La complexité de certains JEUX

Cryptarithmétique

Un grand classique :

```
 SEND
+MORE
-----
MONEY
```

Cryptarithmétique

Un grand classique :

```
 SEND
+MORE
-----
MONEY
```

M ne peut être autre que 1 !

Cryptarithmétique

Un grand classique :

```
  SEND
+1ORE
-----
 1ONEY
```

S doit être 8 ou 9, donc O à son tour au plus 1, et comme 1 occuppé donc 0 !

Cryptarithmétique

Un grand classique :

```
  SEND
+1ORE
-----
1ONEY
```

N doit être E+1 (retenue) et donc pas de retenue de la colonne

Ainsi S doit être 9

Cryptarithmétique

Un grand classique :

```
  9END
+10RE
-----
10NEY
```

N=E+1, mais comme N+R+ε=E (ε – retenue)

R+ε=9 et comme 9 occupé, donc R=8 et ε=1

Cryptarithmétique

Un grand classique :

```
 9END
+108E
-----
10NEY
```

N = E+1, il nous restent donc pour (N,E) : (7,6), (6,5), (5,4), (4,3), (3,2) …

A vous de continuer (après le cours … :=))

Démineur(s)


MineFinder - Easy
Game Levels View Options Help


Démineur
Partie ?

Notre exemple (1)

				1			
		2	1	1		2	
	2	1		1	1	2	
	2					1	1
	2		1	1	1		
	2	1	1		1		
					1		

Notre exemple (2)

				1			
		2	1	1		2	
	2	1		1	1	2	
	2					1	1
	2		1	1	1		
	2	1	1		1		
					1		

Notre exemple (3)

				1			
		2	1	1		2	
	2	1		1	1	2	
	2					1	1
	2		1	1	1		
	2	1	1		1		
		1	1	1	1		

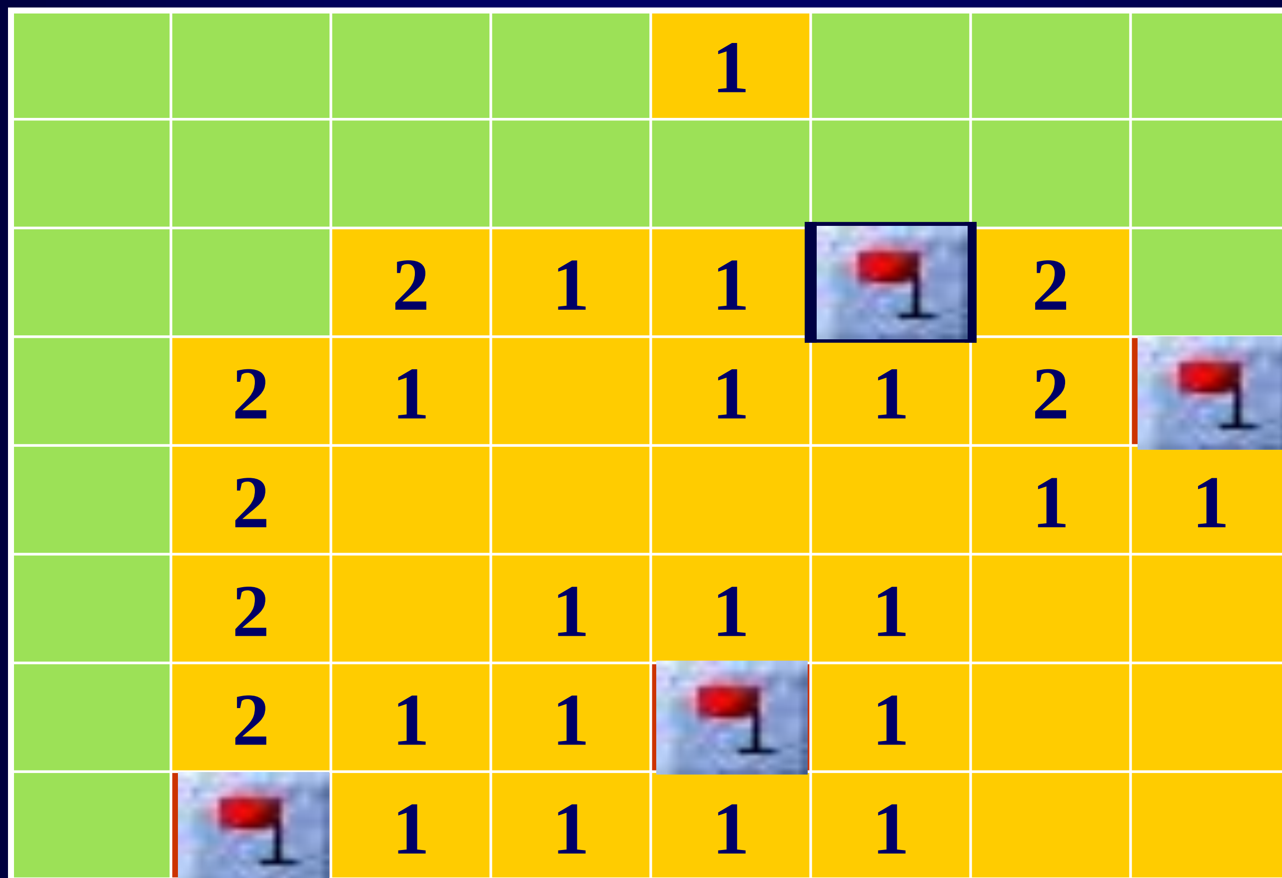
Notre exemple (4)

				1			
		2	1	1		2	
	2	1		1	1	2	
	2					1	1
	2		1	1	1		
	2	1	1		1		
		1	1	1	1		

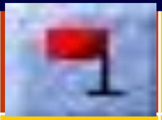
Notre exemple (5)

				1			
		2	1	1		2	
	2	1		1	1	2	
	2					1	1
	2		1	1	1		
	2	1	1		1		
		1	1	1	1		

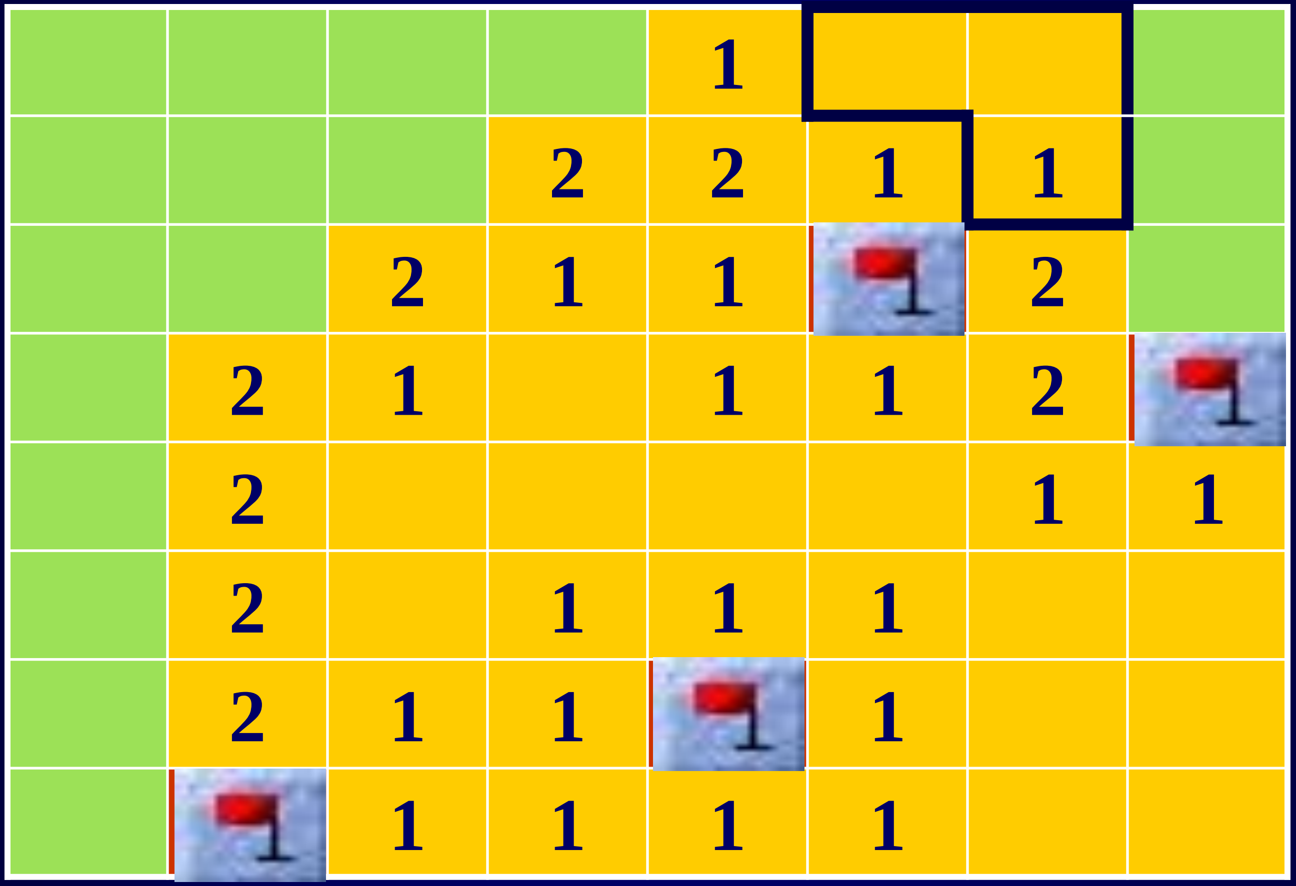
Notre exemple (6)



Notre exemple (7)

				1			
			2	2	1		
		2	1	1		2	
	2	1		1	1	2	
	2					1	1
	2		1	1	1		
	2	1	1		1		
		1	1	1	1		

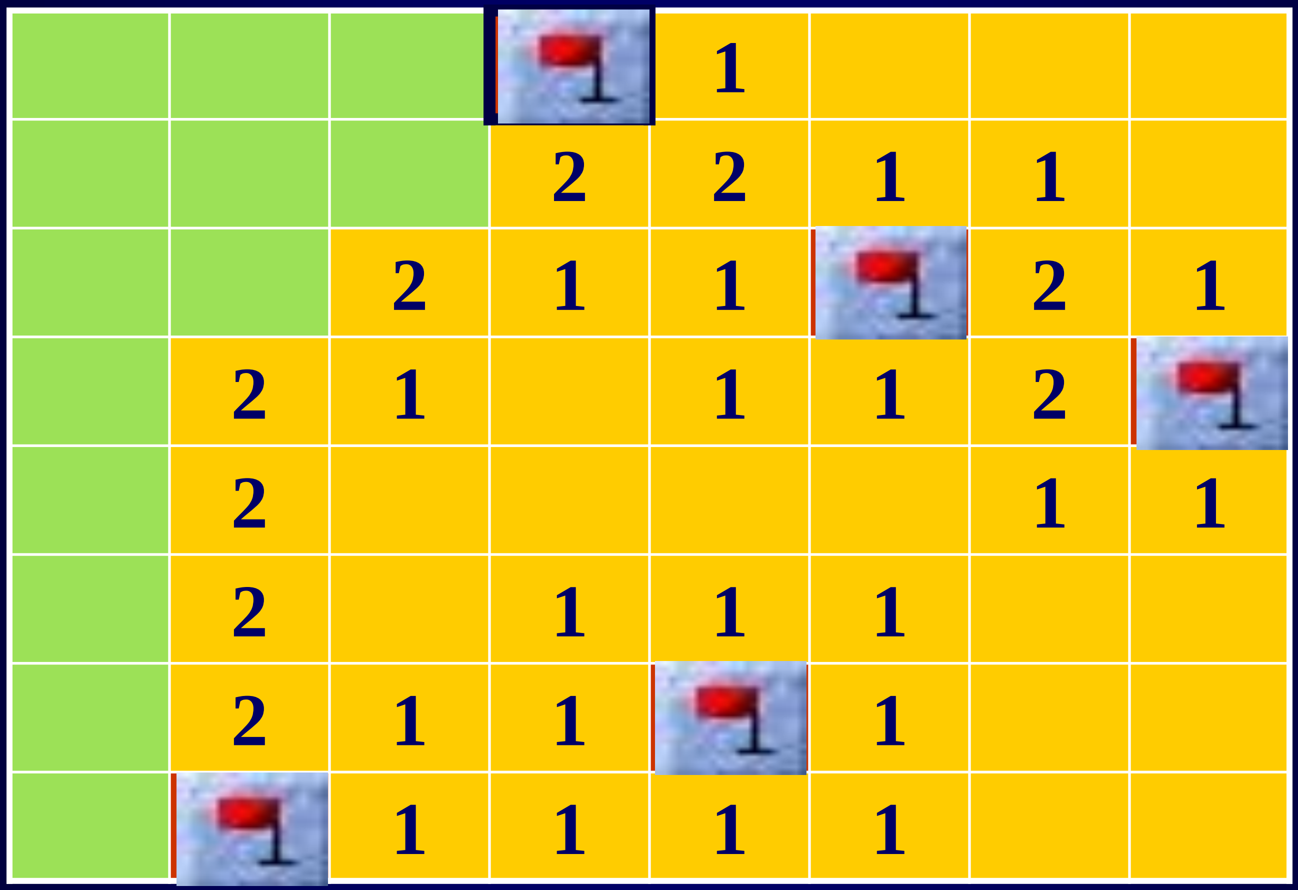
Notre exemple (8)



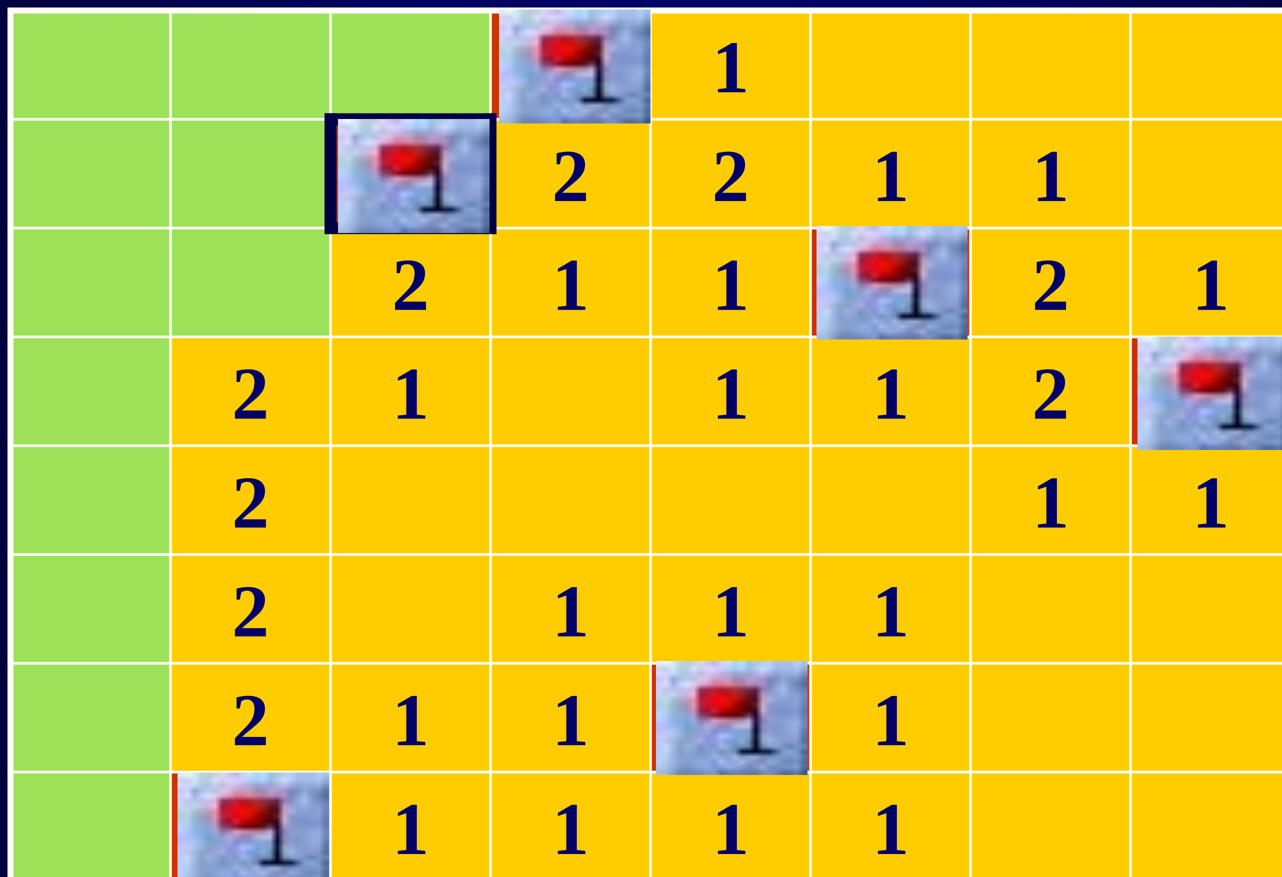
Notre exemple (9)

