Problèmes NP-complets connus

Partition est NP-complet

Théorème : PARTITION est NP-complet.

Rappel

NOM : PARTITION

DONNEES : un ensemble fini d'entiers non-négatifs A

QUESTION : est-ce qu'il existe une partition de A en deux ensembles A' et A", telle que la somme des éléments de A' soit égale à la somme des éléments de A" ?

Partition est NP-complet

Théorème : PARTITION est NP-complet.

Preuve :

i) PARTITION $\in$ NP

ii) PARTITION est NP-difficile

nous le montrons par

$$\text{3-DM} \propto \text{PARTITION}$$

La transformation

- **Soient *W*, *X*, *Y* les trois ensembles de 3DM, de cardinalité *q* chacun, et soit *M* l'ensemble des triplets, de cardinalité *k*.**
- **Nous allons construire un ensemble d'entiers naturels *A* de cardinalité *k*+2.**
- **Soit p={log$_2$(k+1)} (partie entière par excès)**

La transformation (2)

- **Soit m_i un triplet de M.**
- **On construit un nombre naturel a_i (sous sa forme binaire) :**
  - **a_i sera de longueur $3qp$, étant composé de $3q$ blocs de longueur p, les blocs correspondant aux $3q$ éléments de W, X et Y.**
  - **Les blocs seront composés que de 0, sauf les trois blocs correspondants aux trois éléments de m, dans lesquels le bit le moins significatif sera 1, les autres des 0.**

La transformation (3)

- Ce choix nous permet de détecter facilement si un sous-ensemble de nombres correspond à un couplage en trois dimensions, car il suffit de tester que la somme des nombres est composée de $3q$ blocs identiques, de la forme 00...01 (nombre qu'on notera par B dans la suite).
- Comme les blocs ont été choisis suffisamment longs, il ne peut y avoir de débordement d'un bloc vers un autre même si on calcule la somme de tous les k nombres obtenus.

La transformation (4)

- **Soit $S = \sum_{1 \leq i \leq k} a_i$.**
- **Pour finir la transformation, nous introduisons deux nombres supplémentaires, $a_{k+1} = 2S - B$ et $a_{k+2} = S + B$.**
- **La transformation est polynomiale, car elle peut s'effectuer en temps O(n^2), pour une donnée de taille n.**
- **Remarque : La somme des éléments de A est**

$$S + 2S - B + S + B = 4S$$

Si ($\Rightarrow$)

- **supposons que M admet un sous-ensemble M', constituant une solution au problème 3DM. Soit A' constitué de l'image des triplets de M' et de l'élément a_{k+1}. La somme des éléments de A' sera donc $B + 2S – B = 2S$, ce qui est la moitié de la somme totale.**

Seulement si ($\Leftarrow$)

- **Supposons avoir une partition de A en deux parties de somme égale. Soit A' la partie contenant a_{k+1}. Comme la somme des éléments de A' doit être la moitié de la somme totale, $2S$, la somme des autres éléments de A' doit être B, ce qui implique que ces éléments sont issus d'un couplage en trois dimensions.**

CQFD

Les problèmes de hamiltonisme sont NP-complets

Un problème de cette famille CIRCUITHAM

NOM : CIRCUITHAM (circuit hamiltonien)

DONNEES : un graphe orienté fini G(V,E), sous forme de liste de successeurs

QUESTION : est-ce que le graphe admet un circuit hamiltonien ?

CIRCUITHAM (2)

Théorème : CIRCUITHAM est NP-complet.

Preuve :

i) **CIRCUITHAM $\in$ NP**

ii) **CIRCUITHAM est NP-difficile**

nous le montrons par

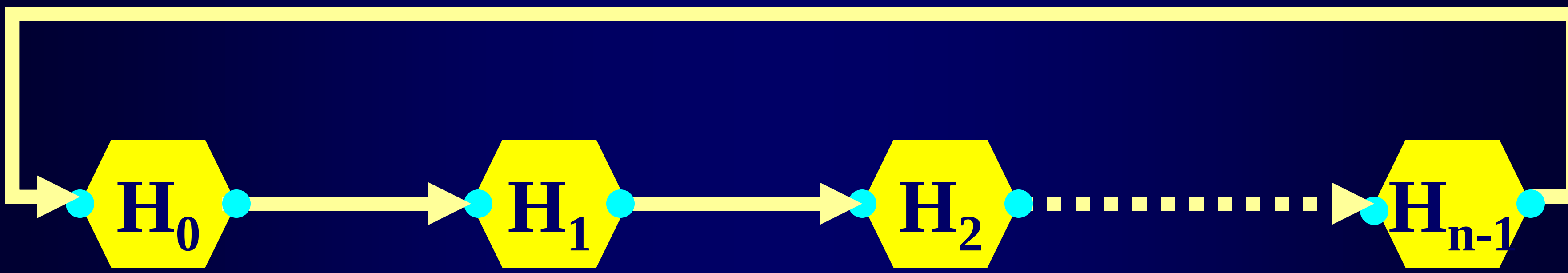
X3-SAT $\propto$ CIRCUITHAM

CIRCUITHAM(3)

La transformation :

- **Soit $F = C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_q$ une instance de X3-SAT avec $C_i = l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee l_{i,3}$, les $l_{i,j}$ étant des littéraux.**
- **Soient $x_0, x_1, ... , x_{n-1}$ les variables utilisées dans la formule.**
- **On construit un graphe orienté G composé de deux types de sous-graphes. A chaque variable x_i on associe un sous-graphe H_i.**

CIRCUITHAM(4)



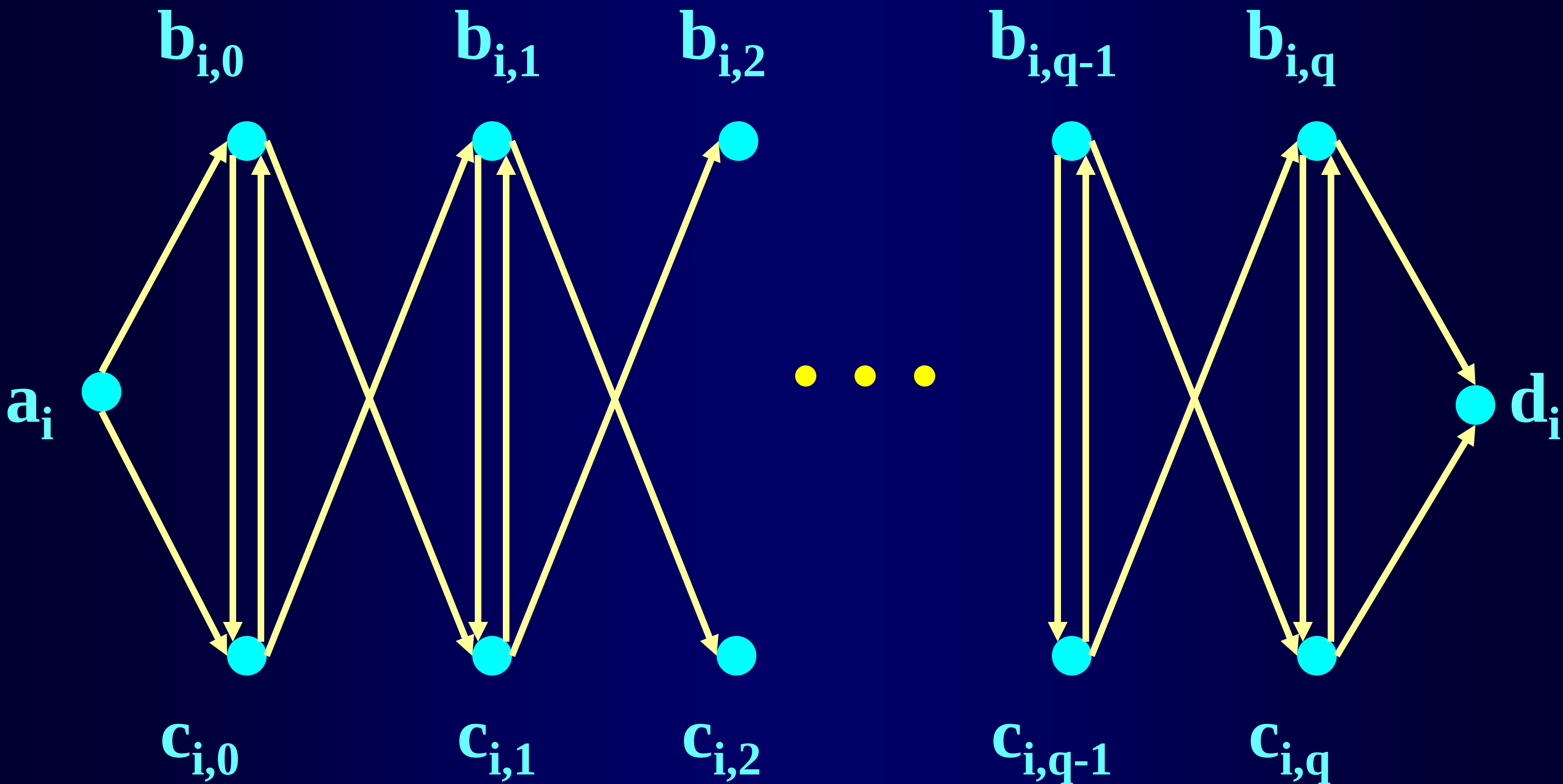
Les sous-graphes H_i disposent chacun d'un point d'entrée unique a_i (*arrivée*) et un point de sortie unique d_i (*départ*) et sont connectés en circuit, c.a.d. on a un arc du sommet d_i vers le sommet $a_{(i+1) \bmod n}$.

