}$. Dérivée d'un quotient :
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$
6. Soit $y = \frac{1}{\sin(x)}$ du type $\frac{1}{u}$. Dérivée d'une fonction du type $\frac{1}{u}$:
$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{u'}{u^2} = -\frac{\cos(x)}{(\sin(x))^2}.$$
7. Soit $y = \frac{1}{\cos x}$ du type $\frac{1}{u}$. Dérivée d'une fonction du type $\frac{1}{u}$:
$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{u'}{u^2} = \frac{-(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos x}\tan x$$
8. Soit $y = \frac{1}{\tan x}$ du type $\frac{1}{u}$. Dérivée d'une fonction du type $\frac{1}{u}$:
$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{u'}{u^2} = -\frac{\frac{1}{(\cos(x))^2}}{(\tan(x))^2} = -\frac{1}{(\cos(x)\tan(x))^2}.$$
9. Soit $y = e^{-x^2}$ du type e^u. Dérivée d'une fonction du type e^u :
$$y' = \frac{dy}{dx} = u'e^u = -2xe^{-x^2}.$$

10. Soit $y = \ln(\cos(x))$ du type $\ln(u)$. Dérivée d'une fonction du type $\ln(u)$:
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{u'}{u} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$
11. Soit $y = \sin(\frac{1}{x})$ du type $v \circ u$. Dérivée d'une fonction du type $v \circ u$ (autrement écrit $v \circ u(x) = v(u(x))$:
$$y' = \frac{dy}{dx} = v' \circ u \times u' = v'(u(x)) \times u'(x) = \cos(\frac{1}{x}) \times (-\frac{1}{x^2}) = -\frac{1}{x^2}\cos(\frac{1}{x}).$$
12. Soit $y = (1+x)^4$ du type u^4. Dérivée d'une fonction du type u^α :
$$y' = 4u^3u' = 4(1+x)^3$$
13. Soit $y = (1+x^2)^4$ du type u^4. Dérivée d'une fonction du type u^α :
$$y' = 4u^3u' = 4(1+x^2)^3 \times 2x = 8x(1+x^2)^3$$
14. Soit $y = \sin^6(x^2)$ du type $u \circ v \circ w$. Dérivée d'une fonction du type $u \circ v \circ w$:
$$y' = u' \circ v \circ w \times v' \circ w \times w' = 6\sin^5(x^2) \times \cos(x^2) \times 2x = 12x\sin^5(x^2)\cos(x^2)$$

Correction 6.

1. Nous avons $\frac{d}{dx}\, x^6 = 6x^5$, soit
$$\int x^5 \, dx = \frac{1}{6}x^6 \; + C$$
2. Nous avons $\frac{d}{dx}\, \left(\frac{1}{\tan\, x}\right) = -\frac{1}{\sin^2\, x}$, soit
$$\int \frac{1}{\sin^2\, x} dx = -\frac{1}{\tan\, x} \; + C$$
3. Nous avons $\frac{d}{dx}\, e^{2x} = 2\, e^{2x}$, soit
$$\int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2}e^{2x} \; + C$$
4. Nous avons $\frac{d}{dx}\, \ln x = \frac{1}{x}$, soit
$$\int \frac{5}{x} \, dx = 5\int \frac{1}{x} \, dx = 5\, \ln\, x \; + C$$
5. Nous avons $\frac{d}{dx}\, (x+1)^5 = 5(x+1)^4$, soit
$$\int (x+1)^4 \, dx = \frac{1}{5}(x+1)^5 \; + C$$
6. Nous avons $\frac{d}{dx}\, (x^2+3)^8 = 8(x^2+3)^7.2x = 16x(x^2+3)^7$, soit
$$\int x(x^2+3)^7 \, dx = \frac{1}{16}(x^2+3)^8 \; + C$$

Correction 7.