				1			
			2	2	1	1	
		2	1	1		2	1
	2	1		1	1	2	
	2					1	1
	2		1	1	1		
	2	1	1		1		
		1	1	1	1		

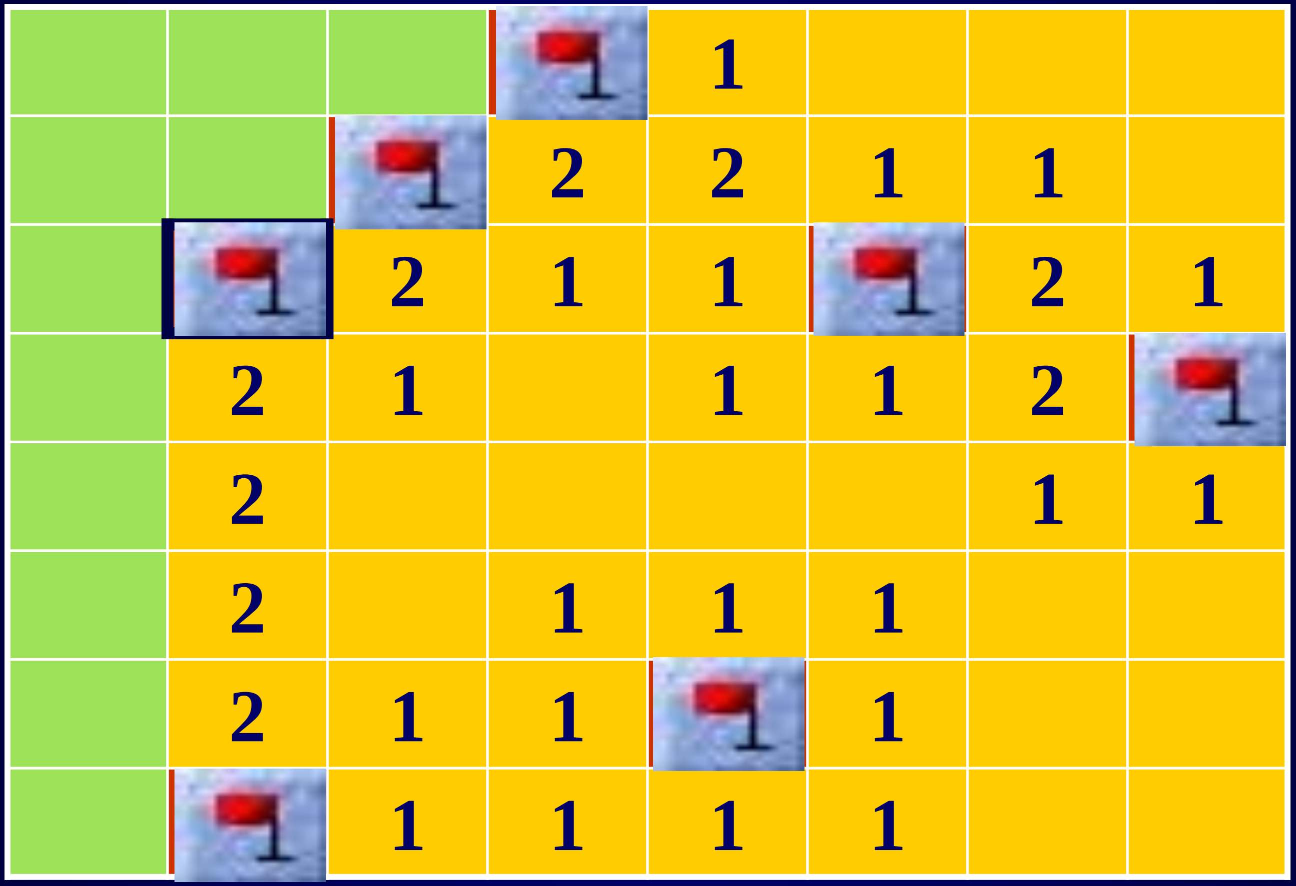
Notre exemple (10)



Notre exemple (11)



Notre exemple (12)



Notre exemple (13)

		3		1			
			2	2	1	1	
		2	1	1		2	1
	2	1		1	1	2	
	2					1	1
	2		1	1	1		
	2	1	1		1		
		1	1	1	1		

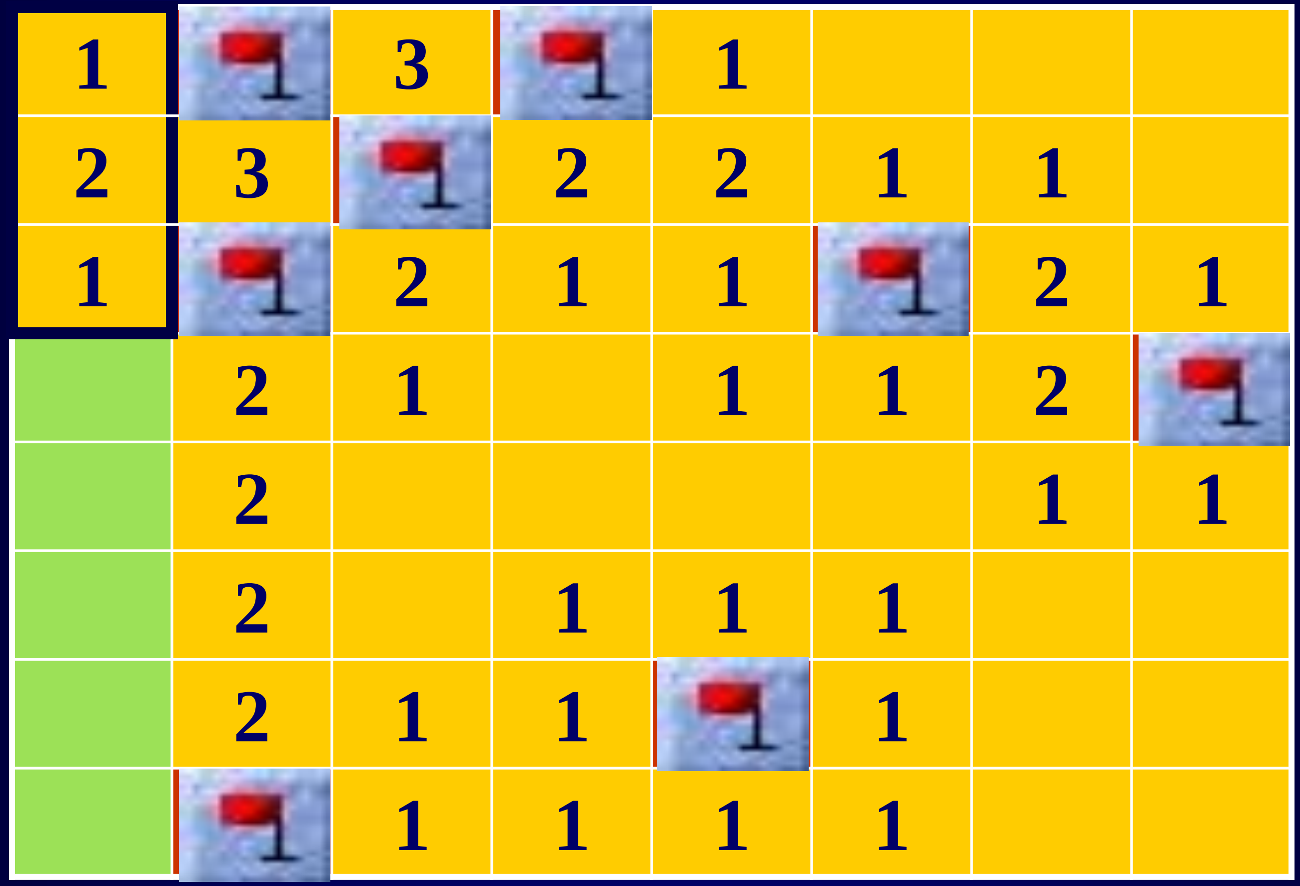
Notre exemple (14)

		3		1			
	3		2	2	1	1	
		2	1	1		2	1
	2	1		1	1	2	
	2					1	1
	2		1	1	1		
	2	1	1		1		
		1	1	1	1		

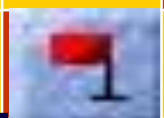
Notre exemple (15)

		3		1			
	3		2	2	1	1	
		2	1	1		2	1
	2	1		1	1	2	
	2					1	1
	2		1	1	1		
	2	1	1		1		
		1	1	1	1		

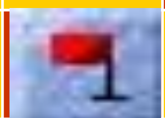
Notre exemple (16)



Notre exemple (17)

1		3		1			
2	3		2	2	1	1	
1		2	1	1		2	1
2	2	1		1	1	2	
	2					1	1
	2		1	1	1		
	2	1	1		1		
		1	1	1	1		

Notre exemple (18)

1		3		1			
2	3		2	2	1	1	
1		2	1	1		2	1
2	2	1		1	1	2	
	2					1	1
	2		1	1	1		
	2	1	1		1		
		1	1	1	1		

Notre exemple (19)

1		3		1			
2	3		2	2	1	1	
1		2	1	1		2	1
2	2	1		1	1	2	
	2					1	1
	2		1	1	1		
	2	1	1		1		
		1	1	1	1		

Notre exemple (20)

1		3		1			
2	3		2	2	1	1	
1		2	1	1		2	1
2	2	1		1	1	2	
	2					1	1
	2		1	1	1		
2	2	1	1		1		
		1	1	1	1		

Notre exemple (21)

1		3		1			
2	3		2	2	1	1	
1		2	1	1		2	1
2	2	1		1	1	2	
	2					1	1
	2		1	1	1		
2	2	1	1		1		
$\boxed{1}$		1	1	1	1		

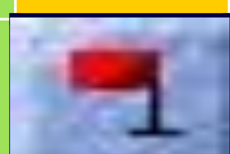
Est-ce toujours aussi simple ?

Un exemple plus difficile

	2	2	2	2	
	2			2	
	2			2	
	2	2	2	2	

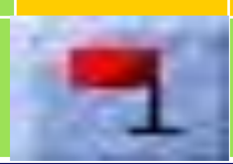
Un exemple plus difficile (2)

essayons

	2	2	2	2	
	2			2	
	2			2	
	2	2	2	2	
					

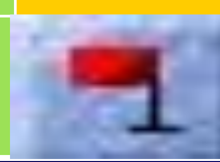
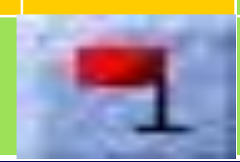
Un exemple plus difficile (3)

essayons

	2	2	2	2	
	2			2	
	2			2	
	2	2	2	2	
					

Un exemple plus difficile (4)

essayons

	2	2	2	2	
	2			2	
	2			2	
	2	2	2	2	
					

Un exemple plus difficile (5)

essayons

	2	2	2	2	
	2			2	
	2			2	
	2	2	2	2	
			2		

Un exemple plus difficile (6)

essayons

	2	2	2	2	
	2			2	
0 ou 1	2			2	
1	2	2	2	2	
1			2		

Un exemple plus difficile (7)

essayons

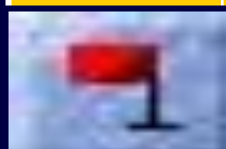
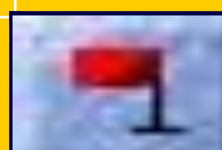
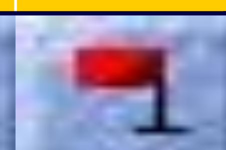
	2	2	2	2	
	2			2	
0 ou 1	2			2	
1	2	2	2	2	
1			2		

Un exemple plus difficile (8)

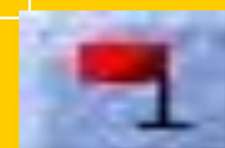
On recommence

	?			?	
?	2	2	2	2	?
	2			2	
	2			2	
?	2	2	2	2	?
	?			?	

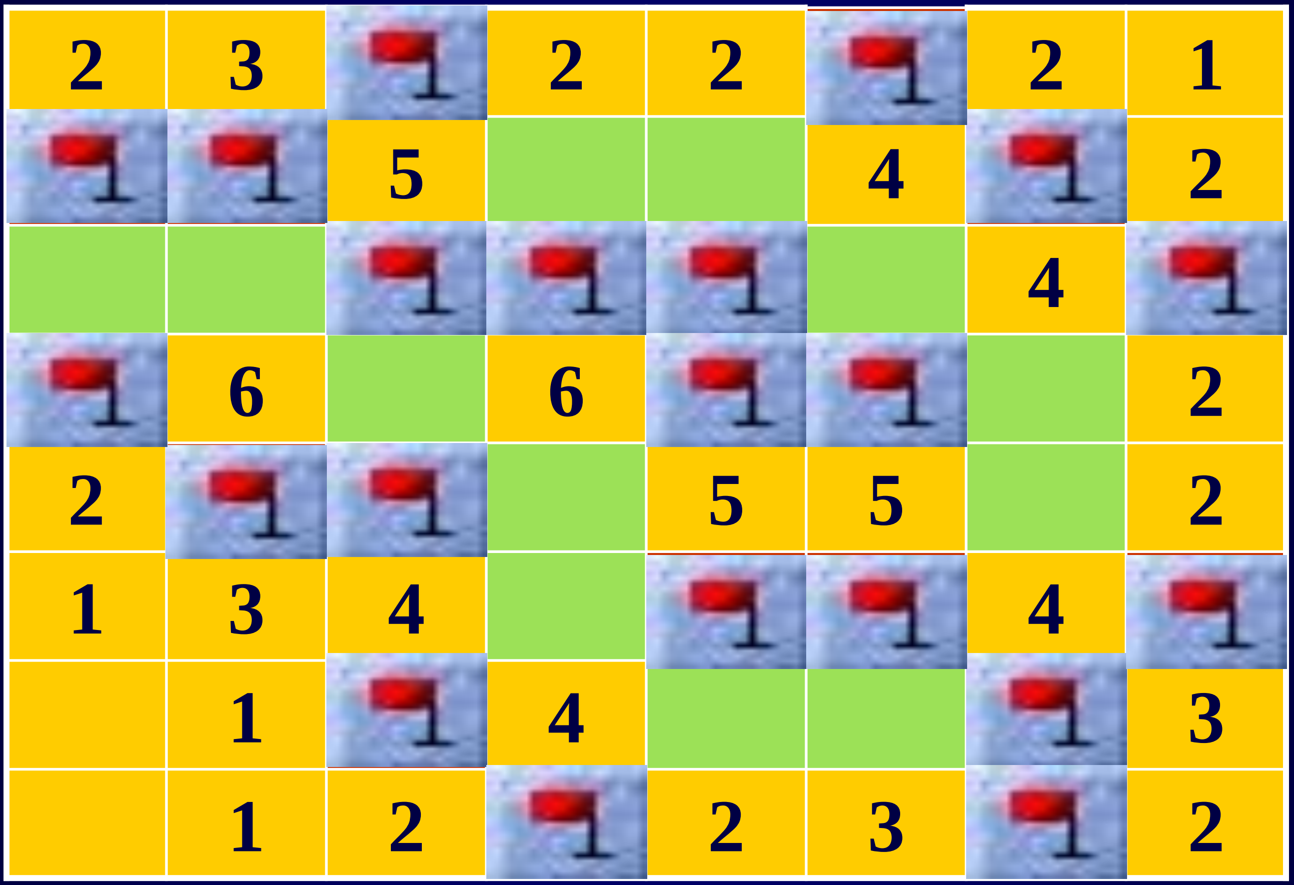
Un exemple plus difficile (9)

	?			?	
?	2	2	2	2	?
	2			2	
	2			2	
?	2	2	2	2	?
	?			?	

