Preuves de NP-complétude

Feuille de travaux dirigés n^{o}3

22 octobre 2019

Un problème pour y réfléchir : Montrer la NP-complétude du problème suivant :

> **Nom : Mètre pliant du charpentier(MPC)**
> **Instance :** Une suite ordonnée finie d'entiers naturels $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ qui représentent les différentes longueurs des règles qui composent le mètre pliant et L la longueur de l'étui.
> **Question :** Peut-on plier le mètre de façon à le ranger dans l'étui ?

Rappel de quelques définitions de théorie des graphes utilisées :

Définition 1 (Sous-graphe) *Le sous-graphe de $G = (V, E)$ engendré par un sous-ensemble des sommets $S \subset V$ est le graphe G_S dont les sommets sont les points de S et les arêtes celles de G ayant leurs deux extrémités dans S : $E(G_S) = E(G) \cap (V(G_S) \times V(G_S))$*

Définition 2 (Graphe partiel) *Le graphe partiel de $G = (V, E)$ engendré par un sous-ensemble A de l'ensemble des arêtes de G, $A \subset E$ est le graphe obtenu de G en retirant les arêtes de $E \setminus A$.*

Définition 3 (Sous-graphe partiel) *Le sous-graphe partiel de G est le sous-graphe d'un graphe partiel de G.*

Par exemple, la carte des routes de France forme un graphe. La carte des route nationales de France forme un graphe partiel; celle des routes des Alpes Maritimes un sous-graphe et la carte des routes nationales des Alpes Maritimes un sous-graphe partiel.

1. Montrer la NP-difficulté du problème suivant :

> **Nom : Somme minimum des carrés (SMC)**
> **Instance :** A un ensemble fini d'entiers, $k, J \in \mathbb{N}$
> **Question :** Existe-t'il une partition de $A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$ telle que : $\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{a \in A_i} a\right)^2 \leq J$

2. Montrer la NP-difficulté du problème suivant :

> **Nom : Isomorphisme de sous-graphes (ISG)**
> **Instance :** deux graphes finis, G_1, G_2
> **Question :** G_1 contient-il un sous-graphe isomorphe à G_2 ?

3. Montrer la NP-difficulté du problème suivant :

> **Nom : Isomorphisme de sous-graphes partiels (ISGP)**
> **Instance :** deux graphes finis, G_1, G_2
> **Question :** G_1 contient-il un sous-graphe partiel isomorphe à G_2 ?

4. Montrer la NP-difficulté du problème suivant :

> **Nom : Arbre couvrant de degré borné (ACDB)**
> **Instance :** G et un entier $k \leq |V(G)|$
> **Question :** Existe-t'il un arbre couvrant de degré au plus k

5. Montrer la NP-difficulté du problème suivant :

> **Nom : Ordonnancement de tâches (OdT)**
> **Instance :** Soient k tâches de durées respectives $t_1, \ldots t_k \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{N}$ le temps total d'exécution et n le nombre de processeurs
> **Question :** Peut-on exécuter les k tâches sur une machine à n processeurs en moins de T unités de temps ?

6. Montrer la NP-complétude du problème :

> **Nom : Plus petit ensemble de tests (PPET)**
> **Instance :** P un ensemble de pannes possibles, C une famille de sous-ensembles de P représentant des tests ; $J \leq |C|$ un entier.
> **Question :** Existe t'il une sous-famille de tests $C' \subseteq C$ avec $|C'| \leq J$ telle que pour toute paire p_i, p_j de pannes, il existe $c \in C'$ un test tel que $|\{p_i, p_j\} \cap c| = 1$ où, en d'autres termes un test qui permette de distinguer la panne p_i de la panne p_j ?

7. Montrer la NP-complétude du problème de la somme de sous-ensembles **(SSP)** par réduction de **X3-SAT**

8. Un graphe pondéré est un graphe tel qu'à chaque arête e est associé un poids $p(e)$. Le poids d'une chaîne est la somme des poids des arêtes qui la composent. Montrer la NP-difficulté du problème suivant :

> **Nom : Score**
> **Instance :** $G(V, E)$ un graphe pondéré non orienté, dont les poids des arêtes sont des entiers positifs ou nuls. u, v deux sommets du graphe. S un entier.
> **Question :** Existe-t'il une chaîne simple de u à v de poids supérieur ou égale à S.

9. Montrer la NP-complétude du problème :

> **Nom : PP (Presque-partition)**
> **Instance :** A un ensemble fini d'entiers non-négatifs et t un entier positif.
> **Question :** Existe-t'il une partition de A en A', A'' tels que la différence des sommes des éléments des deux ensembles est au plus t ?

10. Montrer la NP-complétude du problème :

> **Nom : 3-partition**
> **Instance :** A un ensemble fini d'entiers non-négatifs.
> **Question :** Existe-t'il une partition de A en A_1, A_2 et A_3 en trois ensembles de somme égale ?

