Les machines de Turing (suite)

Une précision

Le temps de calcul d′une machine de Turing est une fonction de complexité T(n), qui dépend de n, la taille des données (nombre de cases de la bande).

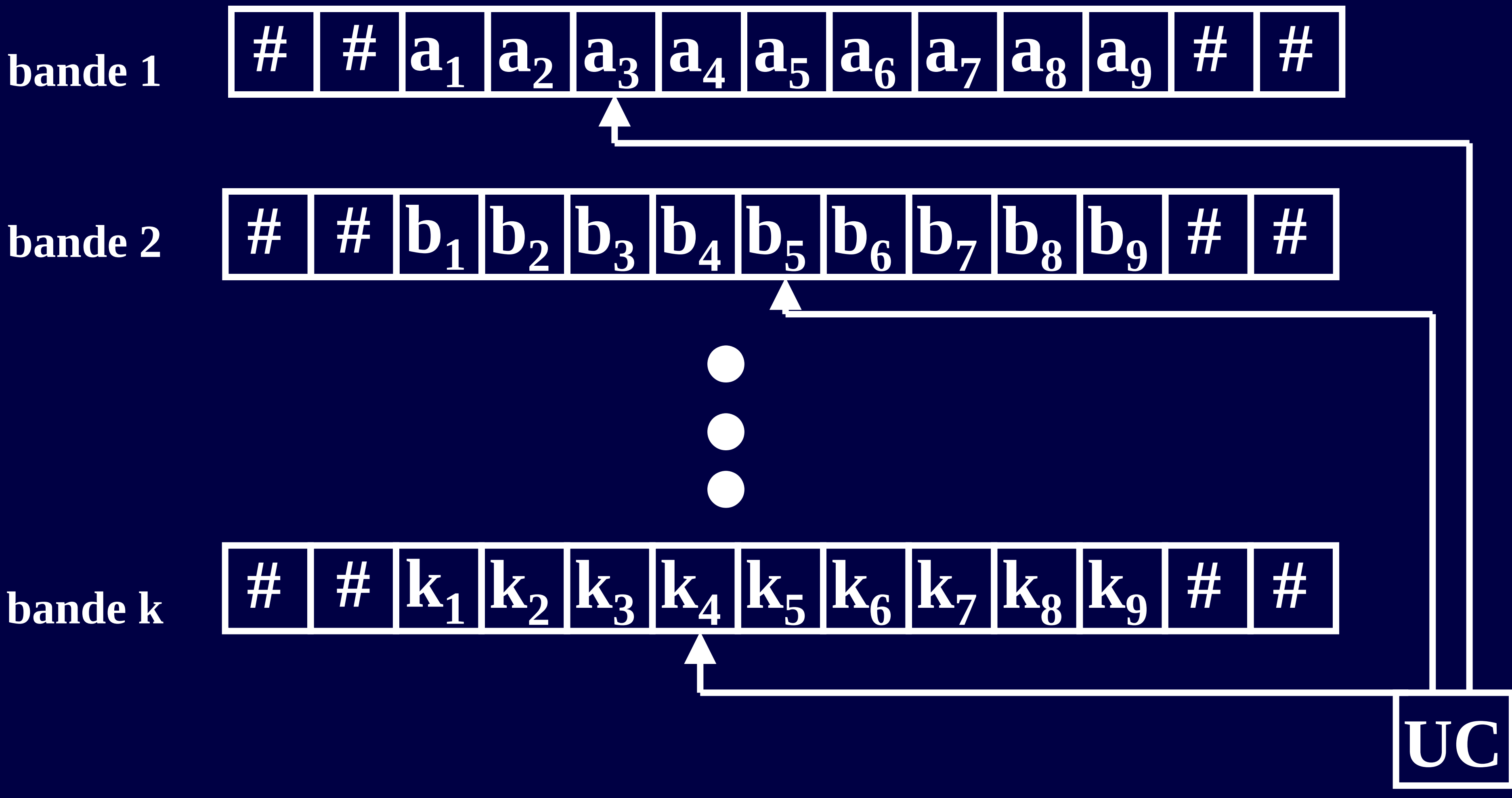
Formellement on définit T(n) comme le nombre maximum de transitions pour une donnée de taille n.

Equivalences

Théorème :

Si le langage L est accepté par une machine de Turing T à *k* bandes, alors il existe une machine de Turing T′ à une bande pour reconnaître L.

Une machine à k bandes



Preuve

Nous introduisons la notion de piste. Construisons en effet T′ à une bande, mais à $2k$ pistes, simulant T.

Ainsi pour décrire ce qui se passe sur la bande i on dispose de deux pistes.

- La piste $2i$, a des blancs partout, à part la case sur laquelle se trouve la tête de lecture/écriture.
- La piste $2i$-1 contient exactement l′information de la bande i.

Pour que la bande de T′ puisse contenir cette information sur les $2k$ pistes, on aura un alphabet plus grand, permettant le codage de chaque $2k$-uplet possible en une seul lettre.

Une machine à k bandes

piste 1	#	#	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	#	#
piste 2	#	#	#	#	X	#	#	#	#	#	#	#	#
piste 3	#	#	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	#	#
piste 4	#	#	#	#	#	#	X	#	#	#	#	#	#

piste 2k-1	#	#	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	#	#
piste 2k	#	#	#	#	#	X	#	#	#	#	#	#	#

Pour simuler le fonctionnement de T, la machine T′ fonctionne comme suit :

- on «visite» toutes les cases marquées pour lire l′information se trouvant sur chacune des bandes. L′information lue est conservée par l′état.
- on visite à nouveau les cases marquées pour effectuer les changements d′écriture et de marquage dues à la transition.

La même méthode d′utilisation de pistes permet de prouver le résultat suivant :

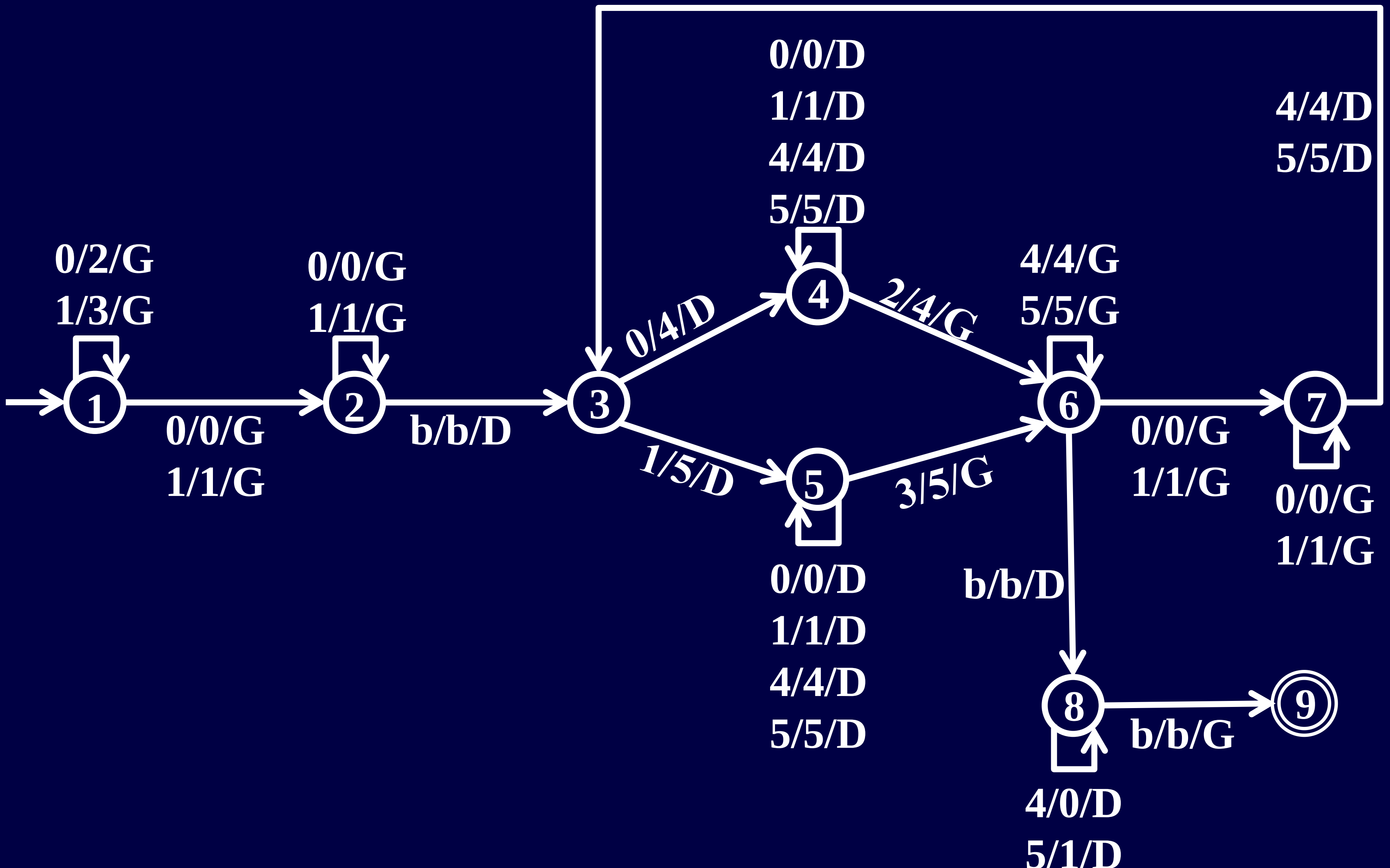
Théorème : Si le langage L est accepté par une machine de Turing T à une bande infinie des deux côtés, alors il existe une machine de Turing T′ à une bande infinie d′un seul côté pour reconnaître L.

Preuve : Il suffit d′utiliser une machine à trois pistes …

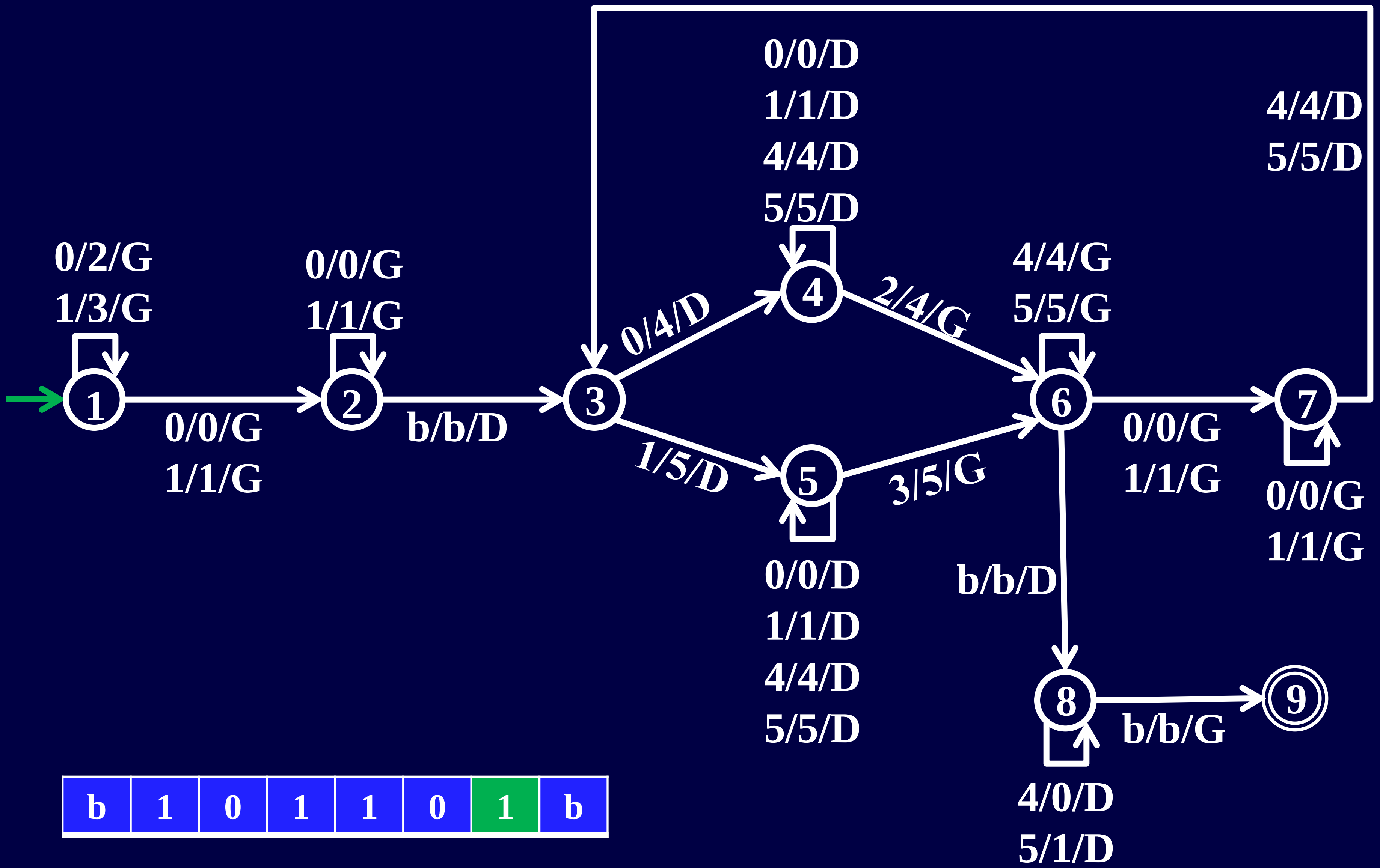
On peut généraliser ce résultat :

Théorème : Si le langage L est accepté par une machine de Turing T à *k* bandes infinies des deux côtés, alors il existe une machine de Turing T′ à *k* bandes infinies d′un seul côté pour reconnaître L.