Un exemple plus difficile (10)

	1			1	
1	2	2	2	2	1
	2			2	
	2			2	
1	2	2	2	2	1
	1			1	

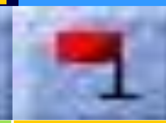
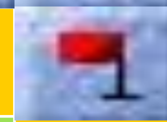
Un cas difficile



Les "variables"

2	3		2	2		2	1
		5	m	n	4		2
o	p				q	4	
	6	r	6			s	2
2			t	5	5	u	2
1	3	4	v			4	
	1		4	w	x		3
	1	2		2	3		2

Les "variables" (2)

2	3		2	2		2	1
		5	m	n	4		2
o	p				q	4	
	6	r	6			s	2
2			t	5	5	u	2
1	3	4	v			4	
	1		4	w	x		3
	1	2		2	3		2

Les "variables" (3)

2	3		2	2		2	1
		5	m	n	4		2
o	p				q	4	
	6	r	6			s	2
2			t	5	5	u	2
1	3	4	v			4	
	1		4	w	x		3
	1	2		2	3		2

Les "variables" (4)

2	3		2	2		2	1
		5	m	n	4		2
o	p				q	4	
	6	r	6			s	2
2			t	5	5	u	2
1	3	4	v			4	
	1		4	w	x		3
	1	2		2	3		2

Les "variables" (5)

2	3		2	2		2	1
		5	m	n	4		2
o	p				q	4	
	6	r	6			s	2
2			t	5	5	u	2
1	3	4	v			4	
	1		4	w	x		3
	1	2		2	3		2

Les "variables" (6)

2	3		2	2		2	1
		5	m	n	4		2
o	p				q	4	
	6	r	6			s	2
2			t	5	5	u	2
1	3	4	v			4	
	1		4	w	x		3
	1	2		2	3		2

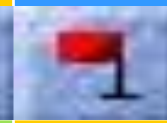
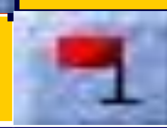
Les "variables" (7)

2	3		2	2		2	1
		5	m	n	4		2
o	p				q	4	
	6	r	6			s	2
2			t	5	5	u	2
1	3	4	v			4	
	1		4	w	x		3
	1	2		2	3		2

Les "variables" (8)

2	3		2	2		2	1
		5	m	n	4		2
o	p				q	4	
	6	r	6			s	2
2			t	5	5	u	2
1	3	4	v			4	
	1		4	w	x		3
	1	2		2	$\boxed{3}$		2

Les "variables" (9)

2	3		2	2		2	1
		5	m	n	4		2
o	p				q	4	
	6	r	6			s	2
2			t	5	5	u	2
1	3	4	v			4	
	1		4	w	x		3
	1	2		2	3		2

Les "variables" (10)

2	3		2	2		2	1
		5	m	n	4		2
o	p				q	4	
	6	r	6			s	2
2			t	5	5	u	2
1	3	4	v			4	
	1		4	w	x		3
	1	2		2	3		2

Les "variables" (11)

2	3		2	2		2	1
		5	m	n	4		2
o	p				q	4	
	6	r	$\boxed{6}$			s	2
2			t	5	5	u	2
1	3	4	v			4	
	1		4	w	x		3
	1	2		2	3		2

Les contraintes

- $p + m = 1$
- $m + n = 1$
- $n + q = 1$
- $q + s = 1$
- $s + u = 1$
- $u + x = 1$
- $x + w = 1$
- $w + v = 1$
- $v + t = 1$
- $t + r = 1$
- $o + p + r = 2$

Les contraintes

- $p + m = 1$
- $m + n = 1$
- $n + q = 1$
- $q + s = 1$
- $s + u = 1$
- $u + x = 1$
- $x + w = 1$
- $w + v = 1$
- $v + t = 1$
- $t + r = 1$
- $o + p + r = 2$

Conclusion :

- $p = n = s = x = v = r$
- $m = q = u = w = t$
- $o + 2p = 2$

Les contraintes

- $p + m = 1$
- $m + n = 1$
- $n + q = 1$
- $q + s = 1$
- $s + u = 1$
- $u + x = 1$
- $x + w = 1$
- $w + v = 1$
- $v + t = 1$
- $t + r = 1$
- $o + p + r = 2$

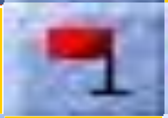
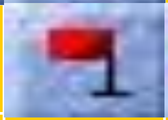
Conclusion :

- $p = n = s = x = v = r$
- $m = q = u = w = t$
- $o + 2p = 2$

Donc

- $p=n=s=x=v=r=1$
- $m=q=u=w=t=o=0$

La solution

2	3		2	2		2	1
		5	5		4		2
4					6	4	
	6		6				2
2			6	5	5	4	2
1	3	4				4	
	1		4	5			3
	1	2		2	3		2

Le problème

NOM : DEMINEUR

DONNEES : un rectangle fini avec certains cases contenant des bombes ou des valeurs

QUESTION : est-ce qu'il existe une solution à ce problème de demineur ?

DEMINEUR

Théorème (Richard Kaye, 2000) :

DEMINEUR est NP-complet.

Preuve :

i) DEMINEUR $\in$ NP

ii) DEMINEUR est NP-difficile

nous le montrons par

3-SAT $\propto$ DEMINEUR

La construction

L'idée est d'associer un problème de démineur à une formule, de manière à assurer que le problème admet une solution si et seulement si la formule est satisfiable.

La construction se fait à l'aide de briques de *LEGO* (qu'on appelera les connecteurs) qui permettent d'assurer les différentes opérations.

Les connecteurs (1)

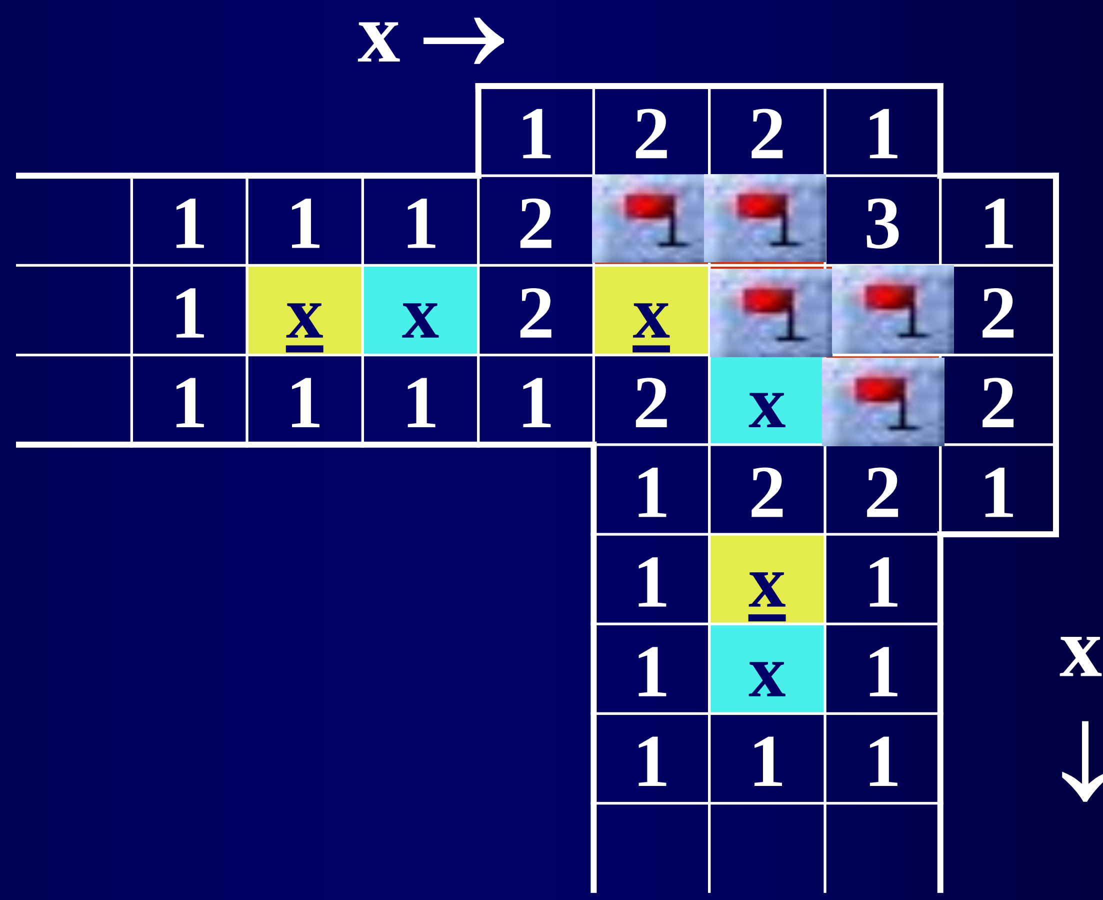
Un fil – permet la transmission d'une valeur

…	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	…
…	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	…
…	x	1	$\underline{x}$	x	1	$\underline{x}$	x	1	$\underline{x}$	x	1	$\underline{x}$	x	1	$\underline{x}$	…
…	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	…
…	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	…

x →

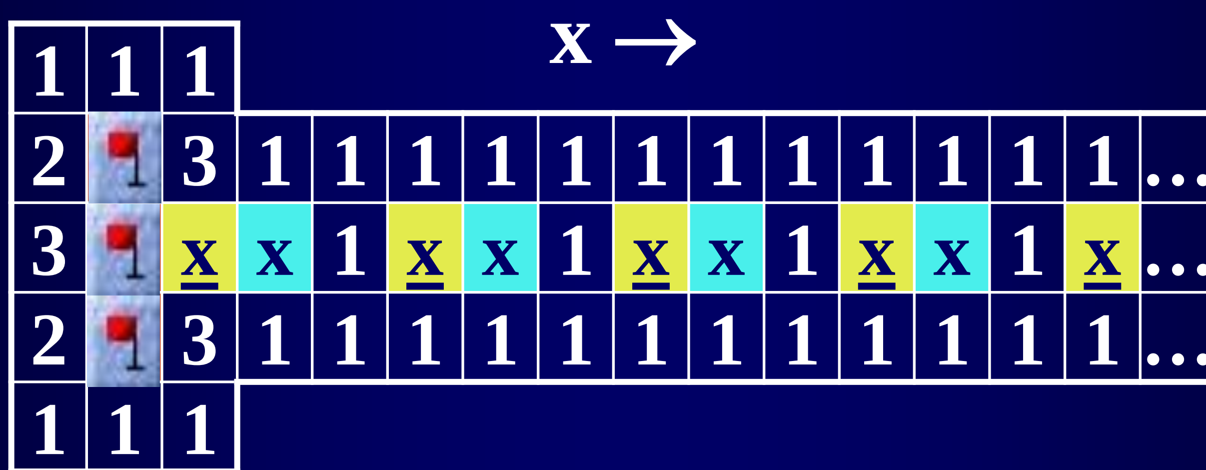
Les connecteurs (2)

Un fil qui tourne



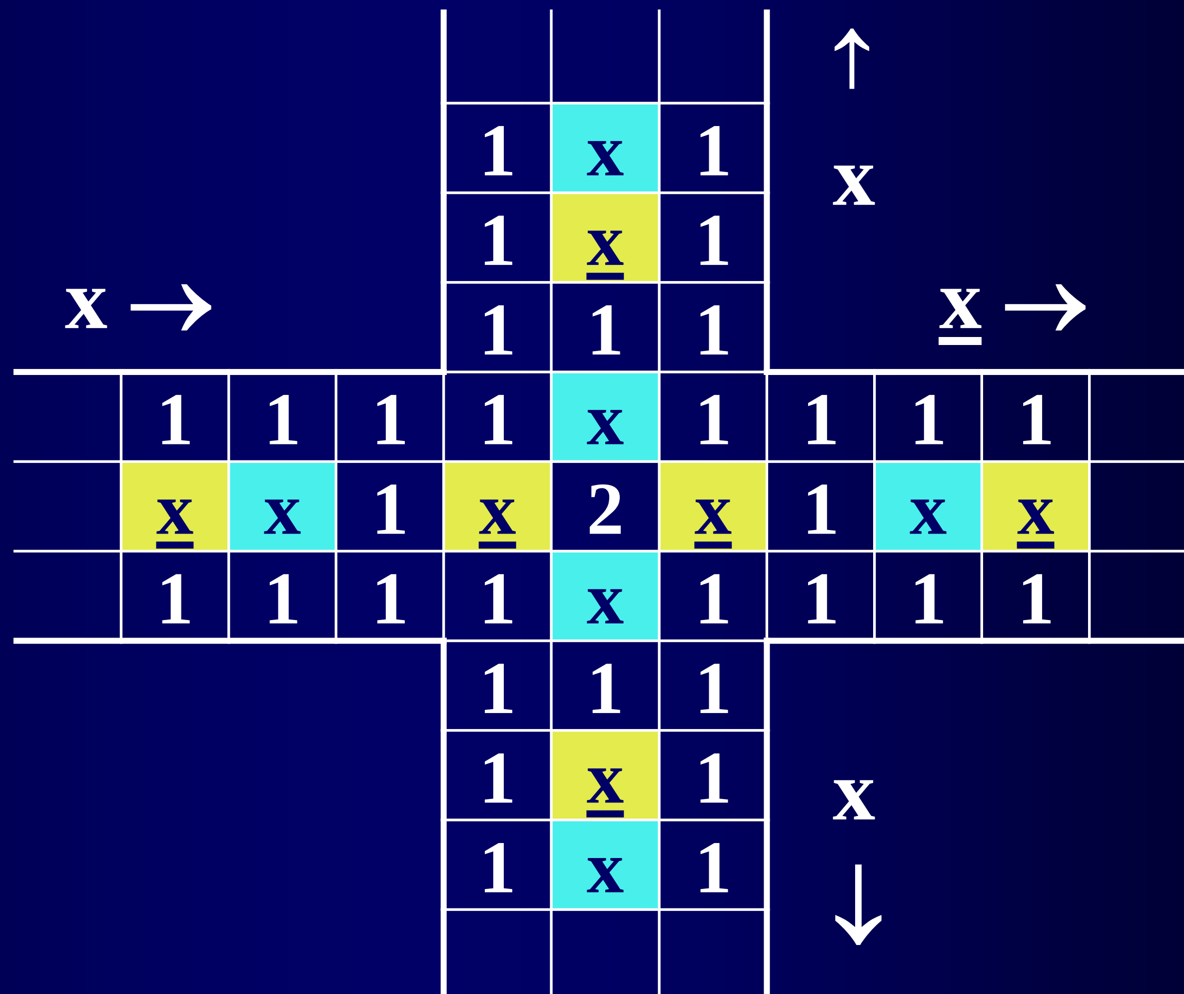
Les connecteurs (3)