11. Résoudre l'exercice de la page suivante, extraite d'un examen de 1999

ESSI
ECOLE SUPERIEURE EN SCIENCES INFORMATIQUES

Sophia Antipolis, le 13 janvier 1999

EXTRAITS DE

Examen d'algorithmique et complexité

Durée : 3 heures. Tous les documents sont autorisés. Le barème indiqué est indicatif.

3. (*8 points*) On s'intéresse à un problème de routage dans les réseaux d'interconnexion (de type ATM). On dispose de n processeurs, numérotés $0,1,\ldots,n$-1 reliés par un réseau (graphe non-orienté) $G(V,E)$. On connaît la quantité de communication entre le processeur i et le processeur j, donnée par une matrice M symétrique d'entiers (de diagonale nulle). Un *routage* est un ensemble de chaînes entre les couples de sommets. Pour un routage donné on peut calculer la charge d'une arête - la somme des $M[i,j]$ pour les $i<j$ dont les chaînes du routage contiennent l'arête. La charge maximale associée à un routage est le maximum des charges. Le problème d'optimisation concerne la recherche d'un routage de charge maximale minimale. Le but de cet exercice est de prouver la NP-complétude du problème de décision associé.

NOM : **NLP** (Routage de charge minimale - *Network Loading Problem*)
DONNEES : un graphe fini $G(V,E)$, une matrice de demandes M et un entier C.
QUESTION : existe-t-il un routage de charge maximale au plus C ?

a) Montrez que **NLP** est dans NP.

b) Pour montrer la NP-difficulté de **NLP**, réduisez d'abord le problème suivant à **NLP** :

NOM : **RLP** (Routage de charge minimale sur un anneau - *Ring Loading Problem*[♥])
DONNEES : un cycle de n sommets, une matrice de demandes M et un entier C.
QUESTION : existe-t-il un routage de charge maximale au plus C ?

c) Dans le cadre du problème **RLP**, on peut obtenir un algorithme simple (mais hélas exponentiel) car il suffit de décider pour chaque demande si elle est routée par la "gauche" ou par la "droite" sur l'anneau. Utilisez cette remarque, pour montrer de manière plus simple qu'en a), que **RLP** est en NP.

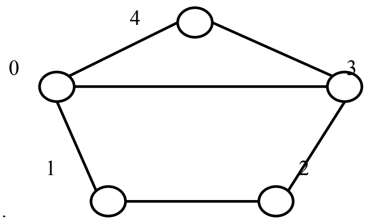
d) Pour montrer la NP-difficulté de **RLP**, réduisez d'abord **SSRLP** (variante de **RLP**, où toutes les demandes sont entre un processeur donné et les autres) à **RLP** :

NOM : **SSRLP** (*Single Source Ring Loading Problem*)
DONNEES : un cycle de n sommets, une matrice M de demandes de source unique (c.a.d. toutes les valeurs non-nulles sont sur une seule ligne et une seule colonne) et un entier C.
QUESTION : existe-t-il un routage de charge maximale au plus C ?

e) Pour montrer la NP-complétude de **SSRLP**, nous réduisons **PARTITION** à **SSRLP**. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les valeurs du problème **PARTITION**. Soit $S = \sum_{i=1}^{n} a_i \big/ 2$. On construit la donnée suivante de **SSRLP** : les sommets sont numérotés 0, 1, …, n+2. Toutes les demandes concernent les communications entre le sommet n+2 et les autres, et sont respectivement $S, a_1, a_2, \ldots, a_n, S$. Enfin C=2S. Montrez que cette transformation permet de réduire **PARTITION** à **SSRLP**.

f) Récapitulez les résultats obtenus, pour déduire la NP-complétude de **NLP**.

Exemple : Soit le réseau composé d'un cycle de 5 sommets (0,1,2,3,4) plus l'arête 03.



Soit la matrice de demande M suivante :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit R le routage suivant :

couple	01	02	03	04	12	13	14	23	24	34
chaîne	01	012	03	04	12	123	104	23	234	34

Alors les charges obtenus sont les suivantes

arête	01	12	23	34	40	03
charge	6	4	3	3	3	2

Donc la charge maximale est 6.

Par contre, si on utilise le routage

couple	01	02	03	04	12	13	14	23	24	34
chaîne	0321	012	03	04	12	123	104	23	234	34

Alors les charges obtenus sont :

arête	01	12	23	34	40	03
charge	5	5	4	3	3	3

Donc la charge maximale est 5.

♥ A. Schrijver, P. Seymour & P. Winkler : "*The Ring Loading Problem*", SIAM J. of D.M., vol 11, n° 1, pp. 1-14, 1998.