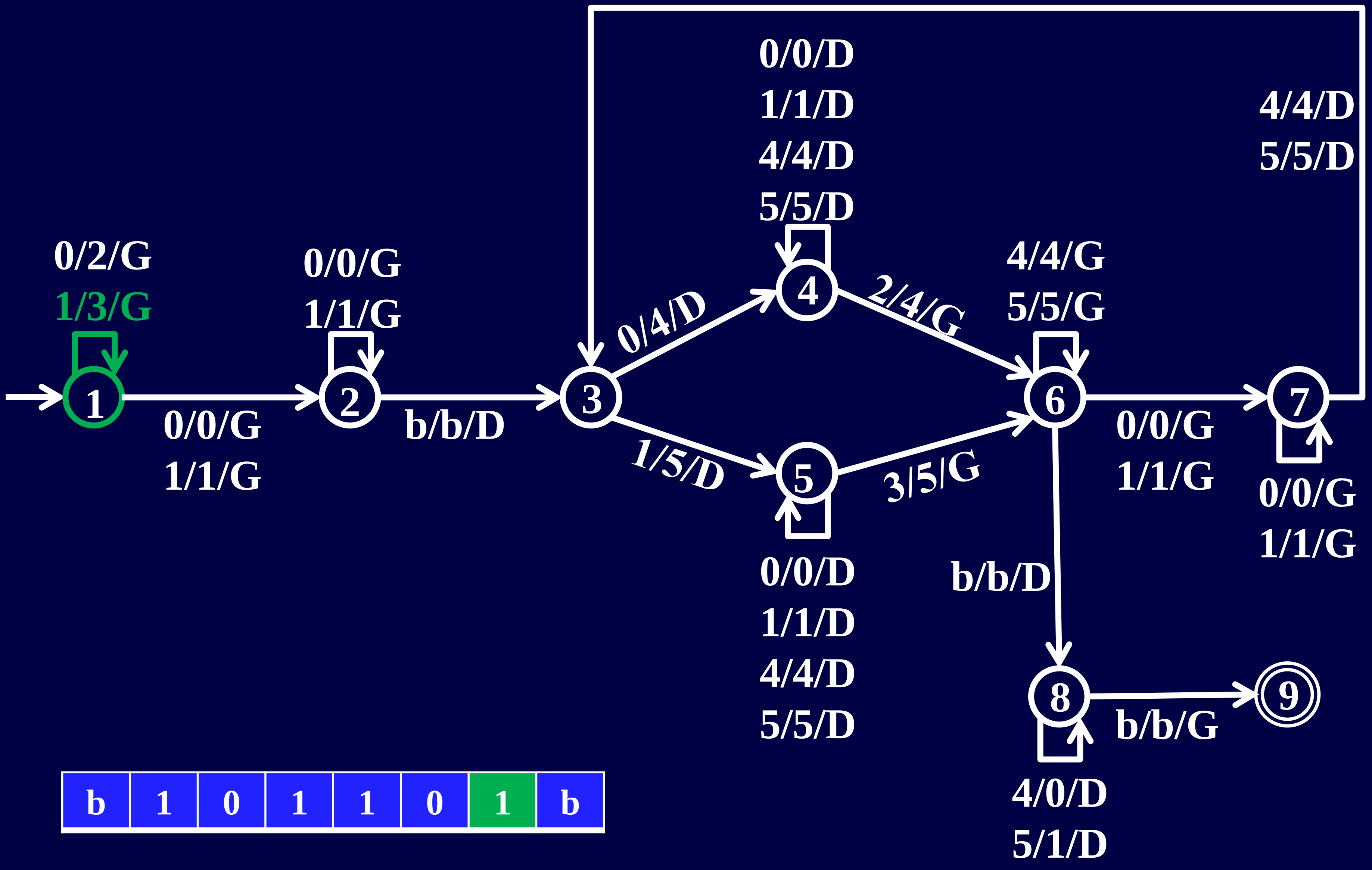
Un exemple de machine non-déterministe



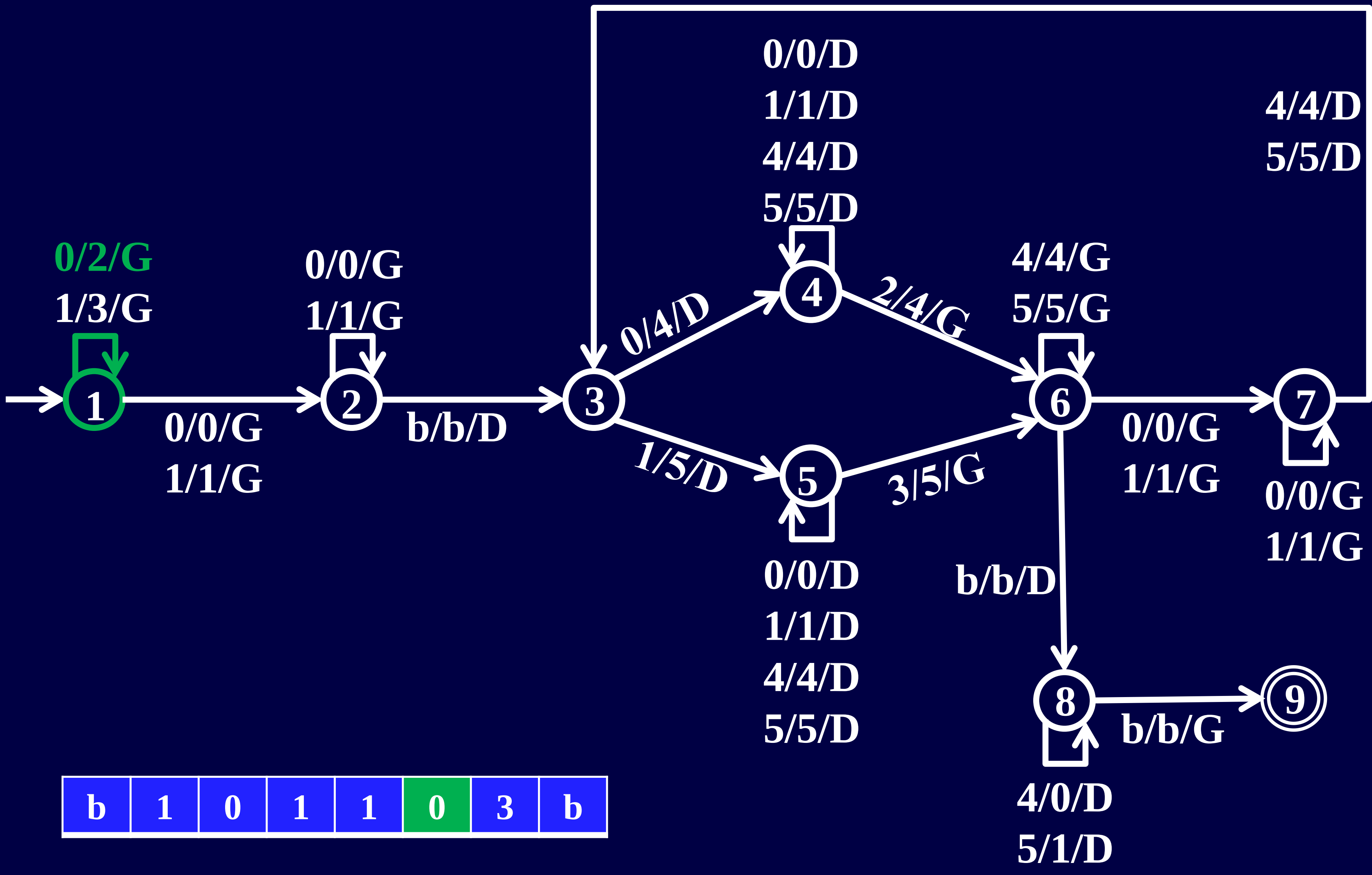
Un exemple de machine non-déterministe



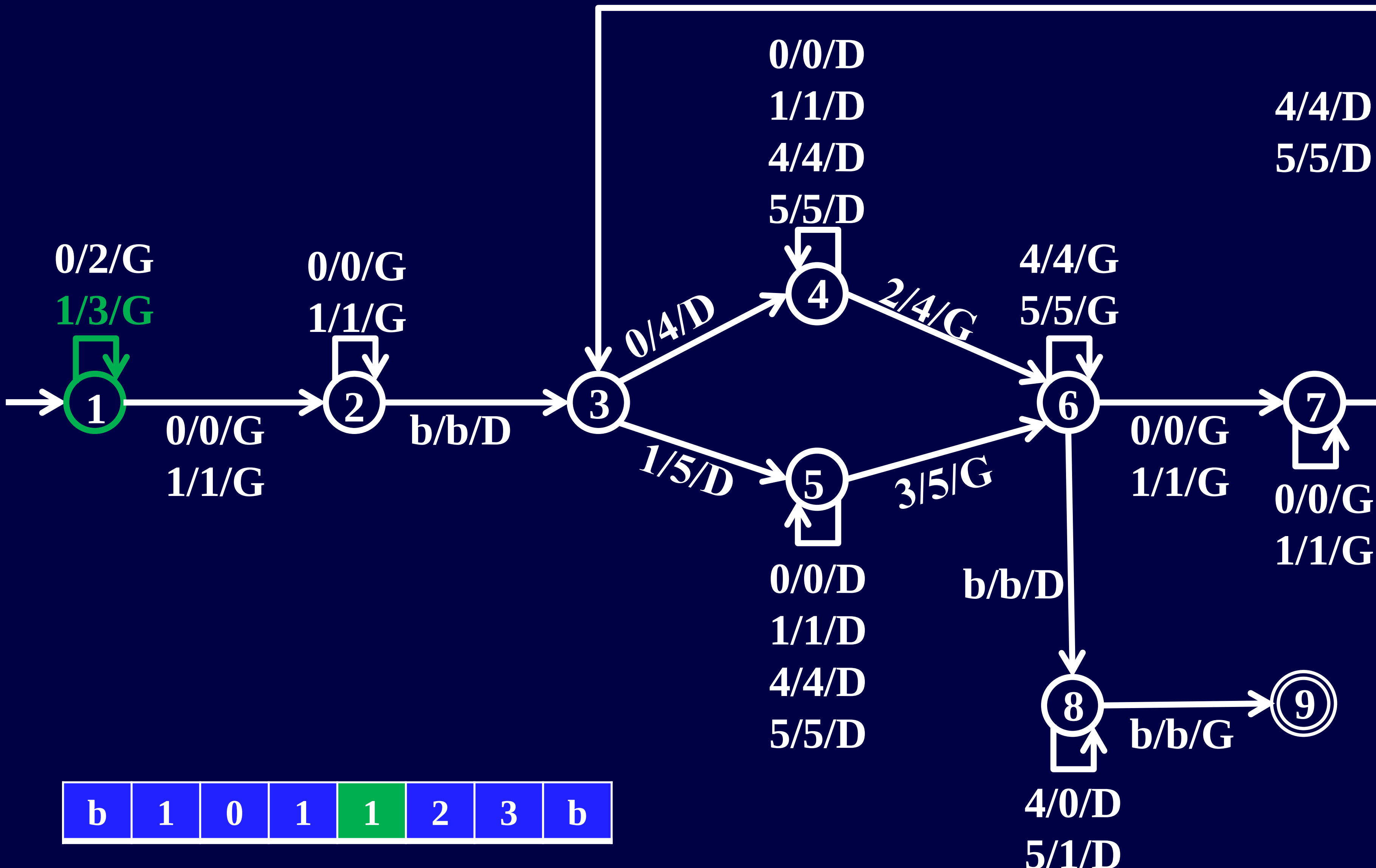
Un exemple de machine non-déterministe



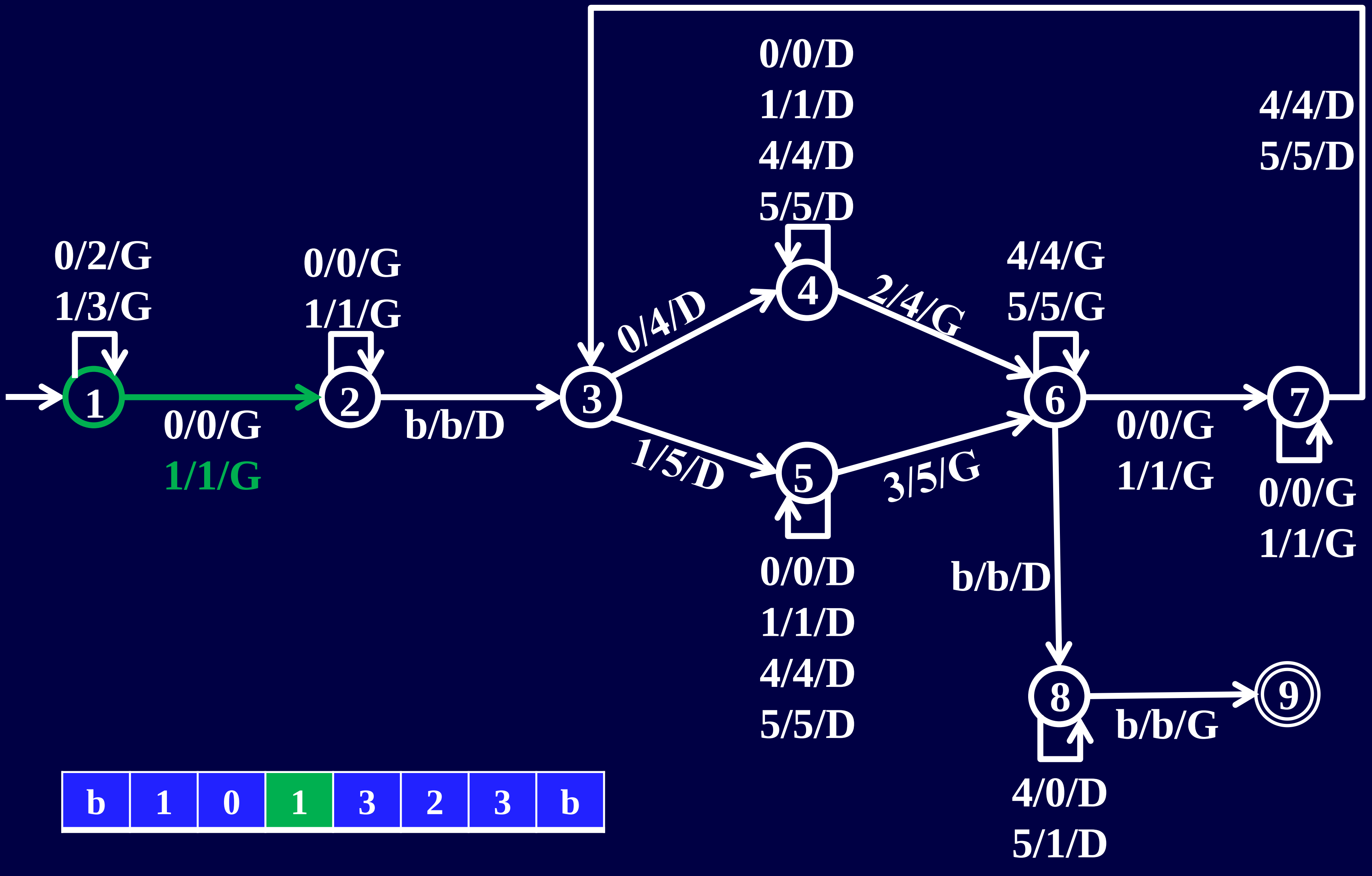
Un exemple de machine non-déterministe



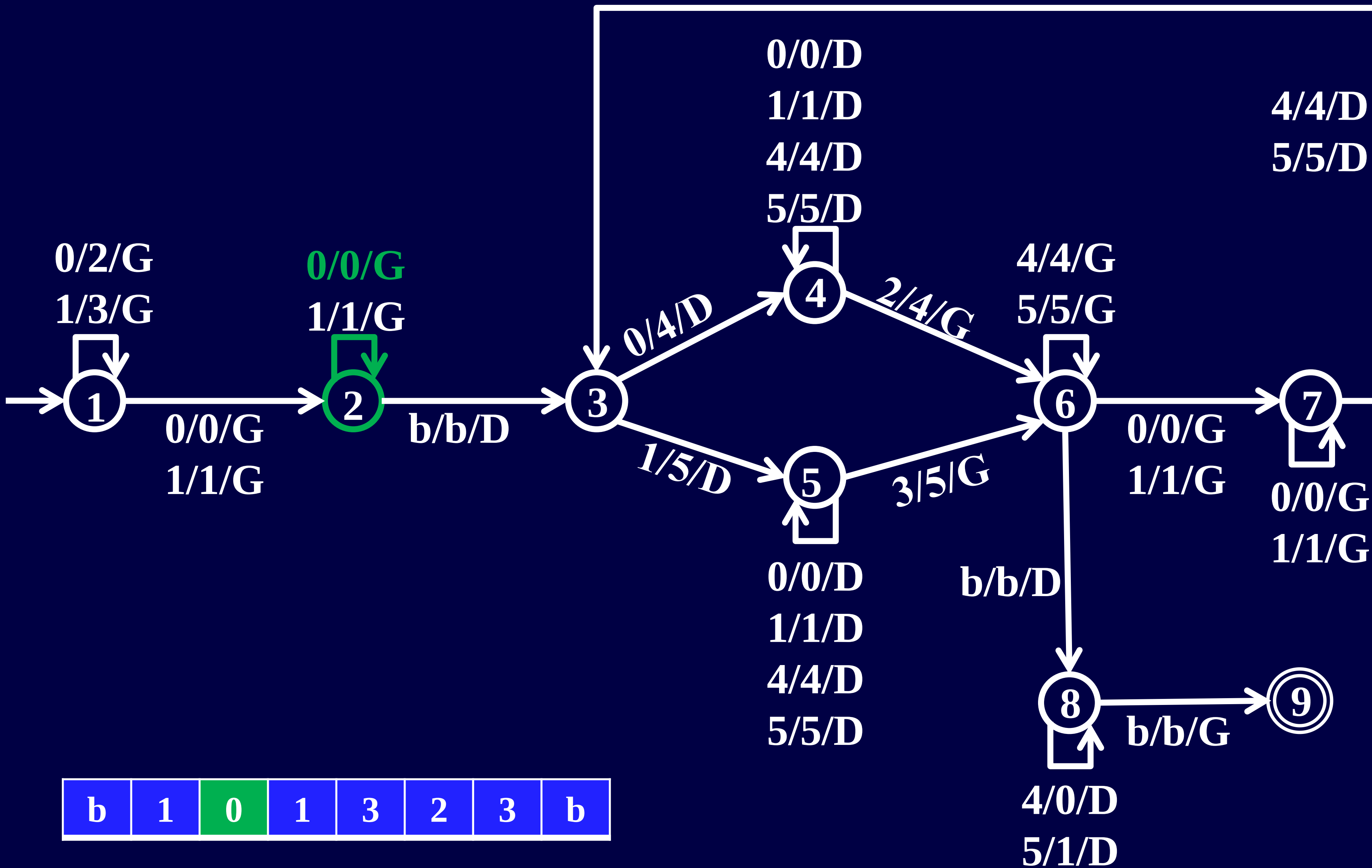
Un exemple de machine non-déterministe



Un exemple de machine non-déterministe

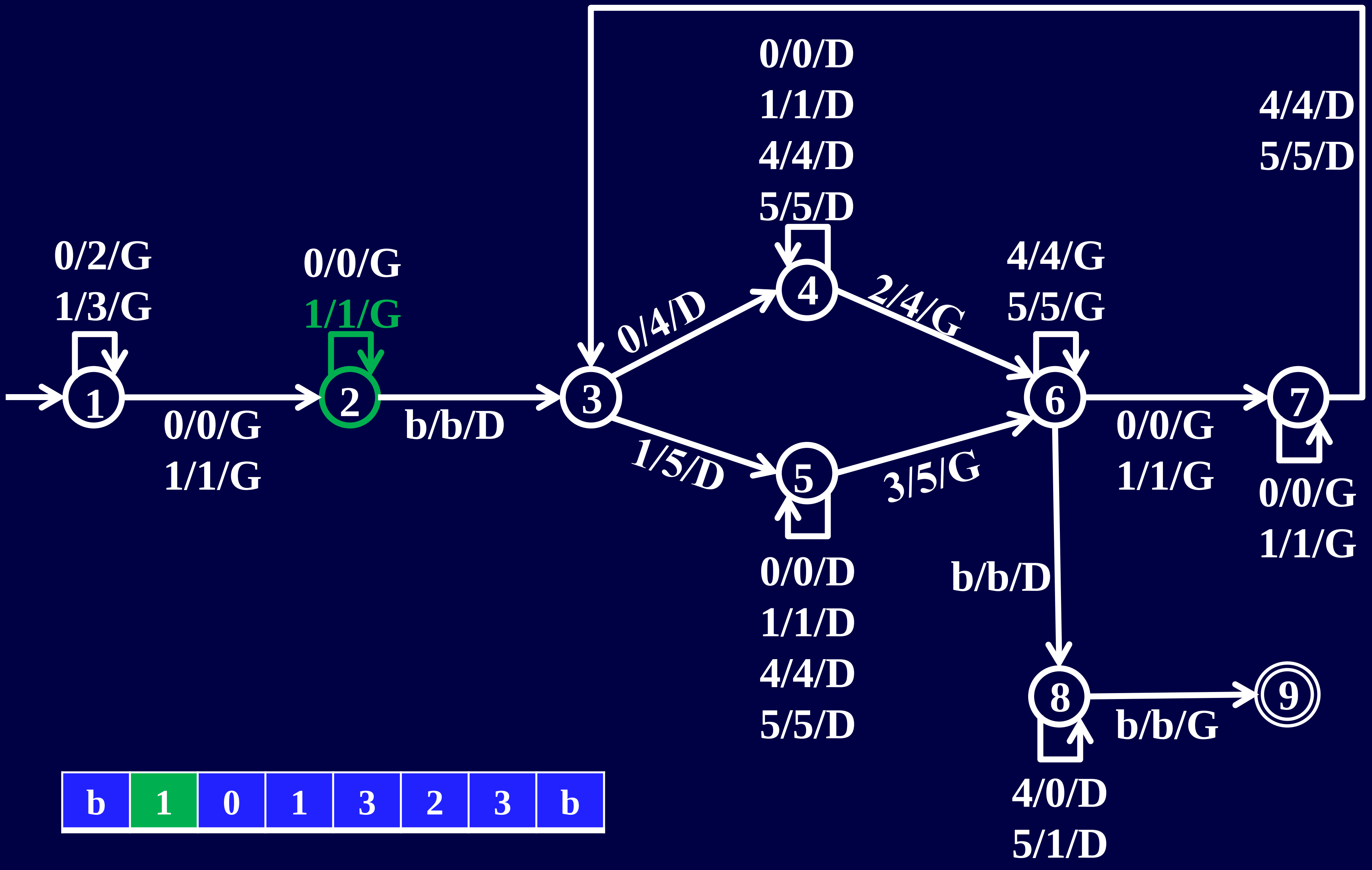


Un exemple de machine non-déterministe

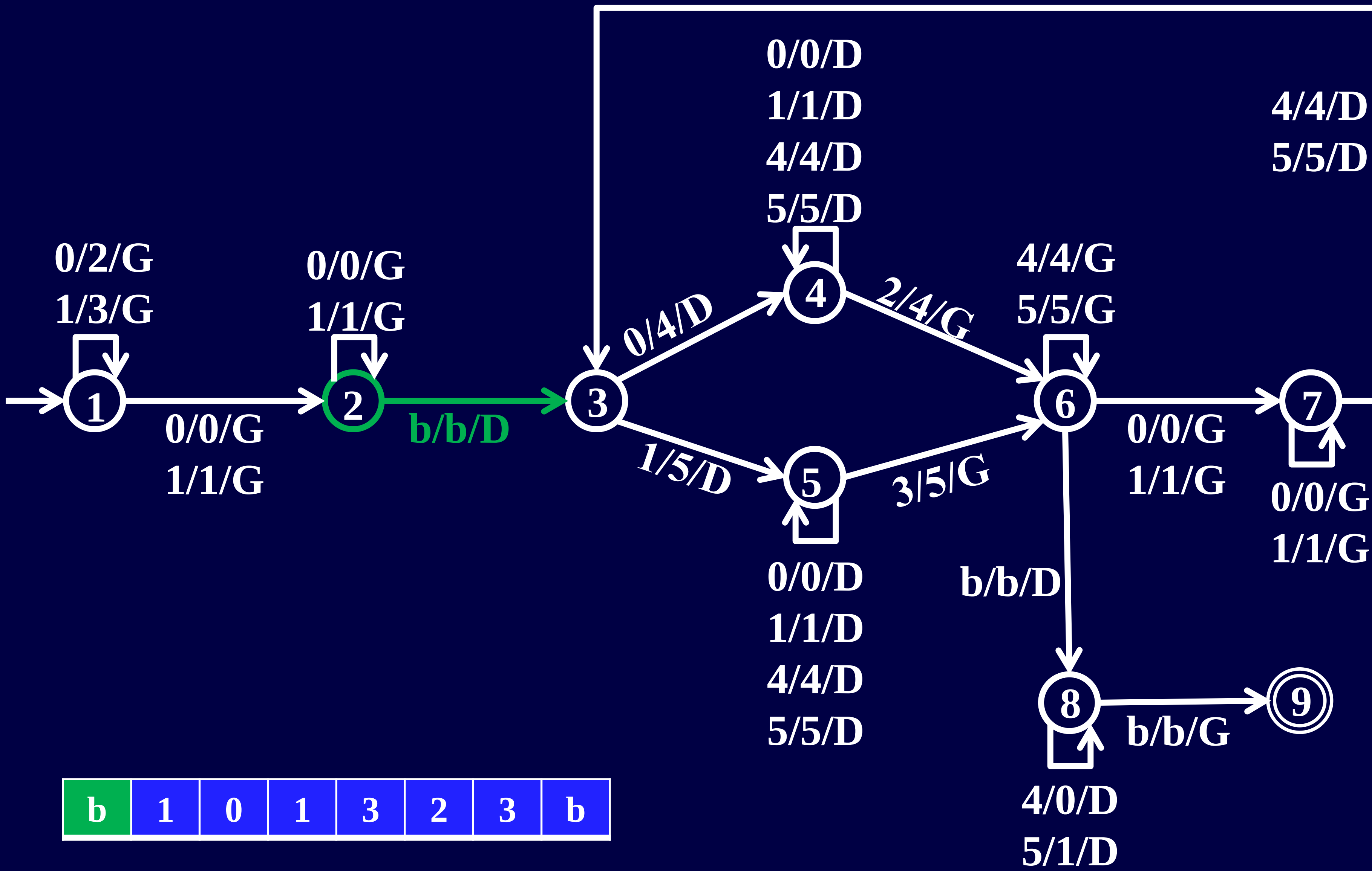


b	1	0	1	3	2	3	b

Un exemple de machine non-déterministe

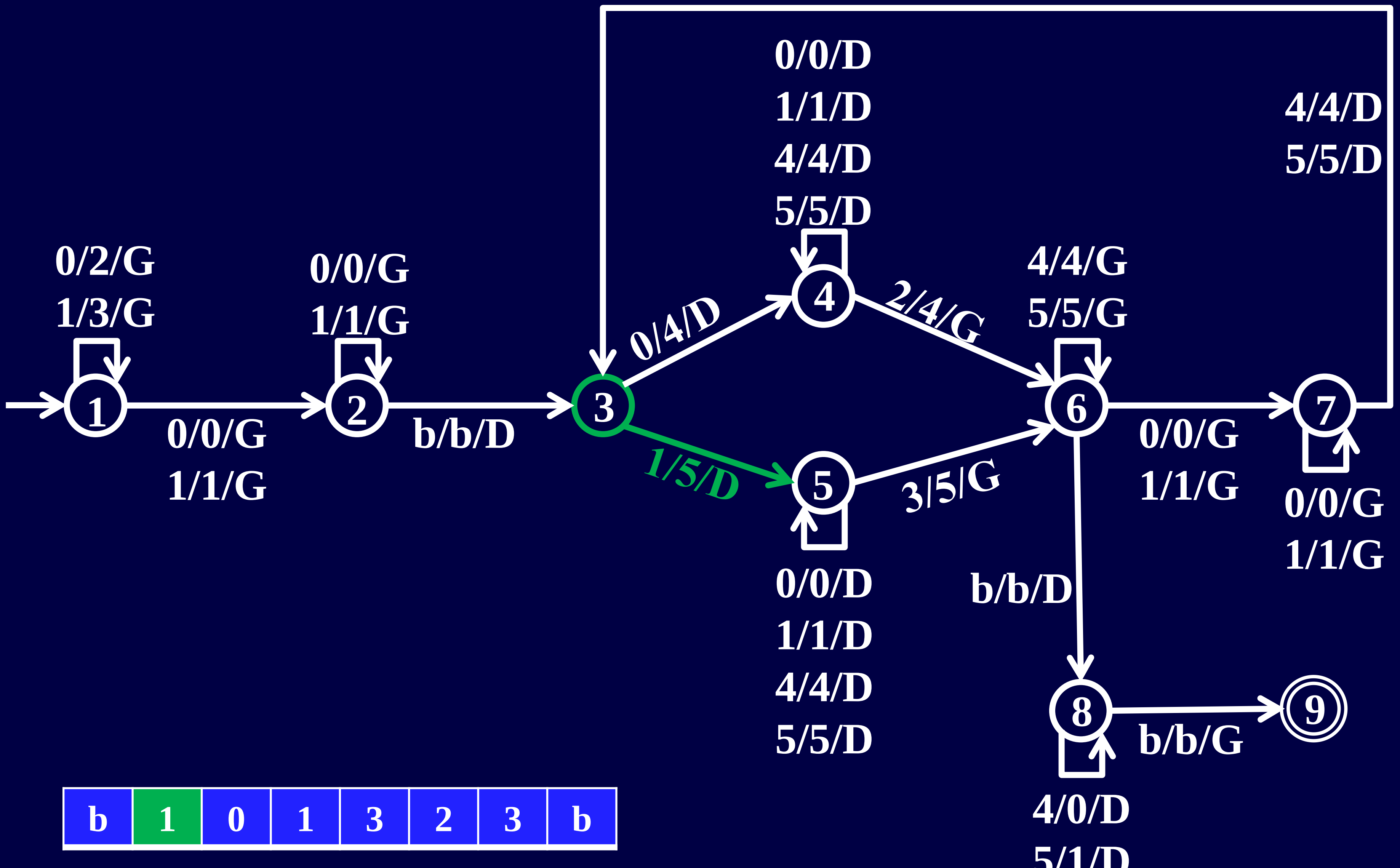


Un exemple de machine non-déterministe

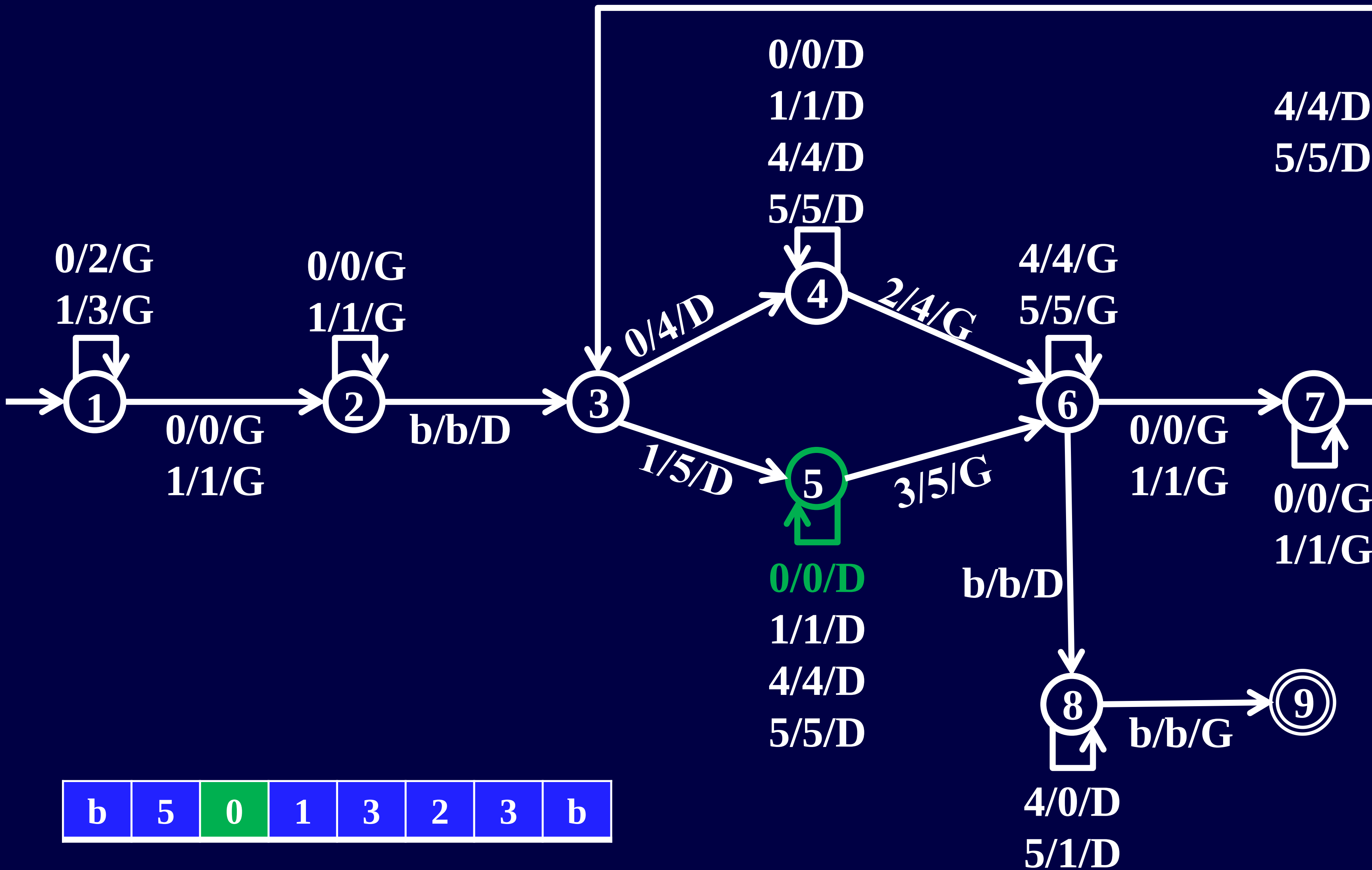


b	1	0	1	3	2	3	b

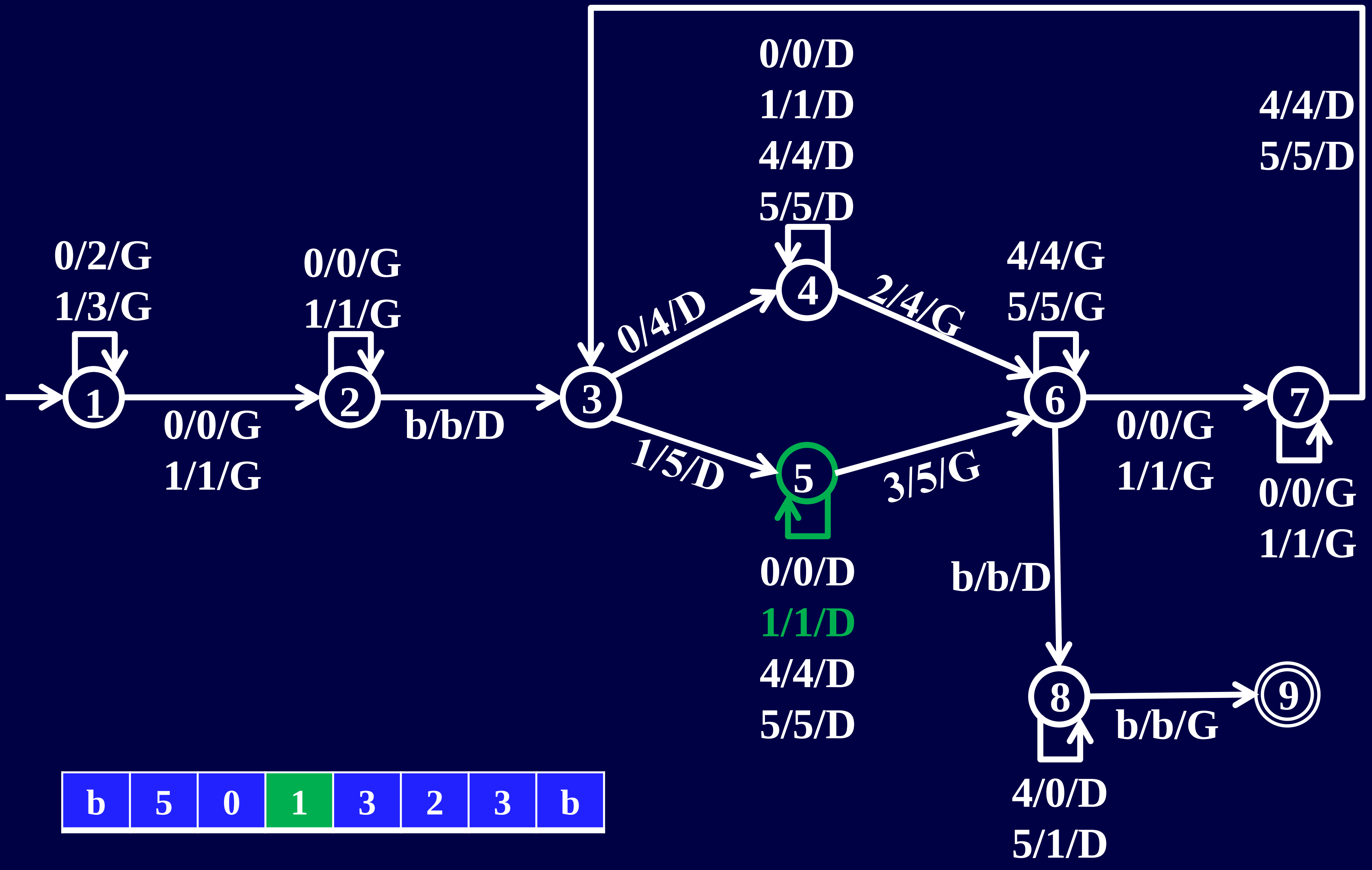
Un exemple de machine non-déterministe



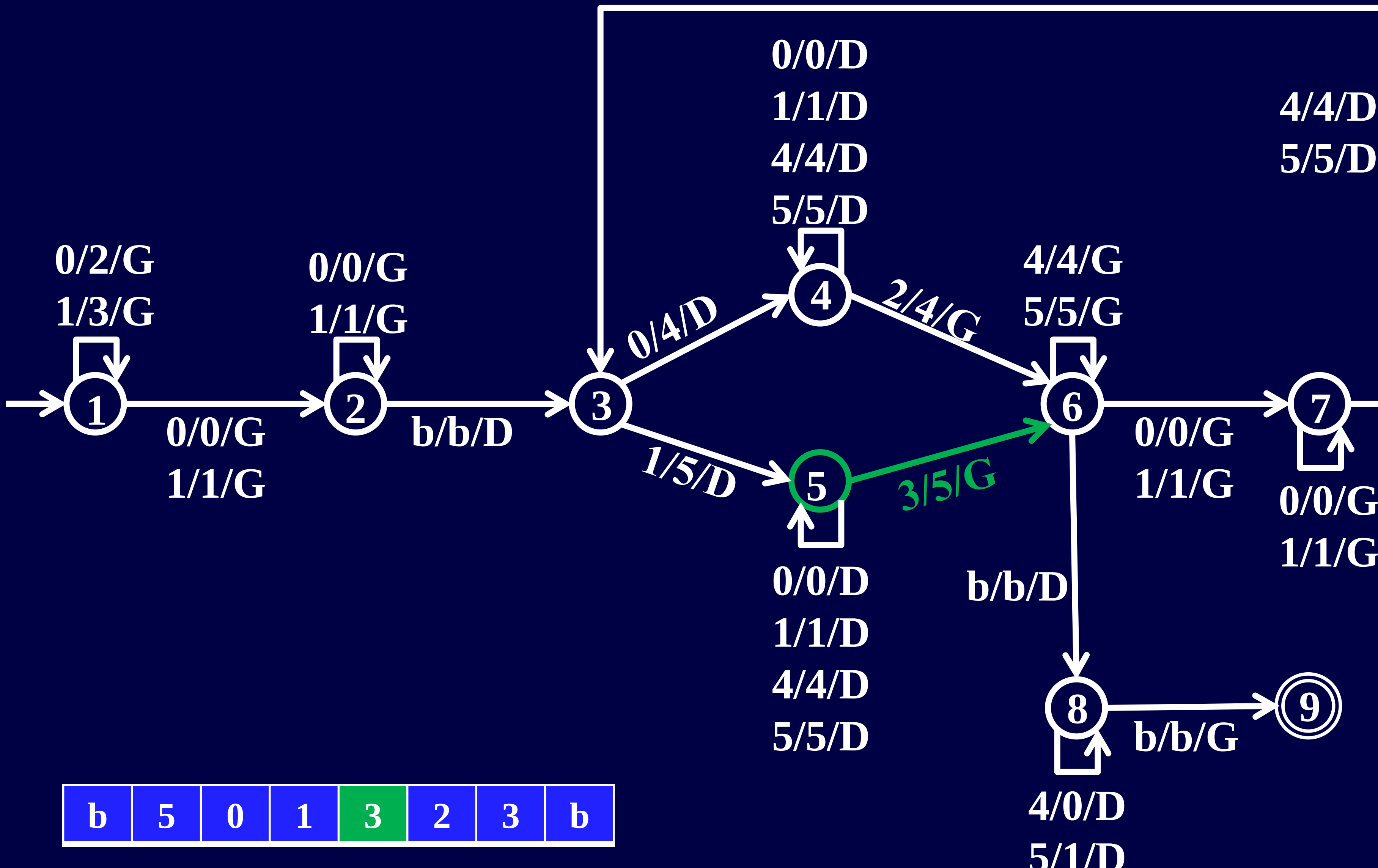
Un exemple de machine non-déterministe



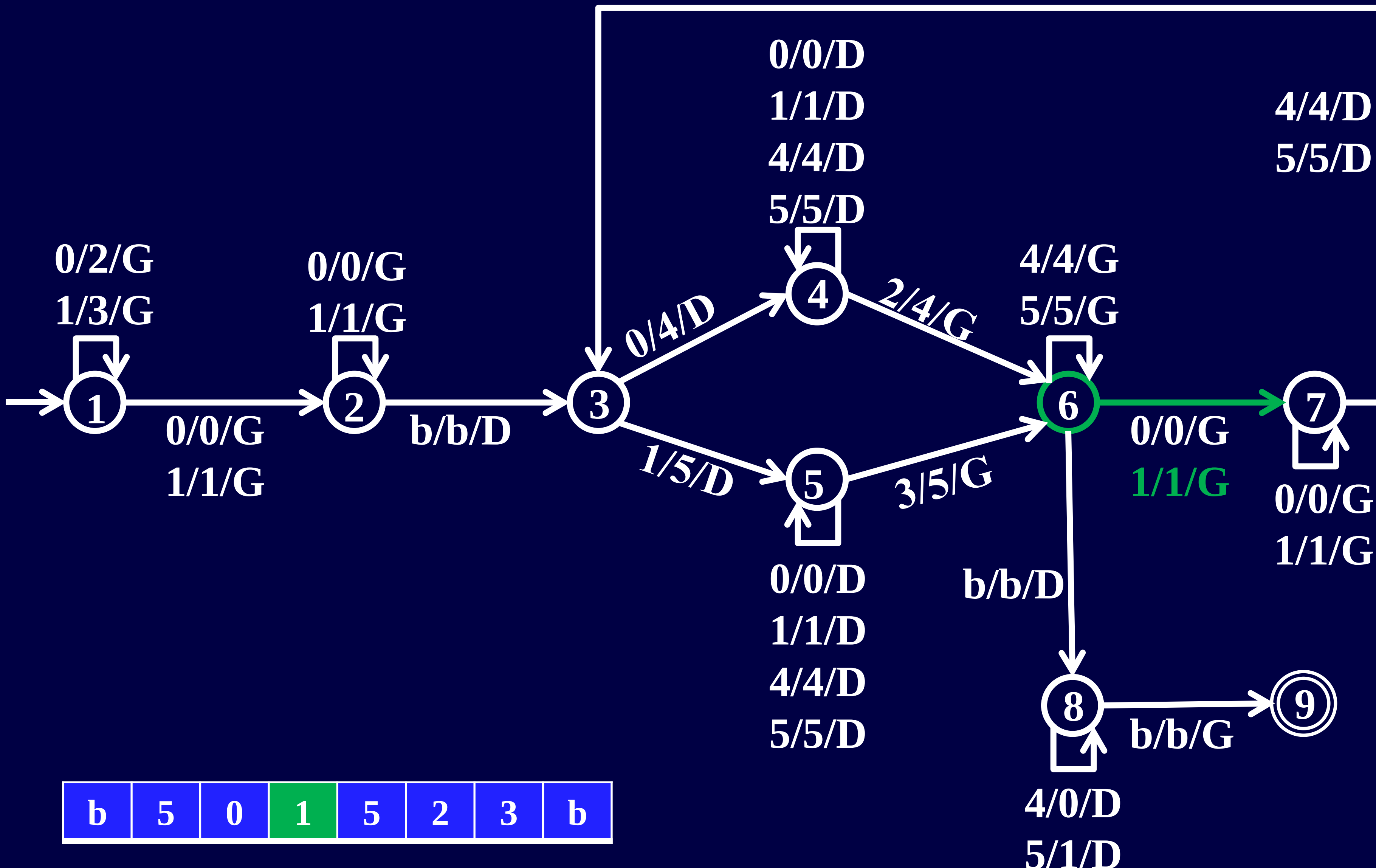
Un exemple de machine non-déterministe



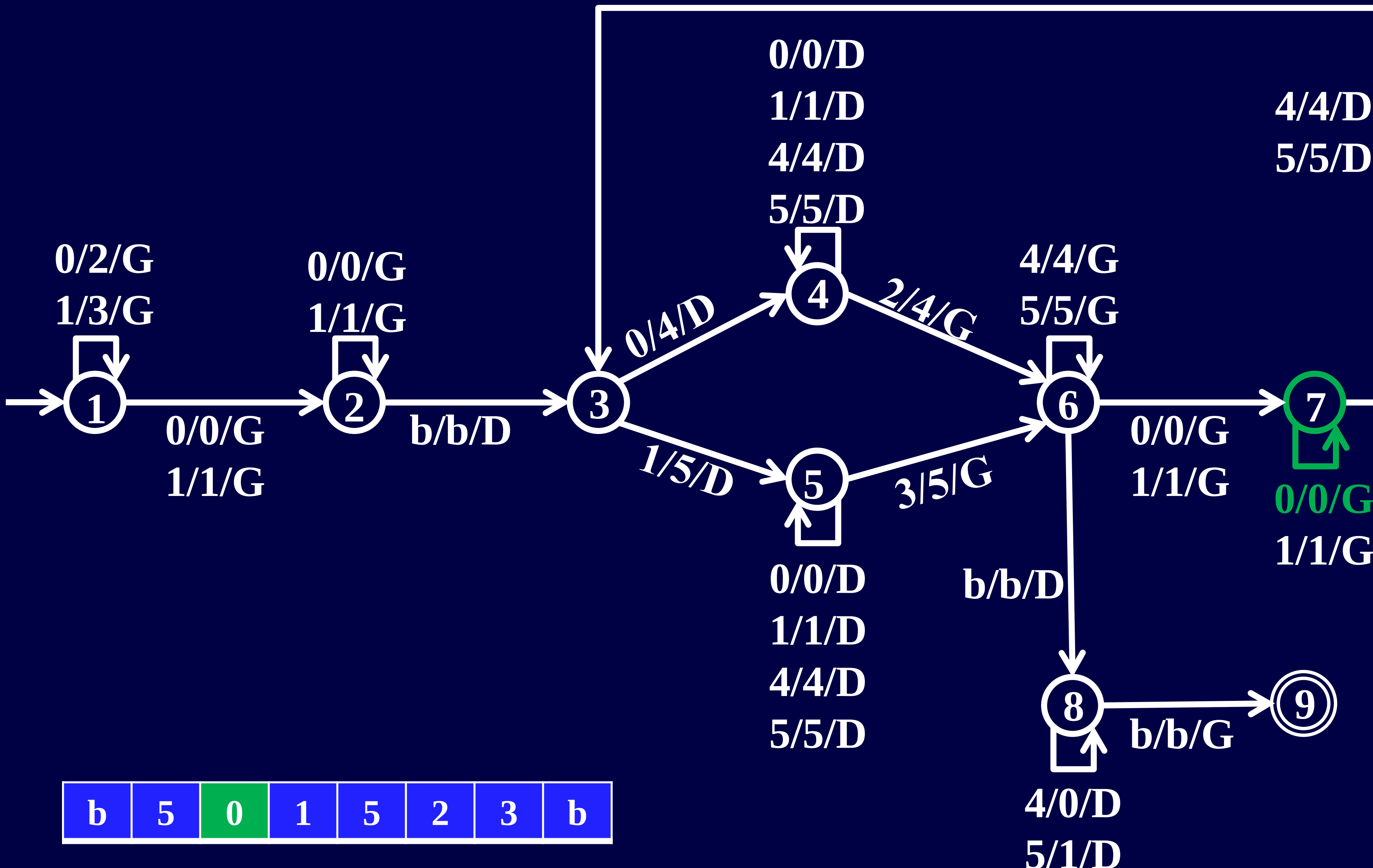
Un exemple de machine non-déterministe



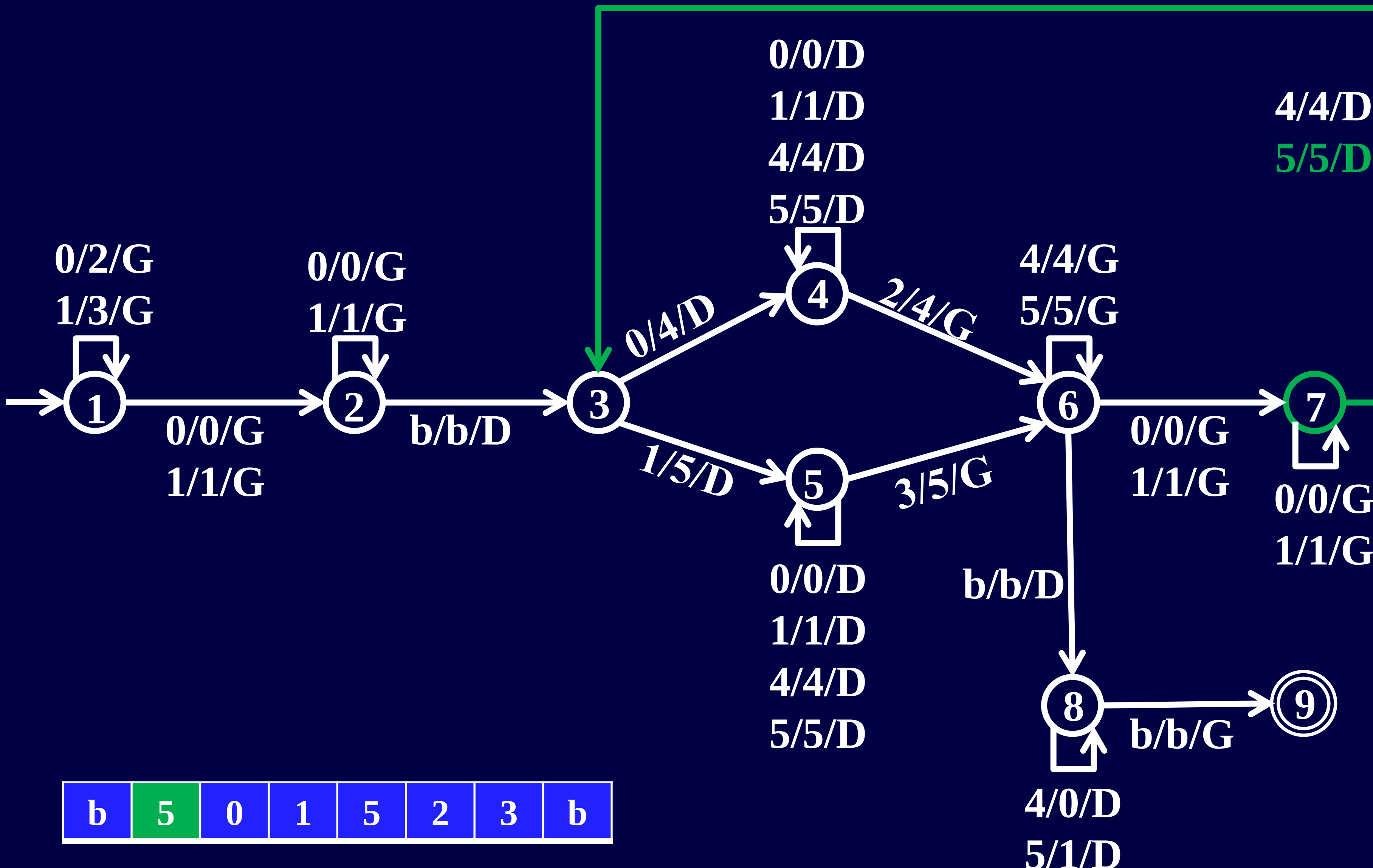