Un fil terminé



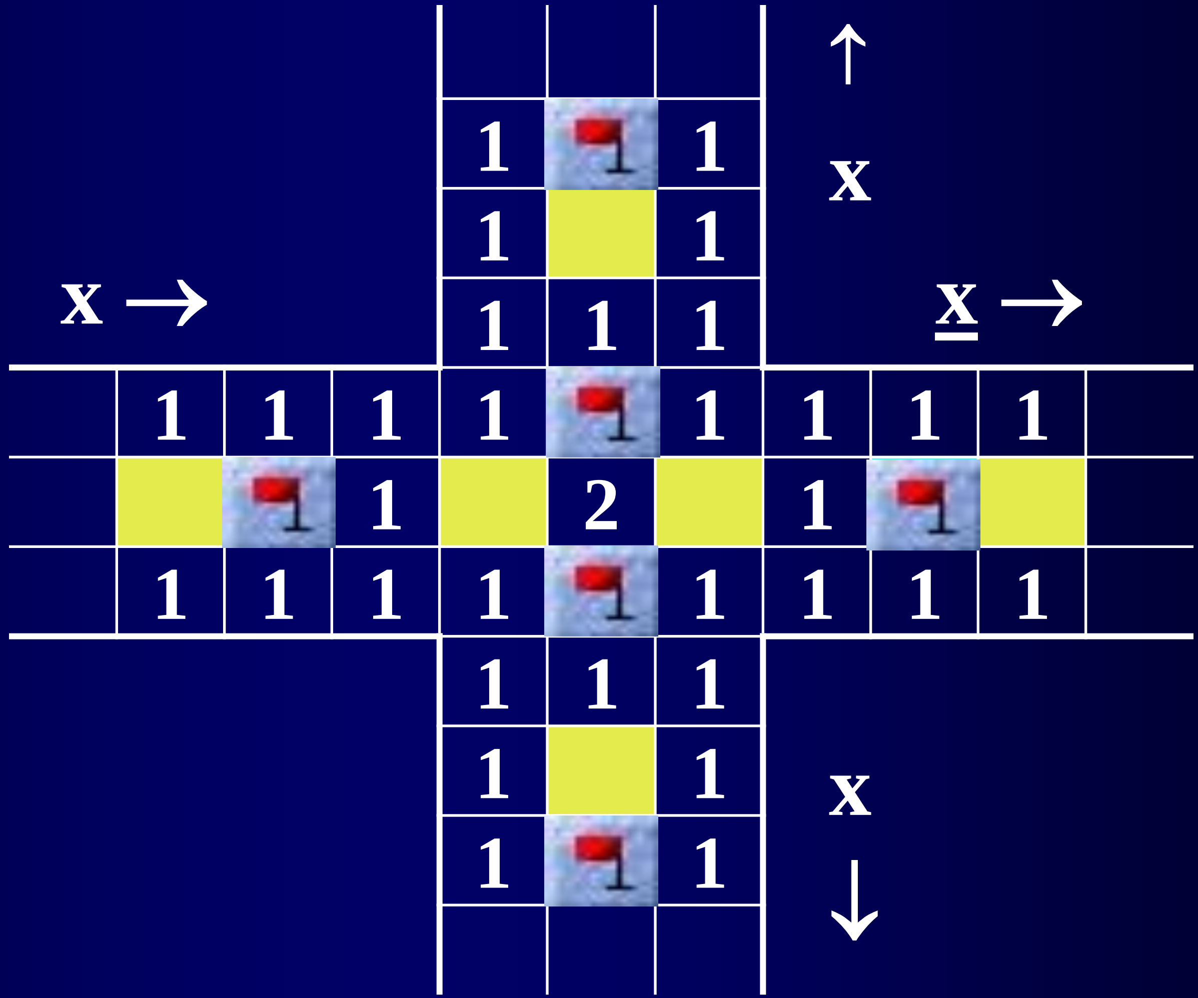
Les connecteurs (4)

Un distributeur en 3



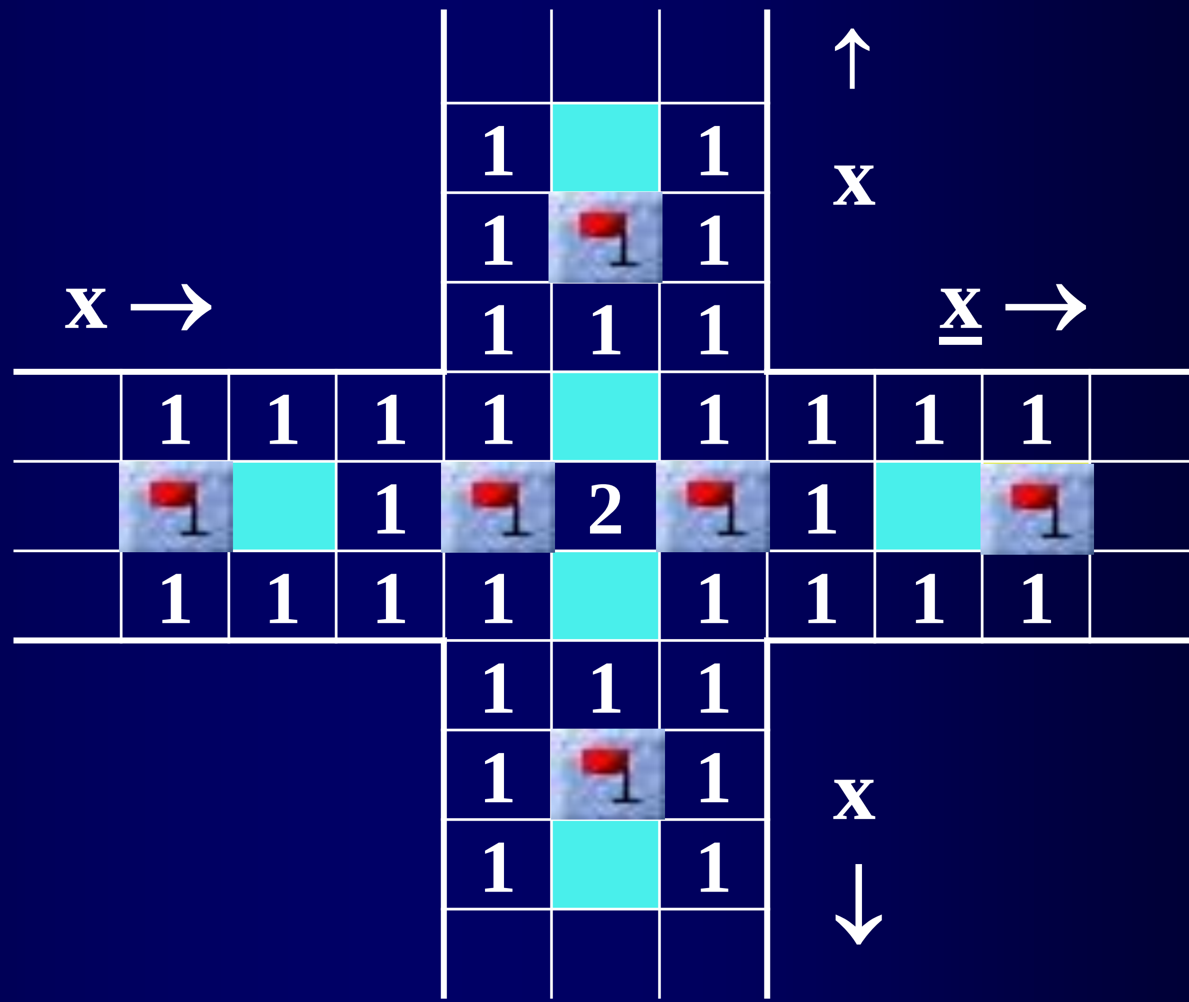
Les connecteurs (4)

Un distributeur en 3



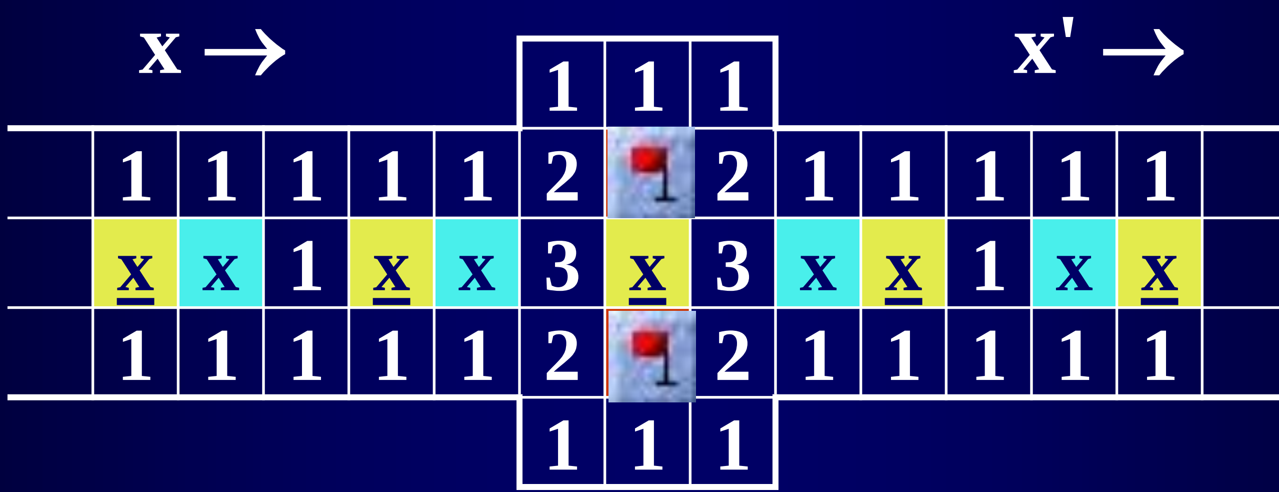
Les connecteurs (4)

Un distributeur en 3



Les connecteurs (5)

La négation



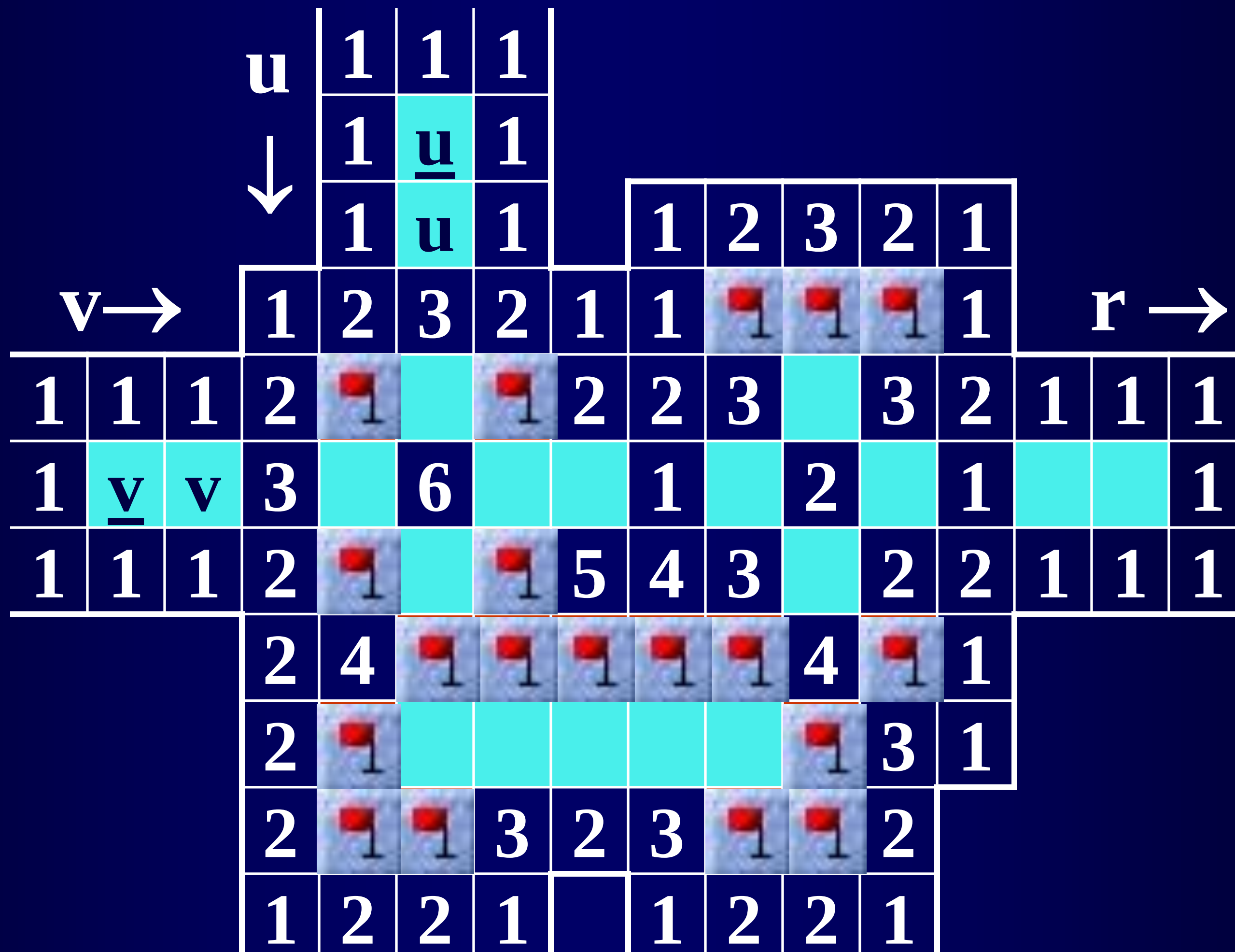
Les connecteurs (6)

La disjonction

			u	1	1	1									
			↓	1	$\underline{u}$	1									
				1	u	1		1	2	3	2	1			
	v→		1	2	3	2	1	1				1		r →	
1	1	1	2		$\underline{u}$		2	2	3	$\underline{r}$	3	2	1	1	1
1	$\underline{v}$	v	3	$\underline{v}$	6	r	$\underline{r}$	1	r	2	r	1	$\underline{r}$	r	1
1	1	1	2		s		5	4	3	$\underline{r}$	2	2	1	1	1
			2	4						4		1			
			2		$\underline{s}$	x	y	z	r		3	1			
			2			3	2	3			2				
			1	2	2	1		1	2	2	1				

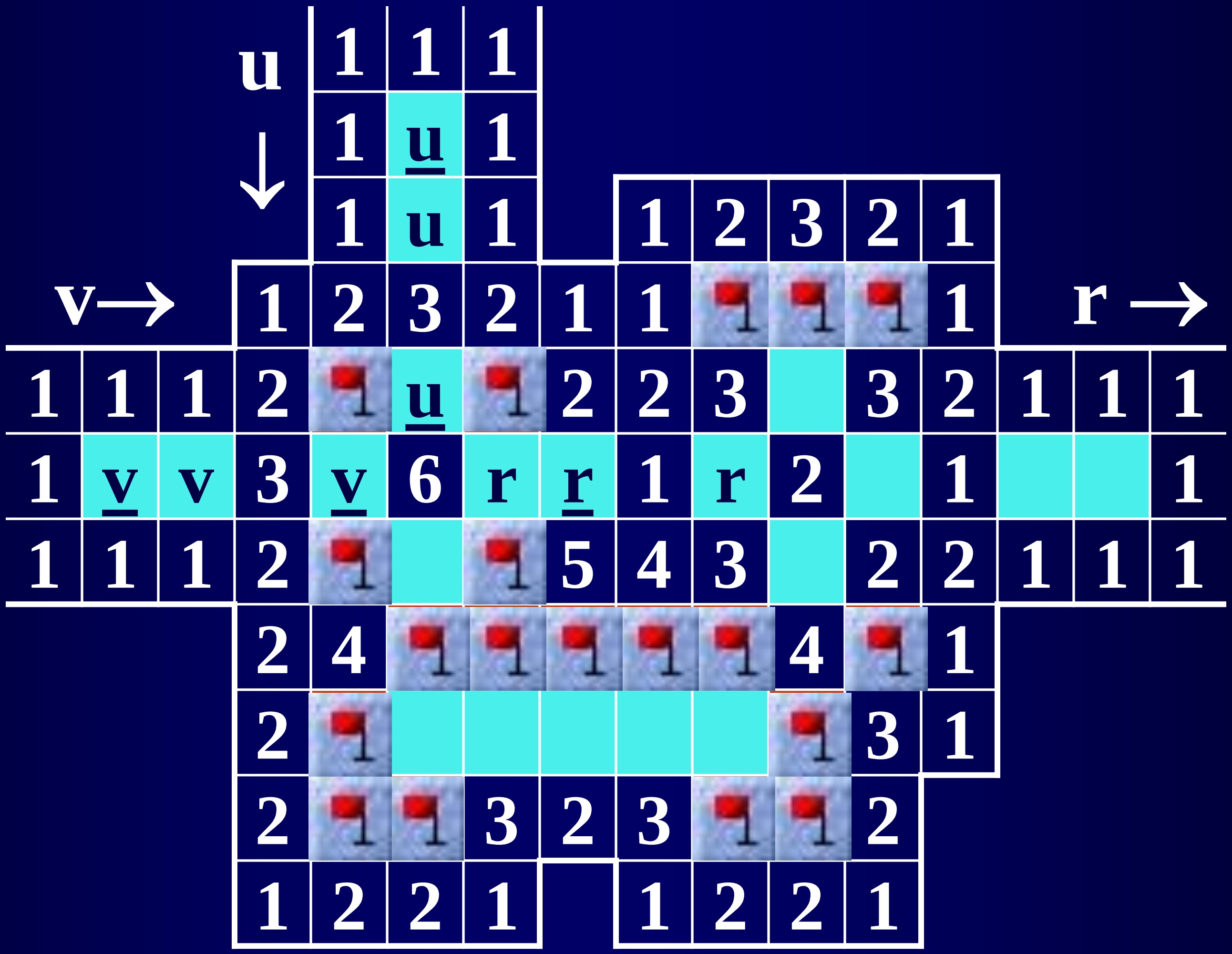
Les connecteurs (6)