CIRCUITHAM(5)

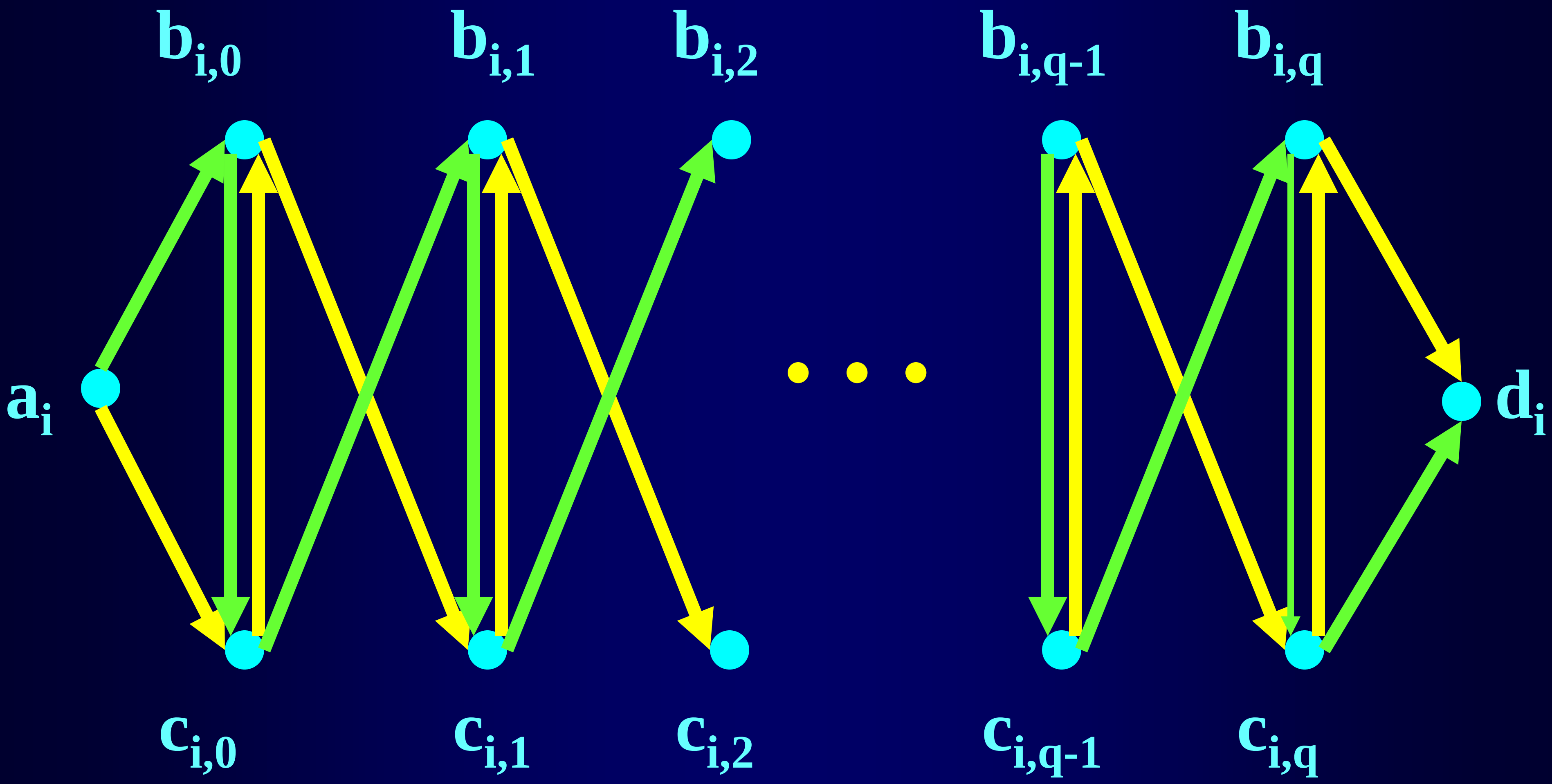
La composition des H_i :

- **Le nombre de clauses dans la formule est *q*.**
- **Chaque sous-graphe H_i est composé de sommets a_i, $b_{i,j}$, $c_{i,j}$ et d_i (avec $0 \leq j \leq q$).**
- **Comme la seule «entrée» de H_i est a_i, le parcours commence par ce sommet.**
- **Un chemin hamiltonien de H_i doit donc commencer en a_i et se terminer en d_i**

CIRCUITHAM(6)

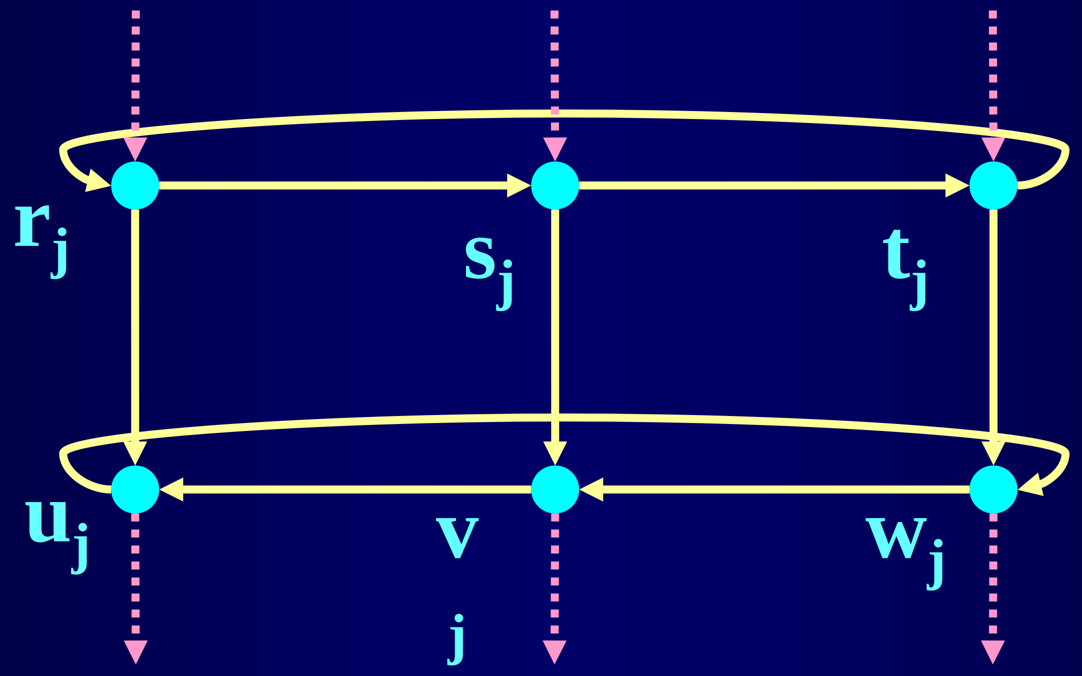


CIRCUITHAM(7)

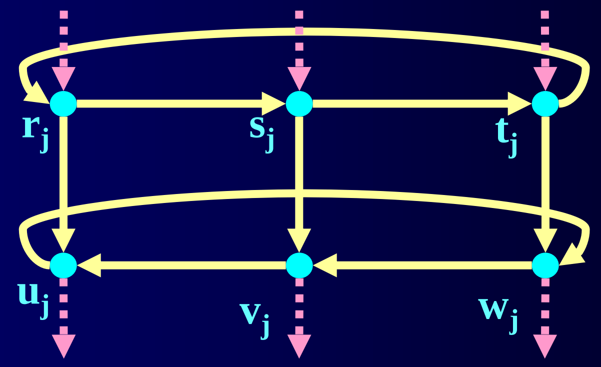


CIRCUITHAM(8)

- La transformation doit aussi tenir compte des clauses !!!!!
- A chaque clause $C_j = l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee l_{j,3}$, nous associons une copie du graphe G_j suivant :