Un exemple de machine non-déterministe



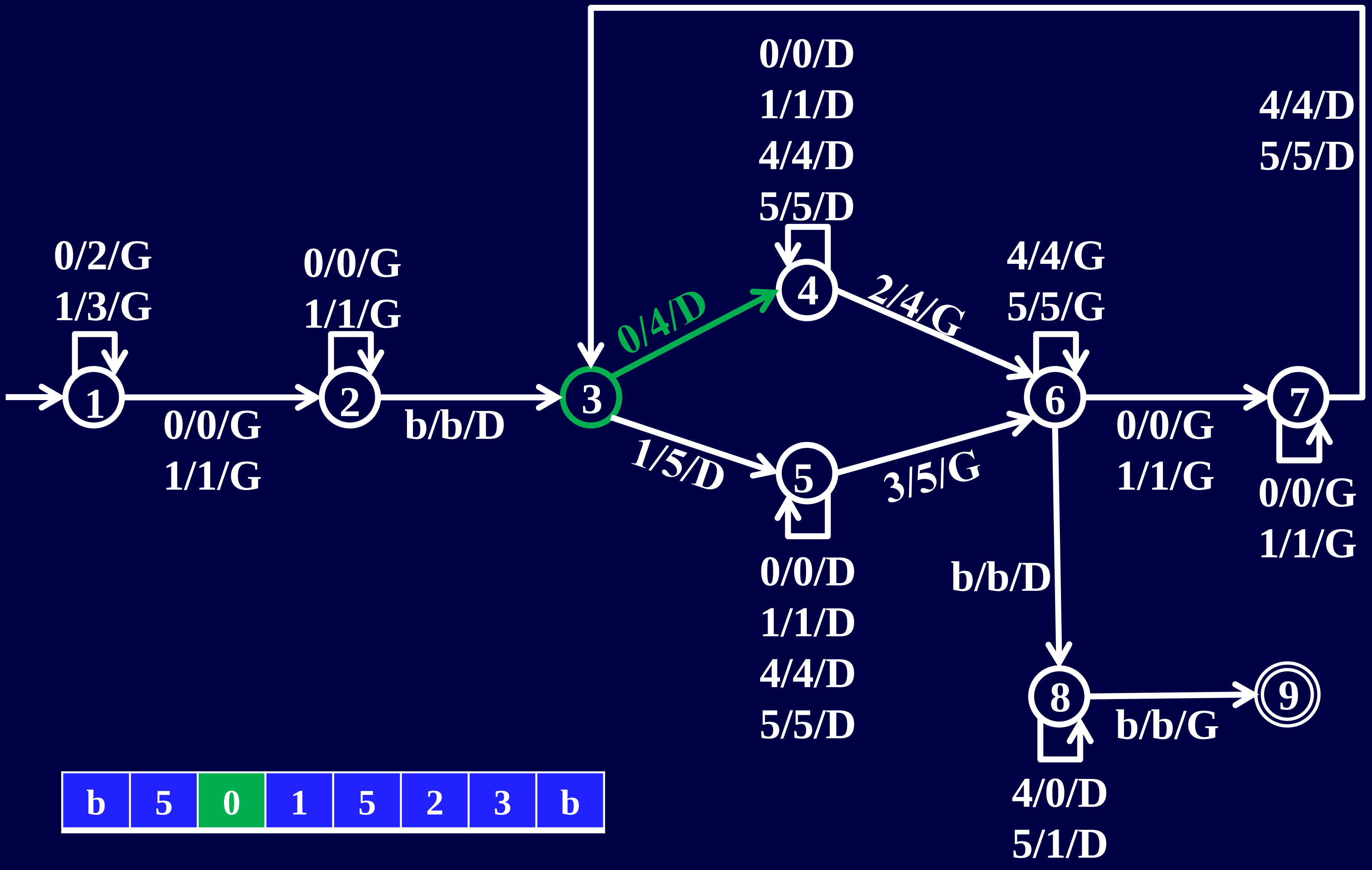
Un exemple de machine non-déterministe



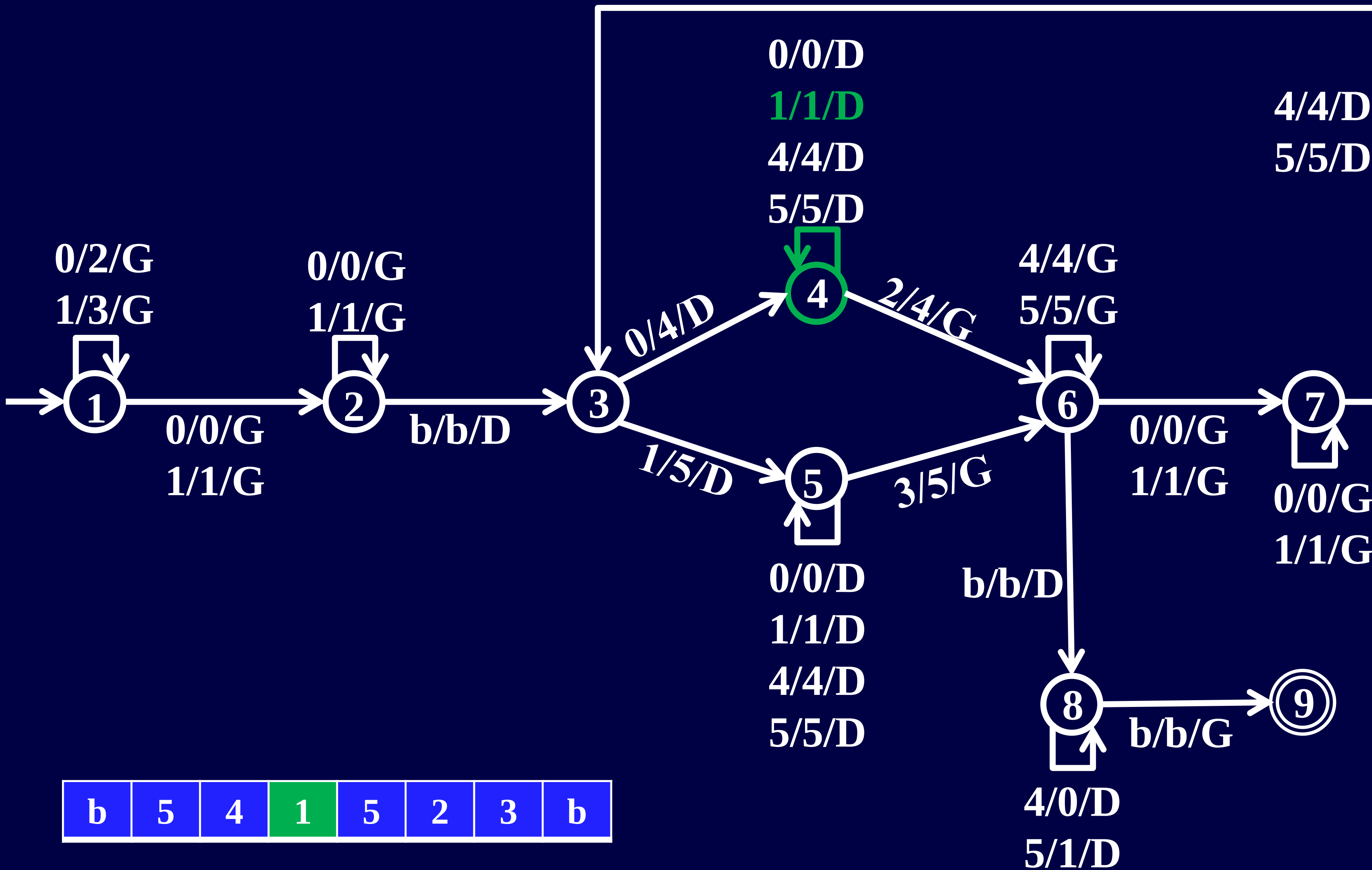
Un exemple de machine non-déterministe



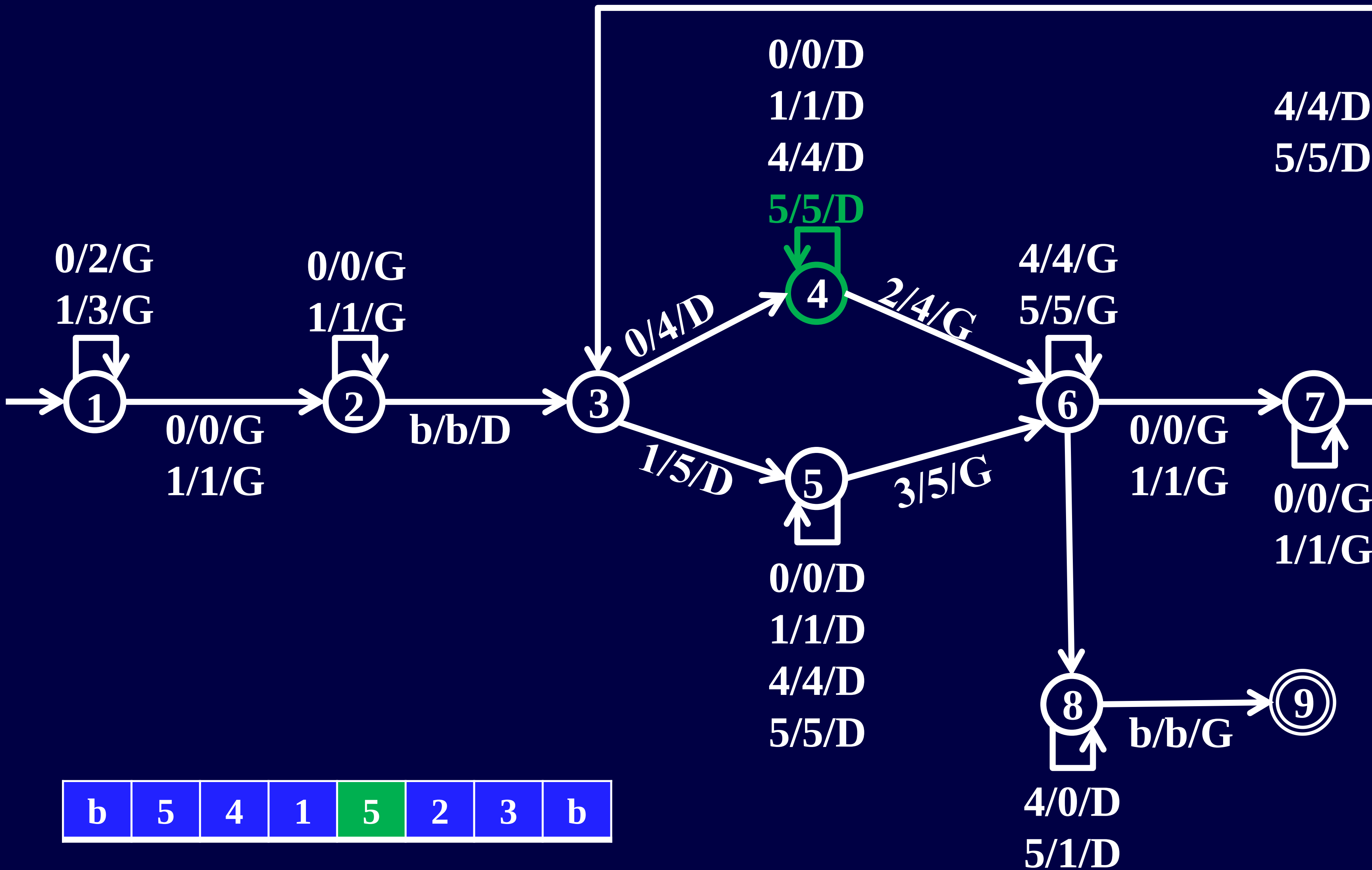
Un exemple de machine non-déterministe



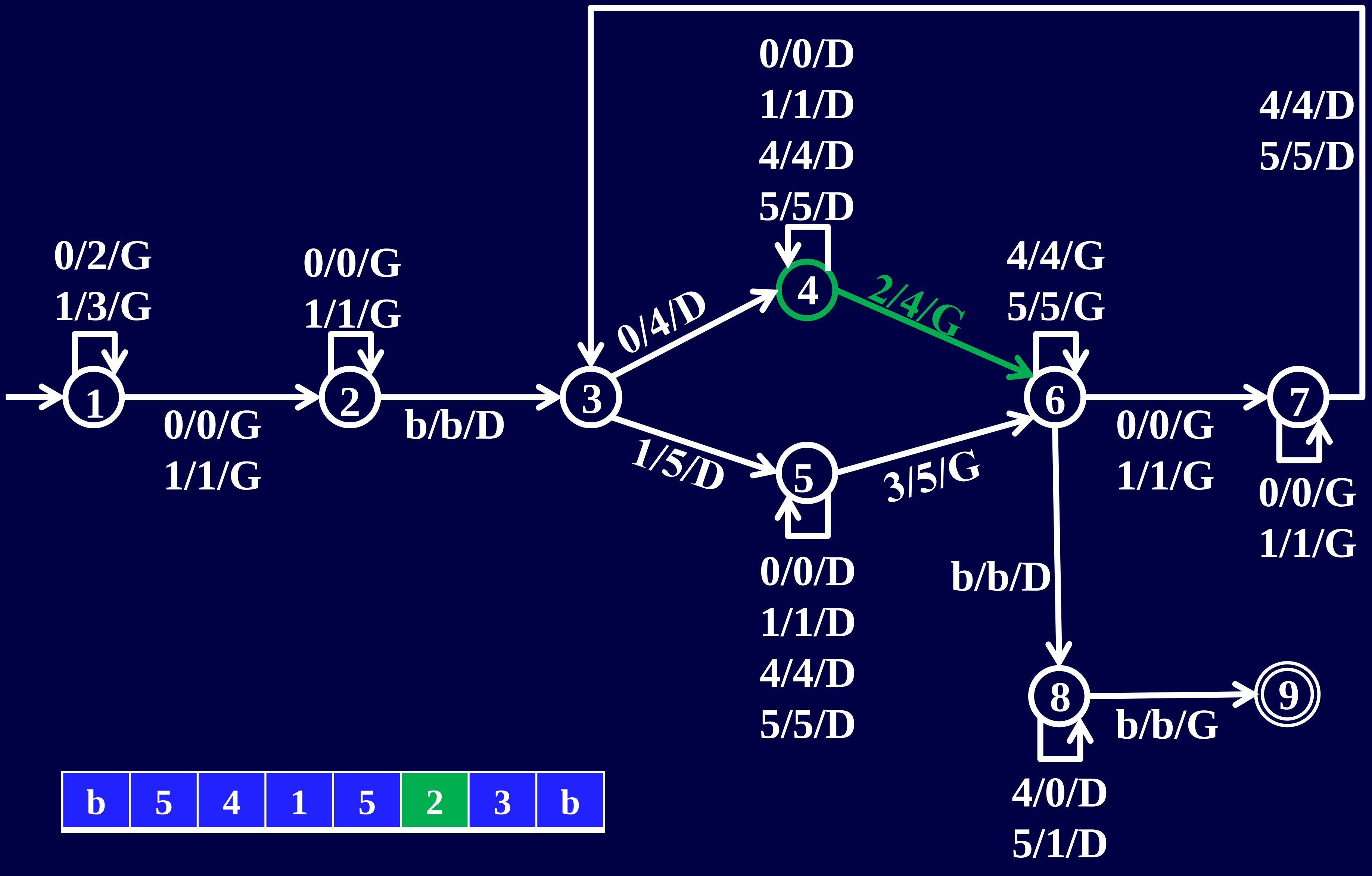
Un exemple de machine non-déterministe



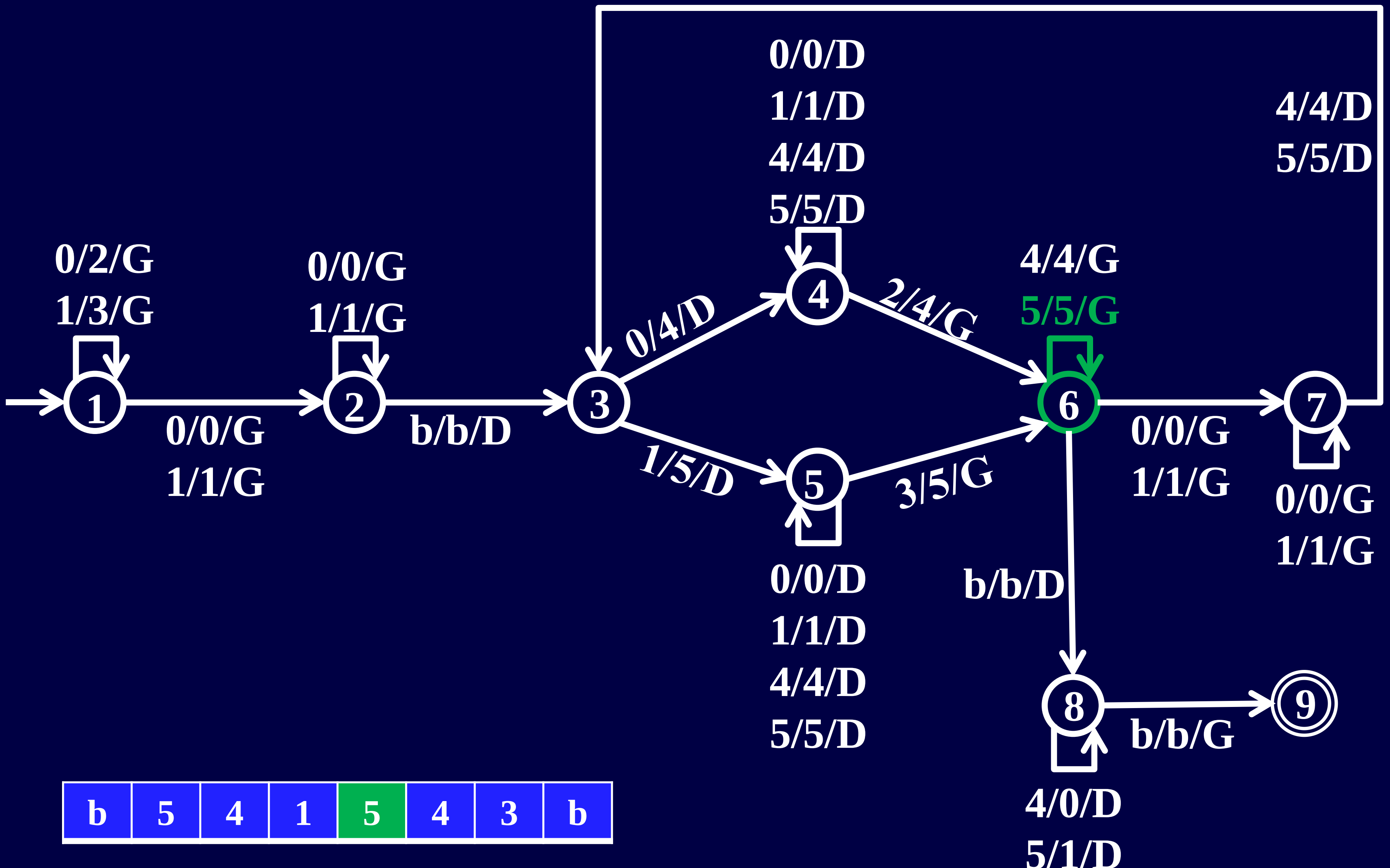
Un exemple de machine non-déterministe



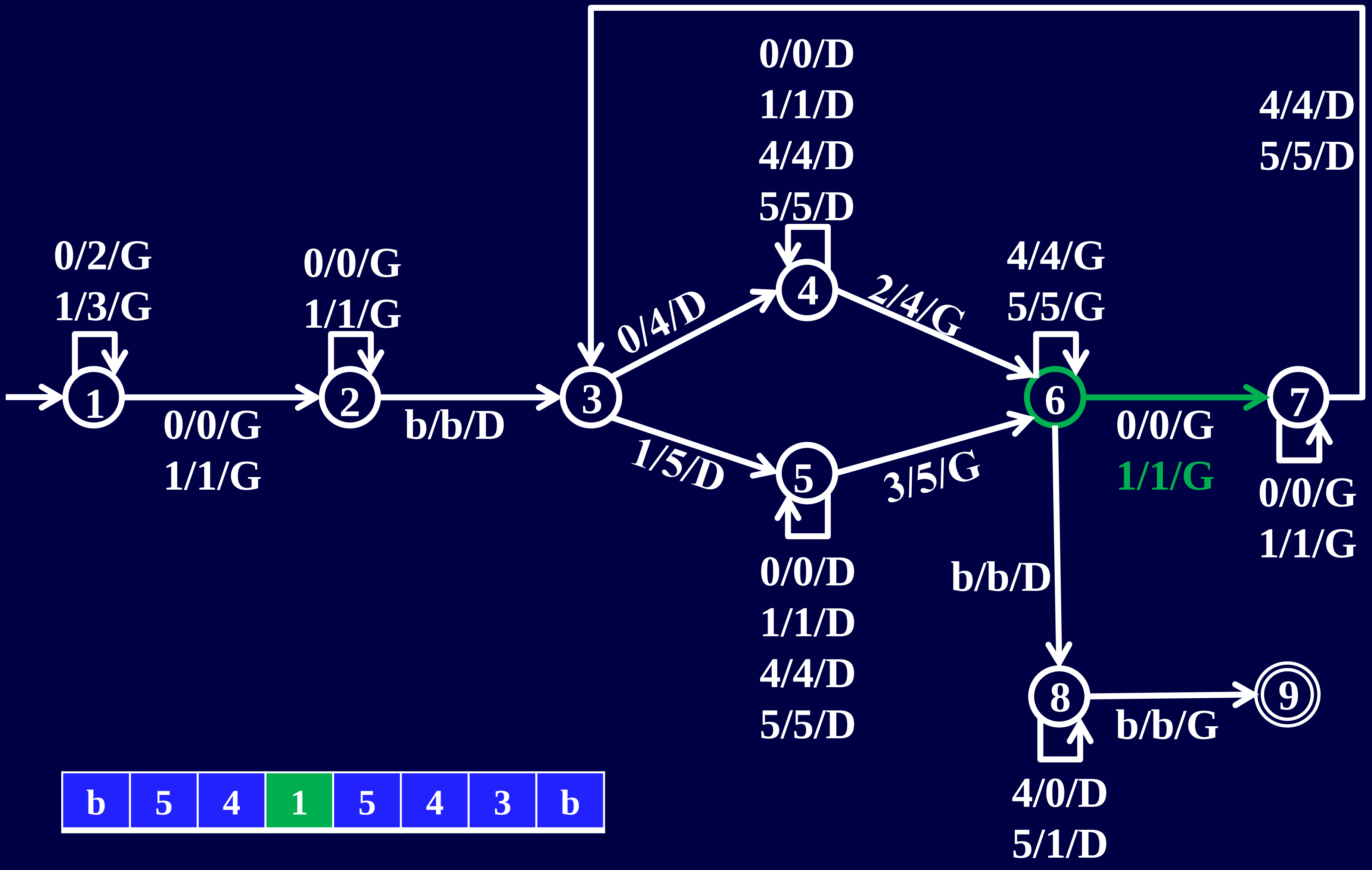
Un exemple de machine non-déterministe



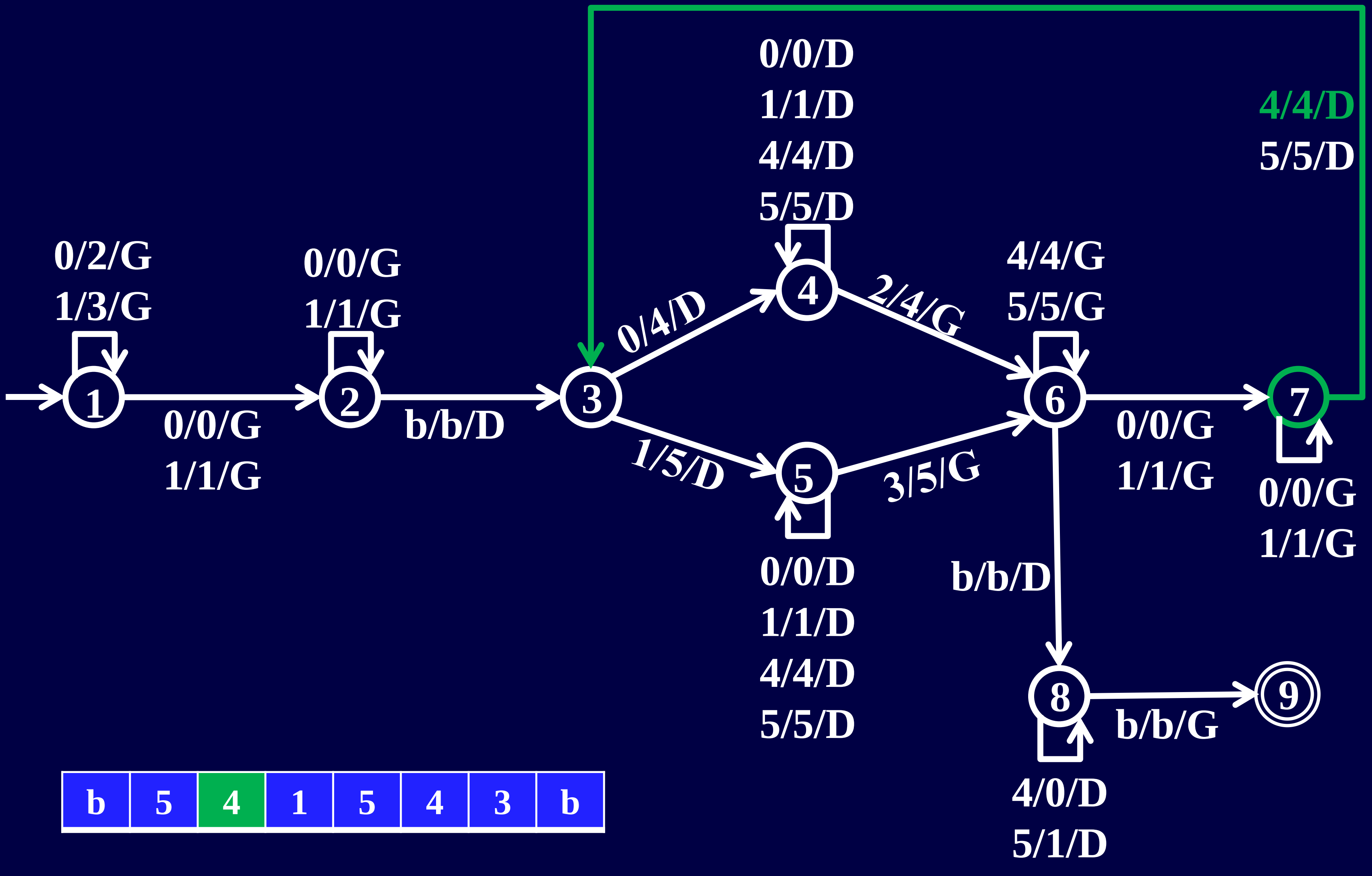
Un exemple de machine non-déterministe



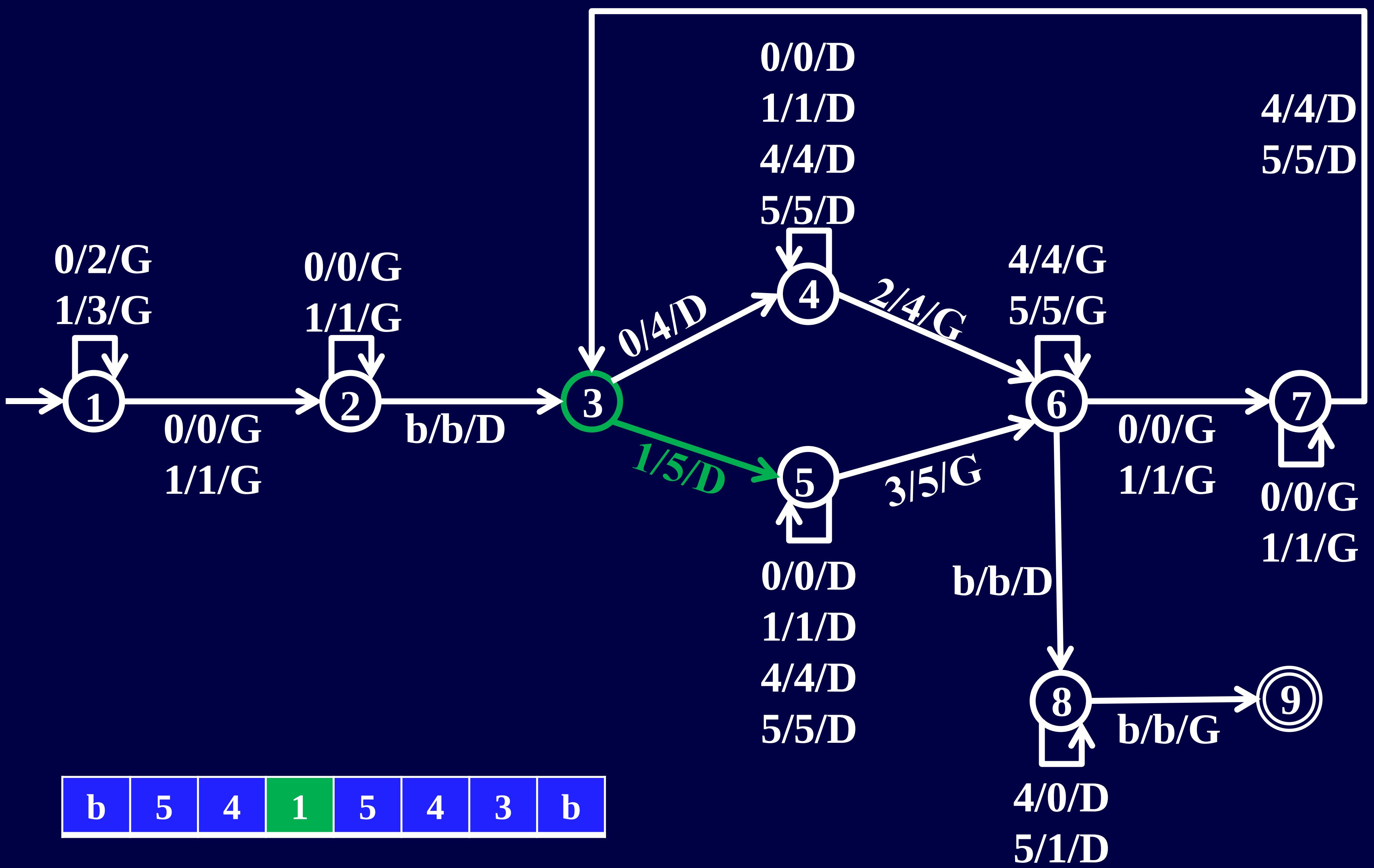
Un exemple de machine non-déterministe



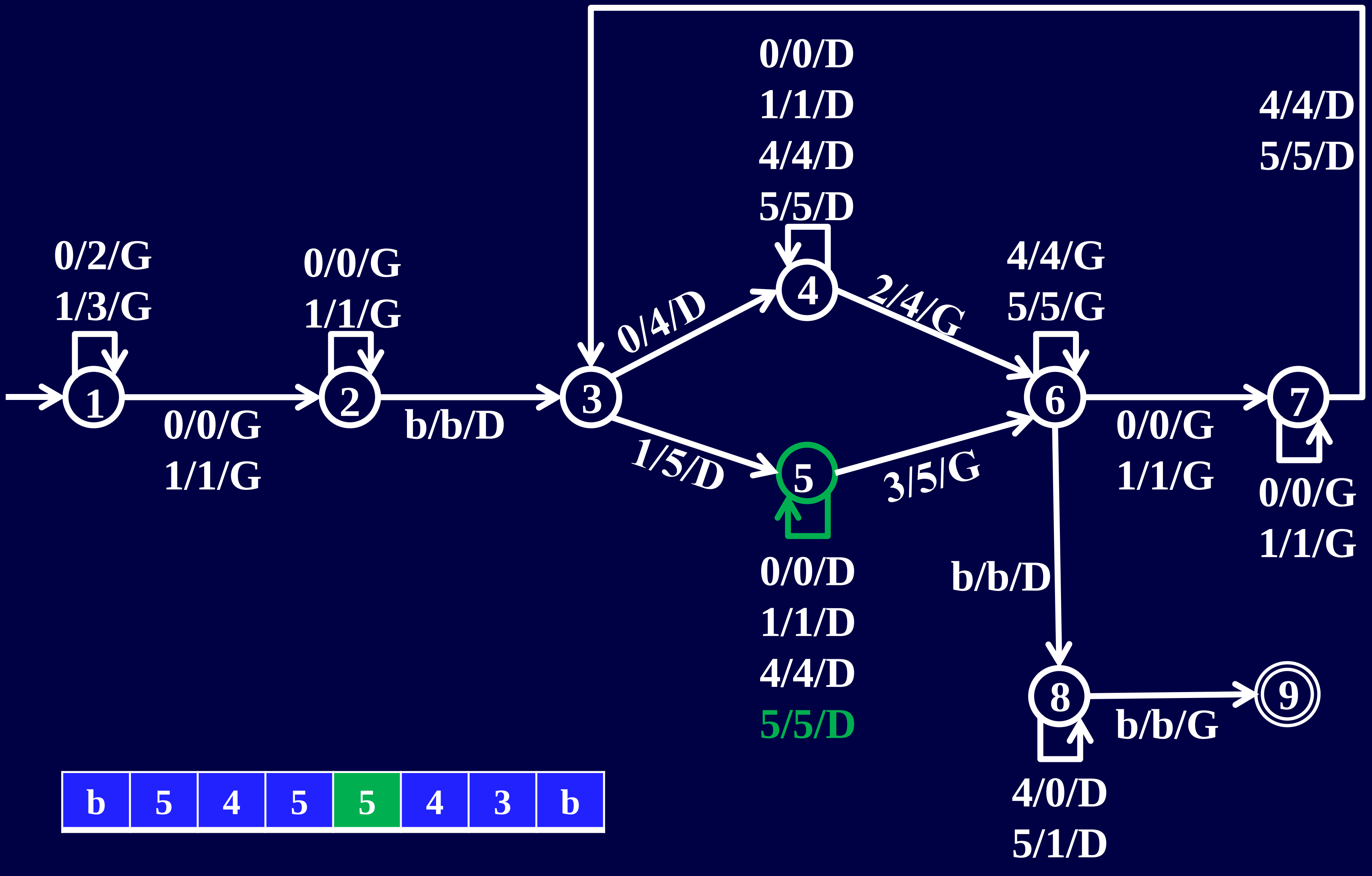
Un exemple de machine non-déterministe



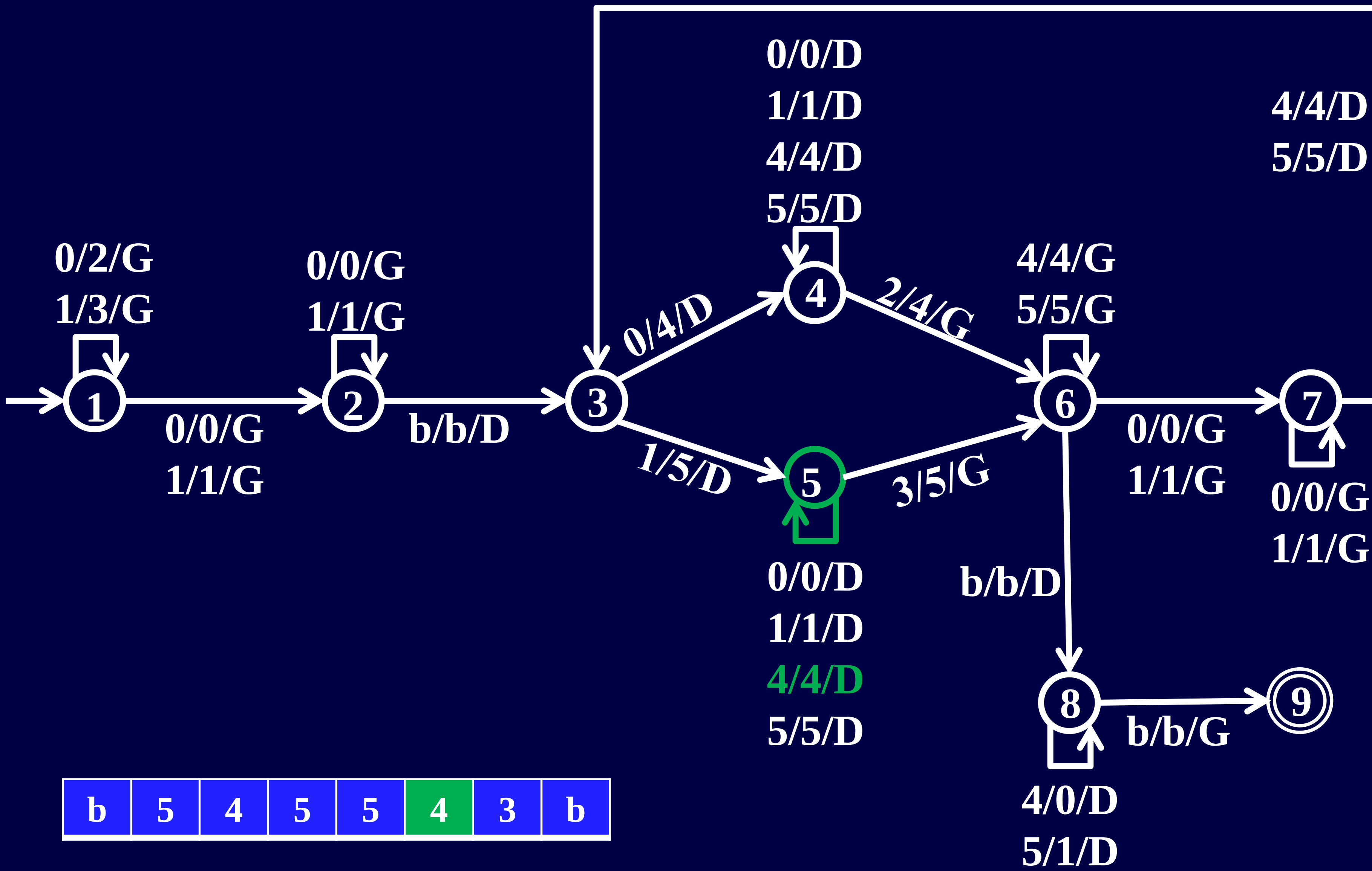
Un exemple de machine non-déterministe



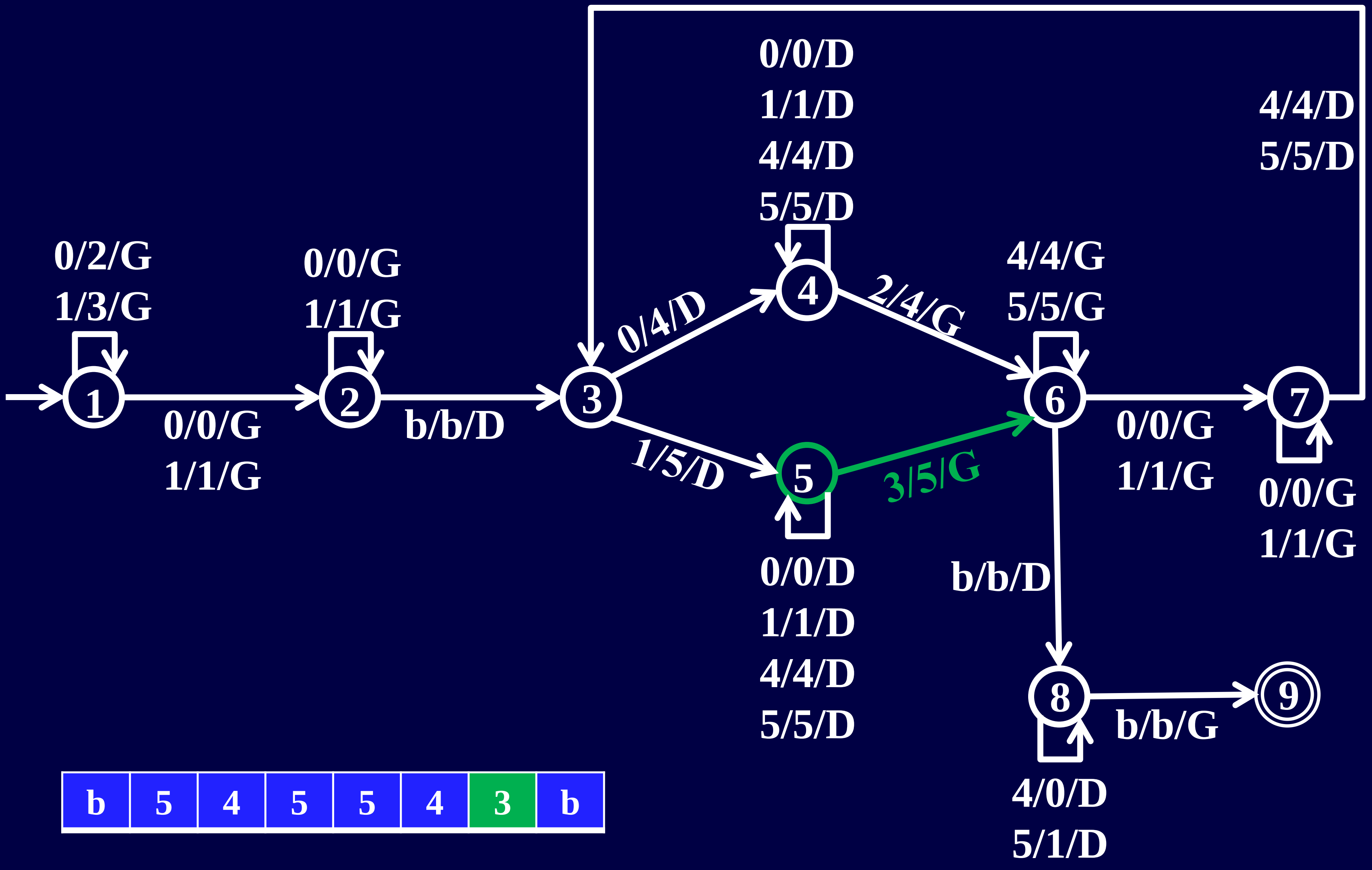
Un exemple de machine non-déterministe



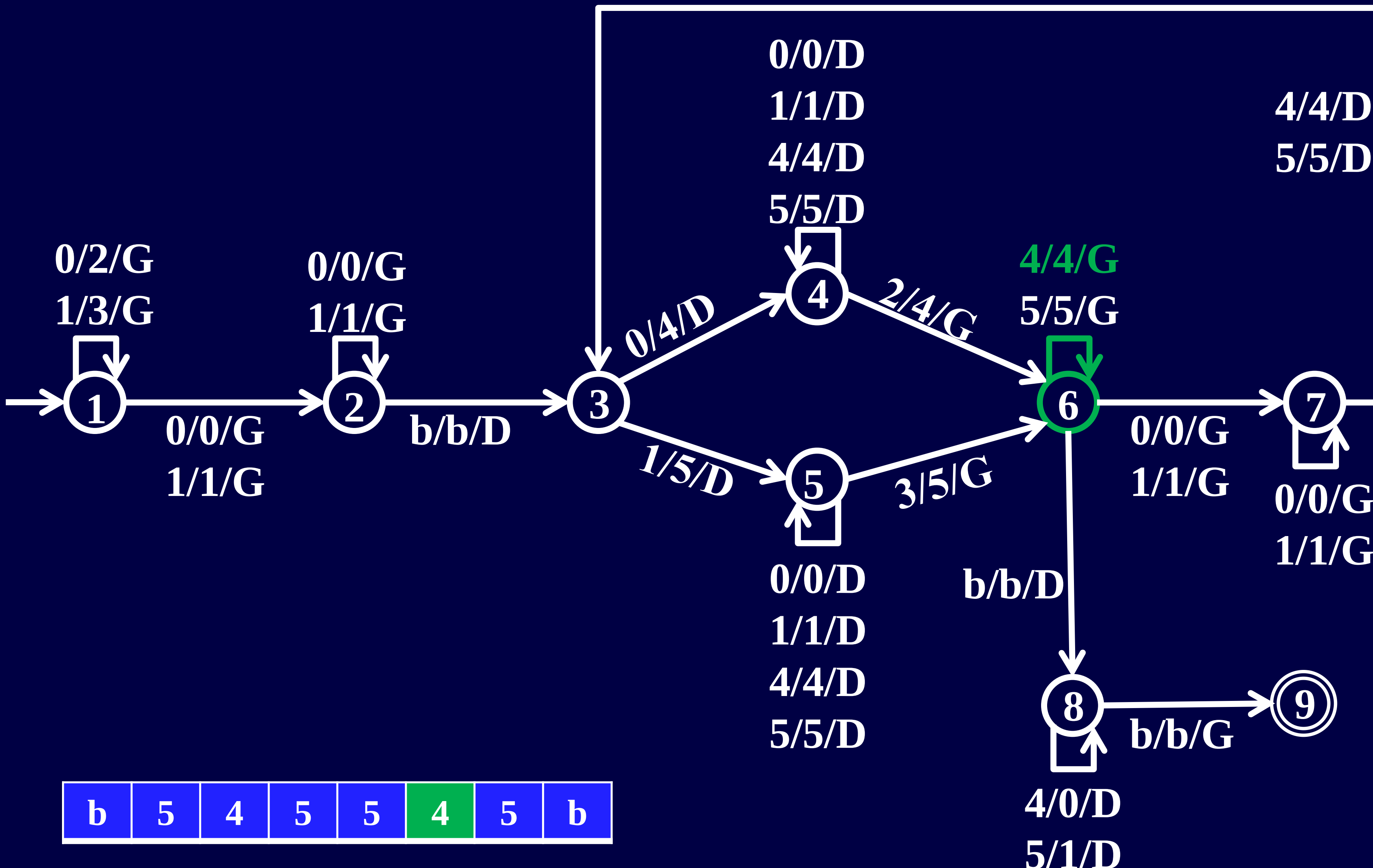
Un exemple de machine non-déterministe



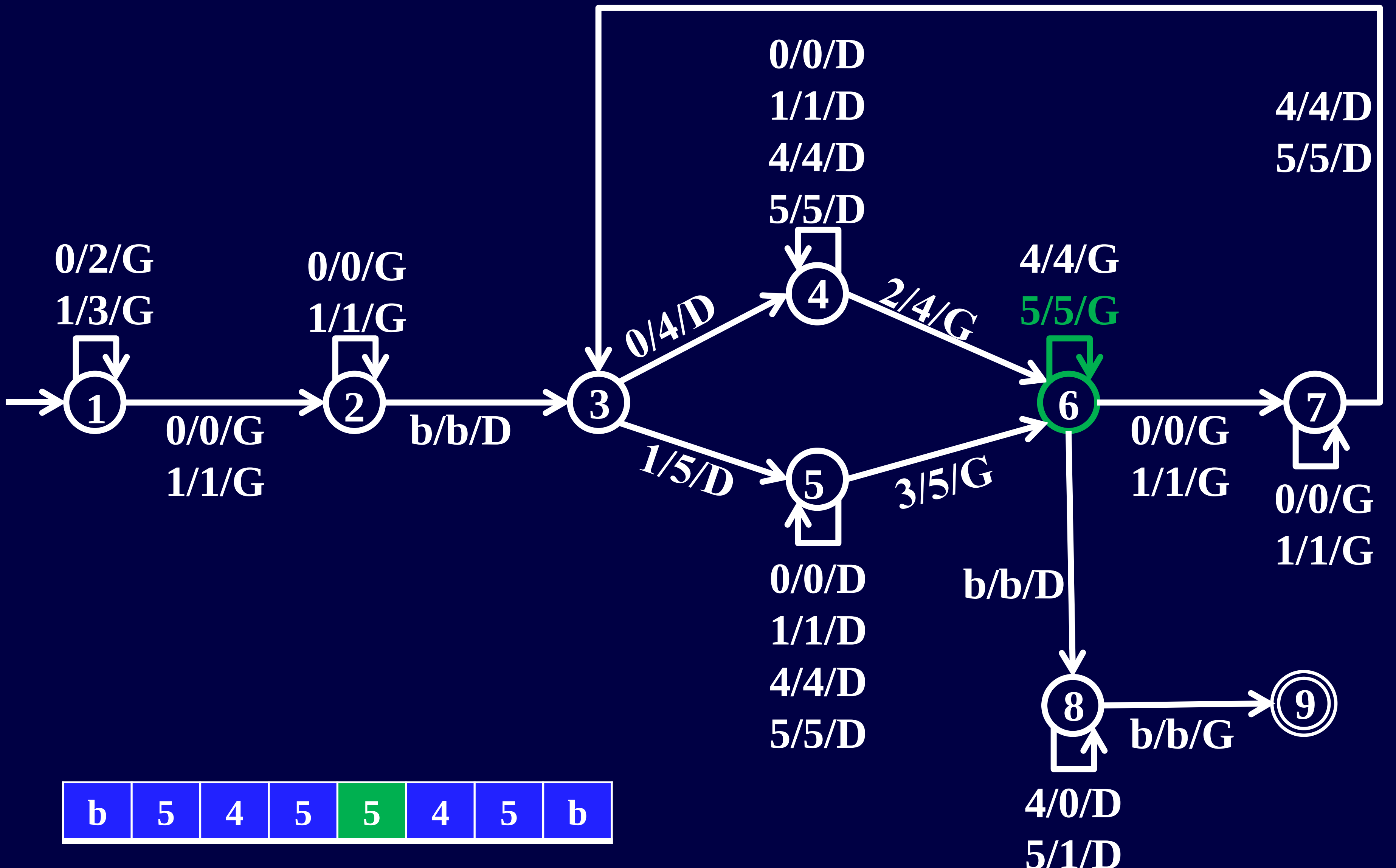
Un exemple de machine non-déterministe



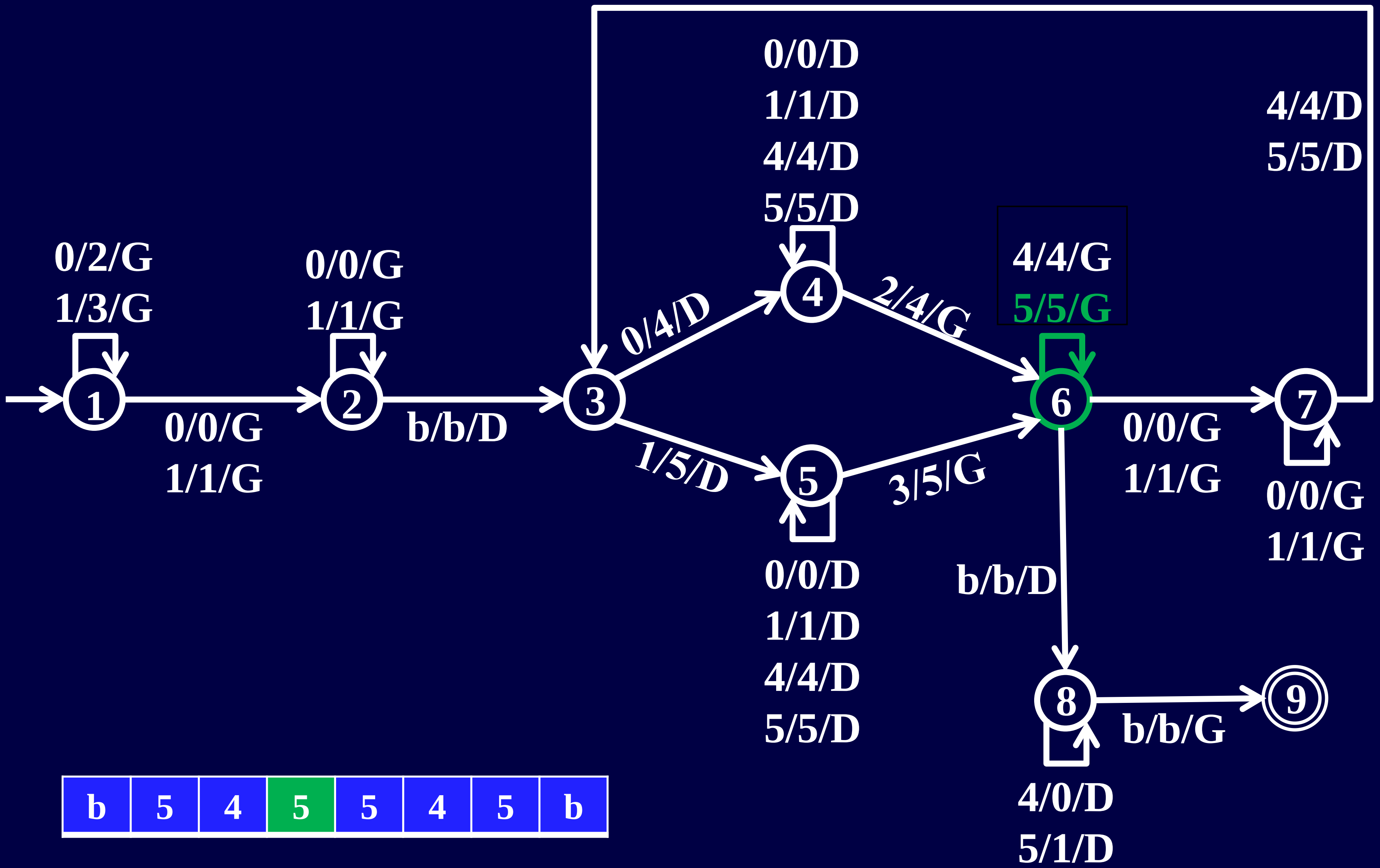
Un exemple de machine non-déterministe