La disjonction



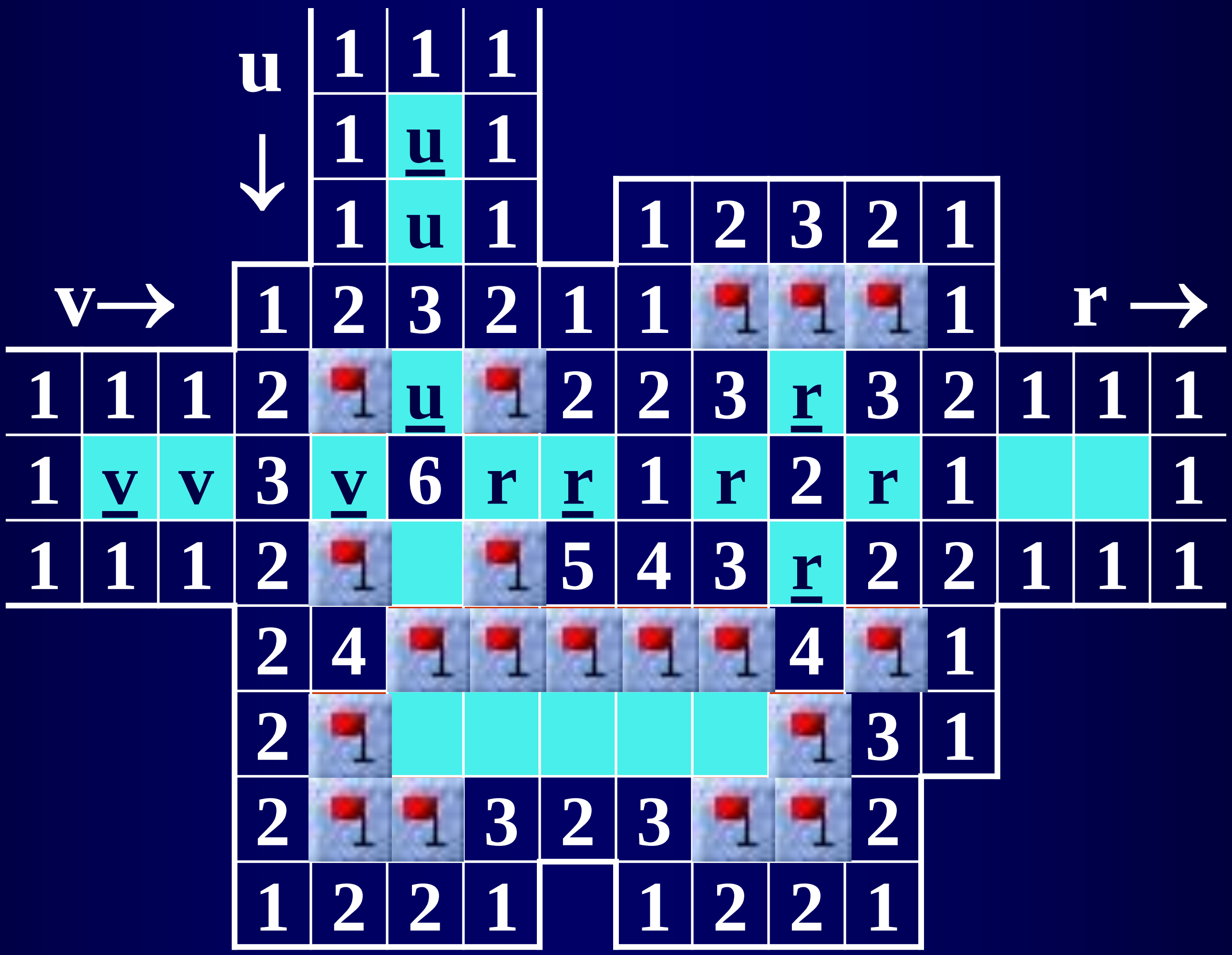
Les connecteurs (6)

La disjonction



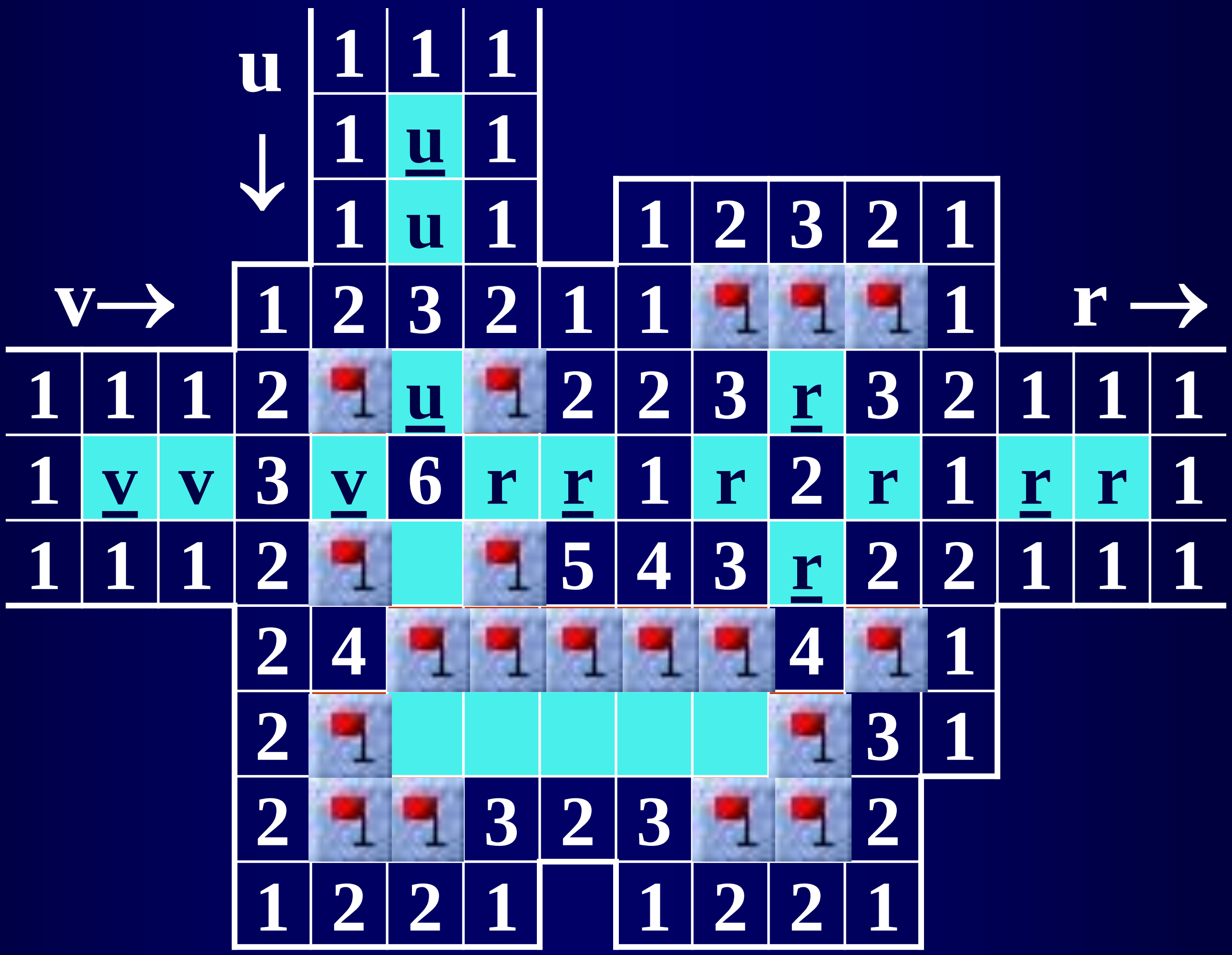
Les connecteurs (6)

La disjonction



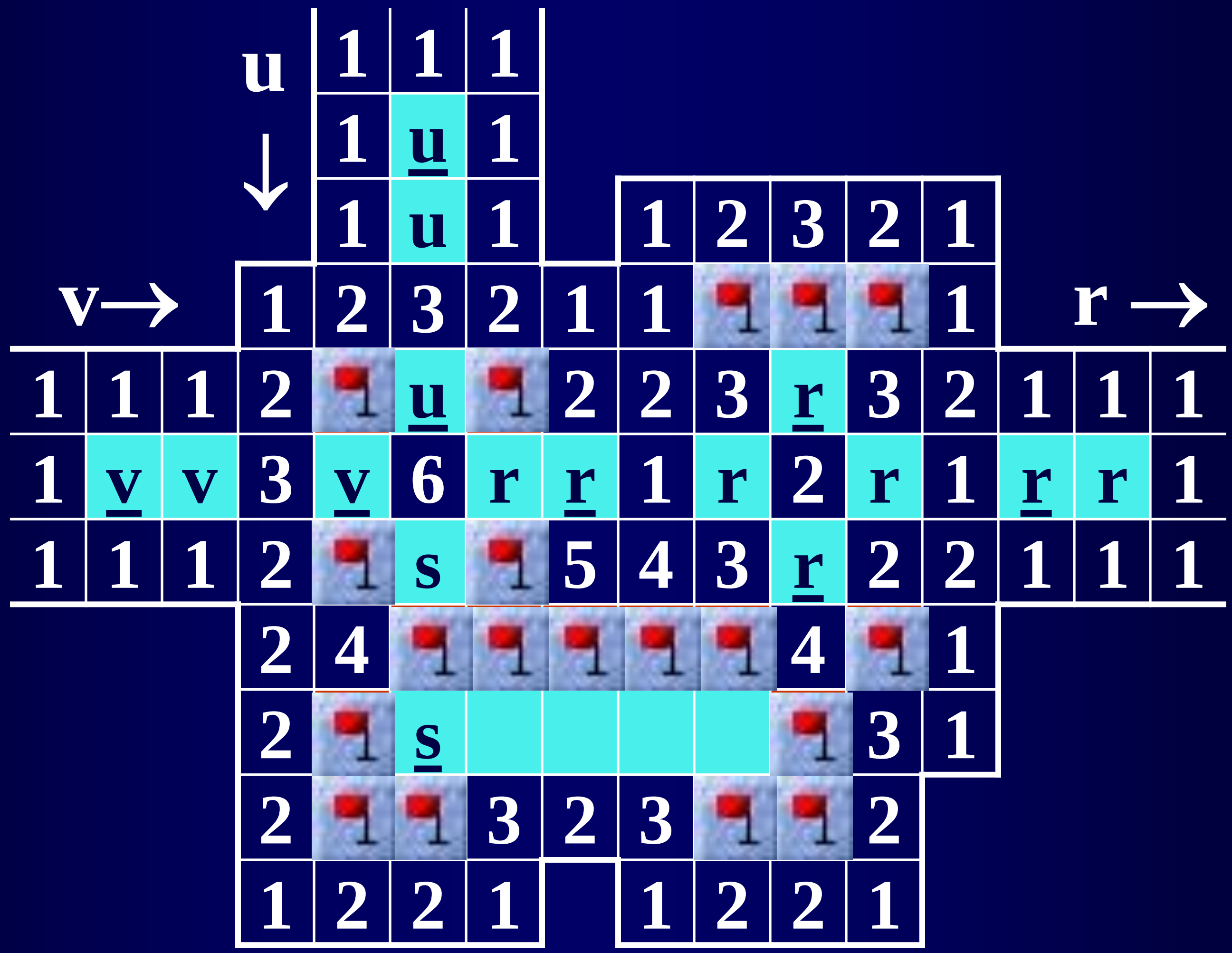
Les connecteurs (6)

La disjonction



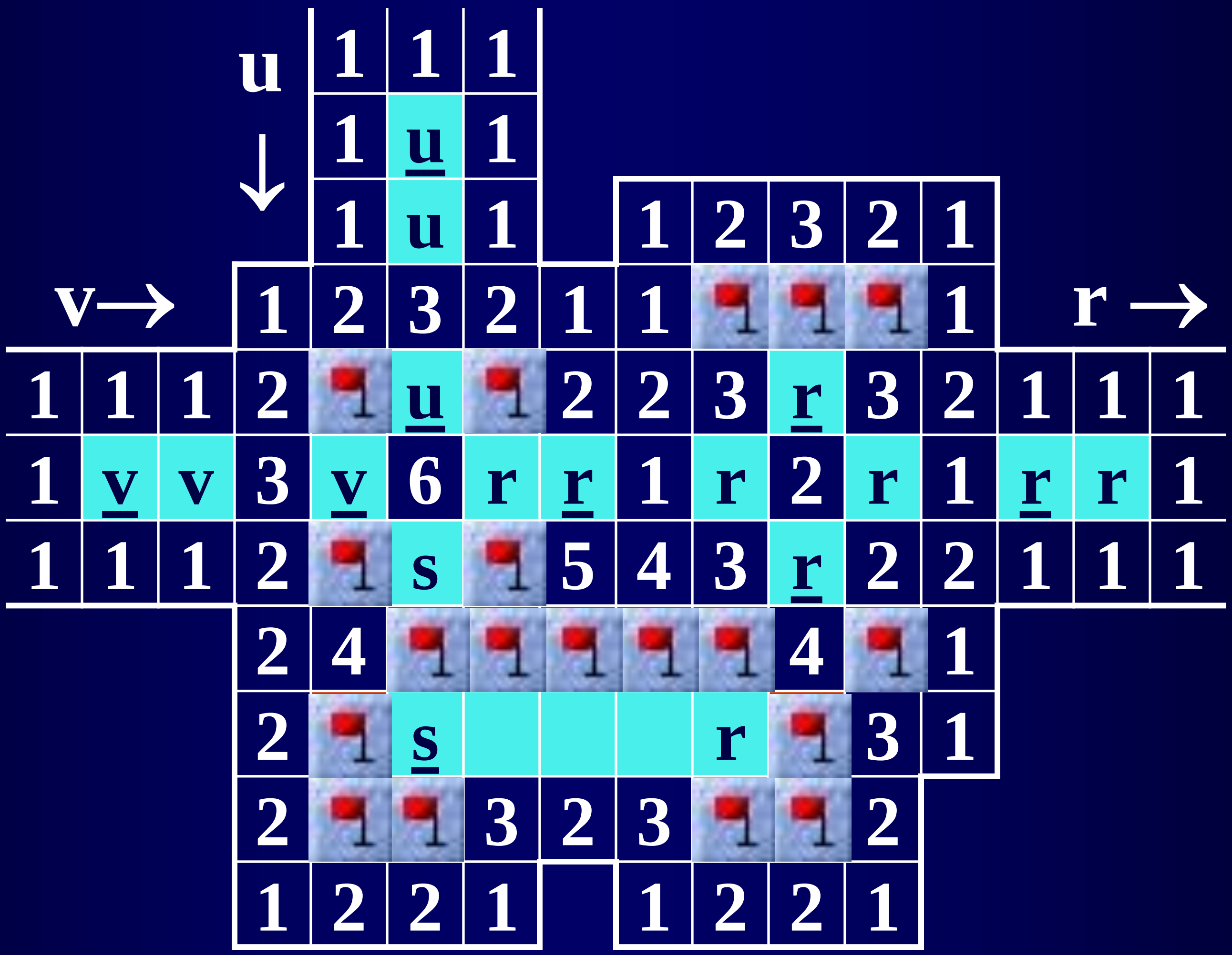
Les connecteurs (6)

La disjonction



Les connecteurs (6)