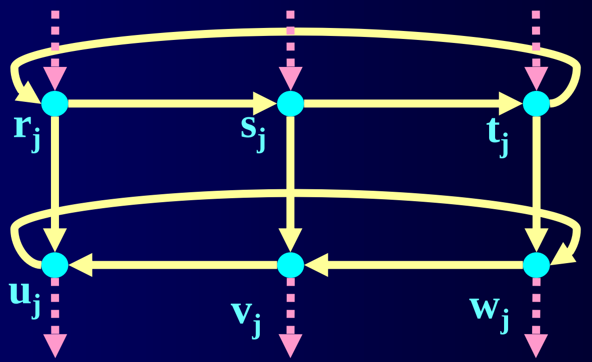


Les graphes G_j



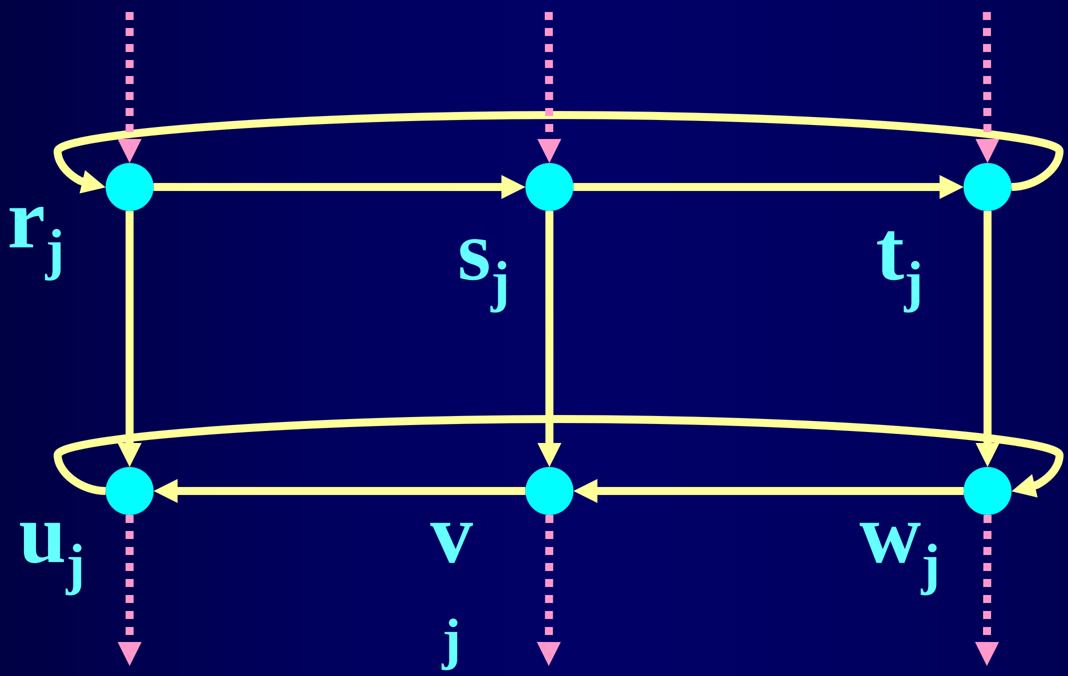
Dans G_j, chacun des sommets r_j, s_j et t_j a un prédécesseur dans le graphe (hors G_j) et chacun des sommets u_j, v_j et w_j a un successeur dans le graphe (hors G_j).

Les graphes G_j *(suite)*

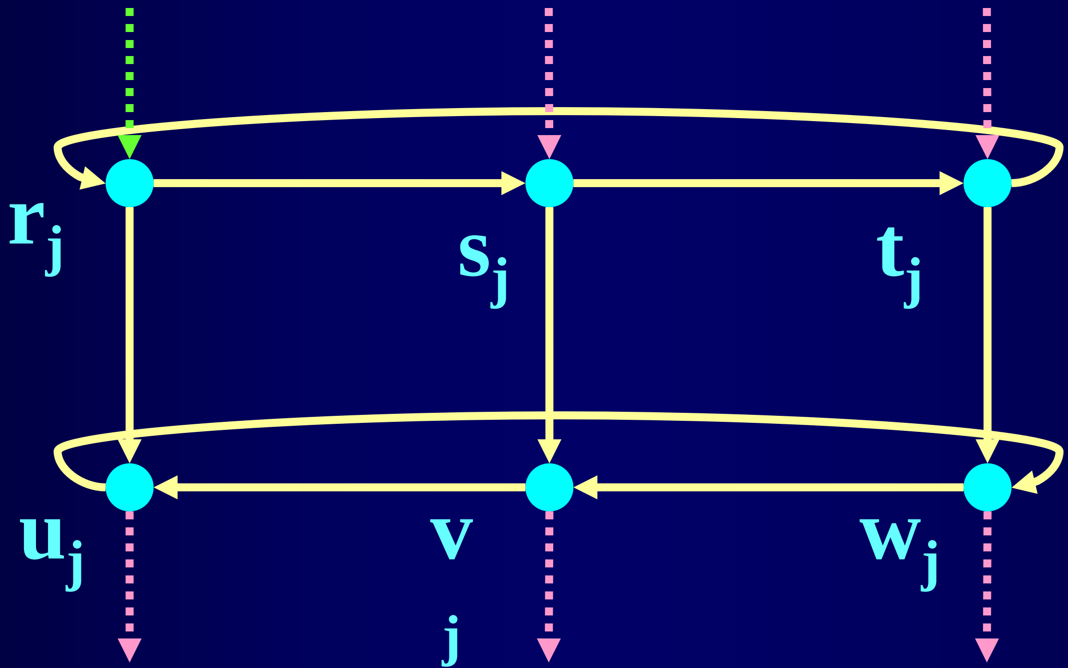


S'il existe un chemin hamiltonien du graphe, et si ce chemin arrive dans G_j par le sommet r_j (resp. s_j ou t_j), alors ce chemin doit quitter G_j par le sommet qui se trouve en dessous le sommet r_j, le sommet u_j (resp. v_j ou w_j).