Un exemple de machine non-déterministe

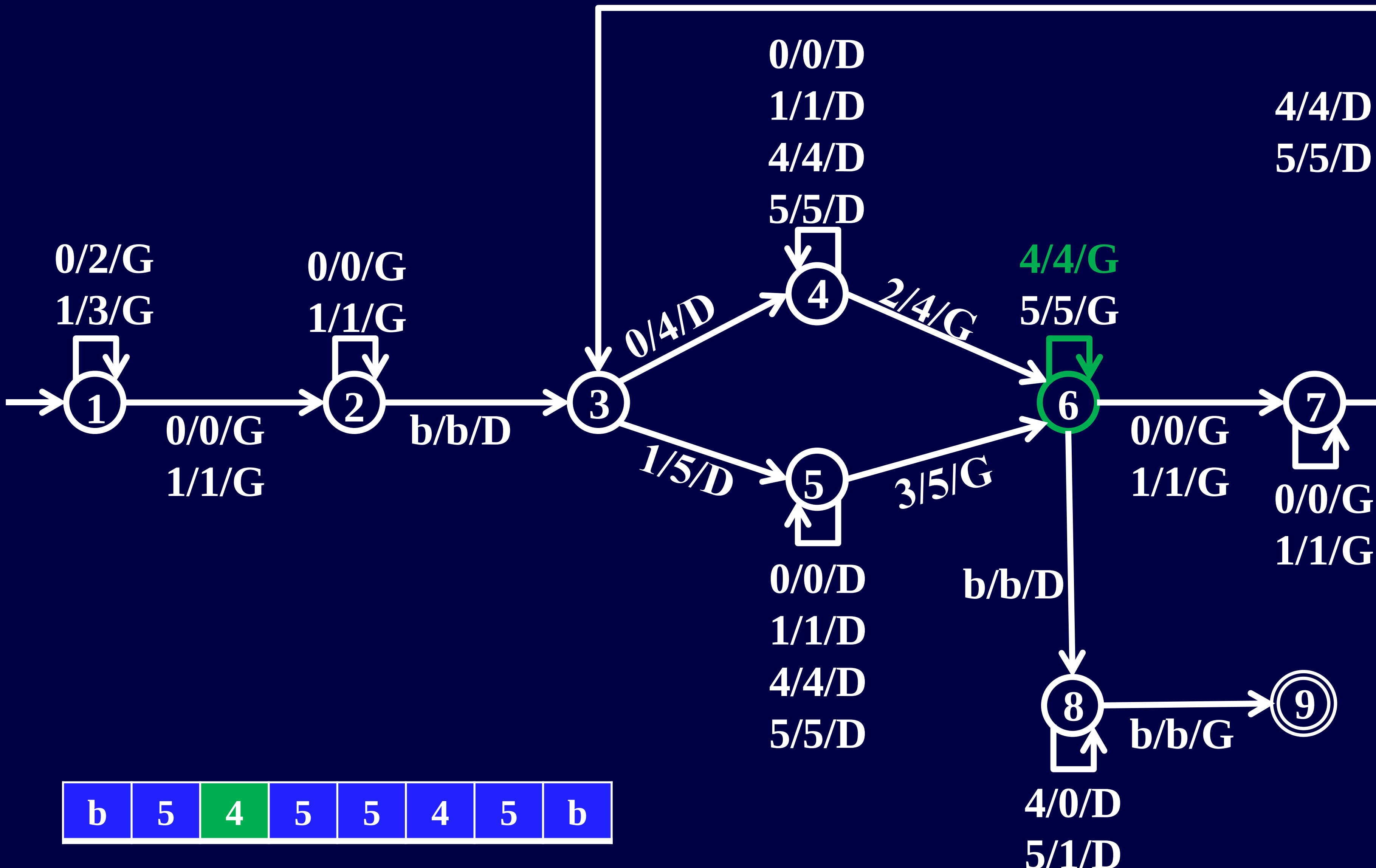


Un exemple de machine non-déterministe



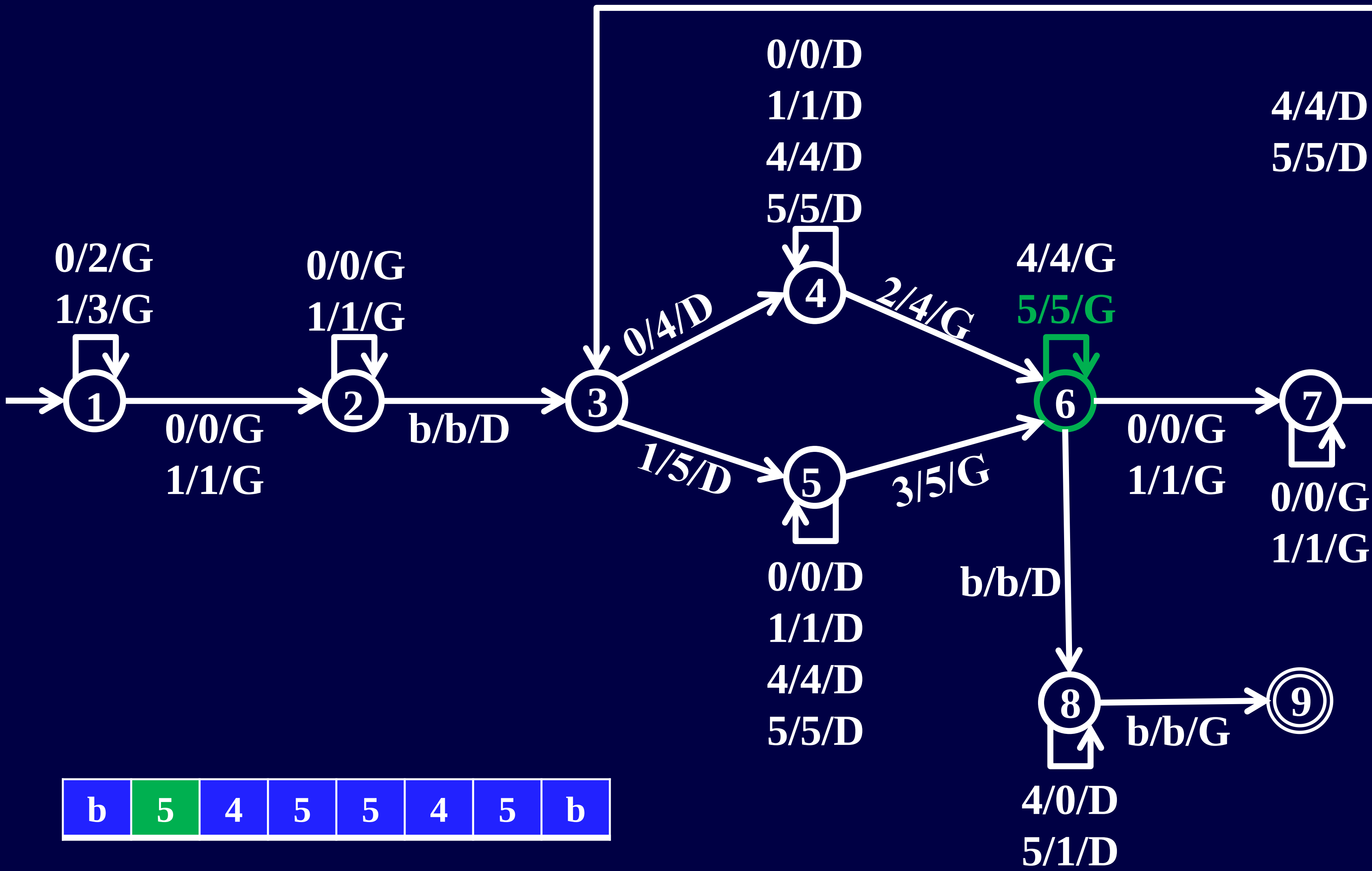
b	5	4	5	5	4	5	b

Un exemple de machine non-déterministe



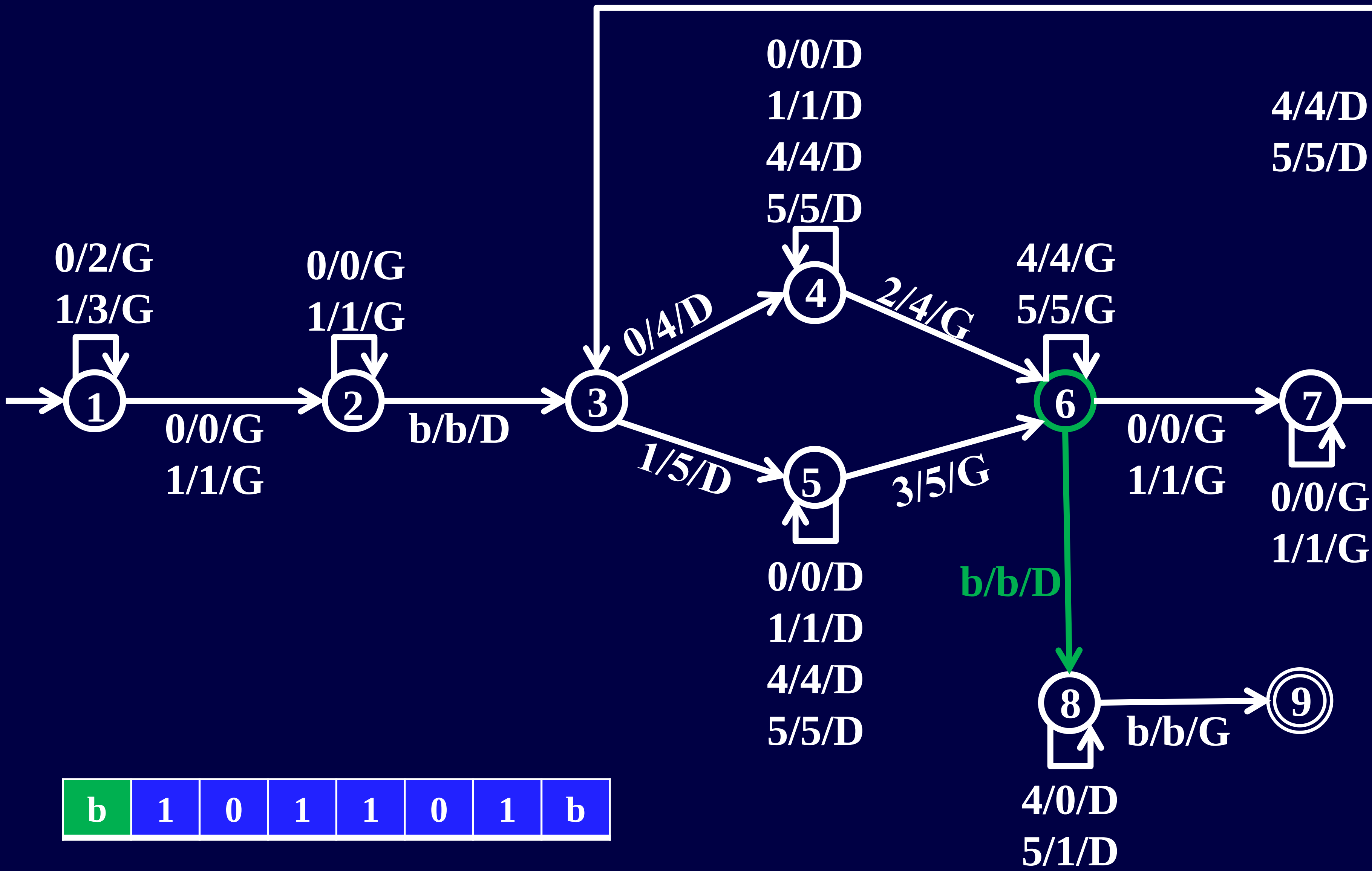
b	5	4	5	5	4	5	b

Un exemple de machine non-déterministe

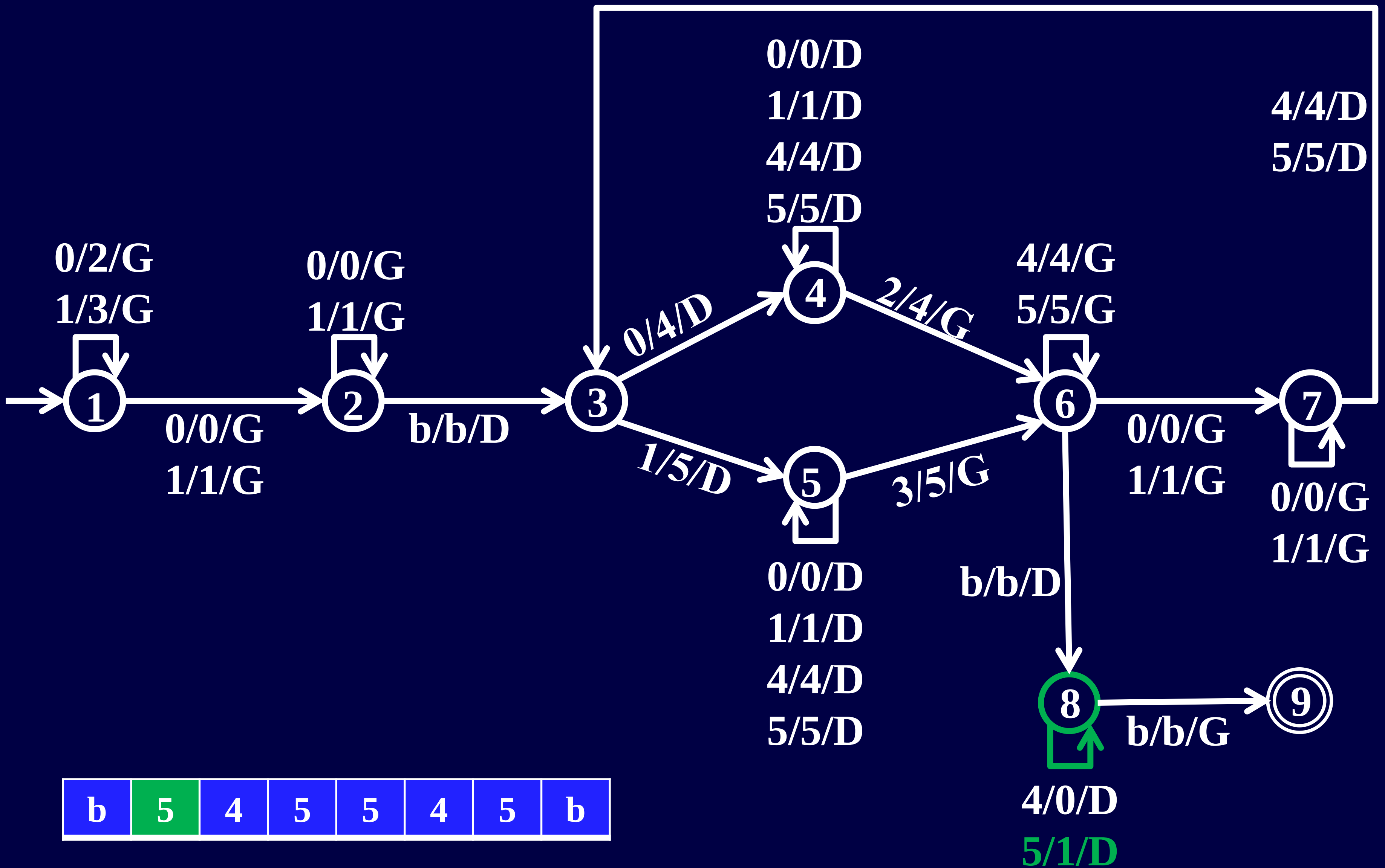


b	5	4	5	5	4	5	b

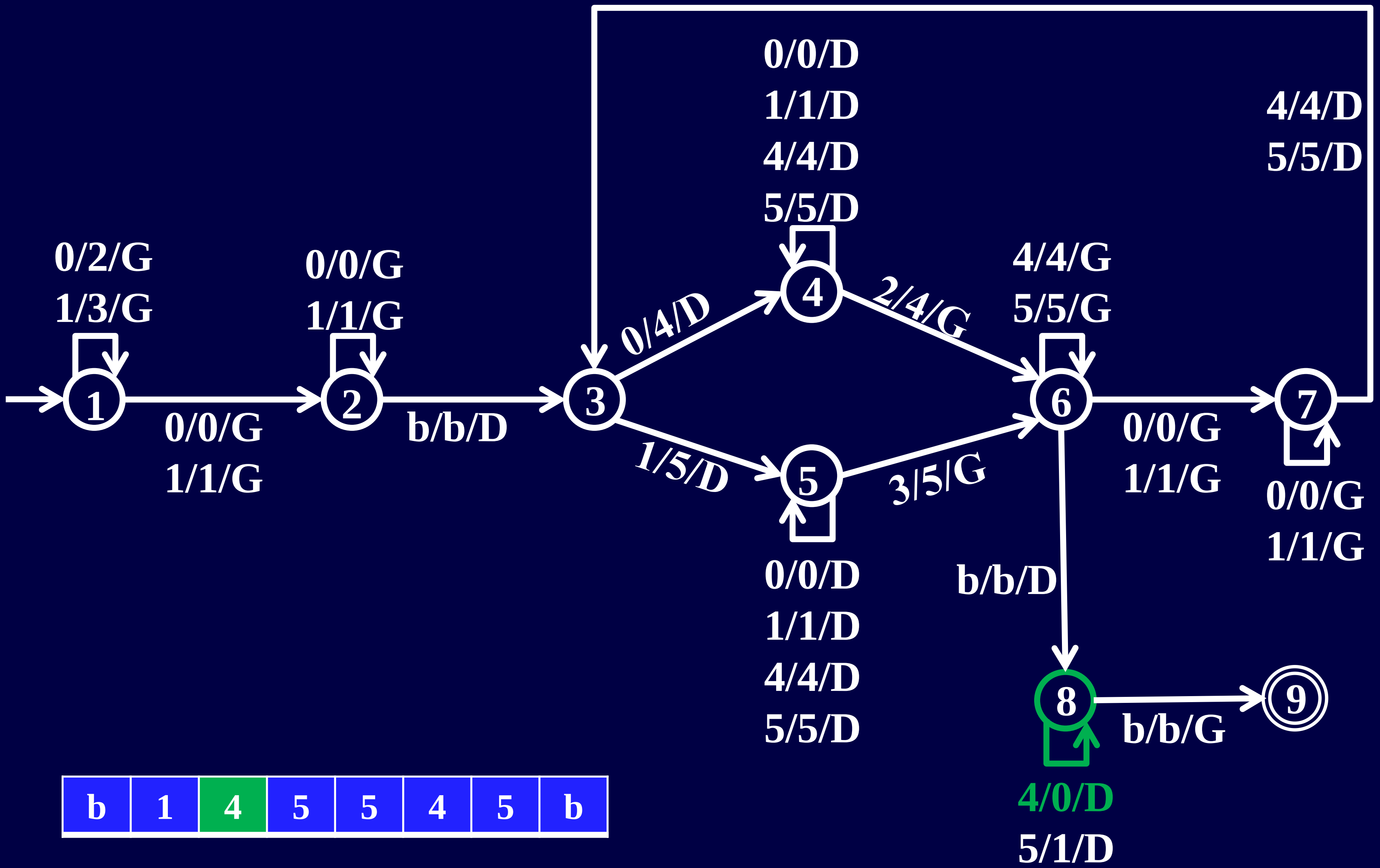
Un exemple de machine non-déterministe



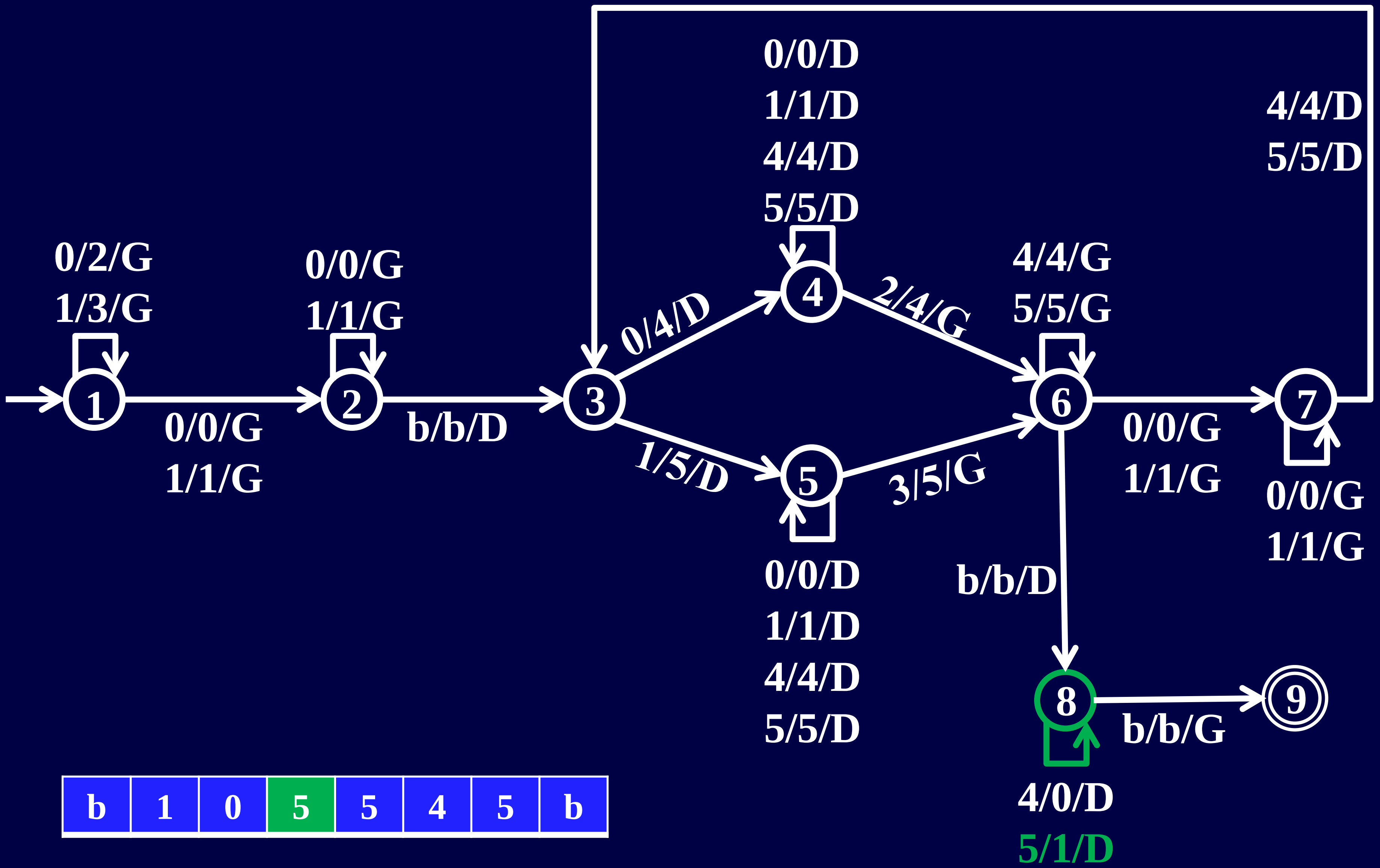
Un exemple de machine non-déterministe



Un exemple de machine non-déterministe

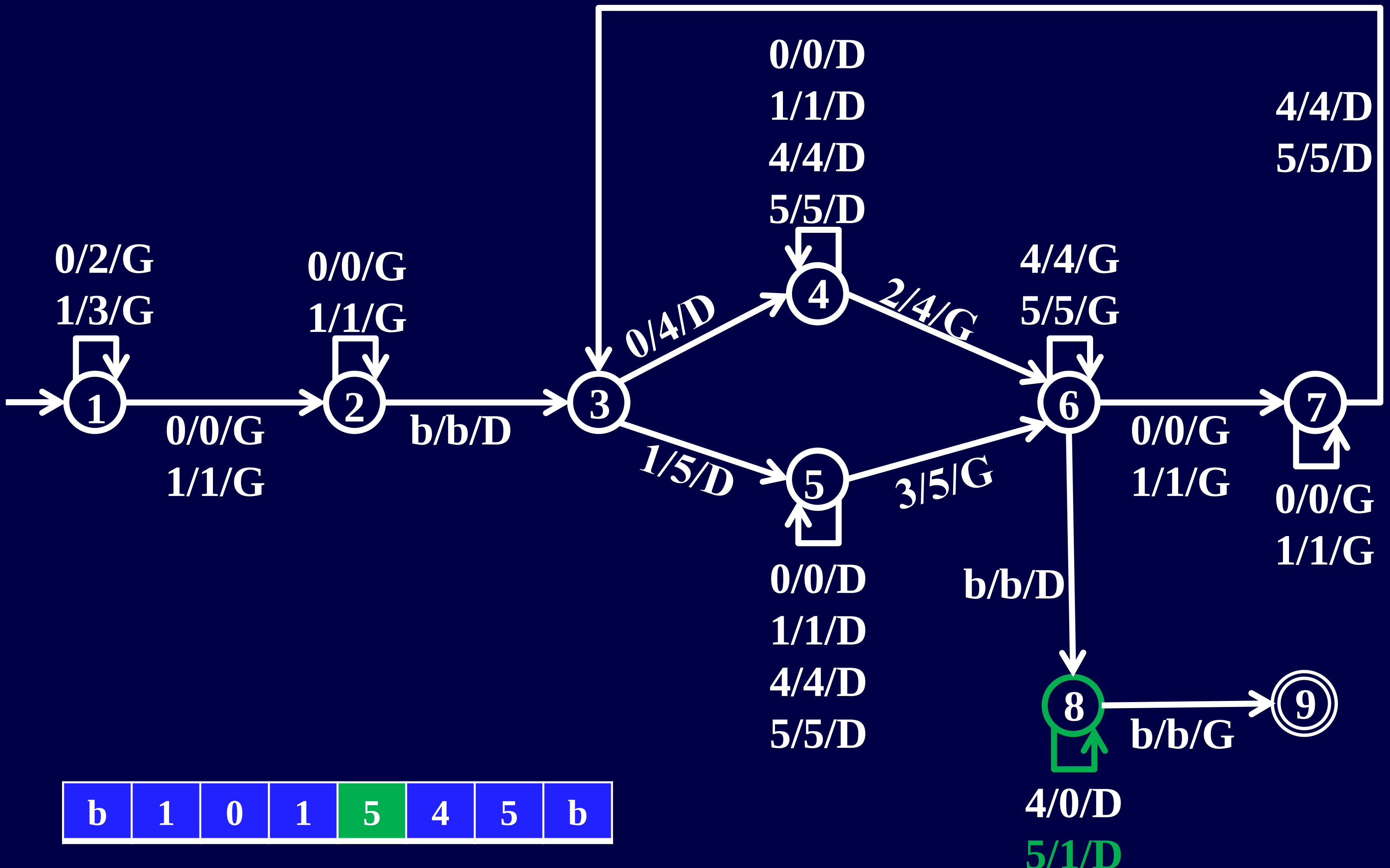


Un exemple de machine non-déterministe

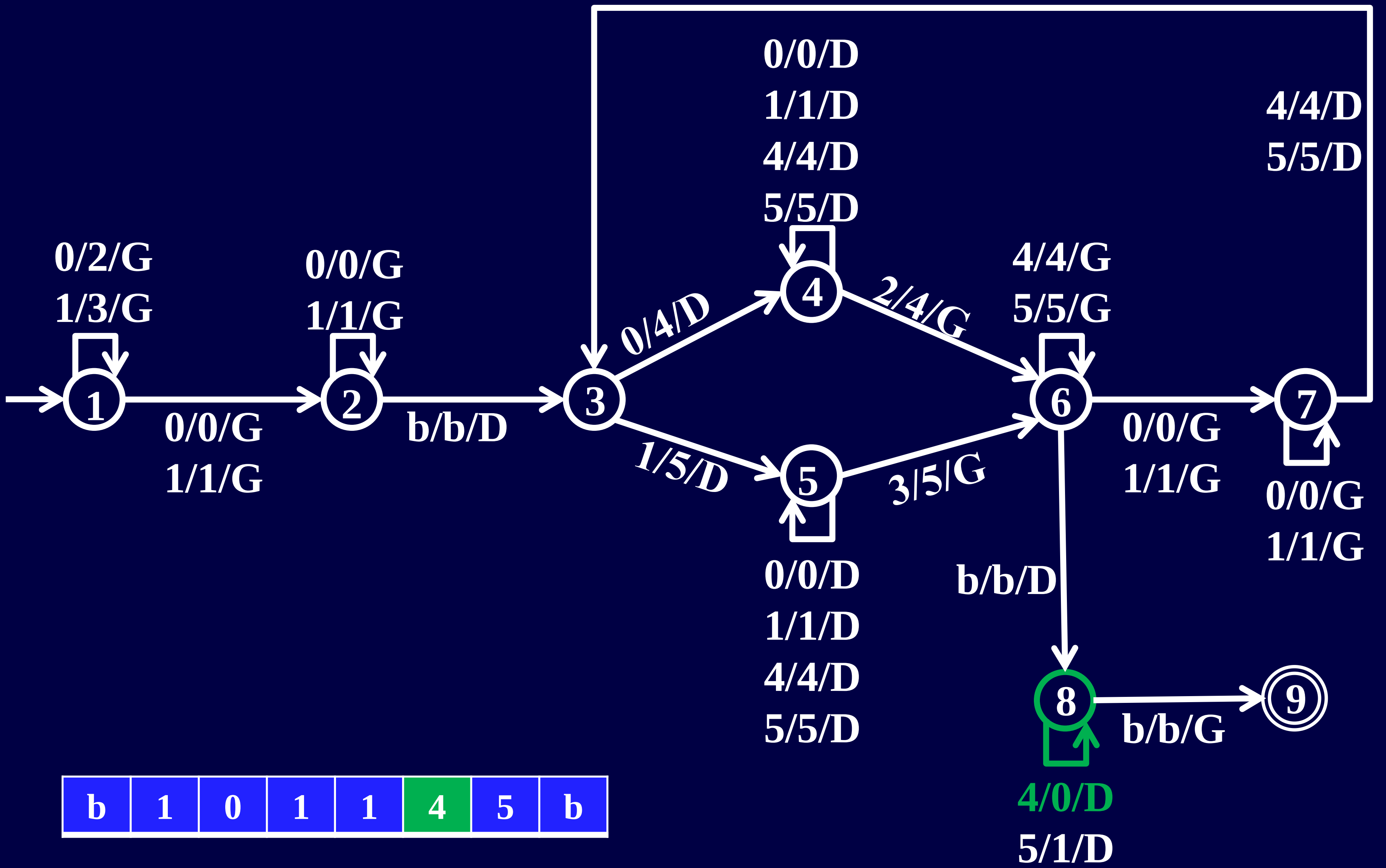


b	1	0	5	5	4	5	b

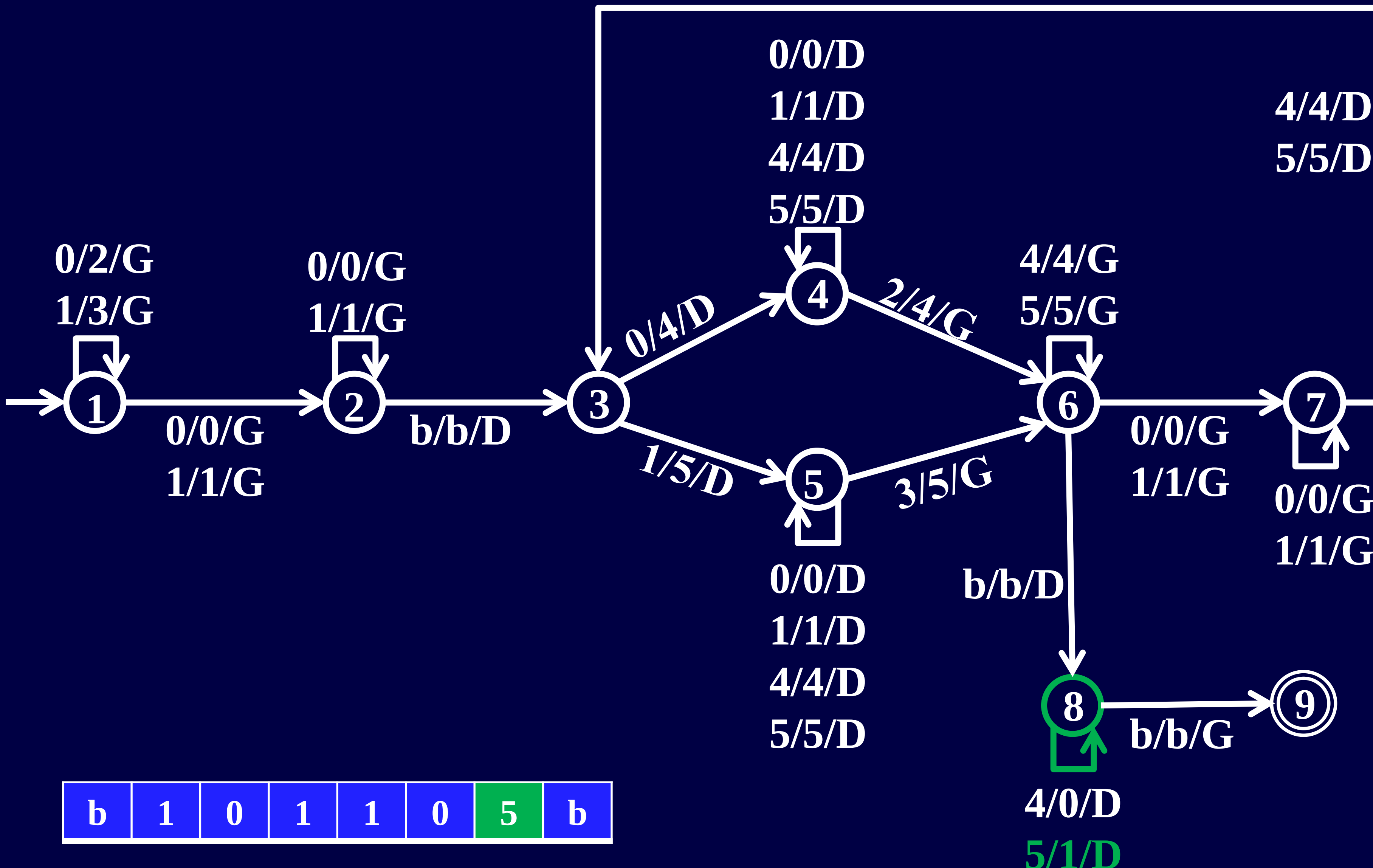
Un exemple de machine non-déterministe



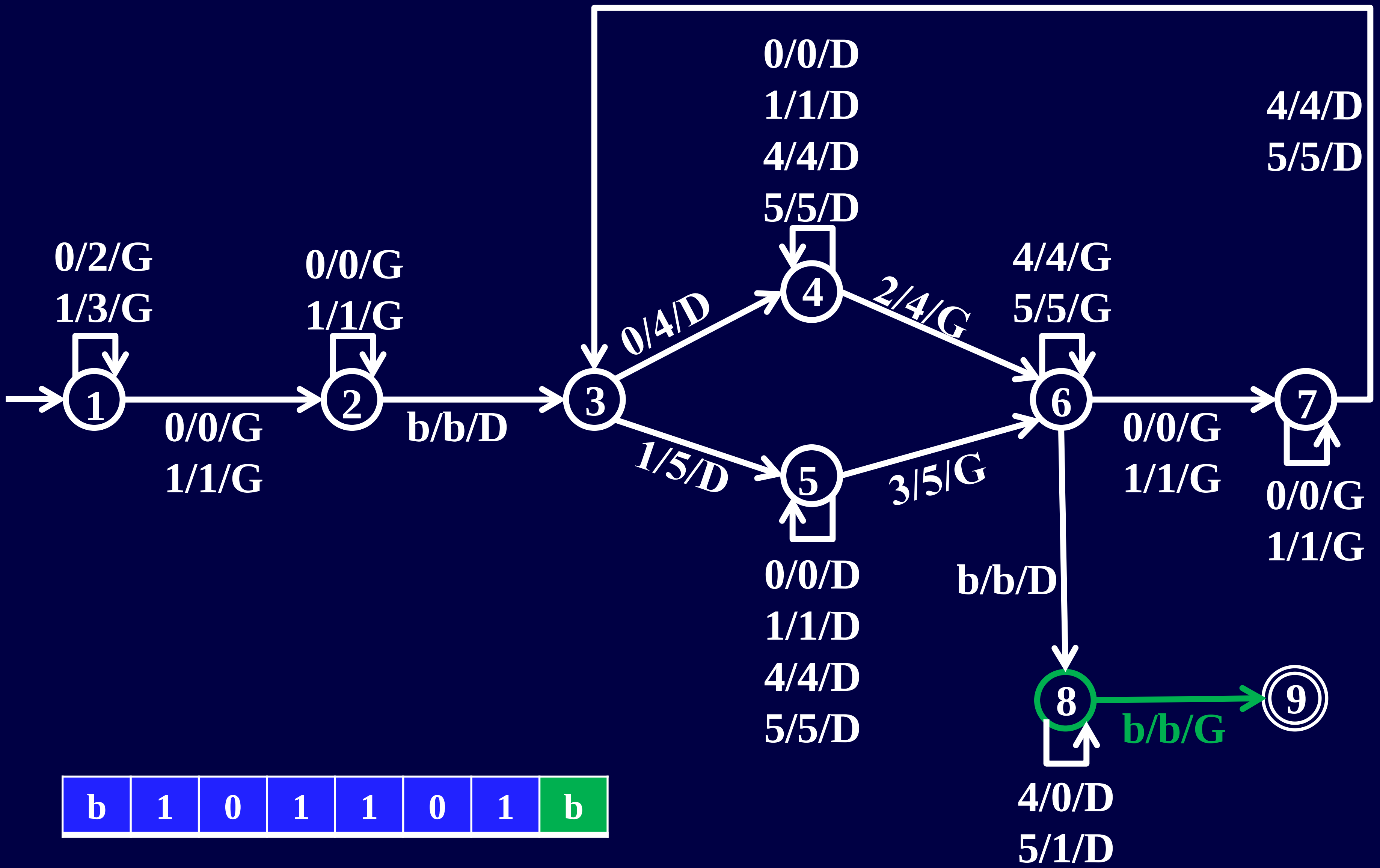
Un exemple de machine non-déterministe



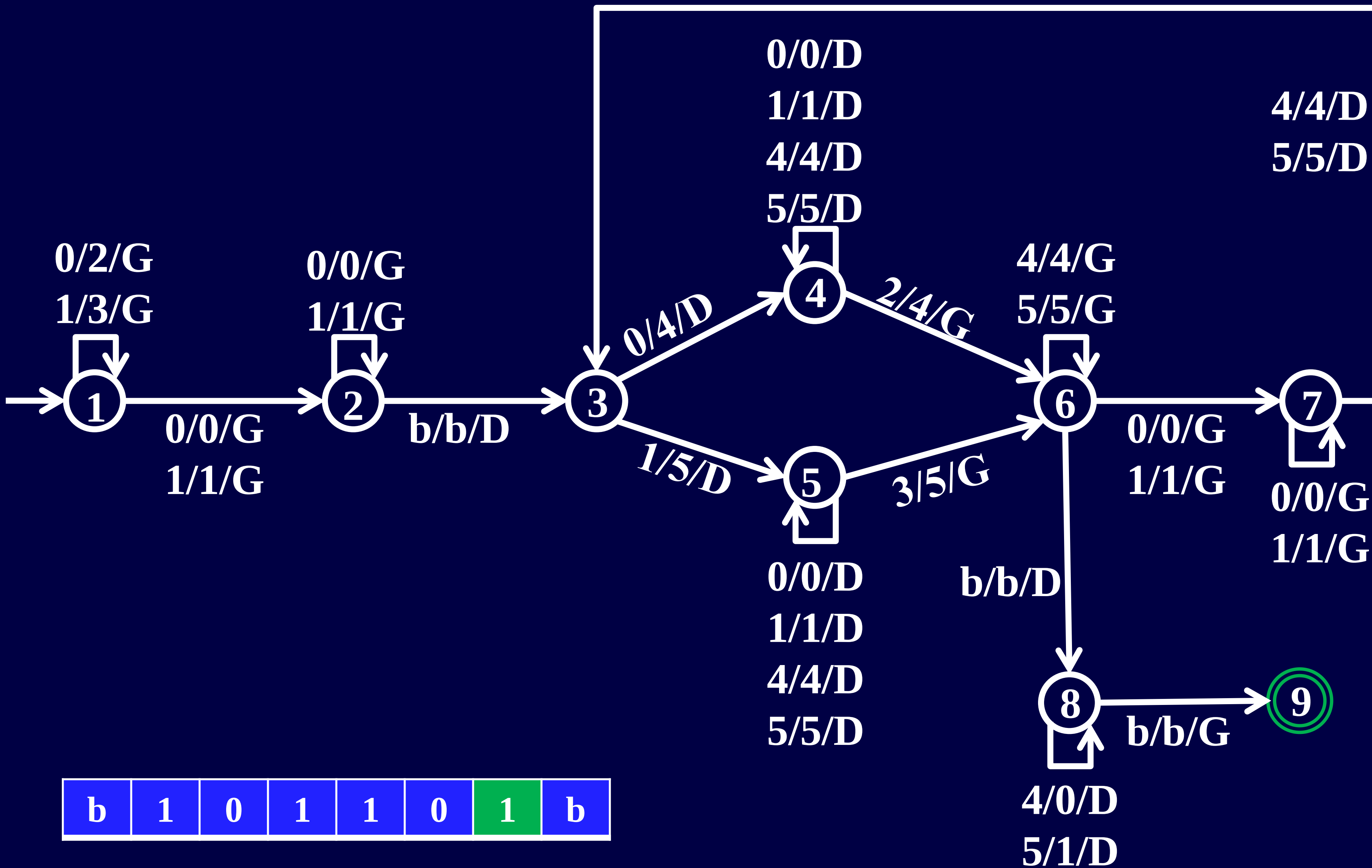
Un exemple de machine non-déterministe



Un exemple de machine non-déterministe



Un exemple de machine non-déterministe



Terminé par acceptation

Le déterminisme

Théorème :