La disjonction



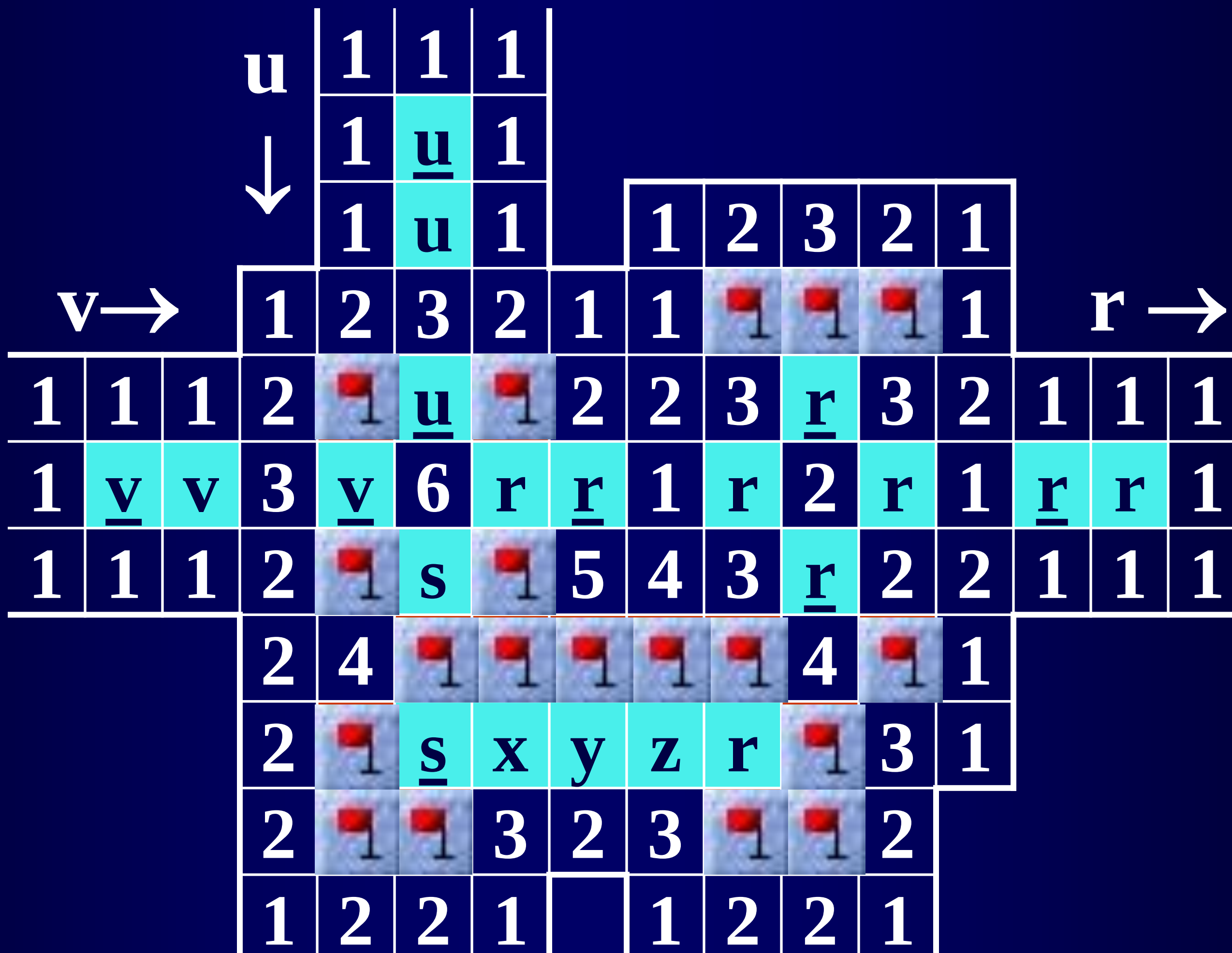
Les connecteurs (6)

La disjonction

<u>s</u>+x+y=2

x+y+z=2

y+z+r=2

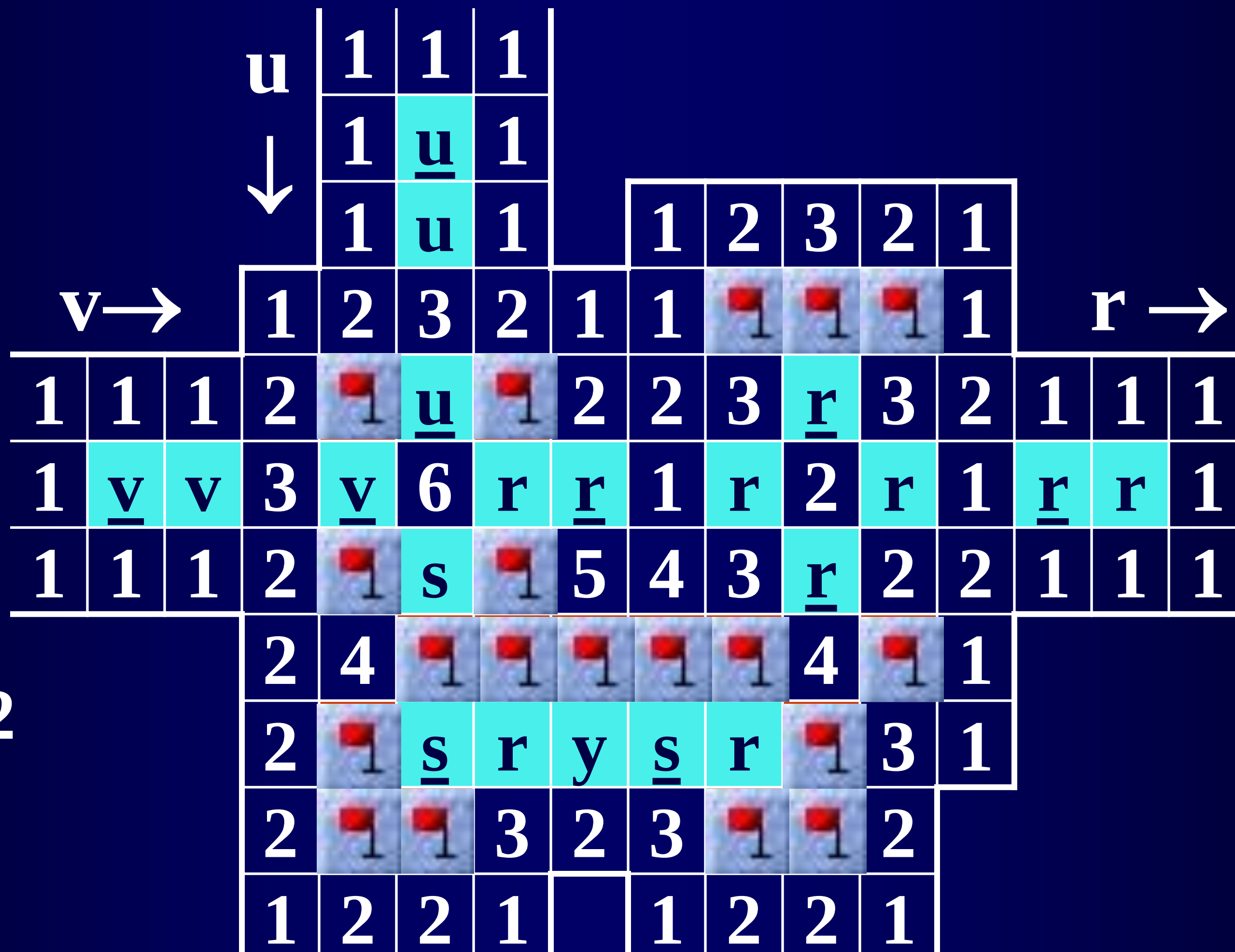


z=<u>s</u>

x=r

Les connecteurs (6)

La disjonction



$\underline{u}+\underline{v}+s+r=2$

$\underline{s}+r+y=2$

u	v	r	s	y	c1	c2	c1∧c2
0	0	0	0	1	ok	ok	ok
0	1	1	0	0	ok	ok	ok
1	0	1	0	0	ok	ok	ok
1	1	1	1	1	ok	ok	ok

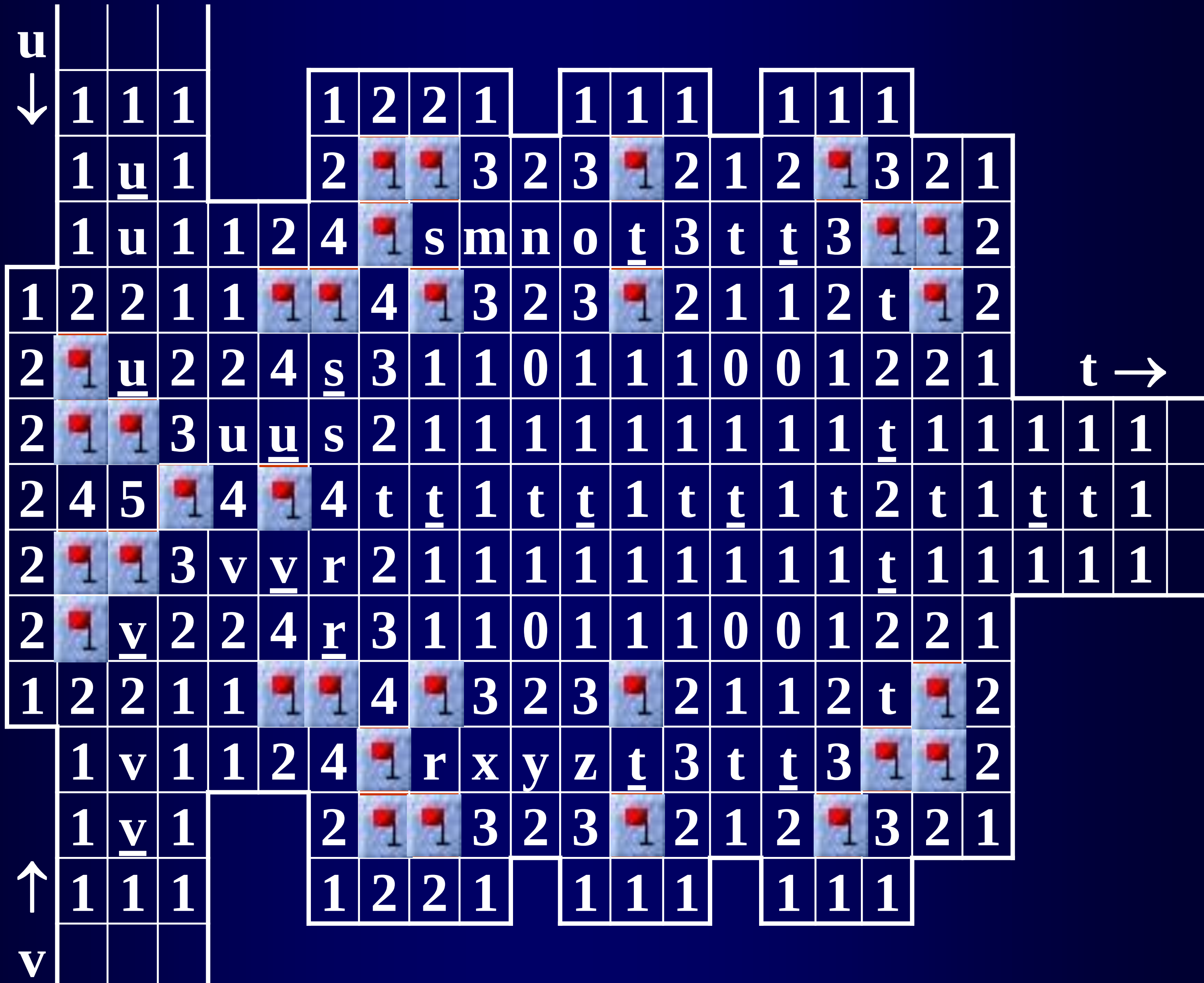
c1 : $u+v = s+r$

c2 : $r+y = 1+s$

(7)

Le

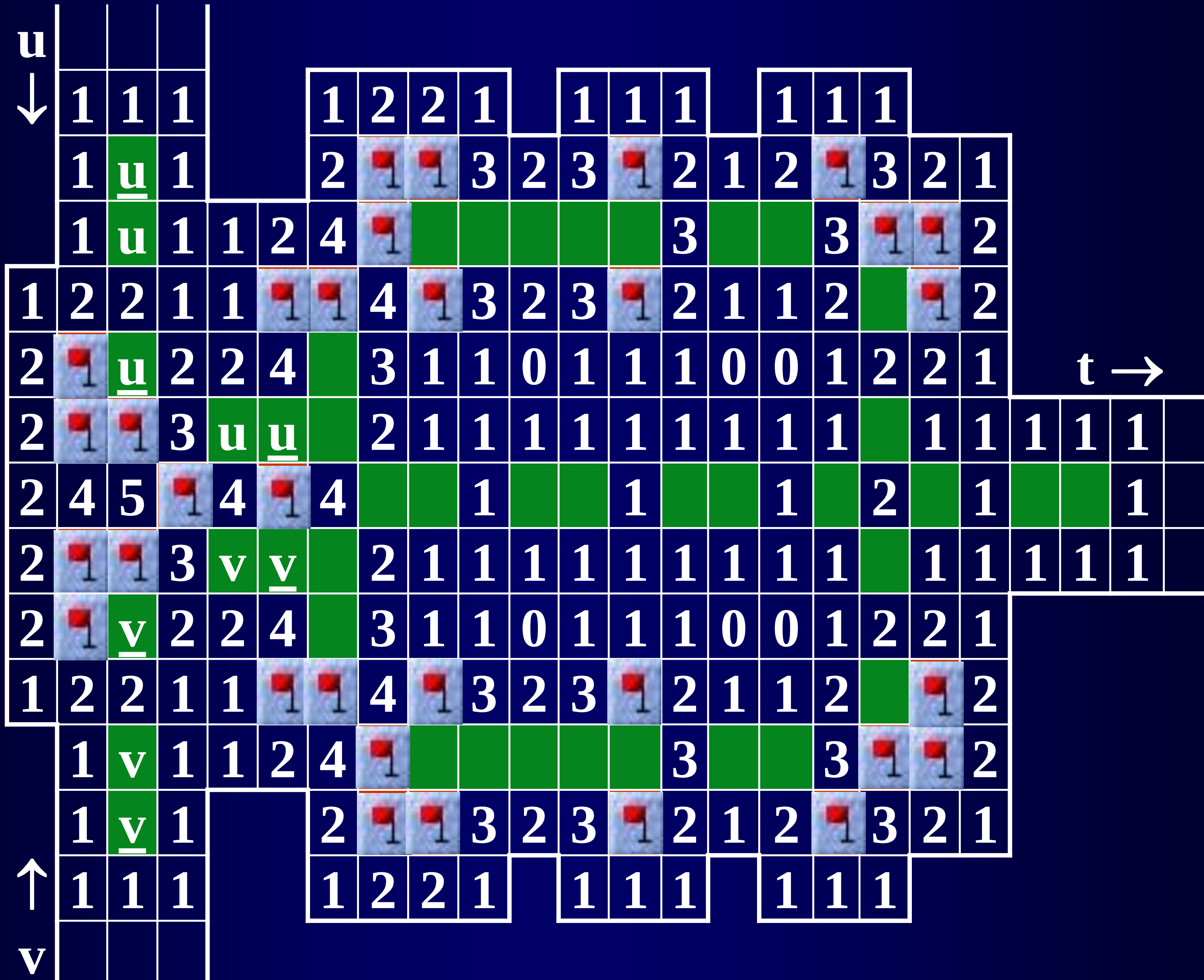
et



(7)