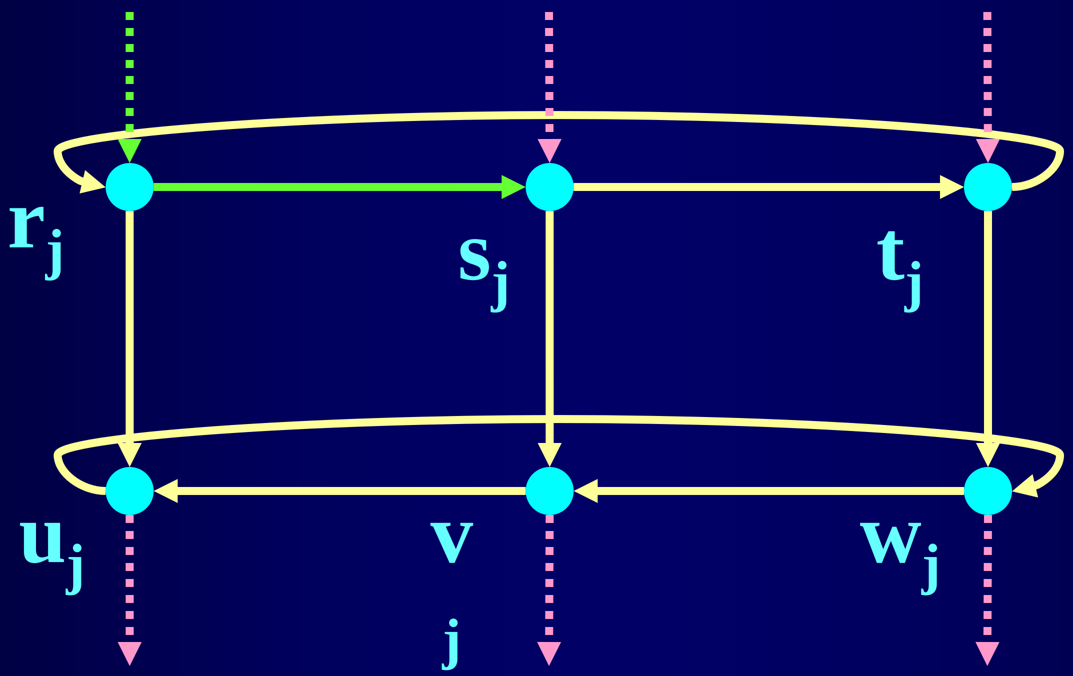
Exemple d'arrivée en *r*



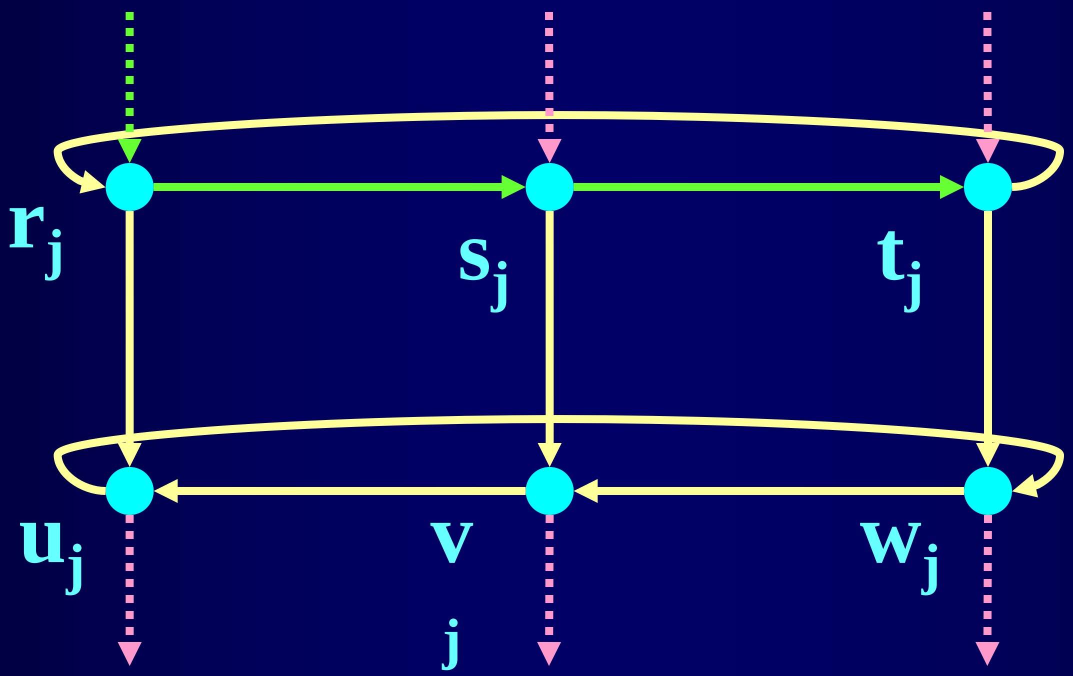
r_j
s_j
t_j
u_j
v_j
w_j

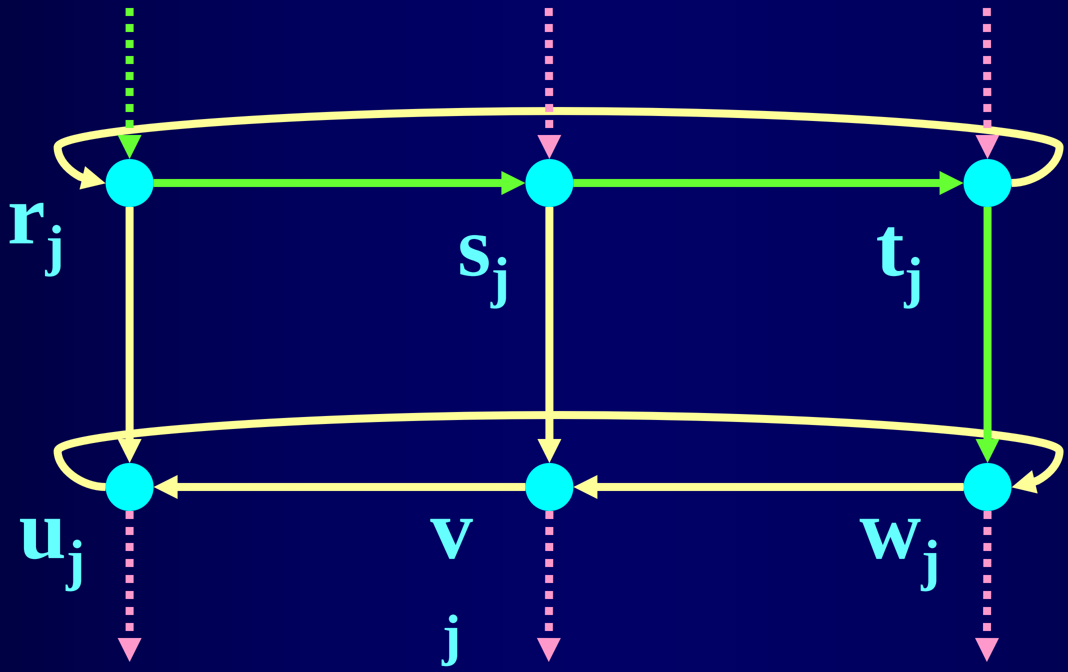


r_j
s_j
t_j
u_j
v
j
w_j

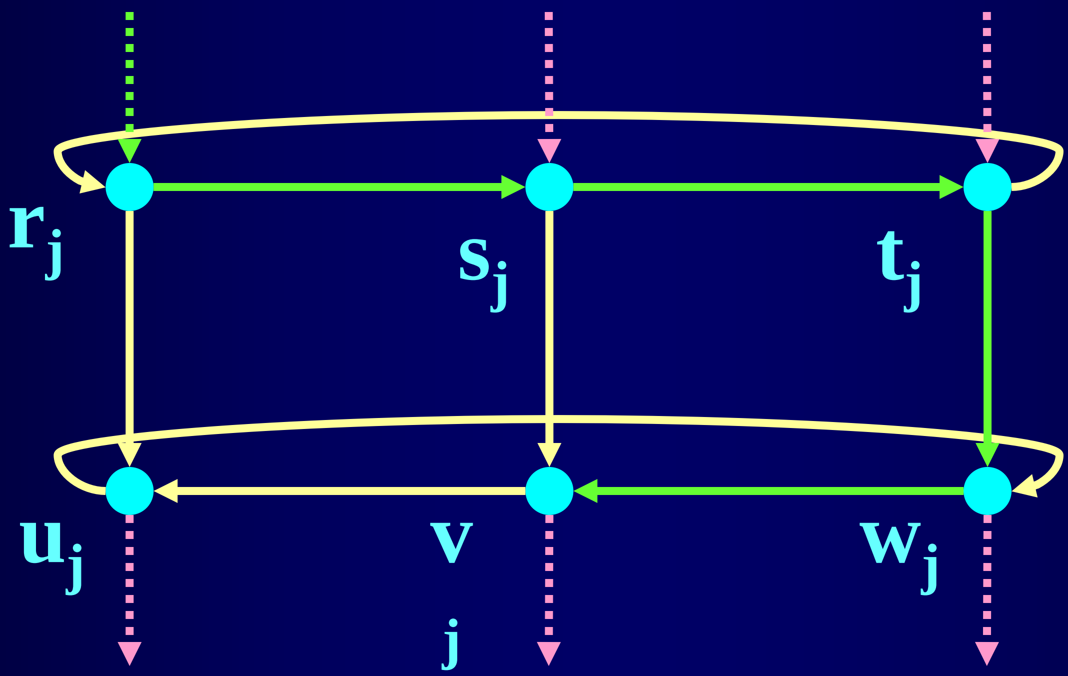


r j
s j
t j
u j
v
j
w j

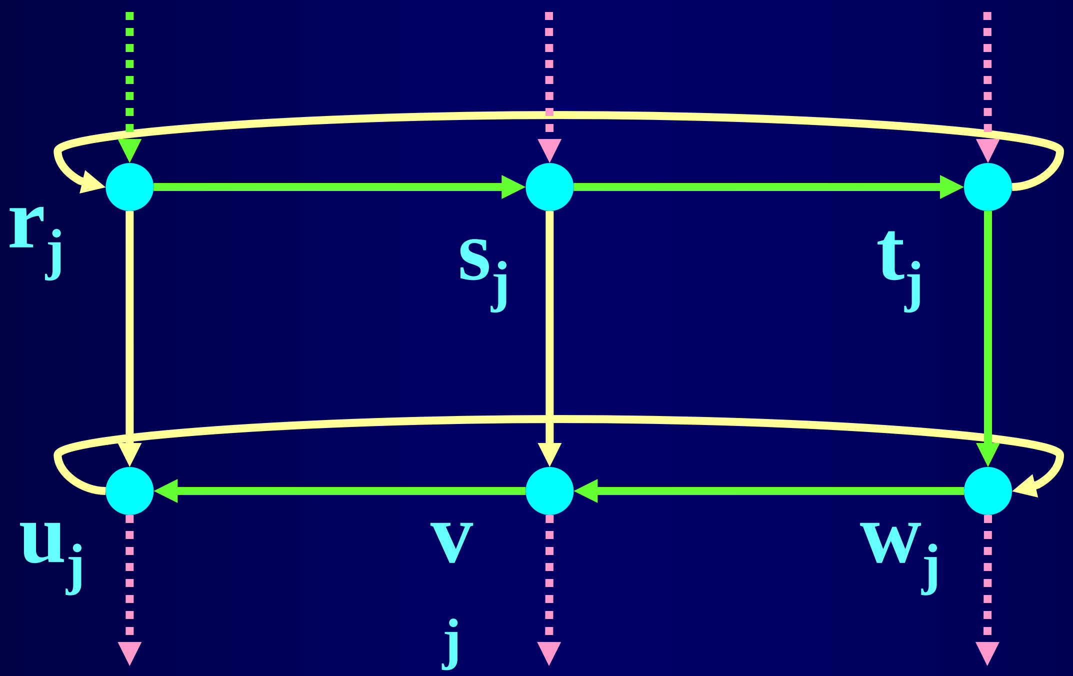

r_j
s_j
t_j
u_j
v_j
w_j

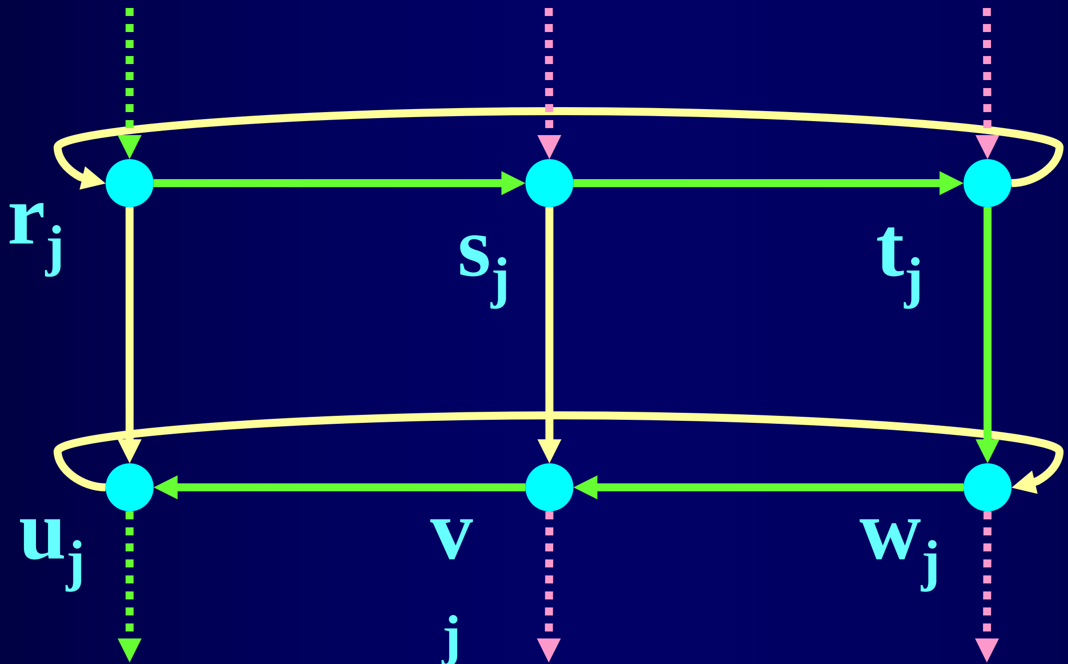


r_j
s_j
t_j
u_j
v_j
w_j



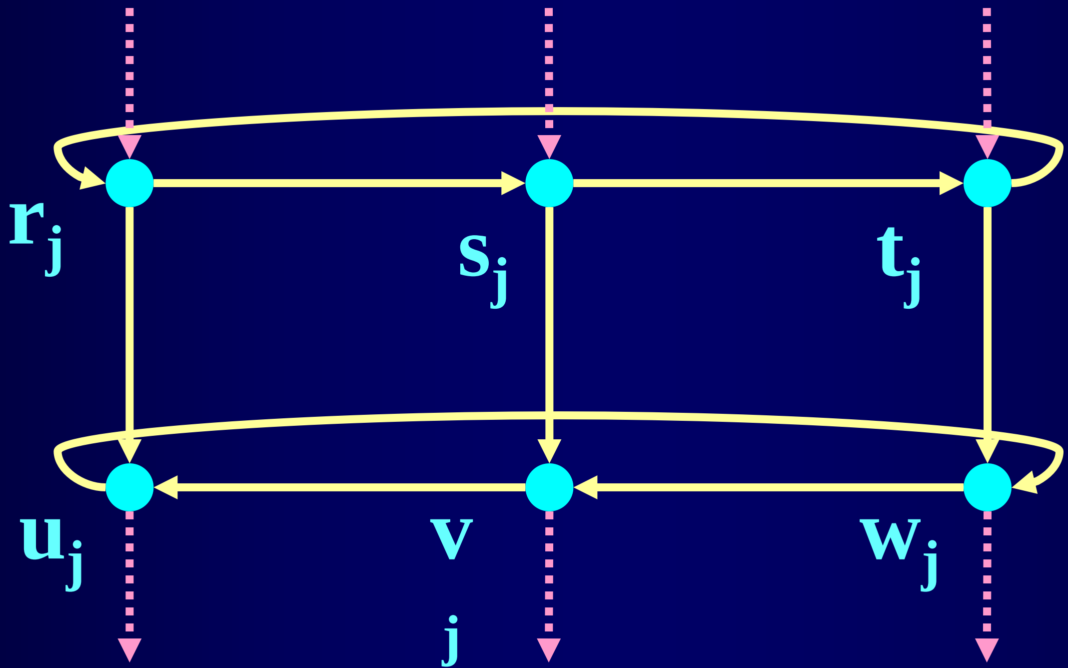
r
j
s
j
t
j
u
j
v
j
w
j

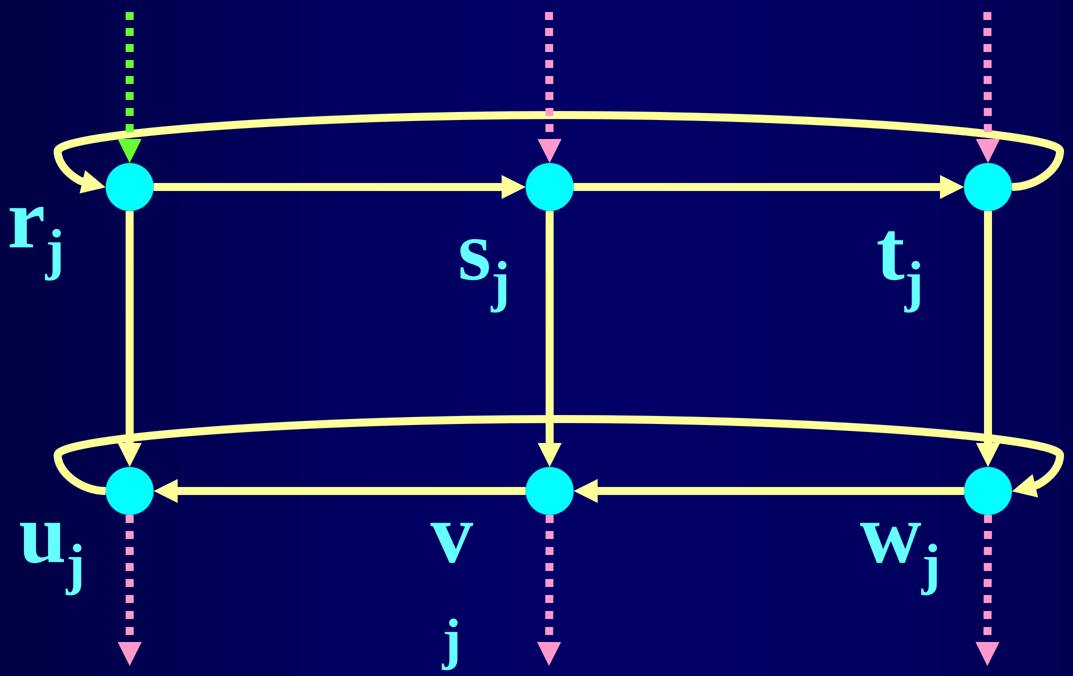

r j
s j
t j
u j
v
j
w j

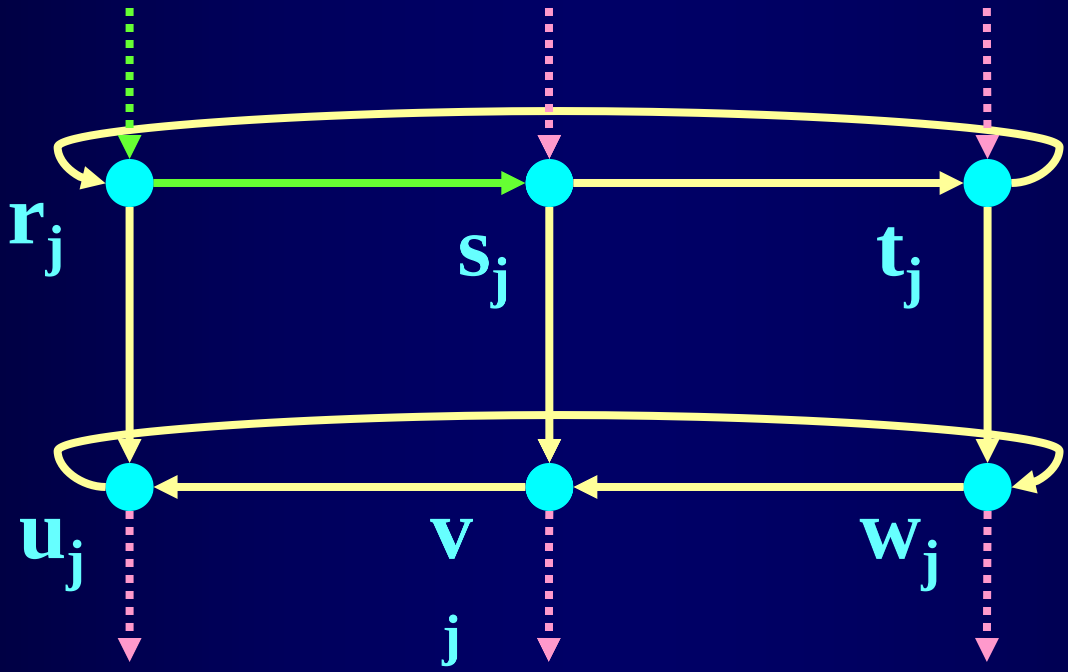


r j
s j
t j
u j
v
j