Si le langage L est accepté par une machine de Turing non-déterministe T à une bande, alors il existe une machine de Turing déterministe T′ à 3 bandes pour accepter L.

Preuve

- Il faut simuler le non-déterminisme.

- générer dans un ordre fixé à l′avance tous les choix possibles, jusqu′à ce qu′on arrive à l′état d′acceptation.

Parcours de l'arborescence qui comporte tous les choix.

- parcours en profondeur ne peut pas être retenue, à cause des choix qui font «boucler» la machine.
- un parcours en largeur peut être utilisé.

La machine à 3 bandes

bande 1	#	#	d	o	n	é	e	s	x	x	x	#	#
bande 2	#	#	#	#	#	#	#	#	#	#	0	#	#
bande 3	#	#	s	a	u	v	e	g	a	r	d	e	#

Première essai : terminaison au bout d'une seule transition …

- l′impossibilité de revenir en arrière.
- La simulation d′un parcours en largeur dans ces conditions devient une suite de parcours partiels, de la racine vers les différents sommets, dans l′ordre qui correspond à l′ordre d′un parcours en largeur.
- Ainsi, si on note les suites de choix retenus, on obtient des mots rangés selon l′ordre lexicographique.

La simulation se déroule comme suit : Supposons que la machine T ait au maximum *r* choix. Le fonctionnement de la machine T′ est comme suit :