Le

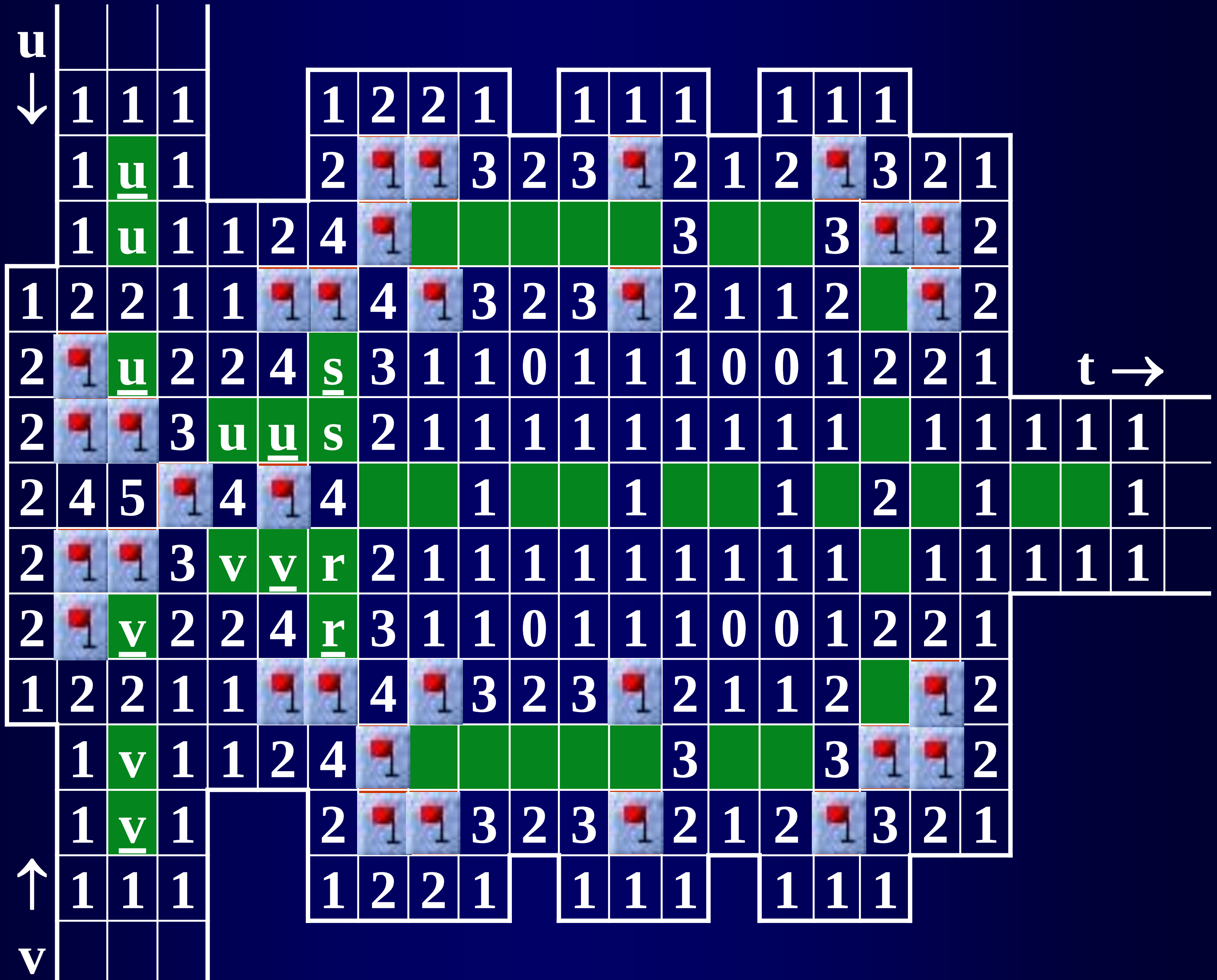
et



(7)

Le

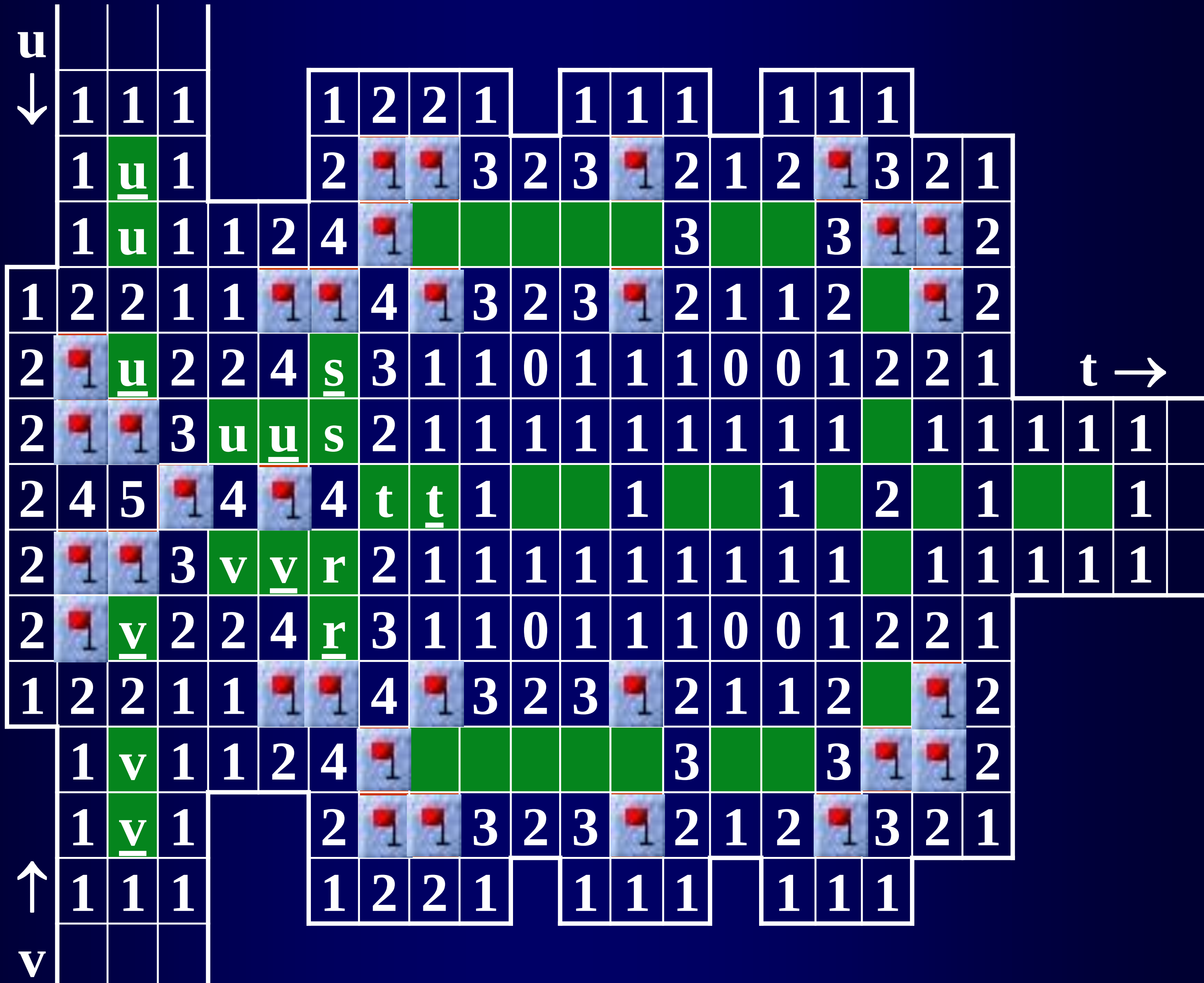
et



(7)

Le

et

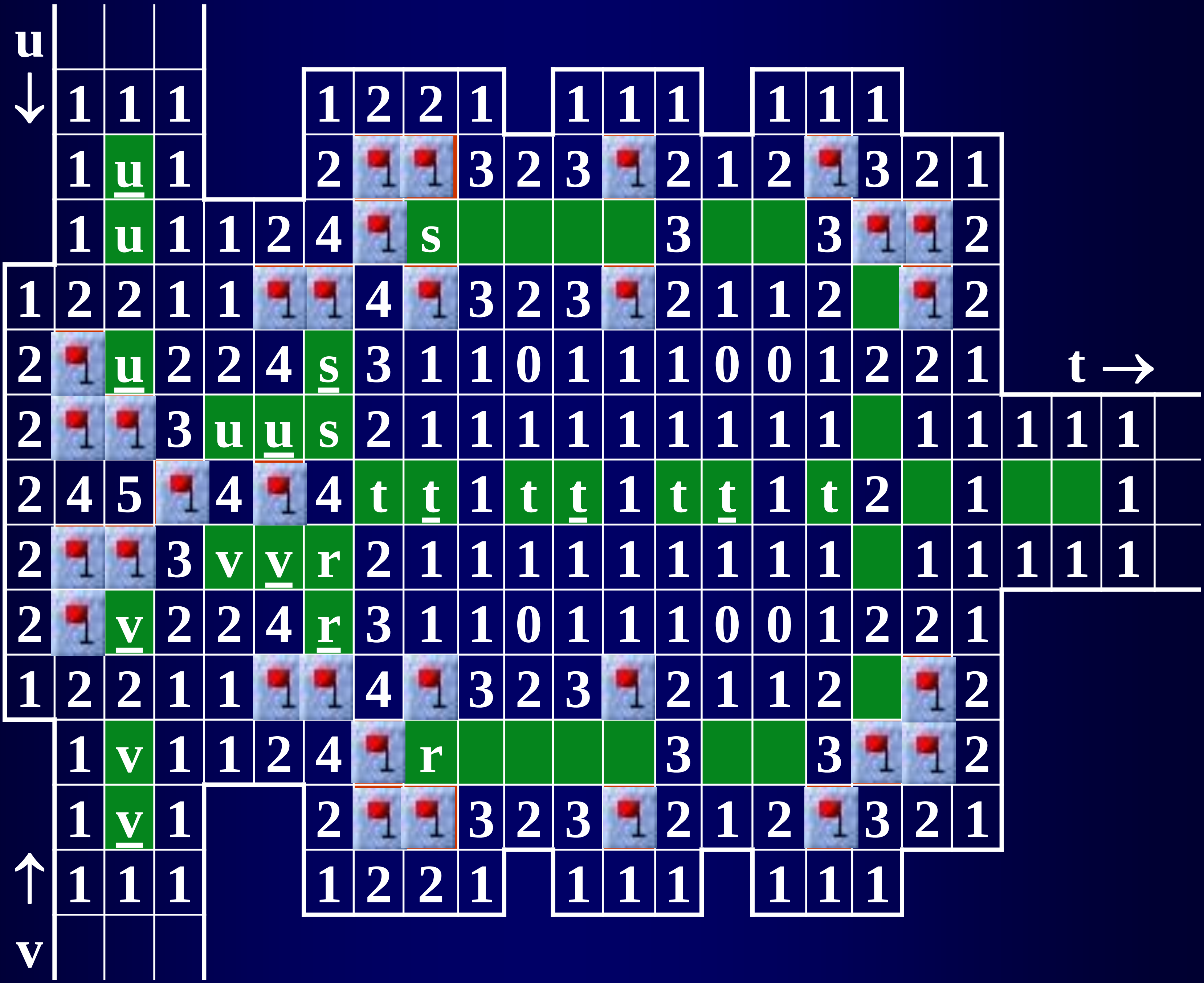


u ↓
1 1 1 1 2 2 1 1 1 1 1 1 1
1 u 1 2 3 2 3 2 1 2 3 2 1
1 u 1 1 2 4 3 3 2
1 2 2 1 1 4 3 2 3 2 1 1 2 2
2 u 2 2 4 s 3 1 1 0 1 1 1 0 0 1 2 2 1
t →
2 3 u u s 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
2 4 5 4 4 t t 1 1 1 2 1 1
2 3 v v r 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
2 v 2 2 4 r 3 1 1 0 1 1 1 0 0 1 2 2 1
1 2 2 1 1 4 3 2 3 2 1 1 2 2
1 v 1 1 2 4 3 3 2
1 v 1 2 3 2 3 2 1 2 3 2 1
↑ 1 1 1 1 2 2 1 1 1 1 1 1 1
v

(7)

Le

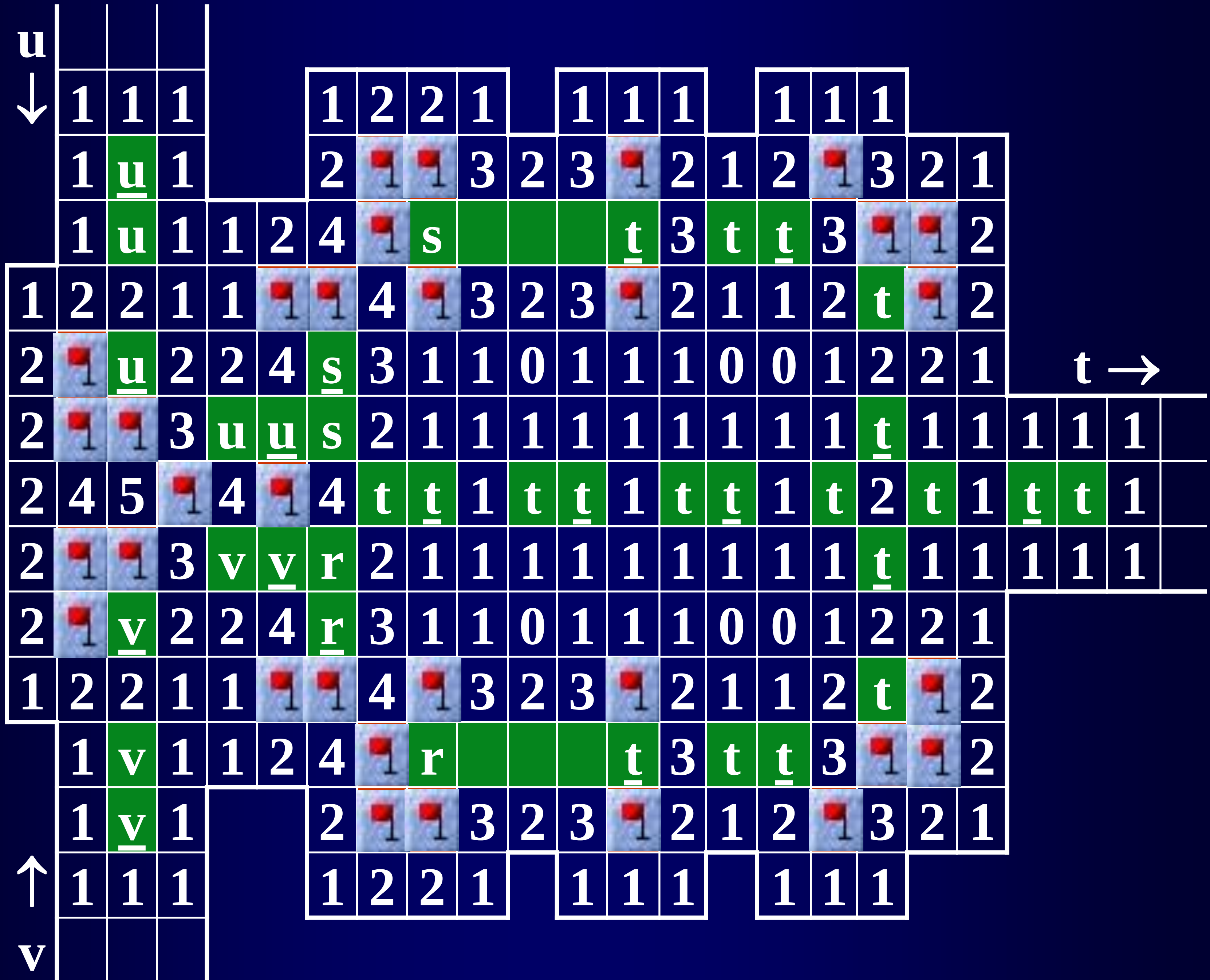
et



(7)

Le

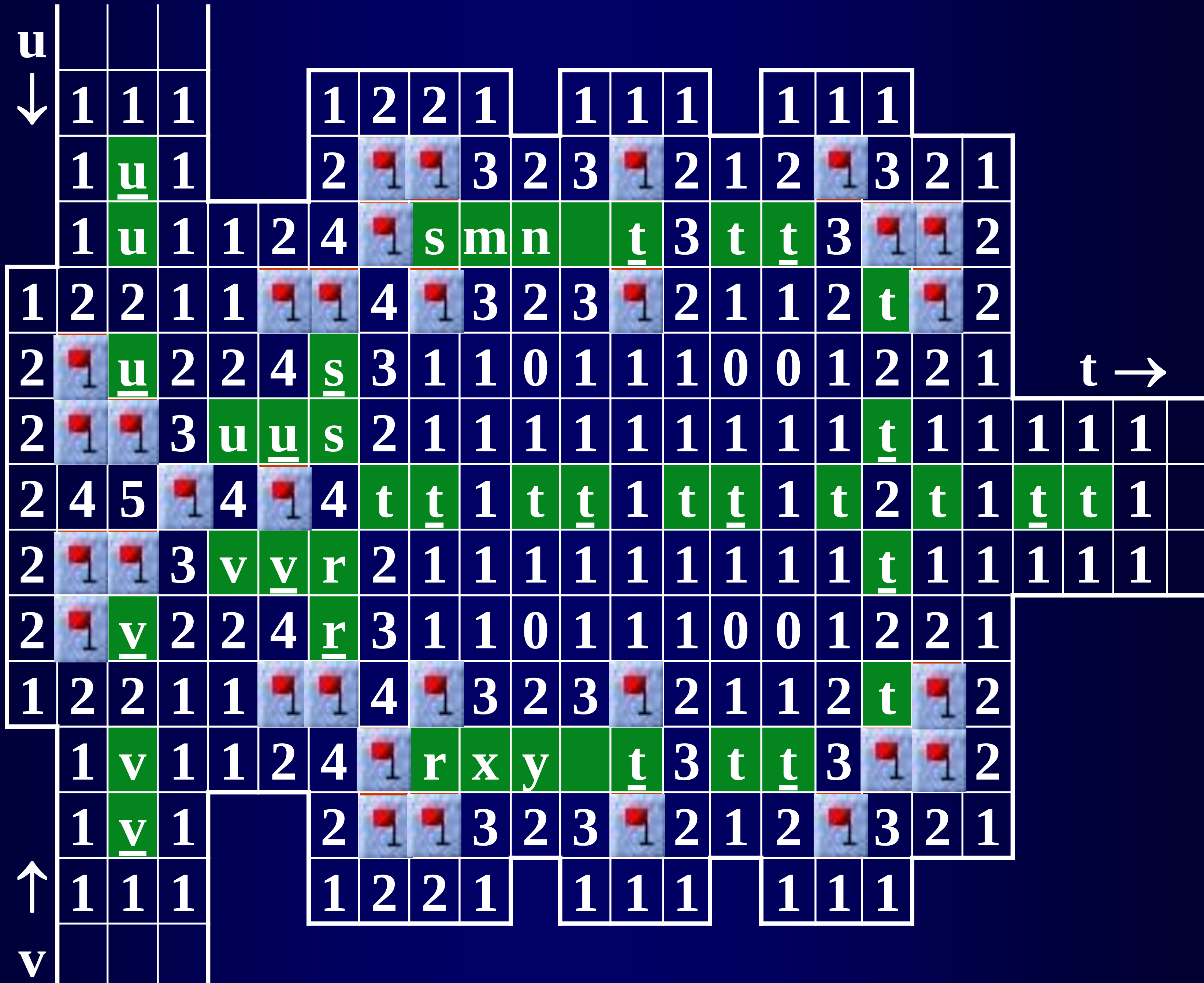
et



(7)