w j

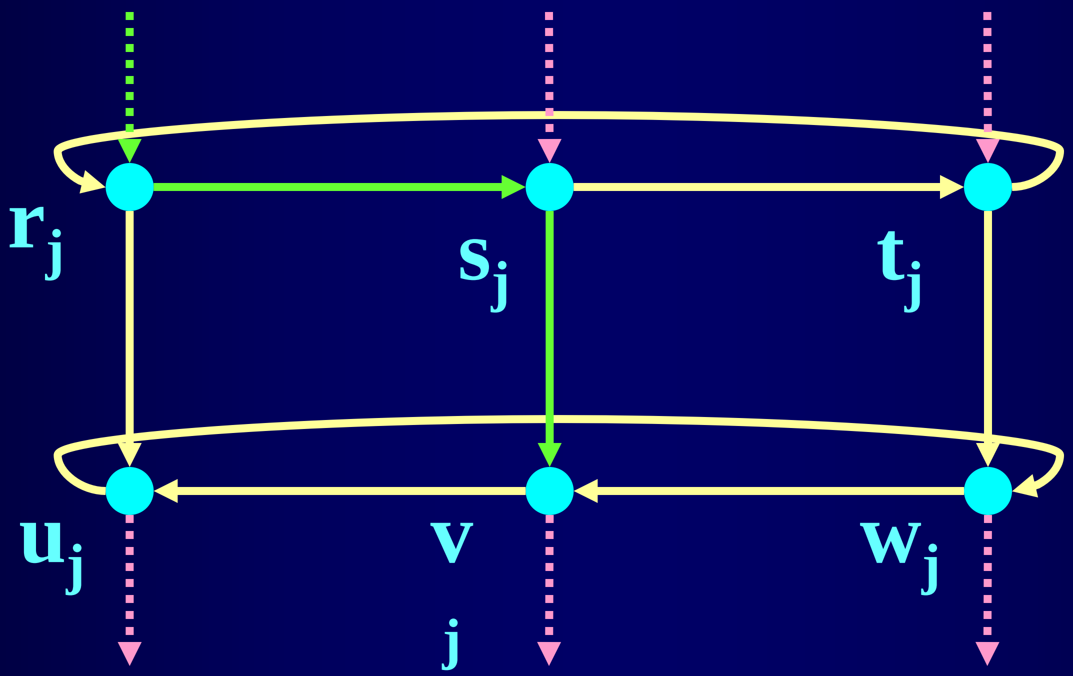
Deuxième exemple d'arrivée en *r*


r_j
s_j
t_j
u_j
v_j
w_j

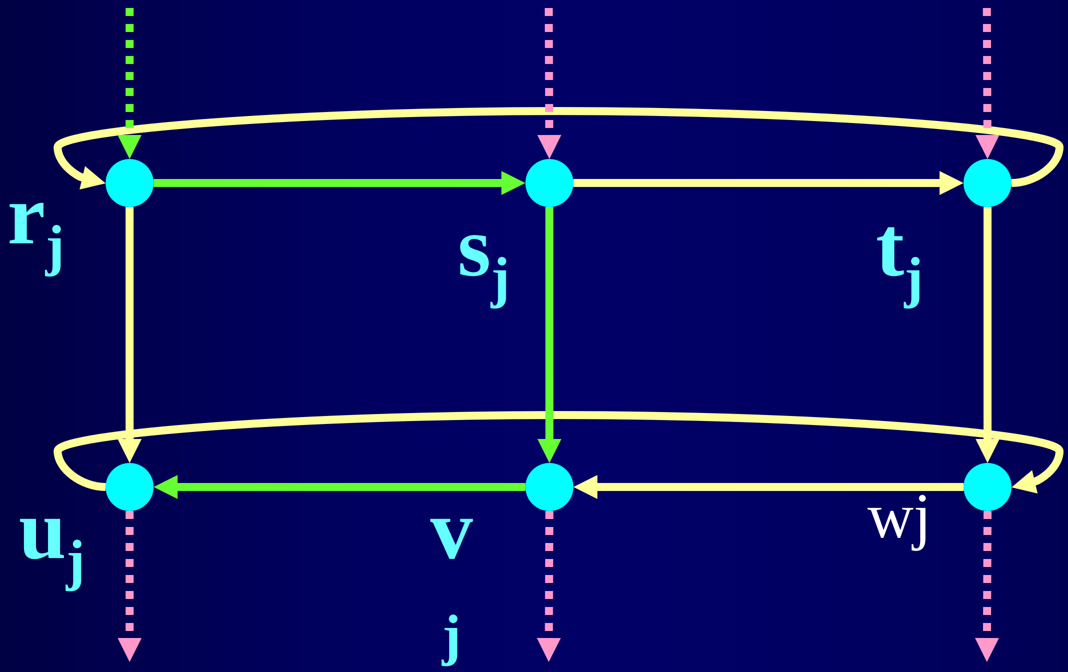

r j
s j
t j
u j
v
j
w j



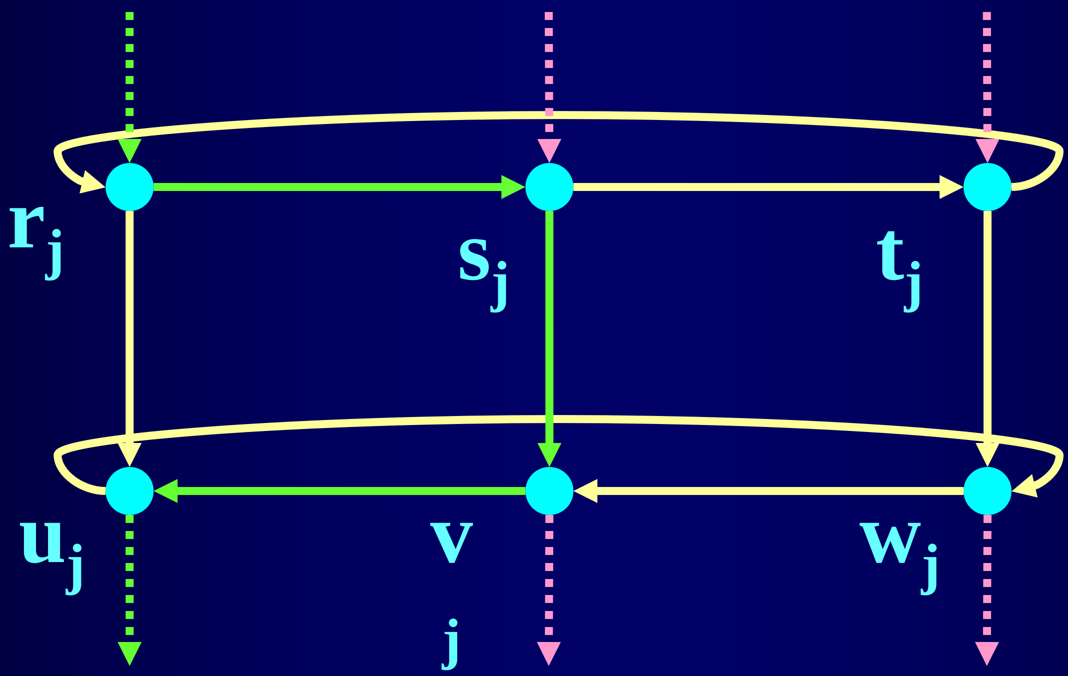
r
j
s
j
t
j
u
j
v
j
w
j



r_j
s_j
t_j
u_j
v_j
w_j

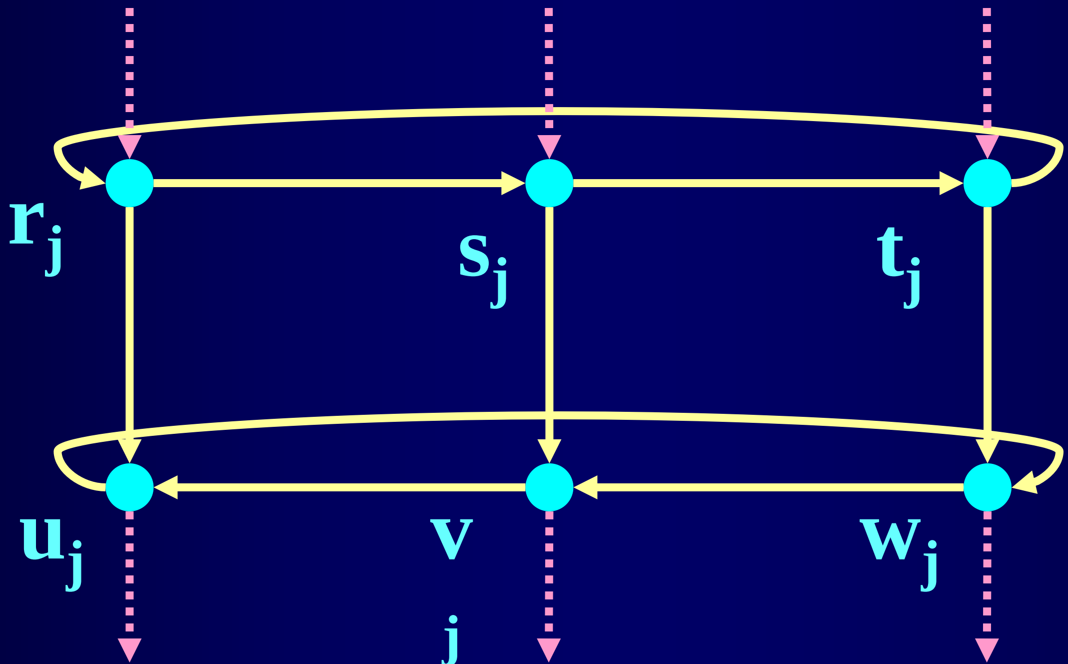


r j
s j
t j
u j
v
j
wj

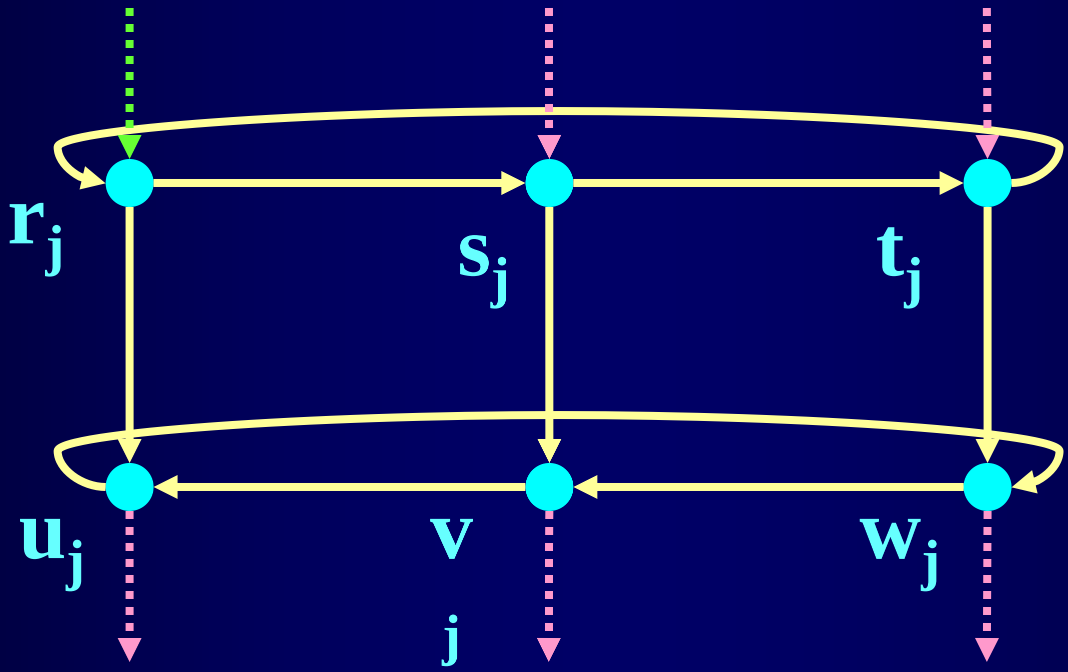


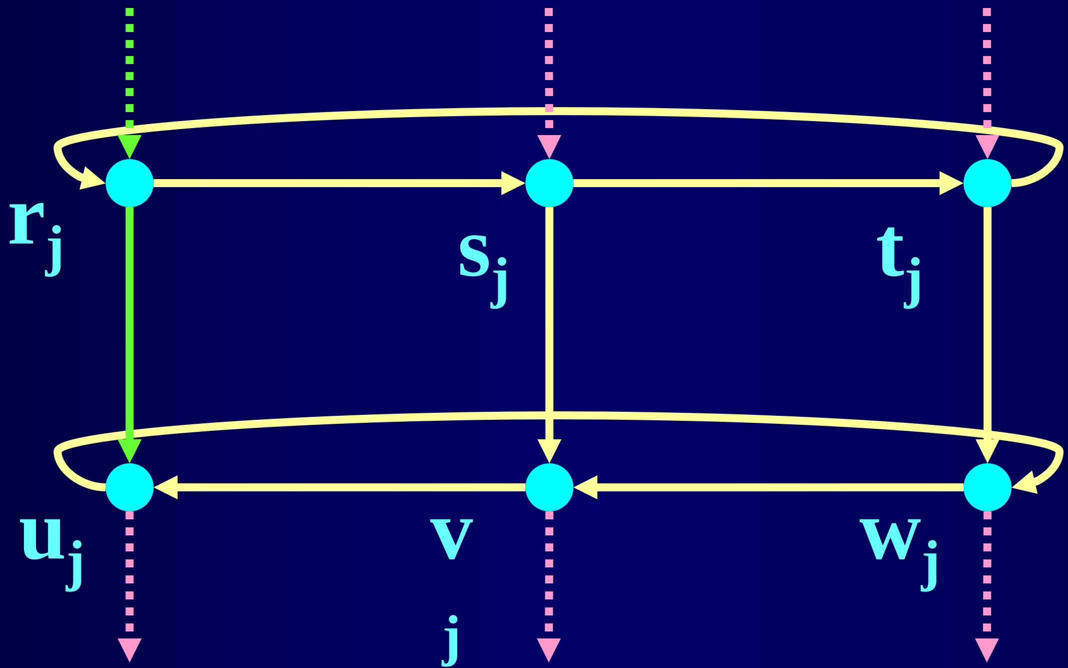
r_j
s_j
t_j
u_j
v_j
w_j

Troisième exemple d'arrivée en *r*

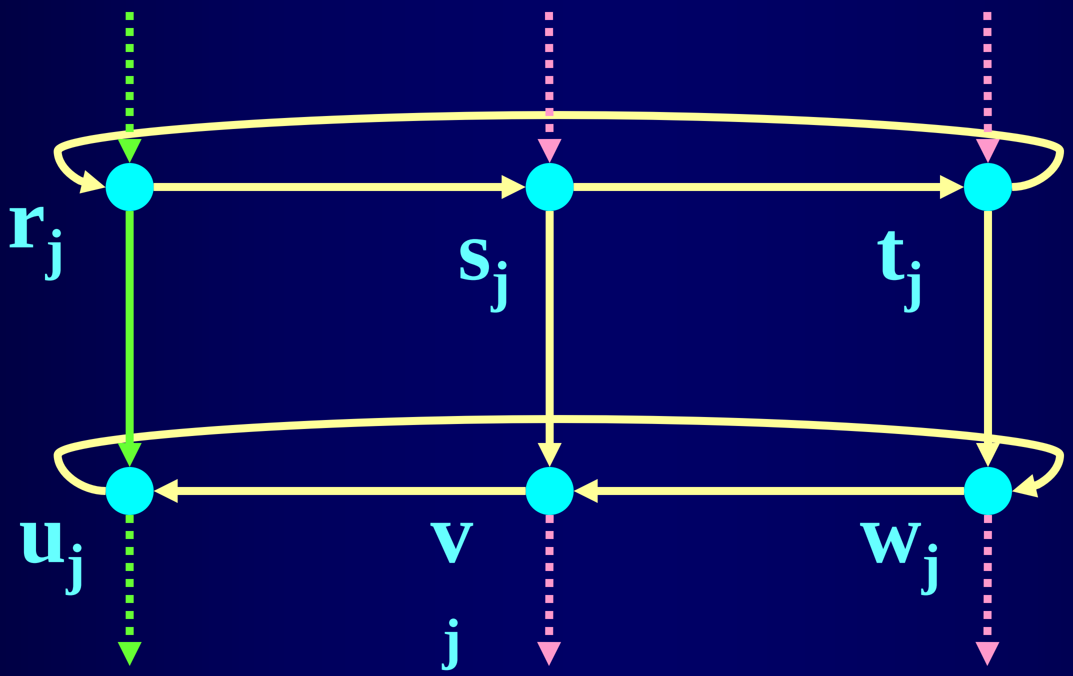


r_j
s_j
t_j
u_j
v_j
w_j

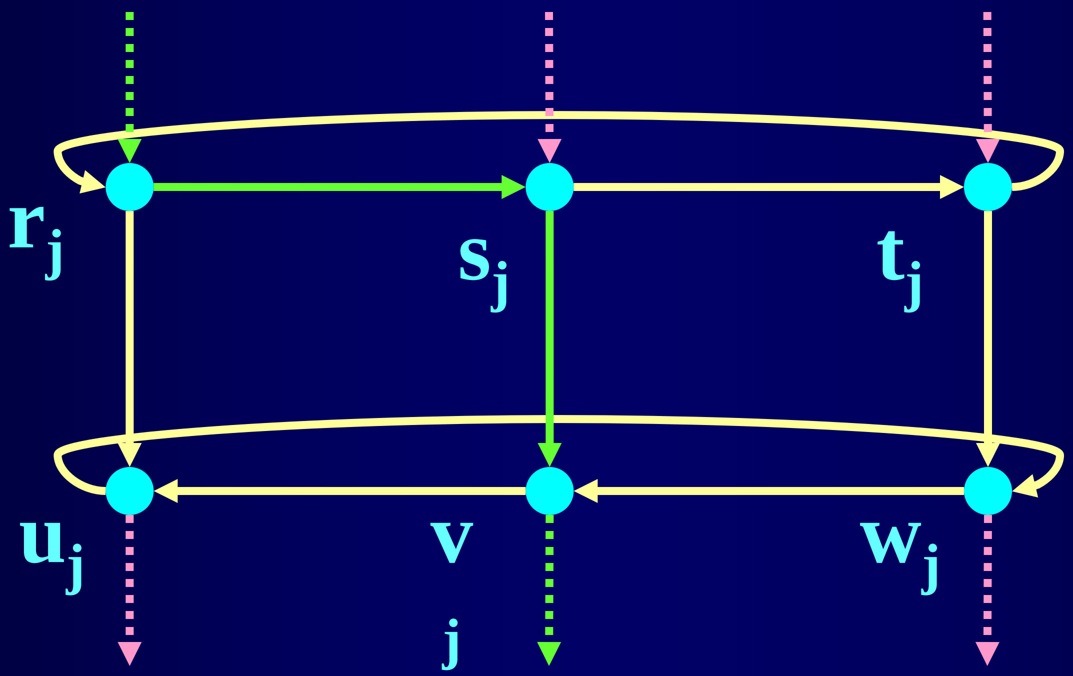

r
j
s
j
t
j
u