- On génère un mot de $\{0,1,2,\ldots,r-1\}^*$ sur la bande 2.
- On recopie les données de la bande 3 sur la bande 1.
- On exécute le programme de T en travaillant sur la bande 1, en prenant comme choix celui indiqué par le bit correspondant sur la bande 2 (sur laquelle on avance). Si on arrive à un état d′acceptation on arrête, sinon on génère une nouvelle suite sur la bande 2, on efface la bande 1 et on recommence en ii).

Le théorème de l'accélération

Théorème (de l'accélération - speed up) :

Si L est accepté par une machine de Turing à k bandes ($k > 1$) en temps $T(n)$ (avec $\underline{lim}\ T(n)/n = \infty$), alors pour tout nombre réel $c > 0$ il existe une machine de Turing à k bandes acceptant L en temps $c\ T(n)$.

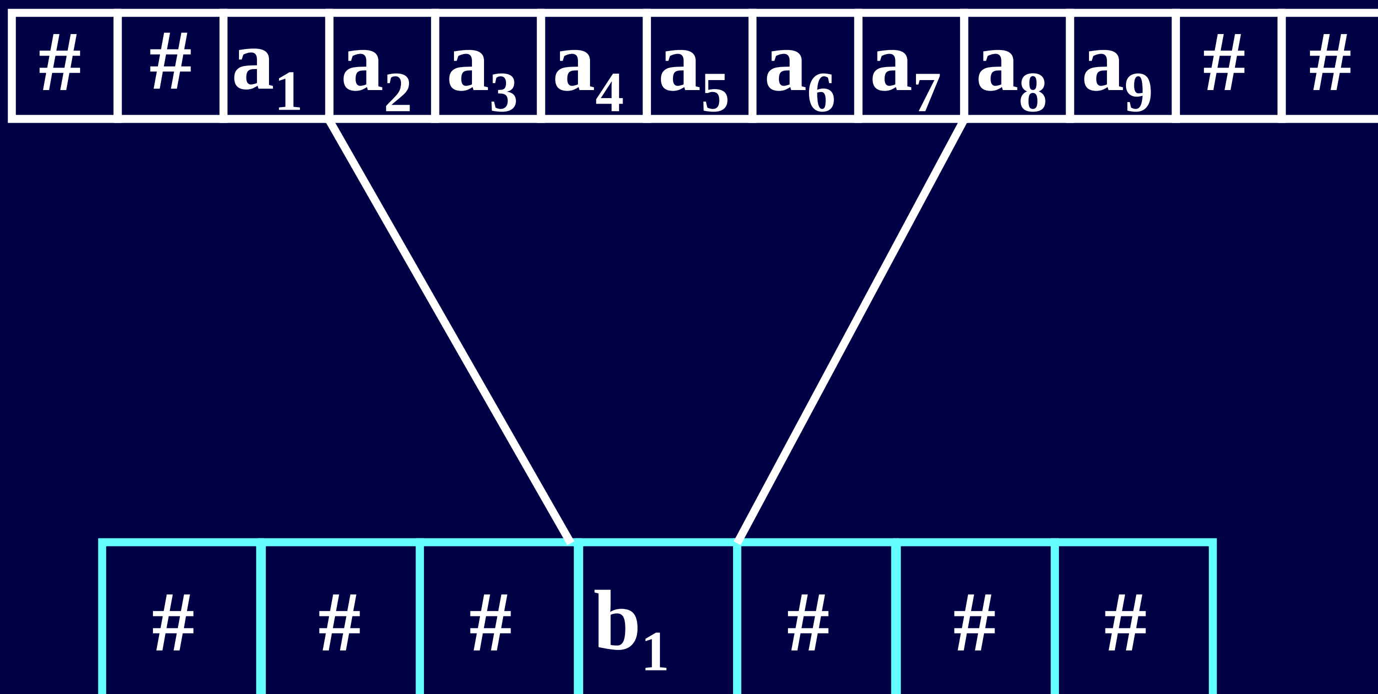
Ce théorème « justifie »

l′utilisation de la notation O !

Preuve :

La preuve se fait par construction d′une machine de Turing qui simule la machine originale. La machine M′ est construite comme suit :

I) On encode les données, de façon que m cases de la machine originale soient codées par une seule lettre - donc une seule case, dans la nouvelle machine. Cette opération se fait en temps linéaire ($2n$ par exemple). Notons que le temps linéaire est possible, car il s′agit d′une machine à plusieurs bandes !