Le

et

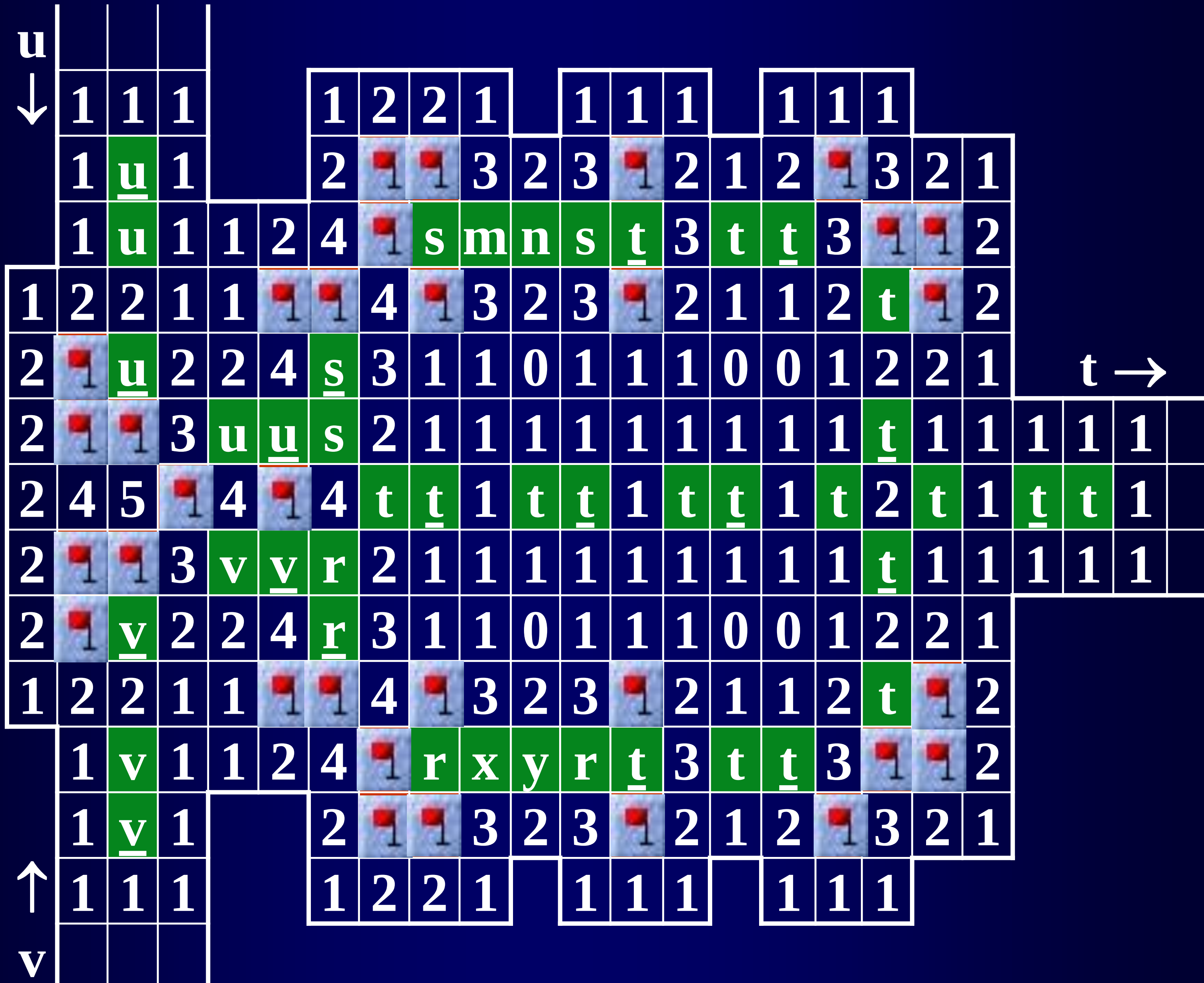


u ↓
1 1 1 1 2 2 1 1 1 1 1 1 1
1 u 1 2 3 2 3 2 1 2 3 2 1
1 u 1 1 2 4 s m n t 3 t t 3 2
1 2 2 1 1 4 3 2 3 2 1 1 2 t 2
2 u 2 2 4 s 3 1 1 0 1 1 1 0 0 1 2 2 1
2 3 u u s 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 t 1 1 1 1 1
2 4 5 4 4 t t 1 t t 1 t t 1 t 2 t 1 t t 1
2 3 v v r 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 t 1 1 1 1 1
2 v 2 2 4 r 3 1 1 0 1 1 1 0 0 1 2 2 1
1 2 2 1 1 4 3 2 3 2 1 1 2 t 2
1 v 1 1 2 4 r x y t 3 t t 3 2
1 v 1 2 3 2 3 2 1 2 3 2 1
↑ 1 1 1 1 2 2 1 1 1 1 1 1 1
v
t →

(7)

Le

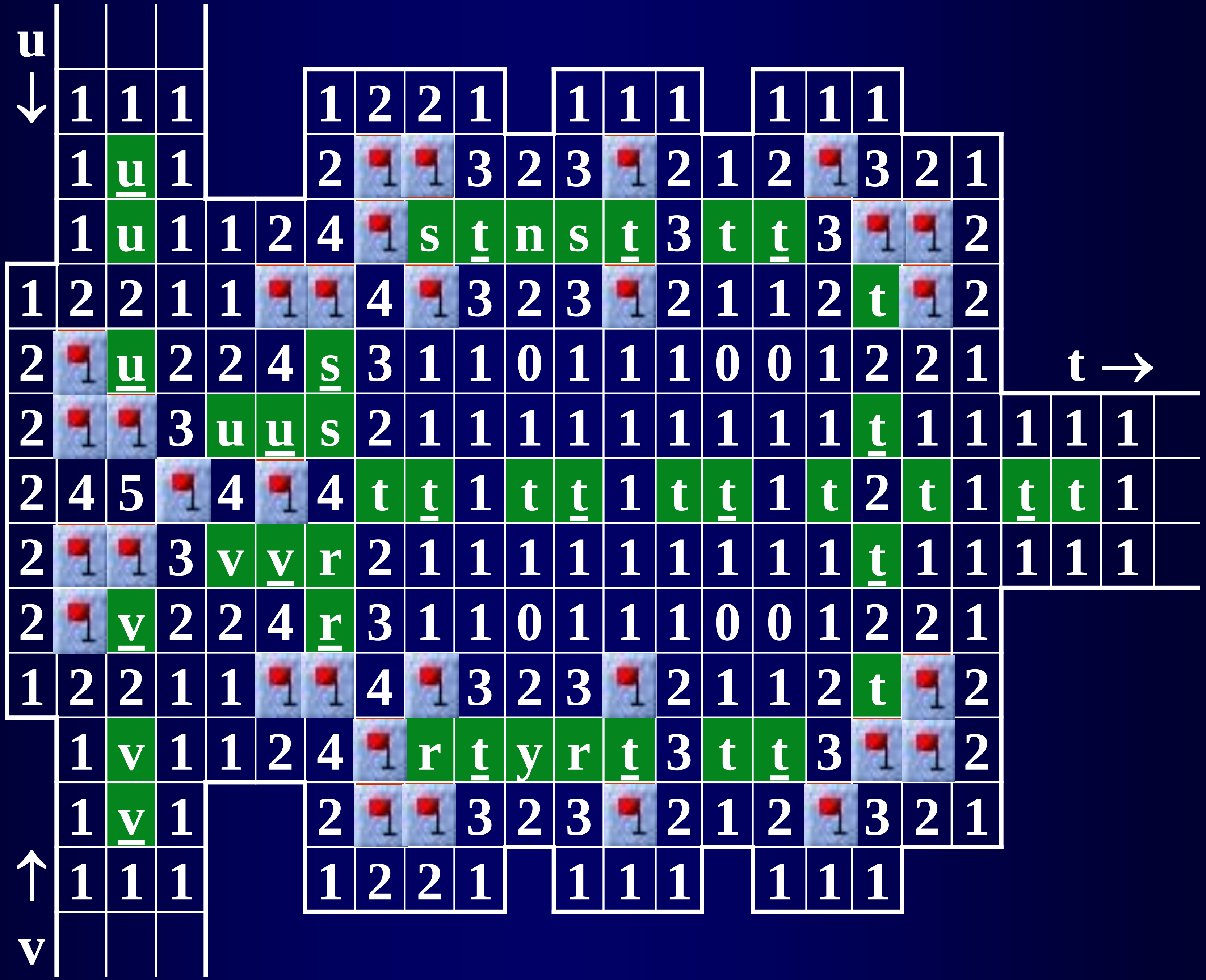
et



(7)

Le

et



- **Conditions :**
  - $\underline{u}+\underline{v}+s+r+t = 3 \Rightarrow s+r+t = u+v+1$
  - $s+\underline{t}+n = 2 \Rightarrow s+n = t+1$
  - $r+\underline{t}+y = 2 \Rightarrow r+y = t+1$

u	v	s	r	t	n	y	C123
0	0	0	1	0	1	0	ok
0	0	1	0	0	0	1	ok
1	0	1	1	0	0	0	ok
0	1	1	1	0	0	0	ok
1	1	1	1	1	1	1	ok

Croisement (8)

Croisement (8)

Croisement (8)

Croisement (8)

Croisement (8)

Ainsi v = r

Croisement (8)

Croisement (8)

Ainsi s = u

Croisement (8)

Les connecteurs (9)

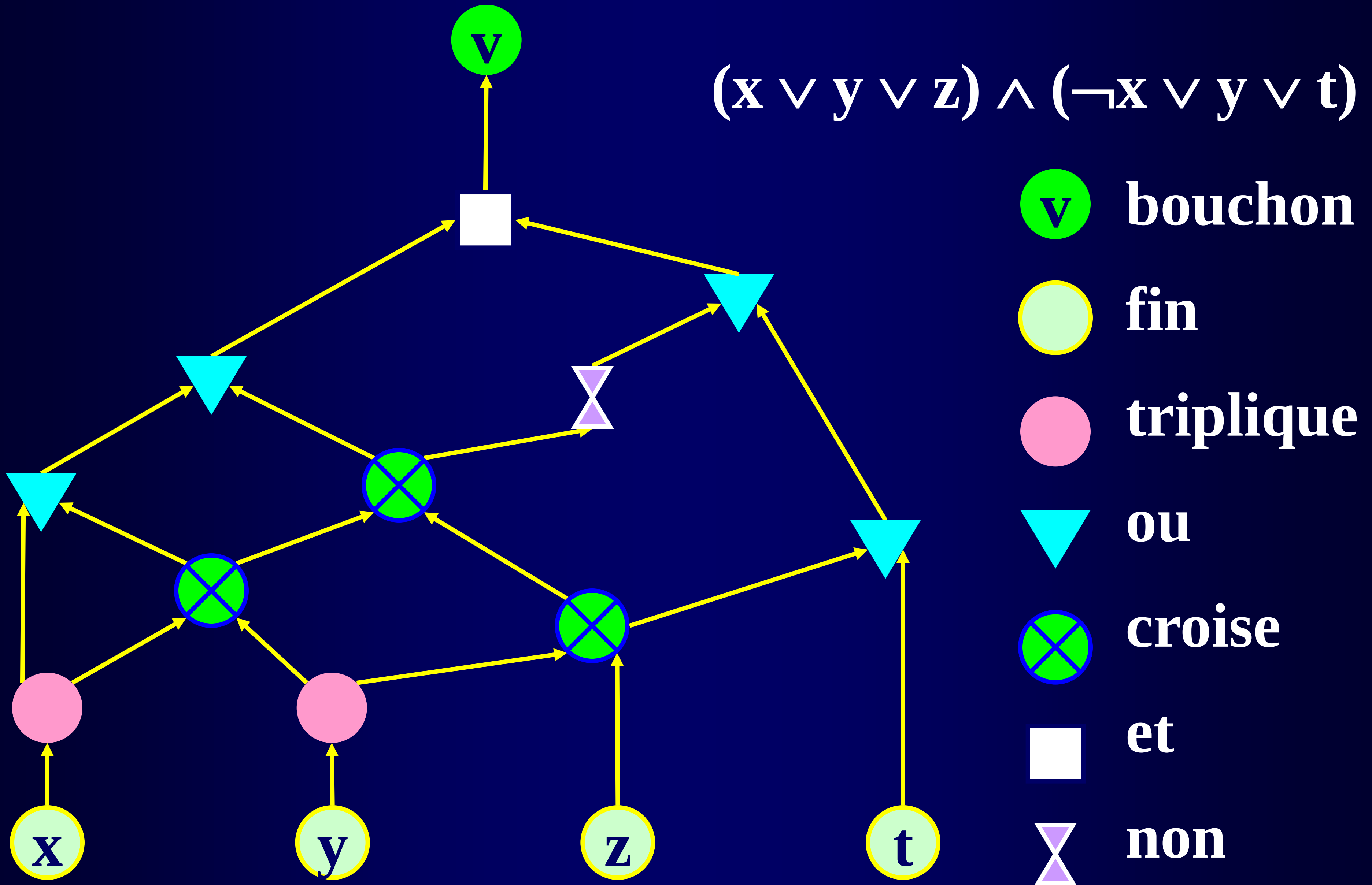
Un "bouchon" de terminaison vrai

$$x \rightarrow v$$

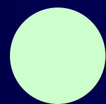
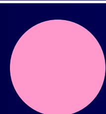
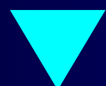
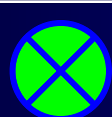
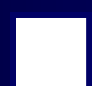
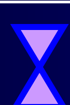
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	…
0	$\underline{x}$	x	1	$\underline{x}$	x	1	$\underline{x}$	x	1	$\underline{x}$	x	1	$\underline{x}$	…
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	…

Un exemple de la construction

$(x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee t)$



Complexité

	fin	O(n)
	triplique	O(n)
	ou	O(n)
	croise	O(n^2) (au plus …)
	et	O(n)
	non	O(n)

Ainsi le nombre de composants étant polynomiale, la taille du jeu obtenu est polynomiale.

SI

S'il existent des valeurs de vérité qui permettent de satisfaire la formule, alors on peut déduire de ces valeurs une solution pour le problème de démineur construit.

Seulement si

Si une solution pour le problème de démineur existe, alors cela implique que le "bouchon" finale soit vrai (bombe), ce qui implique que les différentes composantes des conjonctions successives soient vrais (clauses vraies).

Si les clauses sont satisfaites, c'est que dans chaque clause il y a au moins un littéral qui est vrai.

CQFD

Et d'autres jeux ?

- Echec fini, mais en taille variable NP-difficile
- Tetris NP-complet
- 15-p existence de la solution dans P, mais existence d'une solution en temps borné NP-complet
- Go NP-difficile
- Otello NP-difficile (taille variable)
- Sokoban NP-difficile
- …