j
v
j
w
j



r_j
s_j
t_j
u_j
v
j
w_j

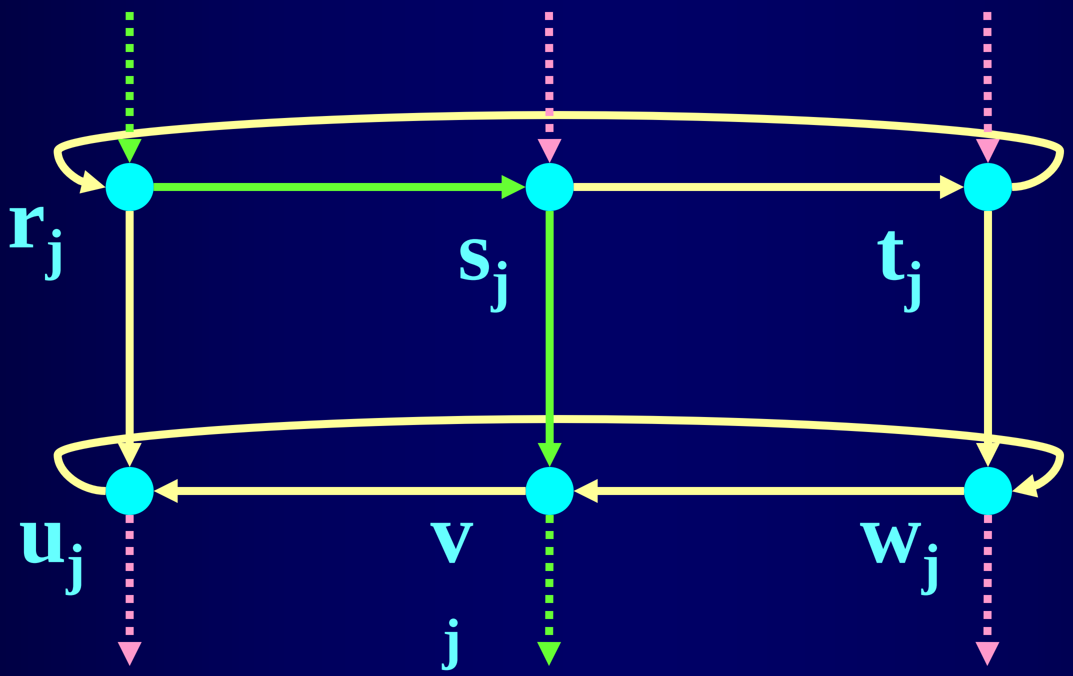

r j
s j
t j
u j
v
j
w j

Ce qu'on ne peut pas avoir

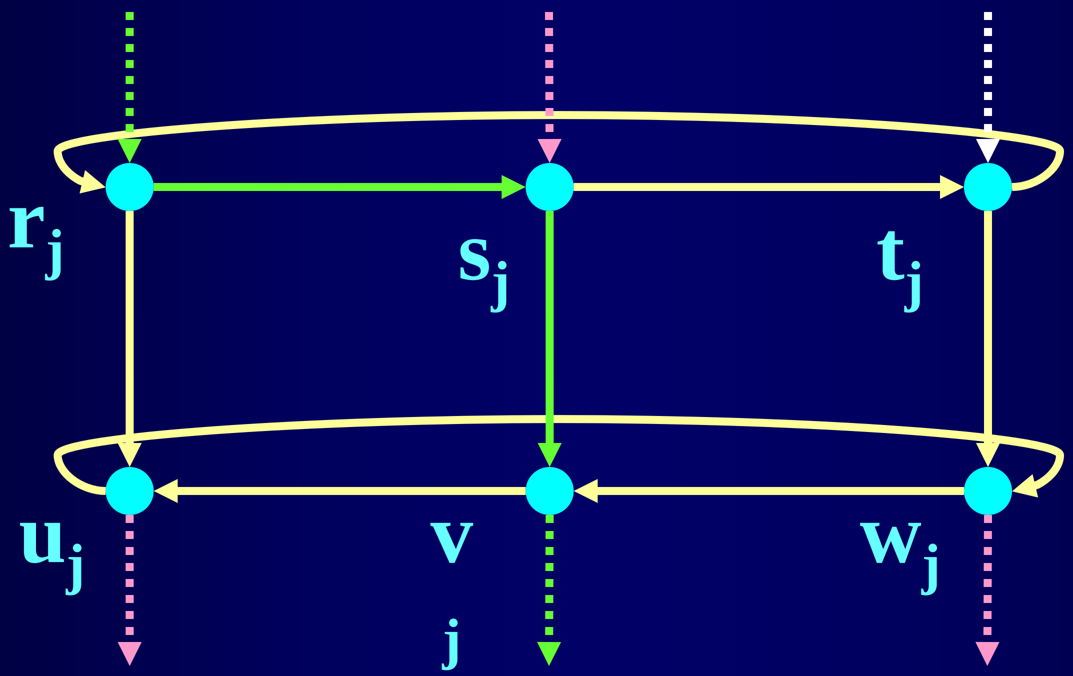


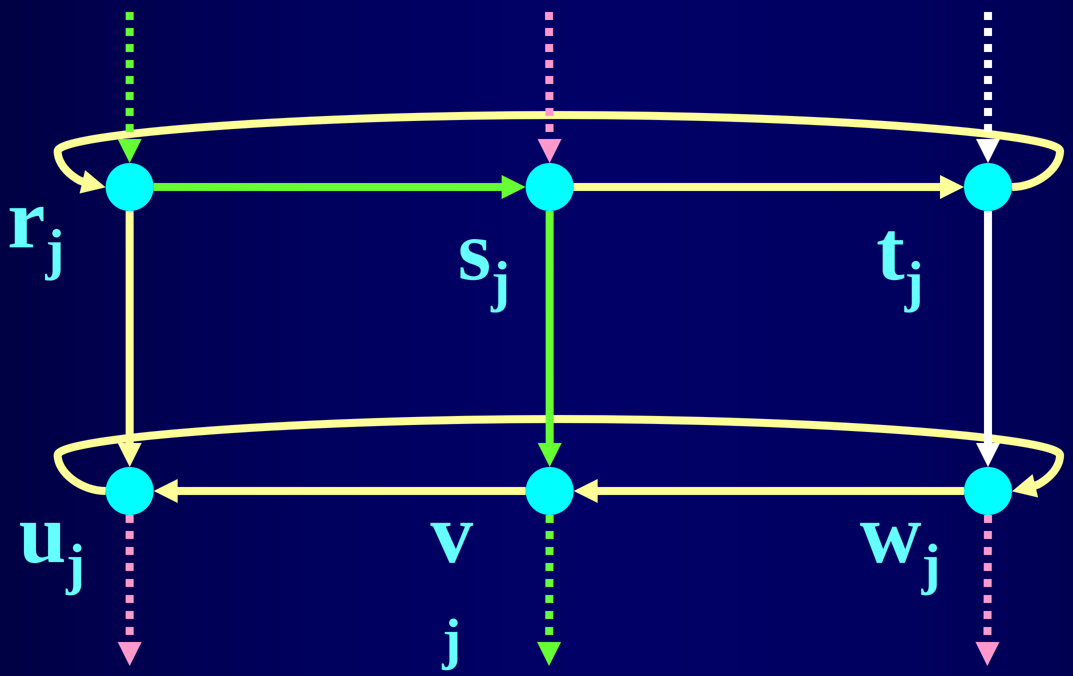
r j
s j
t j
u j
v j
w j

Pourquoi ?

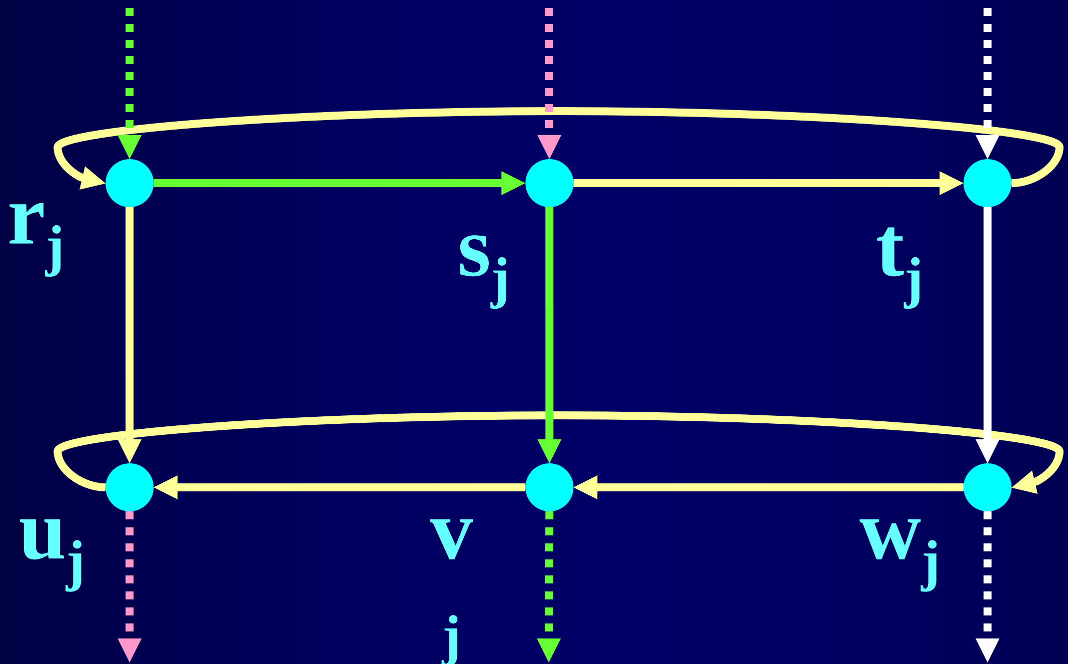


r_j
s_j
t_j
u_j
v_j
w_j


r_j
s_j
t_j
u_j
v_j
w_j



r_j
s_j
t_j
u_j
v
j
w_j



r_j
s_j
t_j
u_j
v
w_j
j

Et le sommet *u* ne sera jamais visité

Comment utiliser les G_j ?

Soit x_i le premier littéral de C_j. Dans ce cas nous rajoutons les arcs de $c_{i,j-1}$ vers r_j et de u_j vers $b_{i,j}$. Au cas où le