a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 #
b1 # #

II) Le codage obtenu permet d′effectuer plusieurs transitions à la fois, car une lecture donne l′information de *m* cases de la machine simulée et donc on peut effectuer tout le travail imposé par ces *m* lectures. Par contre, il est impossible d′éliminer ainsi les effets de bords, c.a.d. le cas où la machine simulée effectue les aller - retours entre deux cases qui impliquent des allers - retours entre deux «blocs» de *m* cases.

Pour éliminer ce problème, nous allons effectuer la lecture de trois cases voisines (ce qui correspond à la lecture de *3m* cases de la machine simulée), et ainsi, nous pouvons assurer que chaque «phase de base» correspond à au moins *m* transitions de la machine simulée.

Pendant la simulation, la machine M' aura les «phases de base» suivantes :

- Lecture et déplacement à gauche
- Lecture et déplacement à droite
- Déplacement à droite
- Lecture et déplacement à gauche

On se trouve sur la case de départ et on connaît le contenu des deux cases voisines.

On connaît le contenu de *3m* cases de la machine simulée, ce qui permet d′effectuer d′un coup toutes les transitions que la machine originale effectue, jusqu′au moment où elle quitte ces *3m* cases.

Selon que l′on quitte les *3m* cases vers la droite ou vers la gauche on effectue les opérations suivantes.

- Écriture et déplacement à gauche (resp. droite)
- Écriture et déplacement à droite (resp. gauche)
- Déplacement à droite (resp. gauche)
- Écriture et déplacement à droite (resp. gauche)

Une phase de base comprend 8 pas de calcul de la nouvelle machine et correspond à plus de m pas de calculs de la machine originale.

La complexité de la nouvelle machine sera

$$\mathrm{T}'(n) < 2n + 8\ \mathrm{T}(n) / m$$

Il faut choisir m de façon à obtenir $T'(n) \leq cT(n)$. Soit $m > 16/c$. Alors on a

$$8T(n) / m < c/2\ T(n) < c\ T(n) - 2n$$

(pour n assez grand).

Donc : $\mathrm{T}'(n) < c\ T(n)$

Théorème :

Si le langage L est accepté par une machine de Turing à k ($k > 1$) bandes en temps $T(n)$, $\underline{lim}\ T(n)/n = \infty$, alors L est accepté par une machine de Turing à une bande M′ en temps au plus $T^2(n)$.