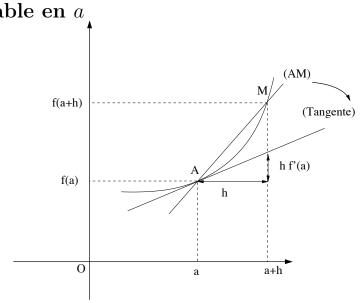
Calcul Différentiel

1. **Fonction dérivable en a**



(a) Une fonction f est **dérivable** en **a** si la limite :

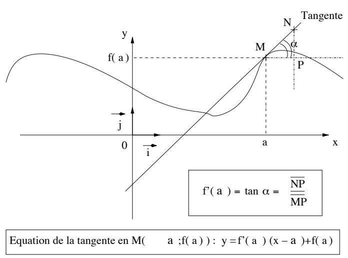
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existe et si elle est finie.}$$

(b) La valeur de cette limite est notée $\mathbf{f'(a)}$ ou $\mathbf{\frac{df}{dx}(a)}$.

(c) La valeur $f'(a)$ est le **coefficient directeur** de la droite tangente à la courbe au point d'abscisse a.

2. **Equation de la droite tangente** à la courbe représentative de la fonction f au point de la courbe d'abscisse a et de coordonnées $(a; f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$



3. La **différentielle** df_a **au point d'abscisse** a est l'application liénaire définie par :

$$df_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & f'(a).h \end{array}$$

4. **Dérivées des fonctions usuelles**

Fonction f	Ensemble de Définition de f	Ensemble de Dérivation de f	Fonction dérivée f'
$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^*$	...	...	$f'(x) = \alpha \times x^{\alpha-1}$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = n \times x^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$]0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$\cup_k]-\frac{\pi}{2} + k\pi; +\frac{\pi}{2} + k\pi[$	$\cup_k]-\frac{\pi}{2} + k\pi; +\frac{\pi}{2} + k\pi[$	$f'(x) = 1 + [\tan(x)]^2 = \frac{1}{[\cos(x)]^2}$

5. **Règles de dérivation**

(a) u et v deux fonctions :

$$(ku)' = ku' \quad ; \quad (u+v)' = u' + v' \quad ; \quad (uv)' = u'v + uv'.$$

(b) Si v ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad et \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

6. **Cas général des fonctions composées**

   (a) **Fonction composée** $f = v \circ u$ est définie par

   $$f(x) = v \circ u(x) = v\left(u(x)\right).$$

   (b) **Dérivée de la fonction composée** $f = v \circ u$:

   $$f'(x) = v'(u(x)) \times u'(x).$$

7. **Tableau des dérivées de fonctions composées**

Fonction f	Ensemble de Définition de f	Ensemble de Dérivation de f	Fonction dérivée f'
$f(x) = k \times u(x), \quad k \in \mathbb{R}$	I	I	$f'(x) = k \times u'(x)$
$f(x) = u(x) + v(x)$	I	I	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = \ln(u(x))$	I	$\{x \in I / u(x) \neq 0\}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
$f(x) = \exp(u(x))$	I	I	$f'(x) = u'(x)\exp(u(x))$
$f(x) = u(x) \times v(x)$	I	I	$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$\{x \in I / v(x) \neq 0\}$	$\{x \in I / v(x) \neq 0\}$	$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$
$f(x) = [u(x)]^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}^*$	I	...	$f'(x) = \alpha \times [u(x)]^{\alpha-1} \times u'(x)$
$f(x) = \frac{1}{u(x)}$	$\{x \in I / u(x) \neq 0\}$	$\{x \in I / u(x) \neq 0\}$	$f'(x) = -\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$\{x \in I / u(x) \geq 0\}$	$\{x \in I / u(x) > 0\}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(x) = u(ax+b)$	$\{x \in I / ax+b \in \mathcal{D}_u\}$	$\{x \in I / ax+b \in \text{E. Der. u}\}$	$f'(x) = a \times u'(ax+b)$
$f(x) = u \circ v(x)$	$\{x \in I / v(x) \in \mathcal{D}_u\}$	$\{x \in I / v(x) \in \text{E. Der. u}\}$	$f'(x) = (u' \circ v)(x) \times v' = u'[v(x)] \times v'(x)$

8. **Monotonie (croissante, décroissante)** et **dérivée première** d'une fonction

   $$f \text{ **croissante** sur } I \iff f'(x) \geq 0, \text{ pour tout } x \in I$$

   $$f \text{ **décroissante** sur } I \iff f'(x) \leq 0, \text{ pour tout } x \in I$$

9. **Convexité-concavité** et **dérivée seconde** d'une fonction

   $$\text{pour tout } x \in I,\ f^{(2)}(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \text{la fonction est **convexe**}$$

   $$\text{pour tout } x \in I,\ f^{(2)}(x) \leq 0 \Longleftrightarrow \text{la fonction est **concave**}.$$

10. **Point d'inflexion :** point d'une courbe où il y a un changement de convexité-concavité.

11. **Primitive d'une fonction** f **:** toute fonction F telle que $F'(x) = f(x)$.

12. **Egalité à une constante près de deux primitives d'une même fonction :**

    (a) Si F et G sont deux primitives de f alors

    $$F(x) = G(x) + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

13. **Formule fondamentale du calcul intégral**

    (a) Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$:

    $$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

    où F est une primitive de f sur I.