premier littéral de C_j est $\neg x_i$ nous rajoutons les arcs de $b_{i,j-1}$ vers r_j et de u_j vers $c_{i,j}$.

(s'il s'agit du deuxième littéral, alors vers s_i et de v_i et s'il s'agit du troisième alors t_i et w_i)

Fin de la construction

Sommets :

- les H_i : $n(2q + 4)$
- les G_j : $6q$
- TOTAL : $2n(q + 2) + 6q$

Arcs :

- les H_i : $n(4q + 6) + n$
- les G_j : $9q + 6q$
- TOTAL : $n(4q + 7) + 15q$

Donc taille et temps polynomiales.

Si

La formule est satisfiable

- on choisit une valeur des variable qui satisfait
- dans les H_i, on choisit le parcours qui correspond à la valeur de vérité
- dans chaque clause on choisit un littéral vraie
- on visite G_j à partir du parcours du H_i associé à ce littéral

Ainsi nous obtenons un circuit hamiltonien

Seulement si

Il existe un circuit hamiltonien

- **Comme la visite des G_j se fait à partir des H_i, avec retour au même H_i, le circuit consiste en parcours de H_1, H_2, …**
- **Selon si le parcours de H_i est « jaune » ou « verte » x_i sera faux ou vrais**
- **Comme tous les G_j sont visités aussi, c'est qu'au moins un des littéraux de la clause, a une valeur de vérité qui le permet**

Ainsi, la formule est satisfiable.

Fin

C.Q.F.D.